

CA P E S  
A G R E G

MATHS

collection CAPES / Agrégation

---

# MATHÉMATIQUES

## pour le CAPES et l'Agrégation Interne

troisième édition

Jean de BIASI

---



# TABLE DES MATIÈRES : ALGÈBRE ET ANALYSE

<b>COMBINATOIRE</b> .....		<b>1</b>
Chapitre 1.	<i>p</i> -listes. Arrangements. Permutations .....	3
1.	Réunions d'ensembles finis .....	3
2.	Produits d'ensembles finis .....	3
3.	Arrangements et permutations .....	4
4.	Applications .....	5
Chapitre 2.	<i>Dénombrement des combinaisons</i> .....	7
1.	Définition .....	7
2.	Détermination des coefficients binomiaux .....	7
3.	Relations vérifiées par les coefficients binomiaux .....	7
4.	Triangle de Pascal .....	8
5.	Formule du binôme .....	9
6.	Applications .....	9
Chapitre 3.	<i>Séries formelles et combinatoire</i> .....	14
1.	Rappels sur les séries formelles .....	14
2.	Applications à des problèmes de dénombrement .....	15
Chapitre 4.	<i>Quelques triangles analogues à celui de Pascal</i> .....	17
1.	Nombres de <i>Stirling</i> de première espèce .....	17
2.	Nombres de <i>Stirling</i> de deuxième espèce .....	18
3.	Nombre de surjections d'un ensemble fini sur un ensemble fini .....	19
4.	Les matrices de <i>Stirling</i> <i>s</i> et <i>S</i> inverses l'une de l'autre .....	20
5.	Exercice .....	20
Chapitre 5.	<i>Suite de Fibonacci</i> .....	22
1.	Définition .....	22
2.	Valeur et propriétés des nombres $F_n$ .....	22
Chapitre 6.	<i>Principes généraux de combinatoire</i> .....	25
<b>ARITHMÉTIQUE</b> .....		<b>29</b>
Chapitre 7.	<i>Les nombres entiers naturels</i> .....	31
1.	Définition .....	31
2.	Addition .....	31
3.	Multiplication .....	32
4.	Compléments sur la récurrence .....	32
Chapitre 8.	<i>Division euclidienne dans <math>\mathbb{N}</math> et dans <math>\mathbb{Z}</math></i> .....	34
1.	Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ .....	34
2.	Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ .....	34
3.	Applications .....	35
Chapitre 9.	<i>PGCD - PPCM</i> .....	40
1.	PGCD .....	40
2.	PPCM .....	41
3.	Applications à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .....	42
4.	Utilisation de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers .....	42
5.	Lien entre PGCD, PPCM et idéaux de $\mathbb{Z}$ .....	43
6.	Exercices .....	43

Chapitre 10. <i>Nombres premiers</i> .....	45
1. Définition .....	45
2. Propriétés .....	45
3. Crible d'Ératosthène .....	46
4. Programme Quick Basic .....	46
5. Nombres premiers et nombres premiers entre eux .....	47
6. Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers .....	47
7. Deux résultats classiques .....	48
8. Quelques compléments .....	51
9. Exercice .....	51
Chapitre 11. <i>Nombres de Fermat - constructions à la règle et au compas</i> .....	52
1. Introduction .....	52
2. Recherche des diviseurs éventuels des nombres de Fermat .....	53
3. Nombres de Fermat et construction des polygones réguliers .....	55
4. Autres conséquences du théorème de Wantzel .....	60
Chapitre 12. <i>Construction du corps des rationnels</i> .....	61
1. Définition du corps des nombres rationnels .....	61
2. Propriétés du corps des nombres rationnels .....	62
Chapitre 13. <i>Nombres décimaux</i> .....	64
1. Fractions décimales .....	64
2. Nombres décimaux .....	66
3. Exercice .....	66
<b>ALGÈBRE</b> .....	<b>67</b>
Chapitre 14. <i>Nombres complexes</i> .....	69
1. Aperçu historique .....	69
2. Introduction des nombres complexes .....	70
3. Représentation géométrique .....	71
4. Automorphismes de $\mathbb{C}$ . Nombres complexes conjugués .....	72
5. Équation du second degré .....	72
6. Module et argument d'un nombre complexe .....	73
7. Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe .....	78
8. Nombres complexes et géométrie .....	81
9. Équations du troisième et du quatrième degré .....	83
10. Exercice sur le triangle équilatéral .....	86
11. La comptine de Bombelli .....	86
Chapitre 15. <i>Fonctions polynômes</i> .....	87
1. Définition .....	87
2. Opérations algébriques sur les polynômes .....	88
3. Factorisation d'un polynôme - racines d'un polynôme .....	89
4. Applications .....	91
5. Exercices .....	92
Chapitre 16. <i>Somme et produit des racines d'une équation du 2<sup>e</sup> degré</i> .....	93
1. Somme et produit des racines de $ax^2 + bx + c = 0$ .....	93
2. Applications .....	93

