

nouveau
programme

toutes les Mathématiques

spécialement
conçu pour

- Cours
- Exercices corrigés

MP

Luc Verschueren

Jean-Paul Logé

ellipses

Table des matières

I	Kit de Survie	1
1	Les débuts en algèbre	3
1.1	Exposés préliminaires	3
1.1.1	Utilisations des structures algébriques	3
1.1.2	Relations binaires, loi de composition	4
1.1.3	Ensembles de nombres	6
1.1.4	Quelques considérations d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$	8
1.1.5	Le corps des complexes	11
1.2	Définitions des structures fondamentales	15
1.2.1	Groupes, anneaux, corps	15
1.2.2	Espaces vectoriels, algèbres	17
1.3	Polynômes	18
1.3.1	Division et divisibilité	19
1.3.2	Relations coefficients-racines	21
1.4	Fractions rationnelles	22
1.4.1	Décomposition en éléments simples	22
1.4.2	Techniques de calcul	22
1.4.3	Le théorème de Lucas et un calcul de $\zeta(2)$	24
2	Etudes sur les groupes	27
2.1	Quelques notions générales	27
2.1.1	Groupe produit	27
2.1.2	Sous-groupe engendré par une partie	27
2.1.3	Morphisme de groupe	28
2.1.4	Groupes monogènes, groupes cycliques	28
2.1.5	Groupes finis	30
2.1.6	Morphisme et isomorphisme de groupes	31
2.1.7	Prototypes	31
2.2	Le Groupe symétrique	32
2.2.1	Permutations	32
2.2.2	Cycles	32
2.2.3	Générateurs	33
2.2.4	Signature d'une permutation	34
2.3	Groupes et morphismes usuels	36
2.3.1	Les translations sont des bijections	36
2.3.2	Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$	37
2.3.3	Groupes de matrices	37
2.3.4	Un exemple	39

3 Anneaux et arithmétique	41
3.1 Résultats fondamentaux dans les anneaux	41
3.1.1 Calculs dans un anneau	41
3.1.2 Prototypes	41
3.2 Homomorphisme algébrique	42
3.2.1 Homomorphisme	42
3.2.2 Caractéristique d'un anneau	43
3.2.3 Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs	44
3.2.4 Morphismes d'espaces vectoriels	44
3.3 Résultats classiques d'arithmétique de $\mathbb{Z}$	45
3.3.1 Idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$	45
3.3.2 Éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	45
3.3.3 Théorème de <i>Fermat</i>	47
3.3.4 Théorème de <i>Wilson</i>	48
3.3.5 Indicateur d' <i>Euler</i>	48
3.3.6 Applications au codage et à la cryptographie	51
3.4 Compléments sur les polynômes	55
3.4.1 Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$	55
3.4.2 P.P.C.M. et P.G.C.D. de p polynômes	56
4 Fondements de l'algèbre linéaire	61
4.1 Considérations préliminaires	61
4.1.1 Utilisation de l'algèbre linéaire	61
4.1.2 Famille génératrice, liée ou libre	62
4.1.3 Dimension finie	63
4.2 Espaces vectoriels et applications linéaires	64
4.2.1 Somme de sous-espaces	64
4.2.2 Applications linéaires	66
4.2.3 Projecteurs, affinités, involutions et nilpotents	69
4.3 Les matrices	71
4.3.1 Premières opérations	71
4.3.2 Matrices particulières	73
4.3.3 Matrices et applications linéaires	74
4.3.4 Trace et rang d'une matrice	75
4.3.5 Rang et matrices extraites	77
4.3.6 Matrices de rang 1	78
4.3.7 Calcul matriciel par blocs	79
4.3.8 Méthode de <i>Gauss</i>	79
4.4 Point de vue vectoriel, point de vue matriciel	81
4.5 Les polynômes de Lagrange	82
5 Formes multilinéaires, déterminants	83
5.1 Formes multilinéaires	83
5.1.1 Application n -linéaire	83
5.1.2 Développements en dimension finie	85
5.2 Les déterminants	85
5.2.1 Déterminant de n vecteurs relativement à une base	85
5.2.2 Aire, volume et déterminant	87
5.2.3 Déterminant d'un endomorphisme	89
5.2.4 Déterminant d'une matrice carrée	92

5.2.5	Calcul des déterminants	93
5.2.6	Déterminant et rang d'une matrice	95
5.2.7	Remarques algébriques et topologiques	96
5.2.8	Déterminant de <i>Vandermonde</i>	97
5.2.9	Polynôme caractéristique d'une matrice	97
5.3	Exercices	98
6	Systèmes linéaires et dualité	101
6.1	Systèmes linéaires de n équations à p inconnues	101
6.1.1	Décomposition d'un vecteur dans un système de vecteurs	101
6.1.2	Antécédent d'un vecteur par une application linéaire	102
6.1.3	Intersection d'hyperplans affines	103
6.1.4	Système linéaire et interprétations	103
6.1.5	Cas de <i>Cramer</i>	104
6.1.6	Cas général	105
6.1.7	Résolution par calcul	105
6.2	Système d'équations, dualité	106
6.2.1	Exemple d'un plan de $\mathbb{R}^4$	106
6.2.2	Forme linéaire et hyperplan	107
6.2.3	Base duale en dimension finie	109
6.3	Exemples de résolutions de systèmes	111
6.4	Exemples de bases duales et anté-duales	114
7	Suites réelles, topologie de $\mathbb{R}$	117
7.1	Construction de $\mathbb{R}$	117
7.1.1	Un corps totalement ordonné	117
7.1.2	Le corps des réels	118
7.2	Convergence d'une suite de réels	118
7.2.1	Définition	119
7.2.2	Convergence	119
7.2.3	Suite extraite	120
7.3	Quelques premiers outils	120
7.3.1	Une condition nécessaire de convergence	120
7.3.2	Opérations sur les suites	120
7.3.3	Théorème d'encadrement	121
7.3.4	Suites arithmétiques	121
7.3.5	Suites géométriques	121
7.4	Topologie de $\mathbb{R}$	122
7.4.1	Sous-ensembles remarquables	122
7.4.2	Topologie séquentielle de $\mathbb{R}$	123
7.5	Compléments techniques	127
7.5.1	Comparaisons	127
7.5.2	Théorème de <i>Césaro</i>	128
7.5.3	Utilisation de développements asymptotiques	128
8	Dénombrement et dénombrabilité	131
8.1	Dénombrement	131
8.1.1	Introduction	131
8.1.2	Nombre d'applications	131
8.1.3	Nombre de sous-ensembles	132

