

**LES RECETTES
DE SUP**

**MPSI
PCSI
PTSI**

Mathématiques

- *Des rappels de cours*
- *Des méthodes, illustrées par des exemples précis, pour aider à résoudre les exercices*
- *Des énoncés de sujets du concours*
- *Des corrections détaillées et commentées*

Stéphane Flon



Table des matières

1	Nombres complexes	1
1.1	Choisir une représentation d'un nombre complexe	1
1.1.1	La représentation neutre	1
1.1.2	La représentation algébrique	2
1.1.3	La représentation trigonométrique	2
1.1.4	La représentation géométrique	4
1.2	Résoudre une équation algébrique simple	5
1.2.1	Trouver une racine carrée sous forme algébrique	5
1.2.2	Résoudre une équation du second degré	5
1.2.3	Déterminer les racines n -ièmes d'un nombre complexe	6
1.3	Retrouver des formules de trigonométrie	7
1.3.1	Retrouver les formules élémentaires	7
1.3.2	Linéariser une expression polynomiale trigonométrique	8
1.3.3	Opération « inverse » de la linéarisation	8
1.3.4	Simplifier une somme trigonométrique	9
1.4	Exercices	10
1.4.1	Entraînement	10
1.4.2	Perfectionnement	16
2	Fonctions usuelles	23
2.1	Montrer une formule	23
2.2	Simplifier une expression ou résoudre une équation	24
2.3	Vérifier une relation	25
2.4	Exercices	27
2.4.1	Entraînement	27
2.4.2	Perfectionnement	30
2.5	Problème : formules pour tangente et arctangente	35
3	Géométrie dans le plan ou l'espace	41
3.1	Applications multilinéaires classiques dans le plan ou l'espace	41
3.2	Déterminer une équation d'un sous-espace affine	43
3.3	D'une équation cartésienne à une équation paramétrique	44
3.4	Calcul de distance, de perpendiculaire commune	46
3.5	Déterminer un lieu	47
3.6	Exercices	50
3.6.1	Entraînement	50
3.6.2	Perfectionnement	56

3.7	Problème : inversion et points rationnels sur un cercle	61
4	Équations différentielles	67
4.1	Résolution d'une équation différentielle standard	67
4.1.1	Définir un plan d'étude	67
4.1.2	Résolution de l'équation homogène associée	69
4.1.3	Recherche d'une solution particulière	70
4.2	Problème de raccord dans le cas du premier ordre	74
4.3	Se ramener à une équation différentielle	76
4.4	Exercices	78
4.4.1	Entraînement	78
4.4.2	Perfectionnement	85
4.5	Problème : d'une solution à une solution paire ou impaire	90
5	Structures algébriques, arithmétique	95
5.1	Utiliser la notion de sous-structure	95
5.2	Utiliser la notion de morphisme	97
5.3	Étudier une isomorphie	99
5.4	Étude de la structure de groupe	100
5.4.1	Déterminer si un groupe est abélien	100
5.4.2	Calculer dans un groupe	100
5.5	Étudier la structure d'anneau	101
5.5.1	Calculer dans un anneau	101
5.5.2	Éléments simplifiables et diviseurs de zéro	102
5.6	Calculer dans un corps	103
5.7	Arithmétique	103
5.7.1	Déterminer si un nombre est premier	103
5.7.2	Étudier une divisibilité	103
5.7.3	PGCD, relation de Bézout, nombres premiers entre eux	104
5.7.4	Calculer un PPCM	105
5.8	Exercices	106
5.8.1	Entraînement	106
5.8.2	Perfectionnement	111
6	Suites	119
6.1	Quelles questions se poser sur une suite ?	119
6.1.1	La suite est-elle majorée, minorée, bornée ?	119
6.1.2	La suite est-elle monotone ?	120
6.2	Comment montrer qu'une suite admet une limite ?	121
6.2.1	Tout en déterminant sa limite	121
6.2.2	Sans déterminer sa limite	122
6.2.3	Lorsqu'on a une idée de sa limite	122
6.3	Montrer qu'une suite n'admet pas de limite	123
6.4	Comparaison locale	123
6.4.1	Les notations	124
6.4.2	L'équivalence et la somme	124
6.4.3	Composition et relations de comparaison	124
6.5	Trois manières de revenir à la définition de la convergence	125
6.6	Quelques techniques <i>ad hoc</i>	126