Chapitre 17. <i>Équations algébriques - relations entre coefficients et racines</i> . . . .	98
1. Fonctions symétriques . . . . .	98
2. Formules de <i>Newton</i> . . . . .	100
3. Élimination . . . . .	101
Chapitre 18. <i>Systèmes linéaires - méthode du pivot de Gauss</i> . . . . .	103
1. Exposé de la méthode . . . . .	103
2. Discussion sur le système triangulaire obtenu $S'$ . . . . .	104
3. Les erreurs d'arrondi . . . . .	105
4. Exercices . . . . .	106
<b>ANALYSE</b> . . . . .	<b>109</b>
Chapitre 19. <i>Suites numériques - convergence - comparaison</i> . . . . .	111
1. Définitions . . . . .	111
2. Convergence des suites numériques . . . . .	111
3. Propriétés des limites de suites convergentes . . . . .	112
4. Composition par une fonction continue . . . . .	113
5. Comparaison de suites . . . . .	113
6. Sous-suites ; valeur d'adhérence . . . . .	115
7. Approximation d'un nombre réel . . . . .	116
8. Exercice (faisant intervenir les intégrales de <i>Wallis</i> ) . . . . .	118
Chapitre 20. <i>Suites divergentes</i> . . . . .	120
1. Définition . . . . .	120
2. Suites divergeant vers l'infini . . . . .	120
3. Suites divergentes ne divergeant pas vers l'infini . . . . .	120
4. Opérations, composition, comparaison . . . . .	121
5. Exercice . . . . .	122
Chapitre 21. <i>Suites <math>a^n, n^h, n!</math></i> . . . . .	123
1. Étude des suites de terme général $a^n, n^h, n!$ . . . . .	123
2. Croissance comparée . . . . .	124
3. Exemples . . . . .	124
Chapitre 22. <i>Suites récurrentes [suites définies par <math>u_0</math> et <math>u_{n+1} = f(u_n)</math>]</i> . . . . .	126
A : $f$ est une fonction affine . . . . .	126
1. Cas particuliers . . . . .	126
2. Cas général . . . . .	127
3. Exercices et exemples d'intervention . . . . .	127
B : $f$ est une fonction homographique . . . . .	128
C : $f$ est une fonction quelconque . . . . .	129
1. Généralités . . . . .	129
2. Application contractante ; théorème du point fixe . . . . .	129
Chapitre 23. <i>Calcul de la valeur approchée d'une intégrale <math>\int_a^b f(x) dx</math></i> . . . . .	133
1. Méthode des rectangles . . . . .	133
2. Méthode des trapèzes . . . . .	134
3. Méthode du point moyen . . . . .	134
4. Méthode de Simpson . . . . .	135