8.1.4	Propriétés usuelles	133
8.1.5	Applications	134
8.1.6	Récapitulatif	135
8.1.7	Exemples	136
8.2	Ecriture d'un entier en base b	137
8.2.1	Ecriture dans une base de numération	137
8.3	Développement décimal d'un réel	138
8.3.1	Une suite géométrique	138
8.3.2	Existence et unicité	139
8.4	Ensembles dénombrables	141
8.4.1	Généralités	141
8.4.2	Exemples	141
9	Espaces, distances et continuité	143
9.1	Mise en place des notions de base	143
9.1.1	A quoi ça sert ?	143
9.1.2	Normes et distances	144
9.1.3	Boules, voisinages et ouverts	145
9.1.4	Suites, convergence, valeurs d'adhérence	148
9.1.5	Densité	149
9.1.6	Distance à un sous-ensemble	149
9.1.7	Normes équivalentes	150
9.1.8	Topologie induite	152
9.2	Fonctions continues	152
9.2.1	Limite en un point, en restant dans une partie	152
9.2.2	Caractérisation séquentielle	153
9.2.3	Théorèmes opératoires	154
9.3	Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues	156
9.3.1	Fonctions lipschitziennes	156
9.3.2	Fonctions uniformément continues	157
9.4	Développement des outils	157
9.4.1	Suites de Cauchy et espace complet	157
9.4.2	Comparité	159
9.4.3	Norme associée à un produit scalaire	160
9.5	Combinaisons de propriétés	160
9.5.1	Fonctions continues sur un compact	160
9.5.2	Espace produit de p espaces vectoriels normés	161
9.5.3	Théorème de Bolzano-Weierstrass	162
9.5.4	Espaces de dimension finie	163
9.6	Segment, étoilé, convexe	163
9.6.1	Segments dans un espace vectoriel	163
9.6.2	Connexe par arcs	166
9.6.3	Fonction continue sur un connexe par arcs	166
9.7	Récapitulatif des fondamentaux	167
9.7.1	Résultats pour l'analyse	167
9.7.2	Equivalence des normes	167
9.7.3	Norme et boule	167
9.7.4	Ouvert et continuité	168
9.7.5	Utilisation des suites	168
9.8	Quelques exemples	168

9.8.1	Normes	168
9.8.2	Ouverts, fermés, compacts	170
9.8.3	Normes N_p sur K^n	171
10	Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	173
10.1	Quelques généralités	173
10.1.1	Analyse fonctionnelle	173
10.1.2	Parité, périodicité	174
10.2	Autour de la continuité	174
10.2.1	Valeur intermédiaire	176
10.2.2	Uniforme continuité	177
10.2.3	Fonction monotone	177
10.2.4	Fonction réciproque	178
10.3	Autour de la dérivabilité	178
10.3.1	Fonction dérivable en a	180
10.4	Autour des théorèmes de Rolle et des accroissements finis	180
10.4.1	Théorème de Rolle	181
10.4.2	Théorème des accroissements finis	185
10.5	Intégration sur un segment	185
10.5.1	Intégrale d'une fonction en escalier	186
10.5.2	Construction suivant Riemann	187
10.5.3	Propriétés usuelles	190
10.5.4	Primitive	191
10.5.5	Intégrale fonction de sa borne supérieure	191
10.5.6	Théorème fondamental de l'analyse	192
10.6	Autour de la convexité	192
10.6.1	Fonction convexe	193
10.6.2	Conséquences géométriques	194
10.6.3	Inégalités de convexité	194
10.6.4	Convexité des fonctions dérivables	194
10.6.5	Des inégalités conséquences de la convexité	195
10.7	Les formules de Taylor	195
10.7.1	Intégration par parties	196
10.7.2	Les trois formules	196
10.8	Exemples d'utilisation	196
11	Formules de Taylor et développements limités	201
11.1	Fonctions à valeurs vectorielles	201
11.1.1	E de dimension finie	201
11.1.2	Grand O , petit o et fonction ε	203
11.2	Fonctions à valeurs réelles	203
11.2.1	Polynôme de Taylor de f	204
11.2.2	Formules de Taylor	206
11.3	Développement limités	206
11.3.1	Existence et unicité	207
11.3.2	Opérations sur les D.L. des fonctions à valeurs réelles	208
11.3.3	Primitivation des D.L.	209
11.3.4	Remarques fondamentales	209
11.3.5	Savoir faire des calculs	209

12 Fonctions usuelles	211
12.1 Les fonctions logarithme et exponentielle	211
12.1.1 Fonction logarithme népérien	211
12.1.2 Fonction exponentielle de base e	212
12.1.3 logarithme et exponentielle de base a	213
12.2 Les fonctions puissances	213
12.2.1 Les puissances entières et leurs réciproques	213
12.2.2 Cas général	213
12.3 Caractérisations fonctionnelles	214
12.3.1 Caractérisation des applications linéaires	214
12.3.2 D'autres caractérisations fonctionnelles	215
12.4 Les fonctions trigonométriques	216
12.4.1 Fonctions sinus, cosinus et réciproques	216
12.4.2 Graphes	216
12.4.3 Fonctions tangente et arctangente	217
12.5 Les fonctions hyperboliques	217
12.5.1 Fonctions sh et ch et th	217
12.5.2 Fonctions hyperboliques réciproques	218
12.6 Quelques exemples de référence	219
12.6.1 Fonction dérivable, mais non C^1	219
12.6.2 Fonction ayant une asymptote horizontale	220
12.6.3 Exemples à propos des fonctions usuelles	221
13 Suites numériques récurrentes	225
13.1 Approximations et systèmes dynamiques	225
13.1.1 Comportement d'une suite récurrente	225
13.1.2 Un premier exemple : les suites arithmético-géométriques	226
13.2 Suites récurrentes réelles, avec $u_{n+1} = f(u_n)$	227
13.2.1 Généralités	227
13.2.2 Différentes situations favorables	229
13.2.3 Convergence hypergéométrique	231
13.2.4 Suites homographiques	233
13.2.5 Une étude plus délicate : utilisation de la compacité	234
13.3 Suites récurrentes complexes, avec $u_{n+1} = f(u_n)$	235
13.3.1 Un exemple : approximation d'une racine carrée	235
13.3.2 Théorème du point fixe	236
13.3.3 Quelques résultats sur les ensembles de Julia	237
13.4 Récurrences linéaires d'ordre 2	238
13.4.1 Récurrence linéaire d'ordre $p \geq 2$	240
14 Calcul d'intégrales et de primitives	241
14.1 Rappels de la théorie pour le calcul	241
14.1.1 Calcul à l'aide d'une primitive	241
14.1.2 Intégration par parties	242
14.1.3 Changement de variable	243
14.1.4 Sommes de Riemann de f continue sur un segment	244
14.2 Les fractions rationnelles $\frac{f}{g}$	247
14.2.1 Intégration d'un élément simple de première espèce	247
14.2.2 Intégration d'un élément simple de deuxième espèce	248
14.3 Fractions rationnelles en sinus et cosinus	249

