

**REPEBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des sciences de l'ingénieur**  
Département d'Aéronautique

**PROJET DE FIN D'ÉTUDE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DE DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN**  
**AERONAUTIQUE**

Filière : Construction et Maintenance en Aéronautique  
Spécialité : Propulsion

**THEME**

**Etude de la stabilité d'un drone-type**  
**Et simulation numérique.**

**Présenté par :**

- Mbodou Lol  
- Gomes de Carvalho Eunilde Jorge

**Encadré par :**

M.C. (A) .ALLALI Abderrazak  
M.C. (B) RAHMOUNI Mohamed

# -TABLE DES MATIÈRES-

RESUMEE	
DÉDICACES	
REMERCIEMENTS	
LISTES DES FIGURES ET GRAPHES	
LISTE DES TABLEAUX	
NOMENCLATURE	
INTRODUCTION GENERALE	
<b>CHAPITRE 1. GENERALITES ET PRESENTATION DU DRONE</b>	
I.1. Introduction.....	01
I.2. Les drones.....	01
I.2.1. Classification des drones.....	01
I.2.1.1. Principales catégories.....	01
I.2.1.2. Les mini drones (MUAV).....	02
I.2.1.3. Les micros drones ( $\mu$ UAV).....	03
I.2.1.4 Missions des hélicoptères drones.....	03
I.3. Présentation du drone .....	06
I.3.1.Caractéristique géométrique .....	06
I.3.2. La propulsion.....	10
I.3.3. Caractéristique de masse .....	10
<b>CHAPITRE II. GENERALITES ET CONVENTIONS DE LA MECANIQUE DU VOL</b>	
II.1. L’atmosphère standard.....	12
II.2. L’indicateur de vitesse.....	13
II.3. Trièdres de référence.....	15
II.3.1. Repère aérodynamique .....	15
II.3.2. Repère lié au drone .....	15
II.3.3. Repère lié à la terre .....	16
II.4. Les angles de la mécanique du vol .....	17
II.5. Les principales phases du vol .....	19
II.5.1. Le vol rectiligne uniforme en palier .....	19
II.5.2. La montée rectiligne uniforme .....	20
II.5.3. La descente rectiligne uniforme .....	21
II.5.4. Le virage symétrique en palier a vitesse constante.....	21
II.5.5. Le vol plane .....	22
<b>III ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT</b>	
III.1. Introduction.....	24
III.2. Les équations du mouvement.....	24
III.2.1. Contribution des rotors.....	26
III.2.2. Résumé et discussion .....	27
III.3. Théorie des petites perturbations.....	29
III.3.1. Linéarisation des équations.....	29
III.3.2. Forces et couples aérodynamiques.....	32
III.3.3. Forme adimensionnelle des équations.....	37
III.3.4. Dérivées aérodynamiques dimensionnelles.....	39

## CHAPITRE IV. LA STABILITE DU DRONE

IV.1. Introduction à la stabilité.....	41
IV.1.1. Choix des axes.....	41
IV.2. STABILITÉ STATIQUE ET GUIDAGE.....	43
IV.2.1. Introduction.....	43
IV.2.2. Stabilité statique longitudinale manche fixe.....	44
IV.2.2.1. Critère de stabilité statique longitudinale et implications.....	44
IV.2.2.2. Moment de tangage.....	46
IV.2.2.3. Point neutre manche fixe.....	50
IV.3. Guidage et stabilité statique manche libre longitudinaux.....	52
IV.3.1. Angle de gouverne.....	52
IV.3.2. Couple de charnière et effort dans le manche.....	56
IV.3.3. Point neutre manche libre.....	60
IV.3.4. Compensateurs et gradient de force dans le manche.....	62
IV.4. Stabilité statique latérale.....	65
IV.4.1. Notations et remarques préalables.....	65
IV.4.2. Stabilité directionnelle et guidage.....	68
IV.4.3. Stabilité en roulis et guidage.....	71
IV.5. STABILITÉ DYNAMIQUE ET RÉPONSE AUX COMMANDES	
IV.5.1. Introduction.....	77
IV.5.2. Solution générale des équations des petites perturbations.....	78
IV.5.2.1. Forme de la solution.....	78
IV.5.2.2. Caractéristiques du mouvement.....	78
IV.5.3. Critère de stabilité.....	80
IV.5.4. Modes longitudinaux.....	81
IV.5.4.1. Valeurs propres.....	81
IV.5.4.2. Approximation des modes longitudinaux.....	81
IV.5.4.3. Phugoïde.....	83
IV.5.4.4. Oscillation d'incidence.....	85
IV.5.5. Stabilité statique longitudinale.....	86
IV.5.5.1. Effet des conditions de vol sur les modes longitudinaux.....	87
IV.5.5.1.1. Effet de la vitesse et de l'altitude.....	87
IV.5.5.1.2. Effet du centrage.....	87
IV.5.6. Modes latéraux.....	88
IV.5.6.1. Dérivées aérodynamiques, matrice du système et équation caractéristique.....	88
IV.5.6.2. Valeurs propres.....	88
IV.5.7. Présentation des modes.....	88
IV.5.7.1. Mode 1 : mode spiral.....	88
IV.5.7.2. Mode 2 : convergence en roulis.....	89
IV.5.7.3. Mode 3 : Le roulis hollandais (Dutch roll).....	90
IV.5.8. Approximation des modes latéraux.....	91
IV.5.8.1. Mode spiral.....	91
IV.5.8.2. Convergence en roulis.....	93
IV.5.8.3. Roulis hollandais.....	94

IV.6. Réponse aux commandes.....	94
IV.6.1. Introduction.....	94
IV.6.1.1. Guidage longitudinal.....	95
IV.6.1.2 Guidage latéral.....	95
IV.6.1.3. Utilisation des forces aérodynamiques pour le contrôle de la trajectoire.....	96
IV.6.2. Réponse longitudinale.....	100
IV.6.3. Réponse latérale.....	101
IV.6.3.1. Réponse transitoire aux ailerons et à la gouverne de direction.....	102
IV.6.4. Réponse aux commandes longitudinales et latérales.....	103
IV.6.5. Solution des problèmes de réponse aux commandes.....	105
IV.6.5.1. L'analyse à l'aide de la fonction de transfert (disponible dans <b>MATALAB</b> ).....	105
IV.6.5.2. L'analyse à l'aide de la fonction d'état (disponible dans <b>MATALAB</b> ).....	160
<b>CHAPITRE V. OUTILS DE MODELISATION ET DE CALCUL C.F.D</b>	
V.1. Présentation de SolidWorks.....	107
V.2. Présentation du générateur de maillage ICEM-CFD.....	111
V.3. Initiation à la simulation numérique par (Fluent/UNS).....	112
V.3.1 Conditions aux limites.....	114
V.3.2. Calcul de l'écoulement autour du drone en utilisant FLUENT/UNS.....	115
V.3.3. Solution.....	116
V.3.4. Présentation des résultats de calcul.....	118
V.3.5. Simulation numérique.....	119
V.4. Application sur le modèle – type.....	125
V.4.1. Système longitudinal.....	125
V.4.1.1. Réponse à un échelon d'angle de gouverne.....	127
V.4.1.2. Réponse à la commande de poussée.....	132
V.4.2. Système latérale.....	136
V.4.2.1. Réponse latérale aux ailerons.....	138
V.4.2.3. Réponse latérale à la gouverne de direction.....	139
CONCLUSION GENERALE	
BIBLIOGRAPHIE	
ANNEXES	

## RESUME

Ce travail consiste une étude analytique des réponses aux commandes des drones qui a pour but d'assurer la stabilité, l'équilibre, et le guidage en toute sécurité. Cette étude dynamique demande de préparer les équations du mouvement longitudinal et latéral qui doivent être analysées numériquement et graphiquement avec l'explication de l'influence des paramètres aérodynamiques ,et les paramètres de masse, inertie, dimension, et l'atmosphère, sur la nature des réponses. Dans ce cadre, on va prendre l'exemple d'un essai du modèle d'un drone cible supersonique réalisé dans le Langley, tunnel transonique de pression de 8 pieds pour déterminer la stabilité longitudinale et latérale ; et pour contrôler des caractéristiques aux vitesses transsoniques.

يشمل هذا العمل دراسة تحليلية للاستجابة لتسيير طائرات بدون طيار لغرض تأمين الاستقرار لإجراء هذه الدراسة الديناميكية يتعين إعداد معادلات الحركة الطولية و الجانبية التي يجب التوازن و التوجيه بكل أمان الأبعاد و القصور الذاتي ,معامل الوزن ,تحليلها عدديا و برسم بياني مع شرح الأثر الذي تحدثه المعاملات الديناميكية في هذا الإطار أخذنا مثال اختبار قوة نموذج طائرة بدون طيار تطير بسرعة .المحيط الهوائي على طبيعة هذه الاستجابات تفوق سرعة الصوت في نفق لانجلي ذو 8 لأجل تحديد الاستقرار الطولي و الجانبي لتحصن و السيطرة على ,أقدام .خصائص الطائرة عندما تكون سرعتها حول الصوتية

## ABSTRACT

The purpose of this work consists an analytical study of the responses to the commands of the drone is to ensure stability, balance, and guidance in full safety. This dynamic study requires preparing the equations of the longitudinal and lateral motion which must be analyzed numerically and graphically with the explanation of the influence of the aerodynamic parameters, and the parameters of mass, inertia, dimension, and the atmosphere, on the nature of the response. Within this framework, we will take the example of a test force of a model of target drone supersonic produced in transonic Langley tunnel of pressure of 8 feet to determine longitudinal and side stability and to control characteristics at the transonic speeds.