Chapitre 17. <i>Équations algébriques - relations entre coefficients et racines</i> . . . . .	98
1. Fonctions symétriques . . . . .	98
2. Formules de <i>Newton</i> . . . . .	100
3. Élimination . . . . .	101
Chapitre 18. <i>Systèmes linéaires - méthode du pivot de Gauss</i> . . . . .	103
1. Exposé de la méthode . . . . .	103
2. Discussion sur le système triangulaire obtenu $S'$ . . . . .	104
3. Les erreurs d'arrondi . . . . .	105
4. Exercices . . . . .	106
<b>ANALYSE</b> . . . . .	<b>109</b>
Chapitre 19. <i>Suites numériques - convergence - comparaison</i> . . . . .	111
1. Définitions . . . . .	111
2. Convergence des suites numériques . . . . .	111
3. Propriétés des limites de suites convergentes . . . . .	112
4. Composition par une fonction continue . . . . .	113
5. Comparaison de suites . . . . .	113
6. Sous-suites ; valeur d'adhérence . . . . .	115
7. Approximation d'un nombre réel . . . . .	116
8. Exercice (faisant intervenir les intégrales de <i>Wallis</i> ) . . . . .	118
Chapitre 20. <i>Suites divergentes</i> . . . . .	120
1. Définition . . . . .	120
2. Suites divergeant vers l'infini . . . . .	120
3. Suites divergentes ne divergeant pas vers l'infini . . . . .	120
4. Opérations, composition, comparaison . . . . .	121
5. Exercice . . . . .	122
Chapitre 21. <i>Suites <math>a^n</math>, <math>n^b</math>, <math>n!</math></i> . . . . .	123
1. Étude des suites de terme général $a^n$ , $n^b$ , $n!$ . . . . .	123
2. Croissance comparée . . . . .	124
3. Exemples . . . . .	124
Chapitre 22. <i>Suites récurrentes [suites définies par <math>u_0</math> et <math>u_{n+1} = f(u_n)</math>]</i> . . . . .	126
A : $f$ est une fonction affine . . . . .	126
1. Cas particuliers . . . . .	126
2. Cas général . . . . .	127
3. Exercices et exemples d'intervention . . . . .	127
B : $f$ est une fonction homographique . . . . .	128
C : $f$ est une fonction quelconque . . . . .	129
1. Généralités . . . . .	129
2. Application contractante ; théorème du point fixe . . . . .	129
Chapitre 23. <i>Calcul de la valeur approchée d'une intégrale</i> . . . . .	133
1. Méthode des rectangles . . . . .	133
2. Méthode des trapèzes . . . . .	134
3. Méthode du point moyen . . . . .	134
4. Méthode de Simpson . . . . .	135

5. Illustration .....	137
6. Calcul effectif .....	138
Chapitre 24. <i>Accélération de la convergence pour une suite</i> .....	139
1. Introduction .....	139
2. Méthodes d'accélération de la convergence .....	139
Chapitre 25. <i>Homomorphismes de <math>\mathbb{R}</math> dans lui-même</i> .....	144
1. Du corps $\mathbb{R}$ dans lui-même .....	144
2. Du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même .....	144
3. Du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_*^+, \cdot)$ dans le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ .....	144
4. Du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_*^+, \cdot)$ .....	145
5. Du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_*^+, \cdot)$ dans lui-même .....	146
6. Exercice .....	146
Chapitre 26. <i>Approximation d'une fonction par des polynômes</i> .....	147
1. Fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .....	147
2. Fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ .....	147
3. Fonctions $x \mapsto \sin x$ , $x \mapsto \cos x$ .....	147
4. Fonction logarithme et fonction exponentielle .....	148
5. Exercice .....	149
Chapitre 27. <i>Équation différentielle <math>ay'' + by' + cy = 0</math></i> .....	150
1. Définitions .....	150
2. Intégration de (E) .....	150
3. Une caractérisation des fonctions sinus et cosinus .....	151
Chapitre 28. <i>Moyennes de n nombres positifs</i> .....	152
1. Définitions .....	152
2. Théorème .....	152
3. Applications .....	153
4. Une inégalité trigonométrique .....	154
Chapitre 29. <i>Les fonctions circulaires : une introduction inversée</i> .....	155
1. La fonction tangente .....	155
2. Les fonctions sinus et cosinus .....	156
3. Mise en garde .....	158
4. Valeur approchée de $\pi$ avec mille décimales .....	159
Chapitre 30. <i>Limite - continuité</i> .....	160
1. Rappels .....	160
2. Limite .....	160
3. Continuité .....	164