14.3.1	Polynôme en sinus et cosinus	250
14.3.2	Fraction rationnelle en sinus et cosinus	250
14.3.3	Tests de Bioché	250
14.4	Fractions rationnelles en exp, sh ou ch	251
14.5	Intégrales de f faisant intervenir un radical	251
14.5.1	Intégrales du type $\int_a^b R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$	251
14.5.2	Intégrales du type $\int_a^b R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	252
14.6	Tableau récapitulatif	252
14.7	Exemples de calcul de divers intégrales	253
14.8	Quelques développements classiques	257
14.8.1	Intégrales de Wallis	257
14.8.2	Premier théorème de la moyenne	258
14.8.3	Comportement des sommes de Riemann	259
14.8.4	Formule des trapèzes	260
15	Intégration sur un intervalle	263
15.1	Fonctions positives, les résultats fondamentaux	263
15.1.1	Intégrabilité et intégrale	263
15.1.2	Fonctions de références	265
15.1.3	Comparaisons entre fonctions	266
15.2	Pour les fonctions à valeurs complexes	267
15.2.1	Intégrabilité et intégrale	267
15.2.2	Utilisation d'une primitive	268
15.3	Résultats techniques	269
15.3.1	Résultats opératoires	269
15.3.2	Prolongement par continuité	271
15.3.3	Théorèmes de comparaison	271
15.3.4	Intégrabilité et limite	271
15.4	Calculs d'intégrales	272
15.4.1	Décompositions	272
15.4.2	Changement de variable	272
15.4.3	Intégration par partie	274
15.4.4	Complément aux théorèmes de comparaison des fonctions	276
15.5	Intégrales semi-convergentes	277
15.5.1	Semi-convergence	277
15.5.2	Précisions de vocabulaire	278
15.5.3	Non-conservation par équivalence	278
15.5.4	Intégrale de Dirichlet	279
15.6	Espaces de fonctions $L^1(I)$ et $L^2(I)$	279
15.6.1	Définitions	279
15.6.2	Cas d'un intervalle borné	281
15.7	Quelques exemples	281

16 Fonctions vectorielles	285
16.1 Dérivation	285
16.1.1 Définitions et premières propriétés	285
16.1.2 Caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'une base de E	289
16.1.3 Fonctions de classe C^k par morceaux	290
16.2 Intégration sur un segment	290
16.2.1 Définition de l'intégrale et premières propriétés	290
16.2.2 Sommes de <i>Riemann</i>	294
16.2.3 Majorations usuelles	295
16.3 Dérivation et intégration	296
16.3.1 Primitives	296
16.3.2 Relations entre primitives	297
16.3.3 Prolongement de la dérivée	300
16.3.4 Formules de <i>Taylor</i>	301
16.3.5 Développement limités	302
17 Les complexes sans complexes	303
17.1 Conserver une vision géométrique	303
17.1.1 Encadrement	303
17.1.2 Racine carrée	303
17.2 Partie réelle et imaginaire	304
17.2.1 Limite et continuité	304
17.2.2 Dérivation	304
17.2.3 Intégrales, primitives et intégrabilité	305
17.2.4 Développement limités	306
17.2.5 Inégalités de <i>Cauchy-Schwarz</i>	307
17.3 Développement à propos de l'argument	307
17.3.1 Module et argument	307
17.3.2 Le théorème de relèvement C^1 (hors-programme M.P.)	310
18 Equations différentielles linéaires (I)	311
18.1 Etude des E.D.L. scalaires du 1 ^{er} ordre	311
18.1.1 Solutions d'une équation différentielle	311
18.1.2 Equation normalisée	311
18.1.3 Résultats utiles	312
18.1.4 Résolution d'une équation sous forme normalisée	313
18.1.5 Plan d'étude d'une équation différentielle linéaire	315
18.2 Exemples de résolutions d'EDL	315
18.2.1 Résolution de l'équation $(F) : t \cdot x' - 2 \cdot x + t = 0$	315
18.2.2 Résolution de l'équation $(F) : t^2 \cdot x' + (1 - 2t) \cdot x - t^2 = 0$	316
18.2.3 Résolution de l'équation $(F) : \cos(t) \cdot x' + \sin(t) \cdot x - 1 = 0$	317
18.2.4 Compléments	318
19 Arcs paramétrés plans	321
19.1 Introduction	321
19.2 Quelques outils	321
19.2.1 Formule de <i>Taylor-Young</i>	321
19.2.2 Limite d'une famille de droites	322
19.3 Etude ponctuelle dans le plan	322
19.3.1 Arc paramétré	322

19.3.2 Régularité	323
19.3.3 Interprétation cinématique	323
19.3.4 Parités, périodicités	323
19.3.5 Tangente en un point	324
19.3.6 Allures en un point stationnaire	325
19.4 Etude des branches infinies	326
19.4.1 Branche infinie	326
19.4.2 Direction asymptotique	327
19.4.3 Asymptote	328
19.5 Courbes en coordonnées polaires	330
19.5.1 Généralités	330
19.5.2 Etude locale	331
19.5.3 Branche infinie	333
19.5.4 Exemples	333
19.6 Courbes usuelles	334
19.6.1 Droites	334
19.6.2 Cercles	335
19.6.3 Coniques ayant un foyer à l'origine	335
19.7 Courbes Classiques	336
19.7.1 Cycloïde	336
19.7.2 Astroïde	337
19.7.3 Cardioïde	338
19.8 Résultats complémentaires	338
19.8.1 Etude de la concavité	338
19.8.2 Points doubles	340
19.8.3 Courbes asymptotes	342
19.8.4 Polaires paramétrées	344
20 Compléments d'algèbre linéaire pour la réduction	345
20.1 Les enjeux de la réduction des endomorphismes	345
20.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme	347
20.2.1 Définitions des éléments propres	347
20.3 Stabilité et endomorphisme induit	351
20.3.1 Stabilité, endomorphisme induit sur un sous-espace stable	351
20.3.2 Commutant d'un endomorphisme	351
20.3.3 Caractérisation matricielle de la stabilité	352
20.3.4 Drapeau dans un espace de dimension finie	353
20.3.5 Recherche des droites et des hyperplans stables par f	354
20.3.6 Cas d'un espace vectoriel réel	355
20.4 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice	355
20.4.1 Introduction	355
20.4.2 Les algèbres $\mathbb{K}[f]$ et $\mathbb{K}[M]$	356
20.4.3 Effet sur les valeurs propres	356
20.4.4 Polynômes annulateurs, polynôme minimal	357
20.4.5 Théorème de décomposition des noyaux	362
20.5 Quelques exemples	364