8.3	Relations ensemblistes entre sous-espaces vectoriels	205
8.3.1	Prouver une inclusion entre sous-espaces vectoriels	205
8.3.2	Prouver une supplémentarité	206
8.4	Applications linéaires	206
8.4.1	Exemples classiques d'applications linéaires	206
8.4.2	Déterminer si une application est linéaire	208
8.4.3	Calculer le rang d'une application linéaire	208
8.4.4	Prouver l'injectivité (et autre) d'une application linéaire	209
8.4.5	Utiliser l'injectivité (et autre) d'une application linéaire	210
8.4.6	Résoudre une équation linéaire	210
8.5	Étudier une famille de vecteurs	211
8.5.1	Étudier la liberté	211
8.5.2	Montrer qu'une famille est liée	214
8.5.3	Étudier le caractère générateur	214
8.5.4	Déterminer si la famille est une base	215
8.5.5	Déterminer une base	215
8.6	Calculer dans l'anneau des endomorphismes	215
8.6.1	Que dire de deux endomorphismes commutant ?	216
8.6.2	Polynômes d'un endomorphisme	216
8.6.3	Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme	217
8.6.4	Projecteurs et symétries	218
8.7	Exercices	220
8.7.1	Entraînement	220
8.7.2	Perfectionnement	224
9	Intégration	233
9.1	Calculer une intégrale	233
9.1.1	Calculer une primitive	233
9.1.2	Calculer une intégrale	235
9.2	Inégalités intégrales	237
9.3	Étudier une suite grâce au calcul intégral	239
9.3.1	Calculer la limite d'une suite de sommes de Riemann	239
9.3.2	Calculer la limite d'une suite d'intégrales	239
9.3.3	Calculer une limite par comparaison somme-intégrale	241
9.4	Exercices	242
9.4.1	Entraînement	242
9.4.2	Perfectionnement	248
9.5	Problème de synthèse analyse : un calcul de $\zeta(2)$	254
9.6	Problème classique : intégrales de Wallis	259
10	Développements limités	263
10.1	Relations de comparaison	263
10.2	Utiliser les différentes formules de Taylor	264
10.3	Calculer un développement limité	265
10.3.1	Justifier l'existence d'un développement limité	265
10.3.2	Opérations sur les développements limités	266
10.3.3	Quelques techniques de calcul	267
10.3.4	Mise en œuvre d'un calcul de développement limité	269
10.3.5	Développer ailleurs qu'en θ	269