# TABLE DES MATIÈRES : GÉOMÉTRIE

## THÉORÈMES ET CONFIGURATIONS DE BASE ... 169

Chapitre 31. <i>Théorème de Thalès</i> .....	171
1. Deux axiomes préliminaires .....	171
2. Théorème de <i>Thalès</i> dans le plan .....	172
3. Théorème de <i>Thalès</i> dans l'espace .....	174
4. Applications .....	175
5. Projections .....	176
Chapitre 32. <i>Produit scalaire</i> .....	178
1. Rapport de projection de deux axes .....	178
2. Produit scalaire de deux vecteurs .....	179
3. Applications du produit scalaire .....	180
Chapitre 33. <i>Produit vectoriel - Produit mixte</i> .....	183
1. Produit vectoriel .....	183
2. Produit mixte .....	185
3. Généralisation .....	186
Chapitre 34. <i>Barycentre</i> .....	188
1. Fonction vectorielle de <i>Leibniz</i> .....	188
2. Barycentre de $n$ points pondérés .....	188
3. Applications affines .....	190
4. Convexité .....	190
5. Quelques barycentres classiques .....	191
6. Fonction scalaire de <i>Leibniz</i> .....	195
7. Trois résultats classiques .....	197
8. Triangle podaire et droite de <i>Simson</i> .....	199
9. Exercices .....	200
Chapitre 35. <i>La droite en géométrie plane</i> .....	204
1. Rappel .....	204
2. Représentations paramétriques .....	204
3. Équation cartésienne .....	205
4. Compléments en géométrie euclidienne .....	207
5. Exercices .....	208
Chapitre 36. <i>Droites et plans dans l'espace</i> .....	211
1. La droite .....	211
2. Le plan .....	211
3. Positions relatives de deux plans .....	212
4. Positions relatives d'une droite et d'un plan .....	213
5. Positions relatives de deux droites .....	214
6. Plans contenant une droite donnée .....	214
7. Cas de la géométrie euclidienne .....	214
Chapitre 37. <i>Harmonicité</i> .....	218
1. Notion de plan projectif .....	218
2. Birapport .....	219

3.	Division harmonique .....	220
4.	Faisceau harmonique .....	221
5.	Birapport de quatre points cocycliques .....	224
Chapitre 38. <i>Le cercle</i> .....		226
1.	Définition - Équation .....	226
2.	Positions relatives d'une droite et d'un cercle .....	226
3.	Positions relatives de deux cercles .....	227
4.	Propriétés angulaires du cercle .....	229
5.	Puissance d'un point par rapport à un cercle .....	232
6.	Cercles orthogonaux .....	235
7.	Faisceaux de cercles .....	237
8.	Polarité par rapport à un cercle .....	242
Chapitre 39. <i>Droites et cercles remarquables dans un triangle</i> .....		247
1.	Médianes .....	247
2.	Médiatrices .....	247
3.	Hauteurs .....	247
4.	Droite et cercle d'Euler .....	248
5.	Bissectrices, Cercle inscrit et cercles exinscrits .....	248
6.	Transversales et céviennes .....	249
7.	Droite de Simson et droite de Steiner .....	251
8.	Exercice .....	253
Chapitre 40. <i>Relations métriques dans un triangle quelconque</i> .....		254
1.	Systèmes fondamentaux .....	254
2.	Somme et différence des carrés des longueurs de deux côtés .....	255
3.	Aire d'un triangle .....	256
4.	Cas d'isométries des triangles quelconques .....	257
Chapitre 41. <i>Relations métriques dans un triangle rectangle</i> .....		258
1.	Relations métriques .....	258
2.	Relations trigonométriques .....	259
3.	Applications .....	259
4.	Les triplets pythagoriciens .....	260
5.	Démonstrations artisanales du théorème de Pythagore .....	261
5.	Cas d'isométries des triangles rectangles .....	261
Chapitre 42. <i>Quadrilatères convexes</i> .....		262
1.	Propriétés caractéristiques de certains quadrilatères .....	262
2.	Quadrilatère convexe inscriptible. Formulaire .....	265
3.	Un problème d'extremum .....	266
Chapitre 43. <i>Le tétraèdre orthocentrique</i> .....		268
1.	Existence et propriétés fondamentales .....	268
2.	Droite et sphères d'Euler d'un tétraèdre orthocentrique .....	269
Chapitre 44. <i>Isogonalité</i> .....		271
1.	Points inverses par rapport à un triangle .....	271
2.	Étude barycentrique .....	273
3.	Les cercles d'Apollonius .....	275
4.	Coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle .....	275
5.	Transformée d'une courbe .....	276