21 Réduction des endomorphismes	367
21.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables	367
21.2 Endomorphismes et matrices trigonalisables	368
21.3 Polynôme caractéristique	369
21.3.1 Définitions	369
21.3.2 Calcul du polynôme caractéristique	370
21.3.3 Ordre de multiplicité d'une valeur propre	370
21.3.4 Polynôme caractéristique et endomorphisme induit	371
21.4 Théorème de <i>Cayley-Hamilton</i>	372
21.4.1 Un résultat essentiel	372
21.4.2 Premières remarques	373
21.5 Les critères usuels de diagonalisabilité	373
21.5.1 Diagonalisation des endomorphismes	373
21.5.2 Diagonalisation des matrices	376
21.6 Les critères usuels de trigonalisabilité	378
21.6.1 Trigonalisation des endomorphismes	378
21.6.2 Trigonalisation des matrices	379
21.6.3 Sous-espaces caractéristiques	380
22 Prolongements sur la réduction	381
22.1 Décomposition spectrale	381
22.1.1 Point de vue matriciel	381
22.1.2 Point de vue de l'endomorphisme	382
22.2 Puissances d'une matrice	382
22.2.1 Evolution d'une population	382
22.2.2 Divers procédés de calcul de A^m	383
22.2.3 Applications à un exemple	384
22.3 Diagonalisation simultanée	384
22.4 Polynômes caractéristiques de AB et BA	386
23 Formes bilinéaires et formes quadratiques	387
23.1 Formes bilinéaires	387
23.1.1 Forme k -linéaire, forme bilinéaire sur E	387
23.1.2 En dimension finie	387
23.2 Pour un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel	390
23.2.1 Forme quadratique associée	390
23.2.2 Forme non dégénérée, positive et définie positive	390
23.3 Réduction en somme de carrés	392
23.3.1 Diagonalisation par congruence	392
23.3.2 Réduction de la matrice associée	392
23.4 Pour un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel	393
23.4.1 Formes semi-linéaires et sesquilinéaires	393
23.4.2 L'inégalité fondamentale de Cauchy-Schwarz	394
23.4.3 Produit scalaire sur E	396
24 Espaces préhilbertiens	397
24.1 Introduction	397
24.2 Structure préhilbertienne	397
24.2.1 Produit scalaire et orthogonalité	397
24.2.2 Identité du parallélogramme	402

24.2.3 Applications de l'inégalité de <i>Cauchy-Schwarz</i>	402
24.3 Le procédé de <i>Gram-Schmidt</i>	403
24.3.1 Existence et unicité	403
24.3.2 Réalisations du procédé de <i>Gram-Schmidt</i>	404
24.3.3 Applications du théorème de <i>Gram-Schmidt</i>	405
24.3.4 Point d'attention : la dimension finie	407
24.4 Le théorème de projection	407
24.4.1 Orthogonal par rapport à ϕ d'un sous-ensemble de E	407
24.4.2 Existence de la projection orthogonale	408
24.4.3 Conséquences structurelles	408
24.4.4 Applications	409
25 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien	413
25.1 Adjoint d'un endomorphisme	413
25.1.1 Isomorphisme avec le dual	413
25.1.2 La notion fondamentale d'adjoint	414
25.1.3 Propriétés de l'adjoint	415
25.2 Endomorphismes remarquables d'un euclidien	416
25.2.1 Définitions	416
25.2.2 Endomorphismes symétriques	417
25.2.3 Endomorphismes antisymétriques	418
25.2.4 Endomorphismes orthogonaux	418
25.2.5 Projecteurs orthogonaux	421
25.2.6 Réduction des endomorphismes symétriques	422
25.2.7 Endomorphisme symétrique et forme quadratique associés	424
26 Etude du groupe orthogonal	427
26.1 Cas $n = 1$ et $n = 2$	427
26.2 Cas de la dimension $n = 3$	428
26.2.1 Résultats structurels sur $O(3)$	428
26.2.2 Récapitulatif pour $O(3)$	429
26.2.3 Les rotations de $\mathbb{R}^3$ euclidien	430
26.2.4 Exemples	431
26.3 Théorème général de décomposition dans $O(n)$	432
27 Applications linéaires et continuité	435
27.1 Cas des espaces vectoriels quelconques	435
27.2 Cas des endomorphismes d'un espace euclidien	438
27.2.1 Caractérisation variationnelle	438
27.2.2 Cas d'un endomorphisme symétrique et positif	439
27.3 Continuité des applications multilinéaires	441
27.3.1 Cas d'une application bilinéaire	441
27.3.2 Cas d'une application multilinéaire	442
27.3.3 En dimension finie	442
28 Séries numériques à termes réels ou complexes	443
28.1 Suites et séries	443
28.1.1 Les séries sont des suites	443
28.1.2 Les suites sont des séries	444
28.1.3 Convergence et intégrabilité	444

28.2 Les séries incontournables	445
28.2.1 Série géométrique	445
28.2.2 Série harmonique	445
28.2.3 Série exponentielle	445
28.3 Les idées fondamentales	446
28.3.1 Croissance majorée	446
28.3.2 Comparaison avec le comportement d'une fonction	446
28.3.3 Condition nécessaire de convergence	448
28.3.4 Séries de <i>Riemann</i>	448
28.3.5 Absolue convergence	448
28.3.6 Séries de complexes	449
28.4 Quelques opérations sur les séries	449
28.4.1 Quelques résultats immédiats	449
28.4.2 Conséquences du théorème de majoration	450
28.5 Savoir faire fondamentaux	450
28.5.1 Séries alternées	450
28.5.2 Développements asymptotiques	451
28.5.3 Comparaison logarithmique, critère de <i>d'Alembert</i>	452
28.6 Evaluation de la vitesse de convergence	453
28.6.1 Vitesse de convergence ou de divergence	453
28.6.2 Evaluation du comportement à l'aide d'intégrales	453
28.6.3 Evaluation du comportement par équivalence	456
28.6.4 Comportement de $n!$ quand $n \rightarrow \infty$, formule de <i>Stirling</i>	458
28.7 Exemples et développements	459
29 Compléments aux séries numériques	463
29.1 Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries	463
29.1.1 Séries de réels positifs	463
29.1.2 Séries de complexes	465
29.2 Séries doubles	466
29.2.1 Sommer une suite double	466
29.2.2 Cas des suites doubles à termes positifs	467
29.2.3 Cas des suites doubles à termes complexes	469
29.2.4 Cas d'une suite double « produit »	471
29.2.5 Sommabilité et arrangements linéaires	471
30 Convergence simple, uniforme ou normale	473
30.1 Convergence simple d'une suite de fonctions	473
30.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions	475
30.2.1 Définitions	475
30.2.2 Etude de la convergence uniforme sur A	475
30.2.3 Convergence uniforme et continuité	477
30.2.4 Théorème de la double limite	478
30.2.5 Convergence uniforme et intégration	479
30.2.6 Convergence uniforme et intégrabilité	479
30.2.7 Convergence uniforme et dérivation	480
30.2.8 Dériver la somme d'une série de fonctions (1)	481
30.2.9 Non convergence uniforme sur A	481
30.3 Norme de la convergence uniforme, convergence normale	483
30.3.1 Norme de la convergence uniforme	483