10.3.6	Autres méthodes d'obtention d'un développement limité . . .	271
10.4	Utilisation des développements limités . . .	272
10.4.1	Calcul de limite, d'équivalents . . .	273
10.4.2	Développements asymptotiques . . .	274
10.4.3	Applications aux suites récurrentes . . .	274
10.4.4	Application à des étapes graphiques . . .	275
10.5	Exercices . . .	276
10.5.1	Entraînement . . .	276
10.5.2	Perfectionnement . . .	280
11	Polynômes et fractions rationnelles	285
11.1	Étudier l'ensemble richement structuré $\mathbb{K}[X]$. . .	285
11.1.1	Choisir une approche adaptée au problème . . .	285
11.1.2	Montrer la nullité d'un polynôme . . .	287
11.1.3	Montrer qu'une fonction est polynomiale (ou pas) . . .	288
11.1.4	Montrer qu'une famille de polynômes est libre . . .	289
11.1.5	Choisir et travailler dans une base adaptée au problème . .	289
11.1.6	Exemples polynomiaux classiques de linéarité . . .	291
11.2	Étudier les racines d'un polynôme . . .	291
11.2.1	Montrer l'existence ou trouver une racine d'un polynôme . .	291
11.2.2	Ordre de multiplicité d'une racine, polynôme scindé . . .	293
11.2.3	Utiliser les fonctions symétriques élémentaires des racines .	294
11.3	Étude arithmétique de $\mathbb{K}[X]$. . .	295
11.3.1	Montrer qu'un polynôme divise un autre (ou pas) . . .	295
11.3.2	Étudier l'irréductibilité d'un polynôme . . .	297
11.3.3	Effectuer une division euclidienne, calculer un reste . . .	297
11.3.4	Calculer le pgcd ou le ppcm de deux polynômes . . .	299
11.4	Décomposition en éléments simples . . .	301
11.4.1	Déterminer la partie entière de F . . .	301
11.4.2	Déterminer une partie polaire . . .	301
11.4.3	Trouver des relations entre les parties polaires . . .	303
11.4.4	Pratique de la décomposition . . .	303
11.5	Utilité de la décomposition en éléments simples . . .	304
11.6	Un cas particulier important : la dérivée logarithmique . . .	304
11.7	Exercices . . .	306
11.7.1	Entraînement . . .	306
11.7.2	Perfectionnement . . .	316
12	Matrices	323
12.1	L'aspect vectoriel des matrices . . .	323
12.1.1	Rappels . . .	323
12.1.2	Exploiter la structure des espaces matriciels . . .	323
12.2	Apprivoiser le produit matriciel . . .	324
12.2.1	Défrichage . . .	324
12.2.2	Calculer dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. . .	324
12.2.3	Bon comportement d'applications avec le produit . . .	325
12.3	Montrer que des matrices commutent . . .	326
12.4	Calculer le rang d'une matrice . . .	327
12.5	Calculer les puissances d'une matrice carrée . . .	328

12.6	Inverse d'une matrice	330
12.6.1	Preuves constructives	331
12.6.2	Preuves non constructives	333
12.6.3	Montrer une non inversibilité	333
12.7	Résoudre un système linéaire	333
12.8	Étudier une suite récurrente linéaire	334
12.9	Matrices et changement de base	335
12.9.1	Comment se rappeler les formules de changement de base?	335
12.9.2	Comment déterminer si deux matrices sont équivalentes?	337
12.9.3	Montrer que deux matrices ne sont pas semblables	338
12.9.4	Comment montrer que deux matrices sont semblables?	339
12.10	Exercices	341
12.10.1	Entraînement	341
12.10.2	Perfectionnement	347
12.11	Problème : fonctions de matrices nilpotentes	356
12.12	Problème : sous-groupes à un paramètre de $GL_p(\mathbb{C})$	362
13	Déterminant	367
13.1	Piqûre de rappel	367
13.2	Utilité d'un déterminant	367
13.2.1	Qu'exprime la nullité d'un déterminant?	367
13.2.2	Signe d'un déterminant	368
13.2.3	Invariance du déterminant par similitude	368
13.2.4	Utiliser la comatrice	368
13.2.5	Systèmes de Cramer	369
13.2.6	Propriétés calculatoires du déterminant	369
13.2.7	Formule compliquée du déterminant	369
13.3	Comment calculer un déterminant?	370
13.4	Exercices	372
13.4.1	Entraînement	372
13.4.2	Perfectionnement	378
14	Espaces euclidiens	385
14.1	Montrer qu'une application définit un produit scalaire	385
14.1.1	Produit scalaire canonique	385
14.1.2	Produit scalaire intégral	386
14.1.3	Produit scalaire d'interpolation	387
14.1.4	Est-ce tout?	388
14.2	Qu'apporte la notion d'orthogonalité?	389
14.2.1	L'orthogonalité est stable par combinaison linéaire	389
14.2.2	De l'orthogonalité à la liberté	389
14.2.3	Supplémentaire orthogonal	389
14.2.4	Norme induite par un produit scalaire	389
14.2.5	Déterminer si un vecteur est nul	390
14.2.6	Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz	390
14.2.7	Montrer l'orthogonalité de deux vecteurs	391
14.3	Problèmes de famille	391
14.3.1	Montrer qu'une famille est une base orthogonale	391
14.3.2	Coordonnées dans une base orthonormale	392