Chapitre 45. <i>Les polyèdres réguliers et semi-réguliers</i> .....	278
1. Les cinq polyèdres réguliers convexes .....	278
2. Les quatre polyèdres réguliers concaves .....	283
3. Les polyèdres semi-réguliers .....	283
<b>TRANSFORMATIONS</b> .....	
<b>285</b>	
Chapitre 46. <i>Généralités sur les isométries</i> .....	287
1. Définition .....	287
2. Propriétés .....	287
3. Isométries positives - Isométries négatives .....	289
4. Groupe des isométries .....	289
5. Isométries vectorielles .....	289
6. Exercice .....	290
Chapitre 47. <i>Isométries du plan</i> .....	292
1. Réflexion par rapport à une droite .....	292
2. Translation .....	292
3. Rotation .....	293
4. Produits d'isométries .....	294
5. Description des isométries grâce aux points fixes .....	295
6. Réflexion du plan échangeant deux points .....	297
7. Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes .....	298
8. Exercices .....	299
Chapitre 48. <i>Isométries de l'espace</i> .....	303
1. Étude de quelques exemples .....	303
2. Produits d'isométries - les isométries fondamentales .....	304
3. Retournements .....	306
4. Description des isométries de l'espace grâce aux points fixes .....	308
5. Réflexion échangeant deux points - plan médiateur .....	310
6. Exercices et remarques .....	311
Chapitre 49. <i>Isométries conservant un ensemble fini de points</i> .....	313
1. Généralités .....	313
2. Les isométries du plan conservant certains polygones .....	314
3. Les isométries du tétraèdre régulier .....	316
4. Les isométries du cube et de l'octaèdre régulier .....	317
Chapitre 50. <i>Groupe des homothéties-translations</i> .....	319
1. Définition d'une homothétie .....	319
2. Les homothéties-translations .....	319
3. Transformées des figures usuelles .....	321
4. Applications de l'homothétie .....	321
Chapitre 51. <i>Similitudes planes</i> .....	324
1. Définition ; groupe des similitudes directes .....	324
2. Similitudes directes et nombres complexes .....	326
3. Forme réduite d'une similitude directe .....	327
4. Similitudes indirectes .....	328
5. Cas de similitude des triangles .....	331
6. Applications .....	331