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail,*

*A mes parents décédés,*

*A ma mère Hadjé Haoua Kaça,*

*A mon père Alhadji Lol Boukar,*

*A mon oncle Abakar Mahamat Kaïla,*

*A mon frère Mahamat Mamadou Adam,*

*A mon frère Abakar Lol Malloum Imane,*

*A mon frère Hisseine Lol Boukar,*

*A ma cousine Hadjé Falmata Boukar Kaïla,*

*A tous mes tantes, oncles, cousins et cousines, frères et sœurs,*

*A mon binôme Eunilde Jorge Gomes de Carvalho,*

*A tous mes collègues d'Aéronautique, et mes amis,*

*un par un.*

*Mbodou Lol.*

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail,*

*A ma très chère mère « Joana Gomes »,*

*A mon très chère père, « Belarmino Carvalho »,*

*A mes sœurs, « Carina et Sonia », mon frère « Djony »,*

*A mes tantes, oncles, cousins et cousines,*

*A ma fille « Vallerie » tout particulièrement,*

*A mon amour Adelina Tunga,*

*A mon binôme Mbodou Lol,*

*A tous mes collègues d'Aéronautique, et mes amis*

*un par un.*

*Eunilde Jorge Gomes de Carvalho.*

## **Remerciement :**

Louange à notre seigneur « ALLAH » qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement. Louange à notre créateur qui nous a incités à acquérir le savoir c'est à Lui que nous adressons toutes nos gratitudes en premier lieu.

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à notre promoteur M.C. (A) ALLALI ABDERRAZAK qui a toujours été disponible, et dont les encouragements et les conseils judicieux qui nous ont été d'une très grande utilité, tant lorsque les travaux avançaient que dans les moments de doute.

Nos remerciements n'ont pas de limite pour monsieur RAHMOUNI MOHAMED qui s'est déplacé spécialement à notre domicile pour la finition de ce travail sur la partie pratique.

Nous remercions Mr. ABDELKADER KHARRET pour son soutien indéfectible en ligne depuis le CANADA jusqu'à la fin de notre travail.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail et qui nous ont honorés, en acceptant de juger notre travail.

Nous remercions le chef du département Prof. BOUKRAA SALAH ainsi que tous nos enseignants qui nous ont apportés jusqu'au terme de notre travail, ne restes qu'à leurs donné un tableau d'honneur de notre part.

Nous tenons à remercier sincèrement monsieur BELHAMISSI ABDERRAHMANE pour son agréable accueil pondant notre stage chez lui et CHEBAB NACIRA pour l'ensemble de ses conseils.

Nous remercions également tous nos entourages, particulièrement nos collègues de promotion à qui nous tenons à exprimer toutes nos sympathies pour avoir partagé plusieurs années d'études enrichissantes ensemble et spécialement à Mohammed Taifour Abdel ouahab.

Enfin sans oublier nos parents, frères et sœurs, cousins et cousines, qui n'ont ménagé aucun effort depuis notre séjour en Algérie, ainsi que tous nos amis, spécialement à Ibrahim Abakar Nassour et Jérémie Gomes de Brito.

## LISTE DES FIGURES ET GRAPHES

Fig. 1.1: Les premiers mini drones utilisés pendant la guerre du Golfe	2
Fig.1.2: Exemples de VTOL : les Cypher-I et -II américains et le Vigilant français	2
Fig.1.3: Utilisation de drones dans la recherche et le sauvetage	4
Fig.1.4: Utilisation de drones pour la surveillance	4
Fig.1.5: Utilisation de drones pour faire appliquer la loi	5
Fig.1.6: Utilisation de drones pour l'inspection	5
Fig.1.7: Utilisation des drones dans le domaine de la cartographie	5
Fig.1.8: Utilisation de l'hélicoptère drone dans le domaine de la cinématographie	5
Fig.1.9 : Le modèle type	9
Fig.1.10 : Les 03 vues du modèle type	9
Fig.1.11 : La photographie du modèle type	10
Fig.2.1 : Distribution de température en fonction de l'altitude	13
Fig.2.2 : Trièdre aérodynamique ( $G, x_a, y_a, z_a$ )	15
Fig.2. 3 : Trièdre d'avion ( $G, x, y, z$ )	15
Fig.2.4 : Repère terrestre.	16
Fig.2.5 : Repère aérodynamique et Coefficients des forces extérieures.	16
Fig.2.6 : angles aérodynamiques.	17
Fig.2.7 : L'inclinaison ( $\phi$ ).	17
Fig.2.8 : Le dérapage ( $\beta$ )	18
Fig.2.9 : Vol rectiligne uniforme en palier	19
Fig.2.10 : couples incidence – vitesse	19
Fig.2.11 : Montée rectiligne uniforme	20
Fig. 2.12 : Virage horizontal	21
Fig.2.13 : Vol plane	22
Fig.2.14 : Pente de descente	22
Fig.3.1 – Schéma-bloc de la dynamique de l'avion	28
Fig.4.1 : Axes de stabilité et gouvernes d'un avion	42
Fig.4.2 : Illustration de diverses variations de la stabilité statique	42
Fig.4.3 : Moment de tangage en fonction de l'incidence	45
Fig.4.4 : Configurations avec deux surfaces portantes	46
Fig.4.5 : Système de forces et moment sur l'aile	47
Fig.4.6 : Système de forces et moment sur l'empennage	49
Fig.4.7 : Gouverne de profondeur	53
Fig.4.8 : Effet de la déflexion de la gouverne de profondeur sur les coefficients aérodynamiques	54
Fig.4.9 : Pente de la courbe de portance à l'équilibre	55
Fig.4.10 : Détermination du point neutre par essais en vol	56
Fig. 4.11 : Schéma d'un système mécanique de commande de la gouverne de profondeur	57
Fig.4.12 : Géométrie d'un empennage horizontal	58
Fig.4.13 : Angle du compensateur à l'équilibre	64
Fig.4.14 : Effet du centrage sur la force dans le manche et son gradient au point d'équilibre	64
Fig.4.15 : Orientation de l'avion	67
Fig.4.16 : Avion en dérapage	68
Fig. 4.17 : Forces aérodynamiques sur la dérive	69
Fig.4.18 : Avion incliné en roulis	73
Fig.4.19 : Rôle du dièdre	73
Fig.4.20 : Effet de la flèche sur $C$	74
Fig.4.21 : Effet du fuselage sur $C_{l\beta}$	74

Fig.4.22 : Ailerons	75
Fig.4.23 : Aérofreins	76
Fig.4.24 : Comportements possibles des modes naturels	79
Fig.4.25 : Représentation des modes longitudinaux	86
Fig. (4.26.A) : stabilité spirale	89
Fig. (4.26.B) : Divergence directionnelle et spirale	89
Fig. (4.28) : Roulis hollandais de forme « 8 » et « gouttière »	90
Fig.4.29 : Un avion en roulis hollandais (Dutch roll)	91
Fig.4.30 : Contrôle de tangage	96
Fig.4.31 : Contrôle de tangage dans une soufflerie	97
Fig.4.32 : Contrôle de roulis	98
Fig.4.33 : L'effet de gauchissement	98
Fig.4.34 : Contrôle de lacet	99
Fig.4.35 : Braquage de la gouverne de direction	100
Fig.4.36 : Commandes de la gouverne de profondeur	104
Fig.4.37 : système de contrôle	104
Fig.5.1 : Etapes d'une simulation C.F.D	107
Fig.5.2 : Interface de SolidWorks	108
Fig.5.3 : Interface de ICEM - CFD	112
Fig.5.4 : Interface de FLUENT	113
Fig.5.5 : Boundary Conditions	116
Fig.5.6 : Valeurs de référence	117
Fig.5.7: Forces et moments de pression et de viscosité appliqués sur le drone	119
Fig.5.8a : Résidus du cas test de Fluent ( $M=0.5, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ )	119
Fig.5.8 b : Champ de vitesse sur le drone ( $M=0.5, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ )	120
Fig.5.8 c : Champ de pression statique sur le drone ( $M=0.5, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ )	120
Fig.5.9 a: Résidus du cas test de Fluent ( $M=1.2, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ )	121
Fig.5.9 b : Champ de vitesse sur le drone ( $M=1.2, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ )	121
Fig.5.9 c : Champ de pression statique sur le drone ( $M= 1.2, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ )	122
Fig.5.10 a : Résidus du cas test de Fluent ( $M=1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ )	122
Fig.5.10 b : Champ de vitesse sur le drone ( $M=1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ )	123
Fig.5.10 c : Champ de pression statique sur le drone ( $M= 1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ )	123
Fig.5.11 : Vecteurs vitesses dans le plan de symétrie du cas test	124
Fig.5.12 : Interface donnant les conditions de vol	125
Fig.5.13: Comportement transitoire du mode Phugoïde	127
Fig.5.14: Comportement transitoire du mode Short-period	127
Fig.5.15: Evolution de la vitesse	128
Fig.5.16: Variation de la pente	129
Fig.5.17 : Variation d'angle d'attaque	130
Fig.5.18: Variation de la vitesse de tangage	131
Fig.5.19: Réponse à un échelon d'angle de gouverne de profondeur $\Delta\delta_e = 1^\circ$	132
Fig.5.20: Variation d'angle d'attaque	133
Fig.5.21: Variation de la pente	133
Fig.5.22: Variation d'angle d'attaque et de la vitesse de tangage	134
Fig.5.23 : Répons à un échelon d'angle de poussée ( $\Pi = 1/6$ )	134
Fig.5.24: Variation de la vitesse de tangage	135
Fig.5.25: Variation de la vitesse de tangage et d'angle d'attaque	136
Fig.5.26: Comportement transitoire de mode Dutch roll	137
Fig.5.27: Réponse latérale aux ailerons	138
Fig.5.28: Réponse latérale à la gouverne de direction	139