30.3.2	$B(A, F)$ est complet	483
30.3.3	Convergence normale d'une série de fonctions	484
30.3.4	Dériver la somme d'une série de fonctions (2)	485
30.4	Deux exemples intéressants à méditer	485
30.4.1	Etude de la fonction zeta de Riemann	485
30.4.2	Une fonction continue, non dérivable	487
31	Approximations uniformes par des fonctions spécifiques	489
31.1	Quelques fonctions spécifiques	489
31.1.1	Associées à une subdivision du segment $[a, b]$	489
31.1.2	Sur un intervalle	492
31.1.3	Approximations	492
31.2	Approximation par des polynômes	494
31.2.1	Théorème de Weierstrass	494
31.3	Théorème de Weierstrass trigonométrique	496
32	Suite et série d'intégrales	499
32.1	Suite d'intégrales	499
32.1.1	Intervention de symboles	499
32.1.2	Convergence uniforme sur un segment	500
32.1.3	Convergence dominée sur un intervalle	500
32.1.4	Exemples	500
32.2	Série d'intégrales	503
32.2.1	Intégration terme à terme	503
32.2.2	Convergence uniforme sur un segment	503
32.2.3	Intégration terme à terme sur un intervalle	503
32.2.4	Exemples	504
32.2.5	D'autres possibilités	507
33	Séries entières de variable réelle ou complexe	509
33.1	Des séries de fonctions monônes	509
33.2	Des idées fondamentales	509
33.2.1	Un lemme d'Abel	509
33.2.2	Disque de convergence	510
33.2.3	Deux prototypes	511
33.2.4	Continuité de la somme totale	511
33.2.5	Intégration et primitivation sur $[0, x]$	512
33.2.6	La somme totale est C^∞	513
33.3	Détermination du rayon de convergence	514
33.3.1	Avec le critère de d'Alembert	514
33.3.2	Un cas fréquent, conséquence de ce critère	515
33.3.3	Comparaisons de rayons de convergence	515
33.3.4	Quelques exemples	515
33.4	Opérations algébriques sur les séries entières	516
33.4.1	Combinaison linéaire	516
33.4.2	Produit de deux séries entières	517
33.5	Développements et sommations	518
33.5.1	Introduction	518
33.5.2	Développement	518
33.5.3	Développements usuels	519

28.2 Les séries incontournables	445
28.2.1 Série géométrique	445
28.2.2 Série harmonique	445
28.2.3 Série exponentielle	445
28.3 Les idées fondamentales	446
28.3.1 Croissance majorée	446
28.3.2 Comparaison avec le comportement d'une fonction	446
28.3.3 Condition nécessaire de convergence	448
28.3.4 Séries de <i>Riemann</i>	448
28.3.5 Absolue convergence	448
28.3.6 Séries de complexes	449
28.4 Quelques opérations sur les séries	449
28.4.1 Quelques résultats immédiats	449
28.4.2 Conséquences du théorème de majoration	450
28.5 Savoir faire fondamentaux	450
28.5.1 Séries alternées	450
28.5.2 Développements asymptotiques	451
28.5.3 Comparaison logarithmique, critère de <i>d'Alembert</i>	452
28.6 Evaluation de la vitesse de convergence	453
28.6.1 Vitesse de convergence ou de divergence	453
28.6.2 Evaluation du comportement à l'aide d'intégrales	453
28.6.3 Evaluation du comportement par équivalence	456
28.6.4 Comportement de $n!$ quand $n \rightarrow \infty$, formule de <i>Stirling</i>	458
28.7 Exemples et développements	459
29 Compléments aux séries numériques	463
29.1 Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries	463
29.1.1 Séries de réels positifs	463
29.1.2 Séries de complexes	465
29.2 Séries doubles	466
29.2.1 Sommer une suite double	466
29.2.2 Cas des suites doubles à termes positifs	467
29.2.3 Cas des suites doubles à termes complexes	469
29.2.4 Cas d'une suite double « produit »	471
29.2.5 Sommabilité et arrangements linéaires	471
30 Convergence simple, uniforme ou normale	473
30.1 Convergence simple d'une suite de fonctions	473
30.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions	475
30.2.1 Définitions	475
30.2.2 Etude de la convergence uniforme sur A	475
30.2.3 Convergence uniforme et continuité	477
30.2.4 Théorème de la double limite	478
30.2.5 Convergence uniforme et intégration	479
30.2.6 Convergence uniforme et intégrabilité	479
30.2.7 Convergence uniforme et dérivation	480
30.2.8 Dériver la somme d'une série de fonctions (1)	481
30.2.9 Non convergence uniforme sur A	481
30.3 Norme de la convergence uniforme, convergence normale	483
30.3.1 Norme de la convergence uniforme	483

30.3.2	$B(A, F)$ est complet	483
30.3.3	Convergence normale d'une série de fonctions	484
30.3.4	Dériver la somme d'une série de fonctions (2)	485
30.4	Deux exemples intéressants à méditer	485
30.4.1	Etude de la fonction zêta de Riemann	485
30.4.2	Une fonction continue, non dérivable	487
31	Approximations uniformes par des fonctions spécifiques	489
31.1	Quelques fonctions spécifiques	489
31.1.1	Associées à une subdivision du segment $[a, b]$	489
31.1.2	Sur un intervalle	492
31.1.3	Approximations	492
31.2	Approximation par des polynômes	494
31.2.1	Théorème de Weierstrass	494
31.3	Théorème de Weierstrass trigonométrique	496
32	Suite et série d'intégrales	499
32.1	Suite d'intégrales	499
32.1.1	Intervention de symboles	499
32.1.2	Convergence uniforme sur un segment	500
32.1.3	Convergence dominée sur un intervalle	500
32.1.4	Exemples	500
32.2	Série d'intégrales	503
32.2.1	Intégration terme à terme	503
32.2.2	Convergence uniforme sur un segment	503
32.2.3	Intégration terme à terme sur un intervalle	503
32.2.4	Exemples	504
32.2.5	D'autres possibilités	507
33	Séries entières de variable réelle ou complexe	509
33.1	Des séries de fonctions monômes	509
33.2	Des idées fondamentales	509
33.2.1	Un lemme d'Abel	509
33.2.2	Disque de convergence	510
33.2.3	Deux prototypes	511
33.2.4	Continuité de la somme totale	511
33.2.5	Intégration et primitivation sur $[0, x]$	512
33.2.6	La somme totale est C^∞	513
33.3	Détermination du rayon de convergence	514
33.3.1	Avec le critère de d'Alembert	514
33.3.2	Un cas fréquent, conséquence de ce critère	515
33.3.3	Comparaisons de rayons de convergence	515
33.3.4	Quelques exemples	515
33.4	Opérations algébriques sur les séries entières	516
33.4.1	Combinaison linéaire	516
33.4.2	Produit de deux séries entières	517
33.5	Développements et sommations	518
33.5.1	Introduction	518
33.5.2	Développement	518
33.5.3	Développements usuels	519