TABLE DES MATIÈRES

- 14.3.3 Quel est l'intérêt du procédé de Schmidt ? 392
- 14.3.4 Trouver une base orthonormale d'un espace euclidien 393
- 14.4 Projétés orthogonaux et distance à un sous-espace 394
 - 14.4.1 Déterminer un projeté orthogonal sur un sous-espace 394
 - 14.4.2 Calculer la distance d'un point à un sous-espace 396
- 14.5 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales 396
 - 14.5.1 Généralités 397
 - 14.5.2 Automorphismes orthogonaux du plan 398
 - 14.5.3 Automorphismes orthogonaux dans \mathbb{R}^3 euclidien canonique 401
- 14.6 Isométries 401
 - 14.6.1 Montrer qu'une application est une isométrie 403
- 14.7 Exercices 403
 - 14.7.1 Entraînement 410
 - 14.7.2 Perfectionnement 415
- 14.8 Problème de synthèse sur les espaces euclidiens 415

6.7	Suite récurrente	127
6.7.1	Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie	127
6.7.2	Préparer l'étude	128
6.7.3	Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	129
6.7.4	Déterminer un intervalle d'étude	131
6.8	Exercices	131
6.8.1	Entraînement	139
6.8.2	Perfectionnement	144
6.9	Problème : étude d'une suite récurrente	151
7	Fonctions réelles d'une variable réelle	151
7.1	Stabilité des propriétés rencontrées	151
7.2	Problème de limite	155
7.2.1	Montrer l'existence d'une limite tout en la calculant	155
7.2.2	Montrer l'existence d'une limite sans la calculer	156
7.2.3	Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite	156
7.2.4	Étudier une continuité ponctuelle	157
7.2.5	Étudier une dérivabilité ponctuelle	157
7.3	Extension d'un résultat par continuité	159
7.4	Parties stables par image continue	159
7.5	Étudier l'uniforme continuité, le caractère lipschitzien	160
7.6	Dériver sur un intervalle	161
7.6.1	Calculer une dérivée	162
7.6.2	Calculer une dérivée n-ième	163
7.7	Utiliser la dérivation sur un intervalle	164
7.8	Montrer qu'une fonction est de classe C^1	165
7.9	Chercher et exploiter les extrémums d'une fonction	166
7.10	Recherche de zéros ou de points fixes d'une fonction	166
7.11	Étudier une équation fonctionnelle	167
7.12	Convexité	168
7.13	Exercices sur la continuité	170
7.13.1	Entraînement	170
7.13.2	Perfectionnement	175
7.14	Exercices sur la dérivation	179
7.14.1	Entraînement	179
7.14.2	Perfectionnement	186
7.15	Quelques résultats sur l'uniforme continuité	190
7.16	Problème : taux d'accroissement d'une fonction	193
8	Espaces vectoriels	199
8.1	Exploiter le concept de linéarité	199
8.1.1	La notion de combinaison linéaire	199
8.1.2	Propriété stable par combinaison linéaire	200
8.1.3	Exemples de propriétés stables par combinaison linéaire	201
8.2	Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	202
8.2.1	Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel	202
8.2.2	Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels	202
8.2.3	Montrer qu'une partie de E en est un sous-espace vectoriel	203
8.2.4	Déterminer une dimension	204