LISTE DES TABLEAUX :

Tableau 1.1 : Catégories des drones.	3
Tableau 1.2 : Les dimensions du model	7
Tableau 1.3 : Les coordonnées de surface portante d'aile	8
Tableau 1.4 : Caractéristiques de la propulsion	10
Tab.3.1 : Adimensionnalisation des équations	38
Tab.3.2 : Dérivées longitudinales adimensionnelles	38
Tab.3.3 : Dérivées latérales adimensionnelles	39
Tab.3.4 : Dérivées longitudinales dimensionnelles	40
Tab.3.5 : Dérivées latérales dimensionnelles	40
Tableau.5.1: Exactitude des coefficients	125
Tableau 5.2 : Caractéristiques des modes longitudinaux du drone	126
Tableau 5.3 : Paramètres des modes latéraux du drone type	137

## **NOMENCLATURE :**

### **DIMENSION, MASSE, INERTIE :**

$S$  : Surface de l'aile

$S_t$  : Surface de l'empenage

$c$  : Corde aérodynamique

$\bar{c}$  : Corde aérodyn.moyenne

$b$  : Envergure

$K_n = h_n - h$  : Marge statique

$H$  : Altitude de l'avion

$m$  : Masse de l'avion

$g$  : Pesanteur

$I_x, I_y, I_z$  : Moments d'inertie suivant les axes  $X, Y, Z$

$I_{xy}$  : Produits d'inertie suivant les axes  $X, Y$

$I_{xz}$  : Produits d'inertie suivant les axes  $X, Z$

$I_{yz}$  : Produits d'inertie suivant les axes  $Y, Z$

$\rho$  : Densité de l'air

$\mu$  : Coef de viscosité

$a$  : Vitesse de son

$M$  : Nombre de Mach

### **ANGLES D'EULER :**

$\psi$  : Angle d'azimut

$\theta$  : Assiette longitudinale

$\phi$  : Angle de gîte

### **ANGLES AERODYNAMIQUES :**

$\alpha$  : Angle d'incidence

$\beta$  : Angle de dérapage

$\theta$  : Angle d'assiette

$\gamma$  : La pente

### **BRAQUAGES :**

$\delta_a$  : Braquage des ailerons

$\delta_e$  : Braquage de gouverne de profondeur

$\delta_r$  : Braquage de gouverne de direction

$p$  : Vitesse angulaire de roulis

$q$  : Vitesse angulaire de tangage

$r$  : Vitesse angulaire de lacet

## **NOMECLATURE (suite) :**

### **VITESSES LINEAIRES :**

$u$ : Vitesse lineaire le long de OX

$v$ : Vitesse lineaire le long de OY

$w$ : Vitesse lineaire le long de OZ

$V$ : Vitesse totale de l' avion

### **FORCES ET MOMENTS AERODYNAMIQUES SUIVANT LES AXES X, Y, Z DE REPERE DE L'AVION :**

Forces : X : Force de traînée, Y=Force latérale, Z=Force de portance

Moments : L, M, N : Les moments de roulis, tangage, et lacet, respectivement

### **LEXIQUE AERODYNAMIQUE :**

$C_x$ : Coef de force de traînée

$C_l$ : Coef de moment de roulis

$C_y$ : Coef de force de portance

$C_m$ : Coef de moment de tangage

$C_z$ : Coef de force latérale

$C_n$ : Coef de moment de lacet

$L_w$ : Portance de l'aile.

$D_w$ : Trainée de l'aile.

$L_t$ : Portance de l'empenage.

$M_{ac_w}$ : Moment de la force aerodynamique au foyer

$M_w$ : Moment de tangage de l'aile

$M_t$ : Moment de tangage de l'empenage

$C_{m_w}$ : Coef de moment de tangage de l'aile

$C_{m_t}$ : Coef de moment de tangage de l'empenage

$C_l$ : Coef de portance globale

$C_{m_t}$ : Coef de trainée globale

$C_{L_t}$ : Coef de portance de l'empenage

$C_{m_t}$ : Coef de trainée de l'empenage

$C_{M_{ac_w}}$ : Coef de moment de la force aerodynamique au foyer

$C_{m_\alpha}$ : Raideur en tanguage

$C_{m_t}$ : Coef de moment de l'empenage

$C_{m_{wb}}$ : Coef de moment de la combinaison aile / fuselage / nacelle

$a_{wb}$ : Pente de la courbe de portance

de la combinaison aile / fuselage / nacelle

$C_{L_{zw}} = a_w$ : Pente de la courbe de portance de l'aile

## INTRODUCTION GENERALE :

Pour qu'un drone soit facilement télécommandé, il faut qu'il soit stable ; c'est à dire qu'il ait tendance à compenser naturellement les petites variations de vitesse ou d'attitudes non désirées qui peuvent survenir. Dans ce chemin, notre objectif est de développer la compréhension fondamentale au sujet de la stabilité, commandes, et mécanique du vol atmosphérique. Pour cette étude, plusieurs niveaux d'approximation sont possibles, qui correspondent chacun à des échelles de temps caractéristiques différents :

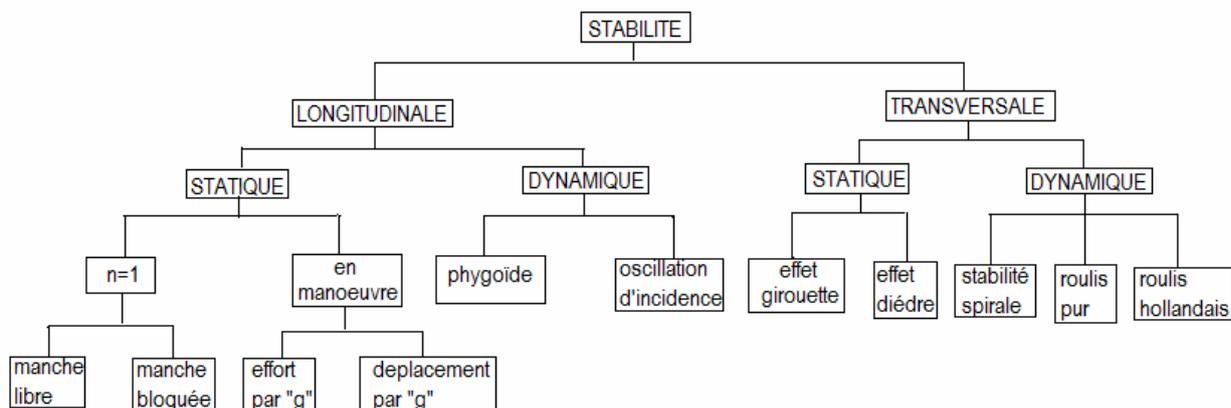
**Point matériel :** Ce niveau d'approximation correspond à des échelles de temps caractéristiques longs (plusieurs minutes) et permet, par l'analyse de l'équilibre des forces sur l'avion (ressemblable au drone), de déterminer ses performances.

**Solide indéformable :** On s'intéresse à ce niveau à des échelles de temps caractéristiques moyens (de l'ordre de quelques secondes à quelques dizaines de secondes). L'analyse de l'équilibre des forces et des moments sur le drone permet d'en déterminer les caractéristiques de stabilité et de réponse aux commandes (guidage).

**Solide déformable :** Ce niveau correspond à des échelles de temps caractéristiques encore plus courts (typiquement inférieurs à la seconde). On s'intéresse alors au couplage entre les modes globaux du mouvement et les modes de vibrations de la structure du drone :

On se limitera dans ce travail aux deux premiers niveaux d'approximation, que l'on a coutume de rassembler sous le vocable de mécanique du vol. Évidemment, s'agissant de vol atmosphérique, la majeure partie des forces et couples s'exerçant sur l'avion sont d'origine aérodynamique.

Le travail exige donc une bonne connaissance des caractéristiques aérodynamiques des surfaces portantes, qui sont étudiées dans la mécanique des fluides. La présence des logiciels tels que le **SOLIDWORKS**, **ICEM CFD 4.2**, le **FLUENT 6.3.26** serviront à la conception et à la simulation du modèle ; d'autre part le **MATLAB 7.5**, nous permettent d'analyser les réponses aux commandes par la résolution des équations du mouvement dans le cas d'un vol de régime permanent. On se concentre sur l'étude dynamique puisqu'elle contient l'analyse des modes vibratoires du mouvement pendant le guidage du drone par le pilote au sol, de plus en parallèle, on va voir les conventions générales de la stabilité statique suivant le chemin indiqué sur l'organigramme d'étude suivant:



Organigramme de la stabilité.

Alors, ce manuscrit est organisé comme suit :

Dans le chapitre I, nous avons fait une généralités et présentation du drone. On décrit alors en petit détail quelques caractéristiques de notre drone type.

Le chapitre II décrit les généralités et conventions de la mécanique du vol.

Le chapitre III, les équations générales du mouvement.

Le chapitre IV, on aborde la stabilité.

Enfin, dans le chapitre V, outils de modélisation et simulation.