33.5.4	Sommations de séries entières	521
33.6	Applications aux équations différentielles	522
33.6.1	Plan usuel	523
33.6.2	Exemples	523
33.7	Compléments	525
33.7.1	Théorème du zéro isolé	525
33.7.2	Développements des fractions rationnelles	526
33.8	L'exponentielle $z \mapsto \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$	526
33.8.1	$\exp$ est un morphisme	526
33.8.2	Propriétés de l'exponentielle	527
33.8.3	Fonctions trigonométriques	528
33.8.4	Résolutions d'équations	529
33.9	Quelques illustrations et un problème	530
33.9.1	Convergence des polynômes de <i>Taylor</i> de $\sin$	530
33.9.2	Des séries entières et des équations différentielles	530
34	Séries trigonométriques et de Fourier	533
34.1	Une synthèse d'aspects différents	533
34.1.1	Intégrations par partie	533
34.1.2	Quelques intégrales utiles	534
34.1.3	Noyau de <i>Dirichlet</i>	534
34.1.4	Lemmes de <i>Lebesgue</i>	535
34.2	Etude des séries trigonométriques	536
34.2.1	Deux présentations	536
34.2.2	Qualités de convergence	536
34.3	Séries de <i>Fourier</i> d'une fonction	538
34.3.1	Approcher une fonction	538
34.3.2	Coefficients de <i>Fourier</i>	538
34.3.3	Conséquences directes de la définition	539
34.3.4	Questions de dérivation	540
34.4	Du point de vue géométrique	540
34.4.1	Un espace préhilbertien	540
34.4.2	Interprétations géométriques des définitions	541
34.4.3	Théorèmes de <i>Pythagore</i> et de <i>Bessel</i>	541
34.4.4	Théorème de <i>Parseval</i>	542
34.4.5	Applications du théorème de <i>Parseval</i>	543
34.5	Théorèmes de <i>Dirichlet</i>	544
34.6	Cas des fonctions T -périodiques	545
34.7	Exemples détaillés	545
34.7.1	Développer une fonction en série de sinus ou cosinus	545
34.7.2	Calcul élaboré de coefficients	547
34.7.3	Inégalité entre intégrales	548
34.7.4	Solutions périodiques d'une EDL	549
34.7.5	Le phénomène de <i>Gibbs</i> (hors programme M.P.)	549

35 Séries de vecteurs, de matrices	551
35.1 Mise en place	551
35.1.1 Le cadre général	552
35.1.2 Utilisation d'une base de E	552
35.2 Critère de <i>Cauchy</i> et convergence absolue	553
35.2.1 Le critère de <i>Cauchy</i>	553
35.2.2 Convergence absolue	553
35.3 Série géométrique et série exponentielle	554
35.3.1 Série géométrique	554
35.3.2 Série exponentielle	555
35.4 Normes sur les espaces de matrices	555
35.4.1 Panorama de diverses normes	556
35.4.2 Normes sous-multiplicatives	556
35.4.3 Normes subordonnées ou induites	558
35.5 Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries	558
35.6 Etude de l'exponentielle de matrices	558
35.6.1 Séries entières et séries de matrices	559
35.6.2 Propriétés de l'exponentielle	562
35.7 Quelques exemples développés	
36 Equations différentielles linéaires vectorielles	565
36.1 Etude des E.D.L. vectorielles du 1 ^{er} ordre	565
36.1.1 Introduction	566
36.1.2 Présentation matricielle d'une E.D.L.	566
36.1.3 Utilisation d'une base	567
36.1.4 Résultats structurels	568
36.1.5 Système fondamental de solution	570
36.1.6 Méthode de <i>Lagrange</i>	570
36.1.7 Superposition des solutions	571
36.1.8 Système différentiels à coefficients constants	571
36.2 Equations linéaires scalaires d'ordre 2	571
36.2.1 Introduction aux équations d'ordre 2	572
36.2.2 Résultats fondamentaux	573
36.2.3 Méthodes de résolution	574
36.2.4 Equations à coefficients constants	576
36.3 Quelques développements et approfondissements	576
36.3.1 Les équations d'ordre n , cas général	577
36.3.2 Changement de variable dans une EDL2	580
36.3.3 Changement de fonction inconnue dans une EDL2	
37 Systèmes différentiels à coefficients constants	583
37.1 Un chapitre de synthèse	583
37.1.1 Rappels sur les systèmes linéaires	584
37.1.2 Rappels sur l'exponentielle de matrice	586
37.2 Réduction de la matrice du système	586
37.2.1 Changement de fonction inconnue	586
37.2.2 Si A diagonalisable dans K	587
37.2.3 Cas d'un système sans second membre	588
37.2.4 Si A trigonalisable dans K	589
37.3 Comparaison de diverses méthodes	

38 Rectification et arcs dans l'espace	
38.1 Introduction	59
38.2 Arcs rectifiables	59
38.2.1 Longueur d'arc	59
38.2.2 Abscisse curviligne	59
38.2.3 Vitesse stabilisée	59
38.3 Repère de <i>Frénet</i> d'une courbe plane	59
38.4 Courbure	59
38.4.1 Paramètre angulaire	59
38.4.2 Courbure	59
38.4.3 Cas d'une courbe donnée par une équation cartésienne	60
38.4.4 Cas d'une courbe donnée par une équation polaire	60
38.5 Formulaire	60
38.5.1 Récapitulatif de la théorie	60
38.5.2 Raccourcis pour les calculs	60
38.6 Arcs dans l'espace	60
38.6.1 Tangente	60
38.7 Objets indépendants du paramétrage	60
38.7.1 Droite tangente	60
38.7.2 Les autres notions métriques	60
39 Géométrie affine	60
39.1 Espaces affines dans un espace vectoriel	60
39.1.1 Sous-espace affine	60
39.1.2 Parallélisme et intersection	60
39.1.3 Applications affines	60
39.2 Barycentres	60
39.2.1 Définition	60
39.2.2 Caractérisations des notions affines	60
39.2.3 Associativité des barycentres	610
39.2.4 Convexe et enveloppe convexe	611
39.2.5 Fonctions de <i>Leibniz</i>	611
39.3 Repère affine cartésien	613
39.3.1 Changement de repère, représentation matricielle	613
39.3.2 Représentation matricielle d'une application affine	614
39.3.3 Equations d'un sous-espace affine	614
39.4 Applications affines de A dans A	616
39.4.1 Homothétie	617
39.4.2 Projection affine	617
39.4.3 Symétrie affine	618
39.4.4 Affinité	619
40 Géométrie euclidienne	621
40.1 Distances entre objets	621
40.1.1 Projections orthogonales	621
40.1.2 Distances à des sous-espaces affines	622
40.2 Mesures des angles	624
40.2.1 Dans un espace préhilbertien réel	625
40.2.2 Dans le plan orienté	625
40.2.3 Dans l'espace E_3	625