Chapitre 52. <i>Inversion plane</i> .....	333
1. Définition et premières propriétés .....	333
2. Inverse d'une droite ; inverse d'un cercle .....	336
3. Applications de l'inversion .....	338
4. Inverse d'une conique .....	342
Chapitre 53. <i>Homographies dans le plan complexe</i> .....	345
1. La sphère de <i>Riemann</i> .....	345
2. Généralités sur les homographies .....	345
3. Suite récurrente associée à une homographie .....	346
4. Étude du cas particulier $z \mapsto (z - a)/(z - b)$ .....	347
<b>GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - CINÉMATIQUE ...</b>	<b>349</b>
Chapitre 54. <i>Courbes planes paramétrées</i> .....	351
1. Définition .....	351
2. Étude locale .....	351
3. Étude globale .....	353
4. Exercice .....	354
Chapitre 55. <i>Courbes planes en coordonnées polaires</i> .....	358
1. Introduction .....	358
2. Équations de quelques courbes .....	359
3. Étude locale .....	360
4. Étude globale .....	361
5. Étude de la courbe d'équation $\rho = a [1 + \tan(\theta/2)]$ .....	362
Chapitre 56. <i>Courbure - Développée - Enveloppe - Cinématique</i> .....	364
1. Abscisse curviligne - Repère de <i>Frenet</i> - Courbure .....	364
2. Enveloppe d'une famille de droites .....	366
3. Cinématique .....	368
4. Exercice : enveloppe de la droite de <i>Simson</i> .....	373
Chapitre 57. <i>La cycloïde</i> .....	374
1. Définition et représentation géométrique .....	374
2. Tangente en un point .....	375
3. Mouvement d'un point pesant sur une arche de cycloïde .....	376
4. La brachystochrone .....	377
5. Aire d'une arche de cycloïde : calcul historique .....	379
6. Aire et longueur d'une arche de cycloïde à l'aide d'une cycloïde approchée .....	380
7. Aire d'une arche de cycloïde à l'aide d'une généralisation .....	381
Chapitre 58. <i>Les lois de Kepler</i> .....	383
1. Rappels .....	383
2. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien .....	384
Chapitre 59. <i>Courbes gauches</i> .....	388
1. Plan osculateur ; repère de <i>Frenet</i> ; courbure ; torsion .....	388
2. Allure de la courbe au voisinage d'un point trirégulier .....	391
3. Un exemple : les hélices .....	391
4. Exercices .....	393

	<b>LES CONIQUES</b> .....	<b>395</b>
Chapitre 60. <i>La parabole</i> .....		397
1. Étude ponctuelle .....		397
2. Étude tangentielle .....		399
3. Intersection d'une droite et d'une parabole (étude géométrique) .....		402
Chapitre 61. <i>L'ellipse</i> .....		403
1. Étude ponctuelle .....		403
2. Étude tangentielle .....		408
3. Exercice .....		412
Chapitre 62. <i>L'hyperbole</i> .....		413
1. Étude ponctuelle .....		413
2. Étude tangentielle .....		416
3. Exercice .....		419
Chapitre 63. <i>Courbes d'équation <math>ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0</math></i> .....		420
1. Transformée de l'équation par rotation du repère .....		420
2. Nature de la courbe .....		420
Chapitre 64. <i>Puissance d'un point par rapport à une conique</i> .....		422
1. Équation normalisée d'une conique .....		422
2. Puissance d'un point par rapport à une conique quelconque .....		423
3. Condition de cocyclicité de quatre points d'une conique .....		423
4. Conique radicale de deux coniques .....		424
5. Coniques conjuguées .....		425
6. Généralisation de la notion de faisceau de cercles .....		426
7. Quelques applications .....		426
8. Interprétation en géométrie de l'espace .....		428
Chapitre 65. <i>Sections planes de quadriques</i> .....		429
1. Généralités et premiers exemples .....		429
2. Cylindres de révolution .....		430
3. Cônes de révolution .....		433
	<b>EXERCICES</b> .....	<b>437</b>
<i>Dénombrement de triangles (439) – Partage du plan par <math>n</math> droites et de l'espace par <math>n</math> plans (439) – Jeu de pile ou face (440) – Démonstration combinatoire de la formule du crible (441) – Indicateur d'Euler et probabilités (442) – Le problème des anniversaires (442) – Une application de la formule de Bayes (443) – Exercices sur les nombres premiers (443) – Exemple de raisonnement par récurrence (444) – Trigonométrie : application à des polygones réguliers (445) – Equation du cercle circonscrit à un triangle (446) – Moyenne arithmético-géométrique (446) – Triangle aléatoire (449) – Construction au compas seul (449) – Symédianes d'un triangle rectangle (450) – Alignement des milieux des diagonales d'un quadrilatère complet (451) – Une table tournante (451) – Aire d'un segment de parabole (452) – Triangles particuliers inscrits dans une ellipse (454) – Ellipse et droite de Simson (454) – Ellipse et produit vectoriel (455) – Triangle isocèle ou non (455).</i>		
Index alphabétique .....		461