# Chapitre 1

## **GENERALITES ET PRESENTATIONS DU DRONE**

## **I. GENERALITES ET PRESENTATION DU DRONE:**

### **I.1 Introduction :**

Les drones ou UAV (Unmanned Aerial Vehicle) sont des engins volants sans pilote capables de mener à bien une mission de façon semi autonome ou en mode téléguidé. Leur utilisation est d'abord militaire pour des missions de reconnaissances ou de surveillance. En effet, ils sont bien adaptés pour la réalisation de missions qui mettraient potentiellement un équipage en danger ou qui nécessitent une permanence sur zone qui serait fastidieuse pour un équipage à bord. Leur emploi a commencé par tout ce qui touche à l'observation puis a été étendu à l'acquisition d'objectifs ainsi qu'à la guerre électronique, et à la destruction de cibles. Des applications civiles font leur apparition comme la surveillance du trafic autoroutier, la prévention des feux de forêts, la récolte de données météorologiques ou bien encore l'inspection d'ouvrages d'art.

### **I.2. Les drones :**

La taille des drones varie du centimètre à plusieurs mètres, tout comme leur mode de propulsion qui évolue en fonction des besoins. On distingue deux types de voilures : les voilures fixes pour le vol en mode d'avance et les voilures tournantes pour le vol stationnaire.

#### **I.2.1. Classification des drones :**

##### **I.2.1.1. Principales catégories :**

###### **• Selon leur taille :**

Il n'existe pas une façon unique de classer les drones car ils peuvent être classés selon plusieurs critères : autonomie, portée, altitude, mission, système de contrôle, etc. Cependant, pour des raisons de sécurité dans l'espace aérien national, plusieurs pays se sont penchés sur la classification de ces drones. Le Royaume-Uni et l'Australie les ont répertoriés en deux groupes basés sur leur masse. Les Etats-Unis ont proposé une répartition en cinq catégories : micro, mini, tactique, MALE (Medium Altitude Long Endurance) et HALE (High Altitude Long Endurance). Une sixième catégorie pourrait faire son apparition avec des drones gros porteurs type cargo.

###### **• Selon leur voilure :**

On peut aussi distinguer les drones selon leur mode de déplacement : le vol d'avancement caractérise les drones à ailes fixes et le vol stationnaire les drones à voilure tournante. Le premier type est destiné à des missions de plus grande portée (plusieurs centaines de kilomètres), alors que le second type doit répondre aux exigences des nouvelles formes de mission de type urbaine. Ils doivent être capables de se mouvoir à travers des rues en évitant

tous les obstacles, de rentrer dans des pièces pour les inspecter, de retransmettre toutes les données en temps réel et enfin de revenir à leur point de départ. Le second type fait partie des VTOL UAV (Vertical Take-off Launched) ou ADAV (Appareils à Décollage et Atterrissage Verticaux). Le drone idéal serait par conséquent un drone capable d'effectuer de grandes vitesses d'avancement (plusieurs centaines de km/h, selon ses dimensions) et aussi capable de vol stationnaire et ayant une grande manœuvrabilité dans des espaces confinés.

### **I.2.1.2. Les mini drones (MUAV) :**

#### **– A voilures fixes :**

Les premiers drones miniatures firent leur apparition lors de la 1<sup>ère</sup> guerre du Golfe en 1991. Destinés au même type de mission (reconnaissance au moyen d'une caméra CCD) et d'une envergure proche (2.5 m), leur différence réside dans leur rayon d'action. En effet, le premier est équipé d'un moteur thermique qui lui permet une plus grande autonomie (3 heures et des altitudes de 3000 mètres) alors que le second est équipé d'un moteur électrique alimenté par des batteries Lithium qui limite l'autonomie (1 heure et un plafond aérien de 300 mètres).



**Fig. 1.1:** Les premiers minidrones utilisés pendant la guerre du Golfe : l'Exdrone et le Pointer (1991).



**Fig. 1.2:** Exemples de VTOL : Les Cypher-I et -II américains et le Vigilant français.

Dans ces dimensions, les deux types de propulsions se côtoient. Cependant, les moteurs thermiques restent toujours prédominants pour les plus grandes envergures.

– **A voilures tournantes :**

Le premier d'entre eux à être performant fut le "Cypher" de Sikorsky (Figure 1.2) au début des années 90. Il est équipé d'un moteur thermique et de deux hélices contrarotatives carénées, il a une autonomie de 3 heures, pour ses 2 mètres d'envergure et ses 115 kg dont 20 kg de charge utile. Il aboutit en 2002 au "Cypher II" ou "Dragon Warrior" (Figure 1.2). De masse similaire et de dimensions légèrement plus grandes, il a une autonomie de 3 à 5 heures, et peut atteindre 185 km/h. Ce type de structure se démarque des structures plus conventionnelles type hélicoptère. En 1997, l'armée française se dota du "Vigilant" de Techno Sud Industries, un hélicoptère autopiloté capable de reconnaissance dans un rayon de 30 km. Il est équipé d'un moteur thermique de 9 kW, pèse 40 kg et possède une hélice de 2 mètres de diamètre.

**I.2.1.3. Les micros drones ( $\mu$ UAV) :**

Les micros drones sont des drones ayant des petites tailles variant d'une dizaine de centimètres. En 1997 et dans le cadre d'un programme de développement, il a été appelé micro drone tout drone ayant une taille inférieure à 15 cm. En Europe, la limite n'est pas aussi claire puisque avec 42 cm d'envergure il est considéré comme un micro drone.

**Tableau 1.1 : Catégories de drones.**

Catégorie	Acronyme	Distance (km)	Altitude (m)	Endurance (h)	Masse (kg)
Micro UAV	$\mu$	< 10	250	1	< 5
Mini UAV	Mini	< 10	350	< 2	< 30
Close Range	CR	10 à 30	3000	2 à 4	150
Short Range	SR	30 à 70	3000	3 à 6	200
Médium Range	MR	70 à 200	5000	6 à 10	1250
Médium Range	MRE	> 500	5000 - 8000	10 à 18	1250
Low Altitude Deep	LADP	P > 250	50 à 9000	0,5 à 1	350
Low Altitude Long	LALE	> 500	3000	> 24	< 30
Médium Altitude Long	MALE	> 500	5000 - 8000	24 à 48	1500
Hight Altitude Long	HALE	> 2000	15000	24 à 48	12000
Unhinabited Combat	UCAV	1500	10000	2	10000

**I.2.1.4. Missions des hélicoptères drones :**

**1. Recherche et sauvetage (figure 1.3) :**

- Les hélicoptères drone peuvent effectuer rapidement et systématiquement des recherches dans un secteur très grand pour localiser des victimes d'un accident ou d'une catastrophe naturelle.

- Ils peuvent focaliser les efforts de la recherche et aider l'équipage de sauvetage à l'opération de sauvetage au lieu de longue opération de recherche.
- Ils peuvent plus aisément être déployés dans les conditions atmosphériques qui empêcheraient normalement la recherche et le sauvetage pilotés par l'homme.
- Ils peuvent être sacrifiés en conditions très dangereuses pour sauver des vies humaines. Les exemples typiques incluent le vol près d'un incendie de forêt pour rechercher les individus perdus, recherchant dans des secteurs contaminés, et identifiant les fuites radioactives potentielles après un accident de réacteur nucléaire.

## **2. Surveillance (figure 1.4) :**

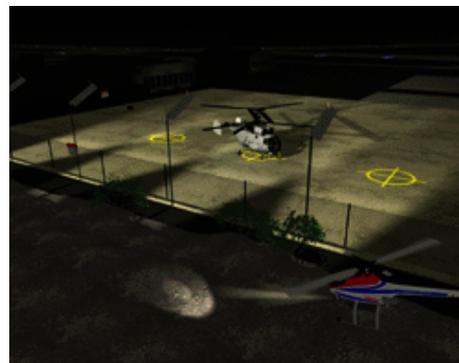
- Les hélicoptères drones peuvent patrouiller un secteur et rapporter l'activité intéressante ou peu commune.
- Ils peuvent automatiquement localiser et identifier une activité suspecte et effectuer une détection efficace visuelle des objets ou des personnes impliqués jusqu'à l'arrivée des forces terrestres.

## **3. Contrôle de l'application de la loi (figure 1.5) :**

- Les drones peuvent voler au-dessus de véhicules pour aider la police dans des poursuites ou des opérations de recherche de criminelles.



**Fig.1.3:** Utilisation de drones dans la recherche et le sauvetage.



**Fig.1.4:** Utilisation de drones pour la surveillance.

- Poster sur des bâtiments dans des secteurs urbains, ils peuvent être envoyés en quelques secondes pour prendre des images de points sensibles.

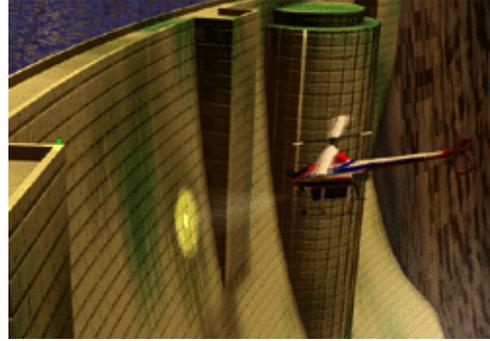
## **4. Inspection (figure 1.6) :**

- Les hélicoptères drones peuvent inspecter les lignes électriques à haute tension dans des sites lointains ou difficiles d'accès.
- Ils peuvent inspecter de grandes structures telles que des ponts et des barrages de manière rentable.

- Ils peuvent être rapidement sollicités pour inspecter des bâtiments et des routes pour déceler les dommages potentiels après un tremblement de terre.
- Ils peuvent localiser les matériaux dangereux dans des emplacements de rebut par le transfert d'images aériennes aux experts humains ou par l'identification automatique de décharges de conteneurs ou de matériaux par la vision à bord.