40.3 Triangle dans le plan	626
40.4 Cercles et sphères	627
40.4.1 Cercle dans le plan	627
40.4.2 Sphère dans l'espace	629
40.4.3 Cercle dans l'espace	630
40.4.4 Lignes de niveau dans le plan	630
40.5 Nombres complexes et géométrie plane	632
40.5.1 Quelques résultats usuels	632
40.5.2 Configurations particulières	633
40.5.3 Quelques transformations	636
40.6 Polygones et polyèdres	637
40.7 Isométries affines et similitudes	639
40.7.1 Isométries affines	639
40.7.2 Etude des isométries affines du plan	641
40.7.3 Etude des isométries affines pour $n = 3$	643
40.7.4 Similitudes de $\mathcal{E}_n$	648
40.7.5 Similitudes directes du plan	649
40.7.6 Similitudes planes et nombres complexes	650
41 Les coniques et les quadriques	653
41.1 Définition focale des coniques	653
41.1.1 Foyer, directrice et excentricité	653
41.1.2 Sections du cône de révolution	658
41.1.3 Diverses constructions géométriques	659
41.2 Courbes planes du deuxième degré	660
41.2.1 Le cas général	660
41.2.2 Effet d'un changement de repère	661
41.2.3 Réduire l'équation d'une courbe du 2 ^{ème} degré	661
41.2.4 Equation réduite d'une courbe à centre	663
41.2.5 En l'absence de centre	667
41.2.6 Exemples d'études de familles de coniques	668
41.3 Surfaces du deuxième degré	671
41.3.1 Cas général	671
41.3.2 Réduire l'équation d'une surface du 2 ^{ème} degré	671
41.3.3 Equation réduite d'une surface à centre	672
41.3.4 En l'absence de centre	674
41.3.5 Paramétrages des quadriques	675
41.3.6 Quadriques de révolution, quadriques réglées	676
41.3.7 Récapitulatif	678
42 Equations différentielles non linéaires, systèmes différentiels	683
42.1 Equations et systèmes différentiels	683
42.1.1 Equations différentielles	683
42.1.2 Système différentiel	684
42.1.3 Interprétations	684
42.2 Equations d'ordre 1	684
42.2.1 Existence et unicité locale	685
42.2.2 Théorème de prolongement d'une solution	685
42.2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz	686
42.2.4 Comparaison linéaire-non linéaire	687



42.2.5	Propriétés analytiques des solutions	687
42.3	Equations à variables séparables	688
42.3.1	Présentation	688
42.3.2	Résolution dans le cas général	690
42.3.3	Remarques fondamentales	691
42.4	Equations autonomes	691
42.5	Systèmes autonomes	693
42.5.1	Invariance par translation	693
42.5.2	Un plan d'étude des systèmes autonomes	694
42.5.3	Notions sur lignes de champs et les intégrales premières	696
42.5.4	Equation autonome d'ordre 2	697
42.5.5	Le système de <i>Volterra</i>	697
42.6	Etudes qualitatives	698
42.6.1	Etude qualitative des solutions	698
42.6.2	Symétries de l'ensemble des courbes intégrales	699
43	Différentiabilité et fonctions de classe C^1	701
43.1	Quelques idées topologiques	701
43.1.1	Normes	701
43.1.2	Continuité	701
43.2	Différentielles, fonctions de classe C^1	702
43.2.1	Différentielle d'une fonction	702
43.3	Dérivées partielles, dérivée selon un vecteur	703
43.4	Différents cas de figure	704
43.4.1	Remarques et exemples de calcul	705
43.4.2	A propos du point de vue des physiciens	708
43.5	Fonctions de classe C^1 sur U	708
43.6	Interprétations géométriques	709
43.6.1	Notion de plan tangent	709
43.6.2	Récapitulatif géométrique pour f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	711
43.6.3	Exemples	712
43.7	Fonctions de classe C^k sur U , $k \geq 1$	714
43.8	Composition d'applications de classe C^k	715
43.9	Difféomorphismes, inversion globale	716
43.9.1	C^1 -difféomorphismes, C^k -difféomorphismes	716
43.9.2	L'inversion globale	717
43.9.3	Deux études de difféomorphismes	717
43.10	Systèmes de coordonnées	719
43.10.1	Coordonnées polaires	719
43.10.2	Coordonnées cylindriques	719
43.10.3	Coordonnées sphériques	720
43.11	Equations aux dérivées partielles	721
43.11.1	Introduction aux Equations aux dérivées partielles	721
43.11.2	Les équations aux dérivées partielles de base	722
43.11.3	Résolution par changement de variables	723
43.11.4	Recherche de solutions particulières d'un certain type	725
43.11.5	Séparation des variables	727

42.2.5	Propriétés analytiques des solutions	687
42.3	Equations à variables séparables	688
42.3.1	Présentation	688
42.3.2	Résolution dans le cas général	690
42.3.3	Remarques fondamentales	691
42.4	Equations autonomes	691
42.5	Systèmes autonomes	693
42.5.1	Invariance par translation	693
42.5.2	Un plan d'étude des systèmes autonomes	694
42.5.3	Notions sur lignes de champs et les intégrales premières	696
42.5.4	Equation autonome d'ordre 2	697
42.5.5	Le système de Volterra	697
42.6	Etudes qualitatives	698
42.6.1	Etude qualitative des solutions	698
42.6.2	Symétries de l'ensemble des courbes intégrales	699
43	Différentiabilité et fonctions de classe C^1	701
43.1	Quelques idées topologiques	701
43.1.1	Normes	701
43.1.2	Continuité	701
43.2	Différentielles, fonctions de classe C^1	702
43.2.1	Différentielle d'une fonction	702
43.3	Dérivées partielles, dérivée selon un vecteur	703
43.4	Différents cas de figure	704
43.4.1	Remarques et exemples de calcul	705
43.4.2	A propos du point de vue des physiciens	708
43.5	Fonctions de classe C^1 sur U	708
43.6	Interprétations géométriques	709
43.6.1	Notion de plan tangent	709
43.6.2	Récapitulatif géométrique pour f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	711
43.6.3	Exemples	712
43.7	Fonctions de classe C^k sur U , $k \geq 1$	714
43.8	Composition d'applications de classe C^k	715
43.9	Difféomorphismes, inversion globale	716
43.9.1	C^1 -difféomorphismes, C^k -difféomorphismes	716
43.9.2	L'inversion globale	717
43.9.3	Deux études de difféomorphismes	717
43.10	Systèmes de coordonnées	719
43.10.1	Coordonnées polaires	719
43.10.2	Coordonnées cylindriques	719
43.10.3	Coordonnées sphériques	720
43.11	Equations aux dérivées partielles	721
43.11.1	Introduction aux Equations aux dérivées partielles	721
43.11.2	Les équations aux dérivées partielles de base	722
43.11.3	Résolution par changement de variables	723
43.11.4	Recherche de solutions particulières d'un certain type	725
43.11.5	Séparation des variables	727