**Fig. 1.5:** Utilisation de drones pour faire appliquer la loi.



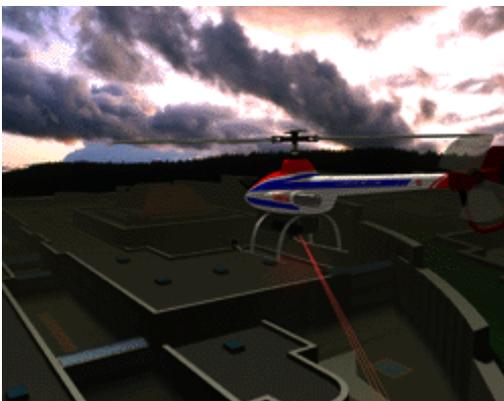
**Fig. 1.6:** Utilisation de drones pour l'inspection.

### 5. Cartographie (fig.1.7) :

- Les hélicoptères drones peuvent construire des cartes topologiques plus précises que l'avion conventionnel avec beaucoup d'économie.
- A la différence des avions, ils peuvent voler près de la terre tout en portant des appareils photographiques ou des sondes pour construire des cartes en 3D de haute résolution.
- Ils peuvent voler dans des secteurs plus petits et plus contraints pour construire des cartes fortement détaillées.

### 6. Cinématographie (fig. 1.8) :

- Les hélicoptères drones peuvent être la caméra ou l'œil-dans-le-ciel d'un directeur (artistique).
- Ils peuvent voler avec précision grâce à l'ordinateur qui permet de se passer de pilotes humains habiles pour la photographie aérienne.



**Fig. 1.7 :** Domaine de la cartographie.



**Fig.1.8 :** domaine de la cinématographie.

- Ils peuvent automatiquement dépister des sujets avec leur traqueuse vision basée à bord d'objet.

### **I.3. Présentation du drone :**

Pour concevoir le modèle, il est nécessaire de connaître les paramètres tels que les caractéristiques géométriques, les caractéristiques de masse, la propulsion, etc. Dans ce qui suit, nous allons aborder le modèle d'un drone dont les caractéristiques aux vitesses transoniques d'un modèle de balance d'un drone-type supersonique. Nous utiliserons par la suite les logiciels de C.A.O. (Conception Assisté par Ordinateur) tels que le SOLIDWORKS 2009, ICEM CFD 4.2, FLUENT 6.3.26 qui serviront à la conception et à la simulation du modèle.

#### **I.3.1. Caractéristique géométrique :**

La recherche a été effectuée pour déterminer la stabilité et pour contrôler les caractéristiques aux vitesses transoniques d'un modèle de balance d'un drone supersonique.

Les résultats ont indiqué que le modèle complet était longitudinalement et latéralement stable par la portée des angles (angle d'incidence et angle de dérapage) et la portée de nombre de Mach des essais.

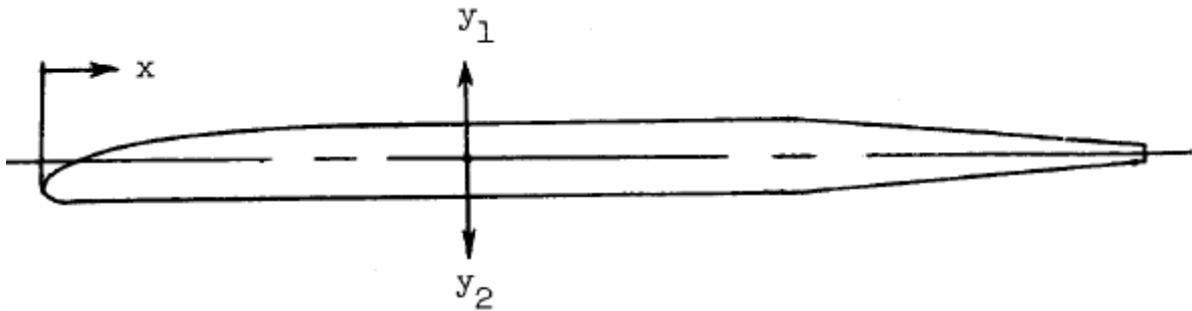
Les gouvernes de profondeur ont fourni une efficacité longitudinale de contrôle et leur partie latérale sert de l'efficacité par fléchissement différentiel de contrôle pour la portée du contrôle-fléchissement des essais. Le gouvernail de direction a fourni le contrôle directionnel efficace mais au nombre de Mach le plus élevé d'essai de 1.2, son efficacité diminuée approximativement à moitié de la valeur subsonique.

**Les dimensions du model :**

Tableau 1.2: Les dimensions du model.

<b>Fuselage</b>	<b>Unités en m</b>
Longueur	0.98
Rapport de finesse	0.3
Diamètre	0.063
<b>Ailes</b>	<b>Unités en m</b>
Surface	1.43 (m <sup>2</sup> )
Envergure	0.35
Corde moyenne aérodynamique	0.12
Allongement	0.086
Corde d'extrémité	0.023
Corde d'emplanture	0.18
Vrillage	11.31°
Dièdre	0°
Incidence	0°
<b>Empennage Horizontal</b>	<b>Unités en m</b>
Surface	0.32 (m <sup>2</sup> )
Envergure	0.192
Corde moyenne aérodynamique	0.044
Allongement	0.115
Corde d'extrémité	0.023
Corde d'emplanture	0.06
Vrillage	-1.75°
Dièdre	-1.50°
<b>Empennage Vertical</b>	<b>Unités en m</b>
Surface	0.47 (m <sup>2</sup> )
Envergure	0.118
Corde moyenne aérodynamique	0.109
Allongement	0.023
Corde extrémité	0.051
Corde d'emplanture	0.16
Vrillage	50°
<b>Gouverne de Direction</b>	<b>Unités en m</b>
Surface	0.022 (m <sup>2</sup> )
Envergure Efficace	0.046
Vrillage	23.82°
Corde d'emplanture	0.0134
Corde d'extrémité effective	0.011

Les coordonnées du profil d'aile:



**Tableau 1.3 : Les coordonnées de surface portante d'aile.**

X % c	Y1% c	Y2% c
0.00	-0.013	0.013
0.25	-0.011	0.015
0.50	-0.009	0.015
0.70	-0.008	0.015
1.00	-0.007	0.015
1.50	-0.006	0.015
2.00	-0.005	0.015
2.50	-0.003	0.015
3.00	-0.002	0.015
4.00	0.000	0.015
5.00	0.001	0.015
7.50	0.005	0.015
10.00	0.008	0.015
12.50	0.010	0.015
15.00	0.012	0.015
17.50	0.013	0.015
20.00	0.014	0.015
22.50	0.015	0.015
25.00	0.015	0.015
26.09	0.015	0.015
69.57	0.015	0.015
75.78	0.014	0.014
100.00	0.001	0.001

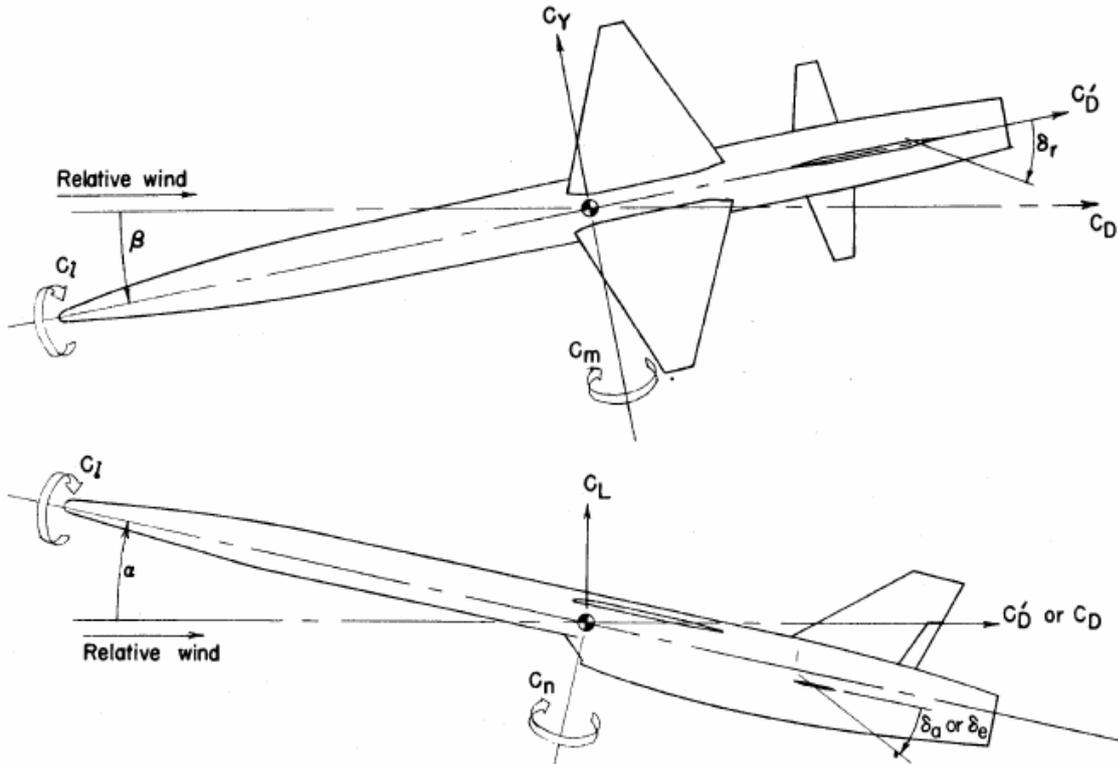


Fig.1.9 : Le modèle type.

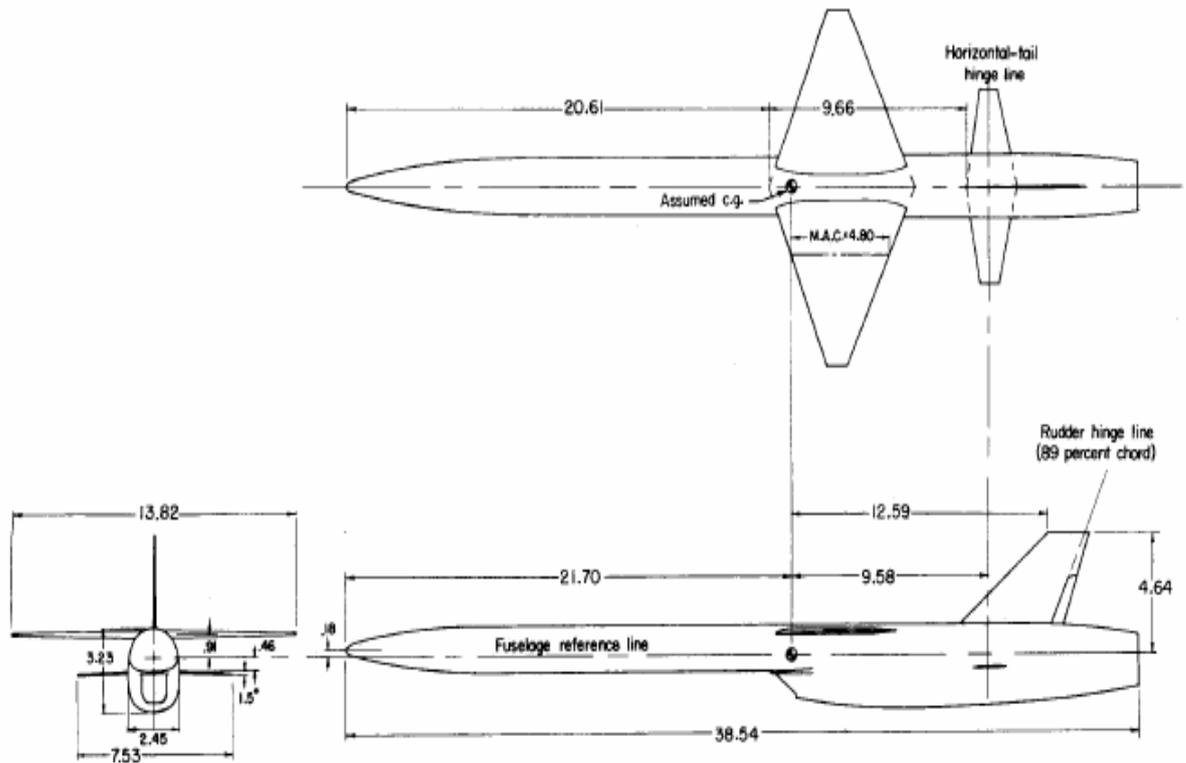
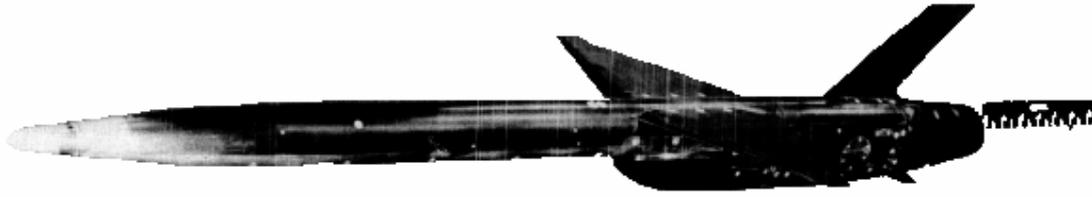


Fig.1.10 : Les 03 vues du modèle type.



**Fig.1.11** : La photographie du modèle type.

### **I.3.2 La propulsion:**

**Tableau1.5: Caractéristiques de la propulsion.**

Modèle	
Classification	Drone.
Configuration générale	Conventionnel.
Réglementation	JAR 23 (U) Appendix A.
Type	HALE (Haute Altitude Longue Endurance).
Configuration de la propulsion	Un Piston, Tractif, Fixé dans le fuselage.
Moteur	14,4 kg.
Vitesse de vol	Mach (0.5 à 1.2).
Altitude	8000 m.
Distance franchissable	1500 km.
Endurance	2.3 h.
Autonomie	504 Km.

### **I.3.3. Caractéristique de masse:**

Propriétés de masse de DRONE (Part Configuration - Défaut).

Système de coordonnées de sortie : par défaut.

Densité = 2.8e+003 kilogrammes par mètre cube.

Masse = 8.75 kilogrammes.

Volume = 0.00312 mètres cubes.

Superficie = 0.273 mètres<sup>2</sup>.

Centre de gravité: (mètres).

X = -8.19e-005.

$$Y = 0.00644.$$

$$Z = 0.582.$$

Moments d'inertie: (kilogrammes \* mètres carrés)

$$I_{xx} = 3.4$$

$$I_{yx} = 4.28e-008$$

$$I_{zx} = -0.000512$$

$$I_{xy} = 4.28e-008$$

$$I_{yy} = 3.4$$

$$I_{zy} = 0.0466$$

$$I_{xz} = -0.000512$$

$$I_{yz} = 0.0466$$

$$I_{zz} = 0.00837$$

# Chapitre 2

## **GENERALITES ET CONVENTIONS DE LA MECANIQUE DE VOL**

**II. GÉNÉRALITES ET CONVENTIONS DE LA MECANIQUE DU VOL :**

**II.1. L'atmosphère standard :**

Les performances d'un drone dépendent grandement des propriétés physiques (densité, température, pression) de l'air dans lequel il vole. Pour pouvoir comparer les performances de divers appareils, on devra les placer dans des conditions atmosphériques semblables. Pour ce faire, on est convenu d'effectuer les calculs de performances dans une atmosphère standard internationale (ISA). Cette atmosphère représente assez bien les conditions de température et de pression moyennes sur l'année pour les climats tempérés. Les conventions de l'atmosphère standard sont les suivant :

- L'air est assimilé à un gaz parfait avec une constante massique  $R = 287 J / kg.k$ .
- L'air est sec.
- Le vent météorologique est nul (pas de turbulence atmosphérique).
- L'atmosphère est en équilibre hydrostatique, c'est-à-dire :

$$dp = -\rho g(h)dh \dots\dots\dots (2.1)$$

Où  $h$  est l'altitude au-dessus du niveau de la mer. On peut encore réécrire cette équation d'équilibre sous la forme :

$$dp = -\rho g_0 dH \dots\dots\dots (1.2)$$

En définissant l'altitude géopotentielle  $H$  par  $dH = g(h) / g_0 dh$  où  $g_0$  est l'accélération de la gravité au niveau de la mer.

Avec ces conventions, la spécification de la distribution de température en fonction de l'altitude (géopotentielle) suffit à déterminer les conditions thermodynamiques en fonction de l'altitude. En effet, en combinant l'équation d'équilibre hydrostatique (1.2) et l'équation d'état des gaz parfaits  $p = \rho RT$ , on obtient :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{RT(H)} dH \dots\dots\dots(2.3)$$

qui permet de calculer la distribution de pression pour autant que l'on spécifie la pression au niveau de la mer, et l'on obtient ensuite la distribution de masse volumique par application de l'équation des gaz parfaits.

Aux latitudes moyennes (conditions tempérées), la distribution de température de l'atmosphère standard du niveau de la mer à une altitude de 20 km est la suivante :

- **Troposphère :**  $(0 \leq H \leq 11 \text{ km}) \quad T = 288,16 - 6,5H(\text{km})$ .
- **Stratosphère :**  $(11 \text{ km} \leq H \leq 20 \text{ km}) \quad T = 216,66^\circ\text{K}$ .

La frontière entre la troposphère et la stratosphère est appelée tropopause. Cette distribution de température est représentée à la fig.2.1, de même que les distributions de température correspondante aux conditions tropicale et polaire. Avec une pression au niveau de la mer de 101,325 kPa, on obtient les expressions suivantes pour la distribution de pression :

- **Troposphère :**  $(0 \leq H \leq 11 \text{ km}) \quad p = 101,325(1 - 22,56.10^{-3} H)^{5,26}$
- **Stratosphère :**  $(11 \text{ km} \leq H \leq 20 \text{ km}) \quad p = 22,632e^{-157,7.10^{-3}(H-11)}$