44	Extrema et fonctions implicites	729
44.1	Etude à l'aide d'une fonction auxiliaire	729
44.1.1	Pour une étude sur un segment $[a, b]$	729
44.1.2	Pour une étude au voisinage de a dans une direction u	730
44.1.3	Caractérisation des fonctions constantes	730
44.1.4	Inégalité des accroissements finis	730
44.2	Variations des fonctions numériques, extrema	731
44.2.1	Les points critiques	731
44.3	Cas des fonctions C^2 à deux variables	733
44.3.1	Développement limité à l'ordre 2	733
44.3.2	Positions de la surface et du plan tangent	734
44.3.3	Etude des points critiques	737
44.3.4	Extremum sur un ouvert ou sur un compact	738
44.3.5	Applications à d'autres études	739
44.4	Les fonctions implicites	740
44.4.1	Applications	742
44.4.2	Equation différentielle et fonction implicite	744
45	Formes différentielles et champs de vecteurs	745
45.1	Analyse vectorielle	745
45.1.1	Rappels sur les champs de scalaires et de vecteurs de $\mathbb{R}^3$	745
45.1.2	Quelques formules d'analyse vectorielle	747
45.2	Formes différentielles	748
45.2.1	Définitions	748
45.2.2	Interprétation	748
45.2.3	Forme exacte, forme fermée	749
45.2.4	Le théorème de Poincaré	750
45.3	Lien avec les champs de vecteurs	753
45.3.1	Champs de vecteurs, champs de scalaires	753
45.4	Intégrales curvilignes	754
45.4.1	Arc orienté de classe C^1	754
45.4.2	Intégrale d'une forme différentielle sur un arc orienté	754
45.4.3	Intégrale curviligne d'une forme exacte	756
45.4.4	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'un arc orienté	757
45.5	Quelques exemples	758
46	Courbes, surfaces et nappes	761
46.1	Courbes et surfaces de niveau	761
46.1.1	Courbes de niveau $f(x, y) = 0$, dans le plan	761
46.1.2	Interprétation du gradient d'une fonction numérique	764
46.1.3	Surfaces de niveau $f(x, y, z) = 0$	765
46.1.4	Intersection de deux surfaces de niveau	765
46.2	Surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par un paramétrage	767
46.2.1	Nappes paramétrées	767
46.2.2	Surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par une équation $z = f(x, y)$	769
46.3	Exemple d'un ellipsoïde	770
46.4	Droites portées par une surface	771
46.4.1	Surface réglée	771
46.4.2	Cylindres	771
46.4.3	Cônes	772

46.4.4 Recherche des droites incluses dans une surface	774
47 Intégrales à paramètres	777
47.1 Intégrale à paramètres sur $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$	777
47.1.1 Théorèmes de continuité	777
47.1.2 Théorème de dérivation de Leibniz	779
47.2 Intégrales à paramètres, intervalle quelconque	782
47.2.1 La fonction Γ d'Euler	785
47.3 Applications et exemples	787
48 Les intégrales doubles	797
48.1 Intégration sur un produit d'intervalles	797
48.1.1 Intégrale double sur un produit de segments	797
48.1.2 Pour les fonctions positives	798
48.1.3 Cas des fonctions à valeurs complexes	801
48.1.4 Avec les coordonnées polaires	804
48.1.5 Comparaison avec une série double	805
48.2 Intégrale double sur une partie élémentaire	806
48.2.1 Partie élémentaire	806
48.2.2 Intégrale d'une fonction complexe	807
48.2.3 Lemmes techniques	807
48.2.4 Intégrale double et volume	809
48.2.5 Intégrale sur une partie simple	809
48.3 Propriétés et calculs des intégrales doubles	810
48.3.1 Une optique utilitaire	810
48.3.2 Propriétés immédiates	811
48.3.3 Changement de variables	811
48.3.4 Application aux questions d'intégrabilité	813
48.3.5 Théorème de Green-Riemann	814
48.3.6 Application aux calculs d'aires	814
48.3.7 Deux exemples plus longs à traiter	815
II Des cerises sur le gâteau	817
A Séries numériques	819
A.1 Étude des séries de Bertrand	819
A.2 Règle de Raabe-Duhamel	820
A.3 Transformation d'Abel	821
A.4 Arrangement linéaire d'une série double	823
B Compléments et applications de la réduction	825
B.1 Théorème d'Hadamard, disques de Gerschgorin	825
B.2 Racine $n^{\text{ième}}$ d'une matrice	826
B.3 Polynôme et matrices compagnons	827
B.4 Matrices de rang 1 diagonalisables	828
B.5 Diagonalisation d'une matrice circulante	828
B.6 Réduction de matrices définies par blocs	830

C Arcs paramétrés : compléments	831
C.1 Développements sur les courbes planes	831
C.1.1 Un arc non rectifiable	831
C.1.2 Courbes conditionnées	833
C.2 Introduction au plan osculateur	834
C.3 Courbes planes ou portées par une surface	835
C.4 Quelques jolies courbes	836
D Polynômes orthogonaux	839
D.1 Des produits scalaires dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$	839
D.2 Propriétés communes	841
E Compléments aux équations différentielles générales	843
E.1 Equation associée à une forme différentielle exacte	843
E.2 Equations homogènes	844
E.3 Etude qualitative d'un système	846
F Endomorphismes antisymétriques d'un euclidien	849
F.1 Cas général	849
F.2 Cas de la dimension 3	850
G Transformées de Laplace et de Fourier	851
G.1 Transformation de Laplace	851
G.1.1 Définition et propriétés élémentaires	851
G.1.2 Perspectives d'utilisation	852
G.2 Transformation de Fourier	854
G.2.1 Définition et propriétés élémentaires	854
G.2.2 Transformée de Fourier d'un produit de convolution	856
H Intégrales multiples	859
H.1 Questions de mesures	859
H.1.1 Problèmes d'intégrabilité	859
H.1.2 Ensembles mesurables	860
H.1.3 Intégrale double sur un compact	861
H.1.4 Ensembles négligeables	861
H.2 Intégrales triples	862
H.2.1 Dans l'espace de dimension 3	862
H.2.2 Calculs d'intégrales triples	863
I Formes quadratiques, méthode de Gauss	865
I.1 Réduction de Gauss	865
I.2 Loi d'inertie de Sylvester	868
J Polynômes d'un élément d'une algèbre (unitaire)	869
J.1 Sous-algèbre engendrée par un élément	869
J.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal de α	869
J.3 Cas d'une algèbre intègre	871