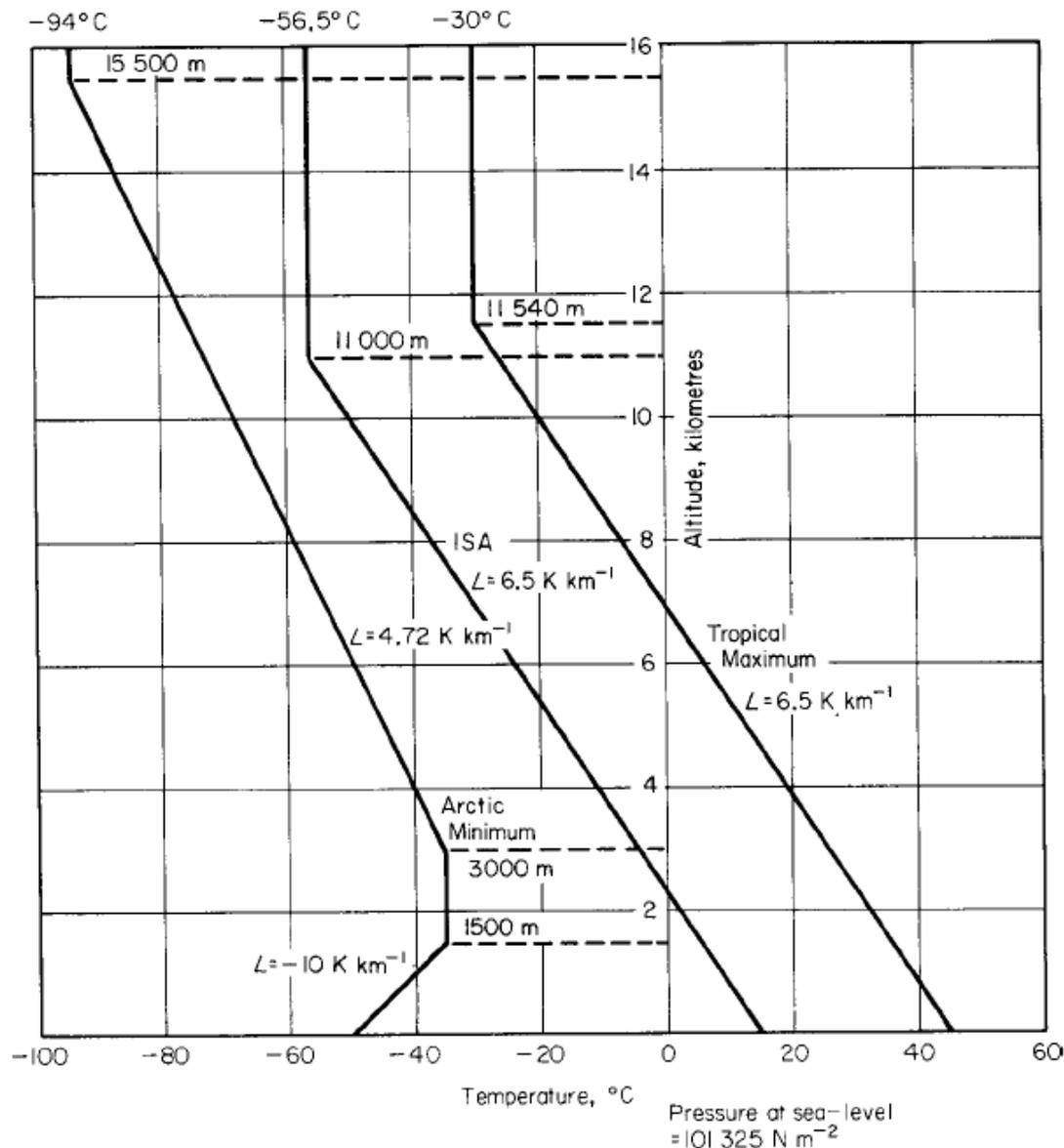


Fig.2.1: Distribution de température en fonction de l'altitude.

Ces distributions, ainsi que celles de la masse volumique et de la viscosité sont tabulées à l'annexe A, en termes de grandeurs relatives par rapport aux conditions au niveau de la mer [1].

**II.2. L'indicateur de vitesse :**

La vitesse du drone est déterminée par un tube de pitot situé au nez du drone ou attaché à une aile. La différence de pression mesurée peut être reliée au nombre de Mach de vol par les relations suivantes :

- **Subsonique :**

$$\frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \quad (\text{Saint - Venant}) \dots\dots\dots(2.4)$$

- **Supersonique :** on a dans ce cas une onde de choc devant le tube de pitot, de sorte que la relation devient :

$$\frac{\Delta p}{p} = \left( \frac{(\gamma+1)M^2}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{(\gamma+1)}{2\gamma M^2 - (\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \quad (\text{Rayleigh}) \dots\dots\dots(2.5)$$

En mesurant simultanément  $\Delta p$  et  $p$  (par exemple avec l'altimètre), on peut donc déterminer le nombre de Mach de vol  $M$ . L'appareil basé sur ce principe est le machmètre. Si l'on mesurait aussi la température  $T$ , on pourrait calculer la vitesse vraie  $V (= Ma = M\sqrt{\gamma RT}$ , où  $a$  est la vitesse du son). Si l'on ne mesure que  $\Delta p$ , on peut calculer une vitesse dite vitesse conventionnelle (Calibrated Air Speed)  $V_c$  en calculant un nombre de Mach fictif  $\bar{M}$  à partir de  $\Delta p$  et de  $p_0$  (pression au niveau de la mer en atmosphère standard), que l'on multiplie ensuite par  $a_0$  (vitesse du son au niveau de la mer). C'est cette vitesse qui est affichée à l'indicateur. Pour les faibles nombres de Mach, on peut linéariser l'équation de Saint-Venant :

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\gamma \bar{M}^2}{2} \rightarrow V_c^2 = \bar{M}^2 \gamma R T_0 = \frac{2\Delta p}{p_0} R T_0 = \frac{2\Delta p}{\rho_0} \dots\dots\dots(2.6)$$

Pour les drones volant à basse vitesse, l'échelle de l'indicateur de vitesse suit de près cette relation approchée.

Finalement, on introduit le concept supplémentaire de vitesse équivalente ou équivalent de vitesse (Equivalent Air Speed)  $V_E$  définie par :

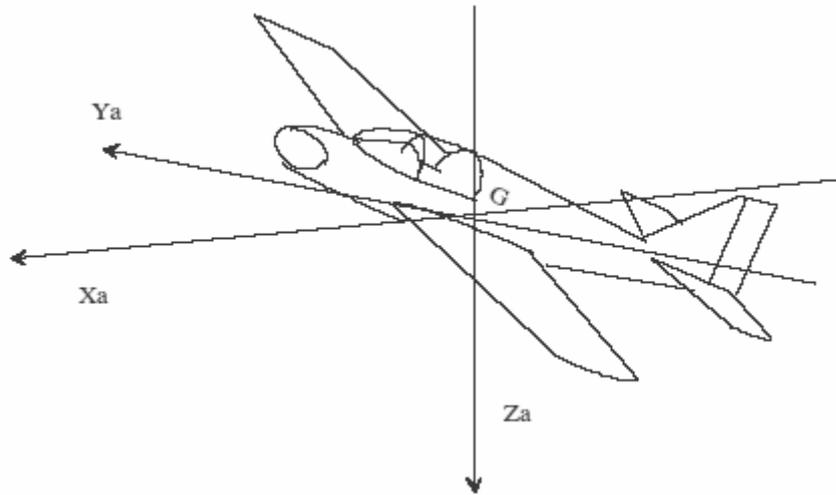
$$V_E^2 = \frac{\rho}{\rho_0} V^2 = \frac{2\bar{q}}{\rho_0} \quad \text{où} \quad V_E = \sqrt{\sigma V} \dots\dots\dots(2.7)$$

Cette vitesse n'est pas directement accessible par la mesure de  $\Delta p$  mais elle s'avère très utile pour les calculs puisque les coefficients aérodynamiques utilisent la pression dynamique  $q (= \rho_0 V_E^2)$  comme pression de normalisation. Aux faibles nombres de Mach (pour lesquels l'équation de Bernoulli est applicable),  $\bar{q}$  ;  $\Delta p$  de sorte que  $V_E$  ;  $V_c$ . Aux autres nombres de Mach, on calcule d'abord  $V$  à partir de  $V_c$  et de  $T$  et on calcule ensuite  $V_E$  par sa définition [1].

**II.3. Trièdres de référence :**

**II.3.1. Repère aérodynamique :**  $R_a = (G, \overset{I}{x}_a, \overset{I}{y}_a, \overset{I}{z}_a)$

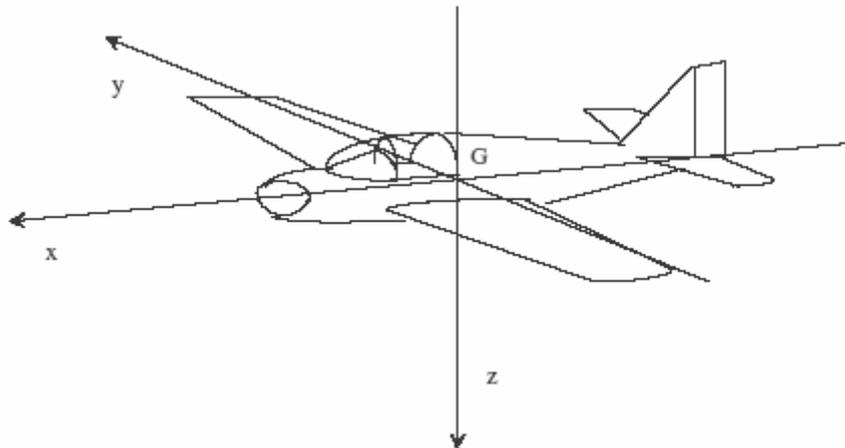
C'est un repère dont le centre  $G$  est un point de référence du drone (souvent choisi comme étant le centre de gravité). L'axe  $\overset{I}{x}_a$  est porté par la vitesse aérodynamique du drone,  $\overset{I}{z}_a$  est dans le plan de symétrie du drone et orienté positivement vers le ventre de l'appareil et  $\overset{I}{y}_a$  complète le trièdre positif. Les équations longitudinales sont projetées dans ce repère.



**Fig.2.2:** Trièdre aérodynamique  $(G, x_a, y_a, z_a)$ .

### II.3.2. Repère lié au drone: $R = (G, \overset{1}{x}, \overset{1}{y}, \overset{1}{z})$

Le centre du repère est un point fixe du drone et généralement on choisit  $G$  afin d'avoir le même centre pour tous les repères. Les axes  $\overset{1}{x}$  et  $\overset{1}{z}$  sont orthogonaux entre eux et contenus dans le plan de symétrie du drone.  $\overset{1}{x}$  est choisi voisin de l'axe longitudinal du drone et orienté positif de l'arrière du drone à l'avant.  $\overset{1}{z}$  est normal à  $\overset{1}{x}$  et orienté vers le bas. En fin  $\overset{1}{y}$  est déterminé de façon à avoir un trièdre positif.



**Fig.2.3:** Trièdre du drone  $(G, x, y, z)$ .

### II.3.3. Repère lié à la terre : $R_0 = (G, \overset{I}{x}_0, \overset{I}{y}_0, \overset{I}{z}_0)$

$\overset{I}{Gx}_0$  : Verticale.

$\overset{I}{Gz}_0$  : Horizontale.

$\overset{I}{Gy}_0$  : Perpendiculaire au plan  $\overline{\overset{I}{Gz}_0 \overset{I}{Gx}_0}$

$\overline{\overset{I}{Gy}_0 \overset{I}{Gx}_0}$  : Plan horizontal

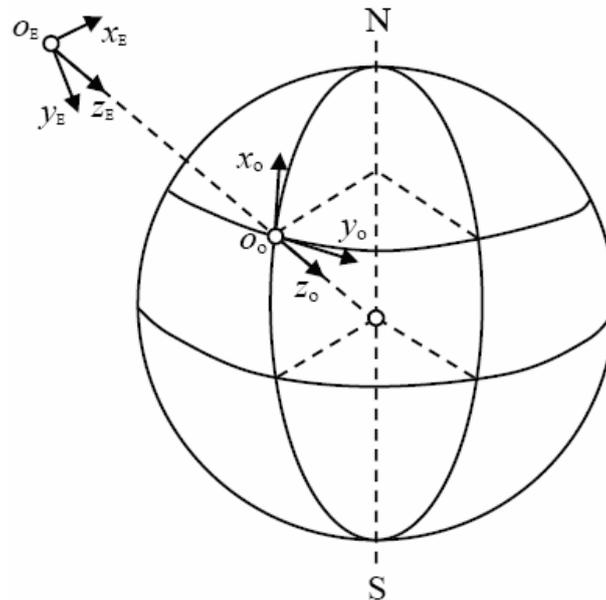


Fig. (2.4)- Repère terrestre.

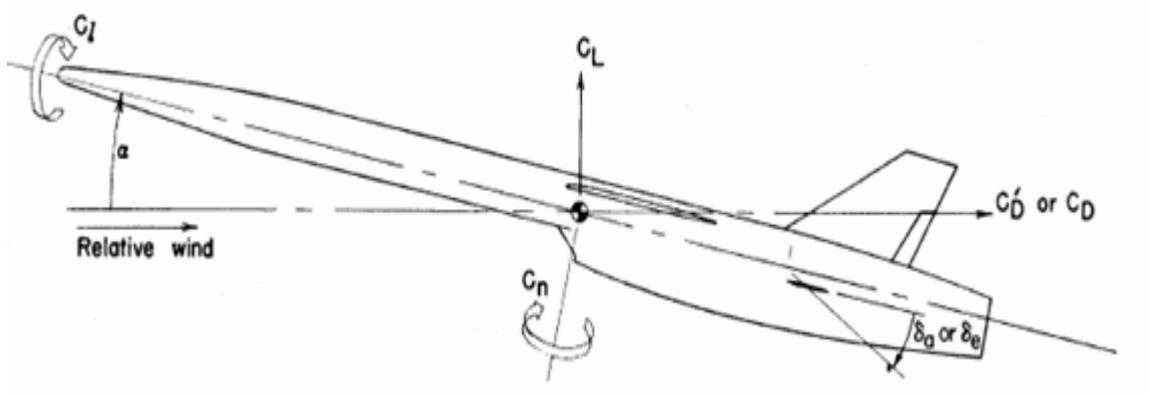
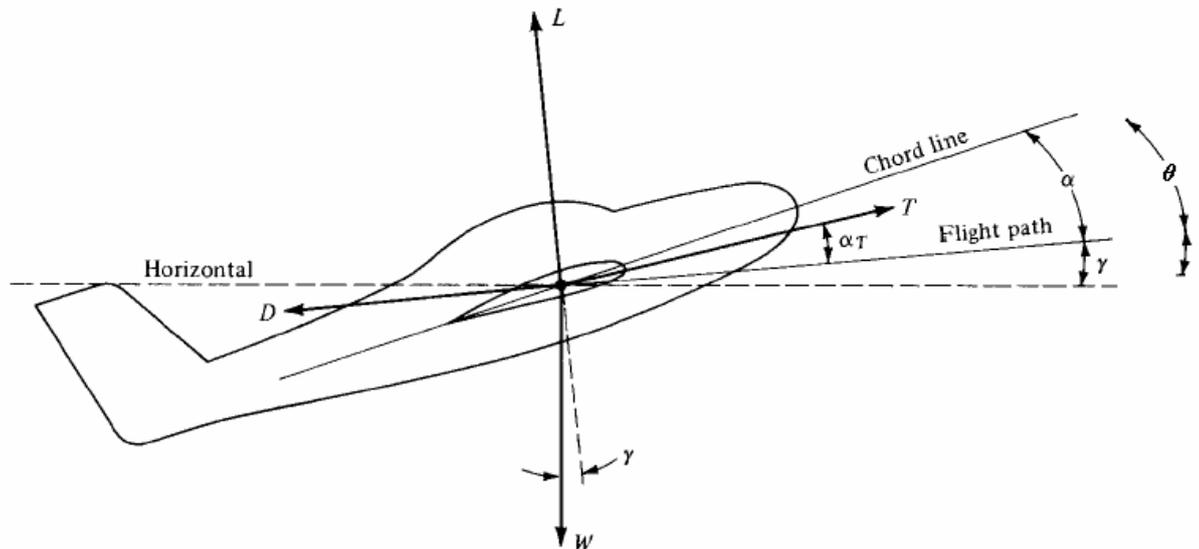


Fig.2.5 : Repère aérodynamique et Coefficients des forces extérieures.

Pour le cas des mouvements latéraux (i.e. dans le plan horizontal) on considère un autre repère, un repère lié au drone.

#### II.4. Les angles de la mécanique du vol :

Pour repérer le déplacement du drone dans l'espace, il faut utiliser des angles positionnant le drone par rapport aux axes des trièdres de référence.



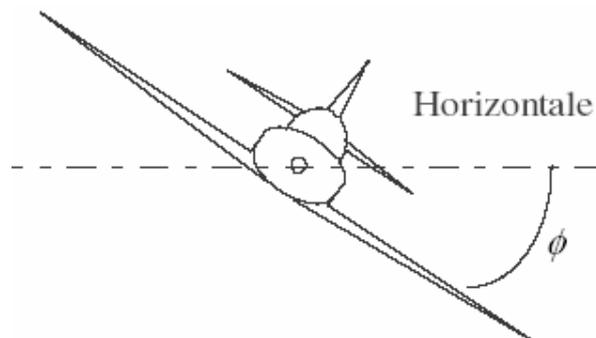
**Fig.2.6:** angles aérodynamiques.

- **Angle d'assiette  $\theta$** : angle entre l'axe du drone et l'horizontale géographique (attitude). Elle est comptée positivement si le nez du drone est au-dessus de l'horizon et négativement s'il est en dessous. C'est l'angle indiqué par l'horizon artificiel.
- **Incidence  $\alpha$** : angle entre la direction de la vitesse (vent) et l'axe du drone. Elle est comptée positivement si la ligne de foi est au-dessus de la direction de la vitesse.
- **Pente  $\gamma$** : angle entre la direction de la vitesse et l'horizontale géographique ( $\gamma = 0$  en vol horizontal). Elle matérialise la trajectoire du drone. La pente est positive si la vitesse est au-dessus de l'horizontale.

Avec ces définitions, des trois angles sont reliés entre eux par :

$$\theta = \alpha + \gamma \dots\dots\dots(2.8)$$

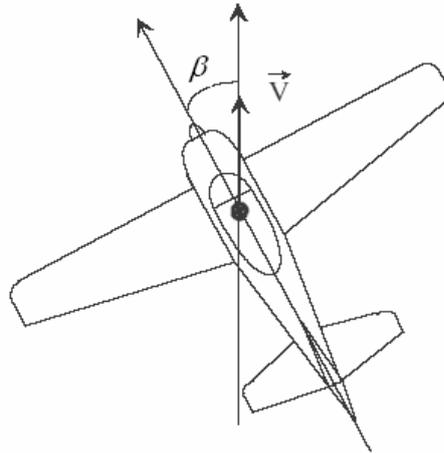
- **L'inclinaison  $\phi$**  :



**Fig.2.7 :**L'inclinaison ( $\phi$ ).

- **L'inclinaison** ( $\phi$ ) : est l'angle formé entre le plan des ailes et l'horizontale. Il est repéré dans le drone à l'aide de l'horizon artificiel ou de l'indicateur de virage. En vol à vue, on le repère par l'inclinaison du capot moteur sur l'horizon. L'inclinaison a pour but principal de permettre d'effectuer des virages plus ou moins serrés.

- **Le dérapage**  $\beta$  :



**Fig.2.8** : Le dérapage ( $\beta$ ).

- **Le dérapage** ( $\beta$ ) : est l'angle entre la ligne de foi de du drone et la vitesse. Il est compté positivement par la droite (nez à gauche de la vitesse). Il est indiqué à bord du drone par la bille. Si elle est au centre, le dérapage est nul, si elle est à droite, le dérapage est à droite (la bille indique le sens de la vitesse vraie).

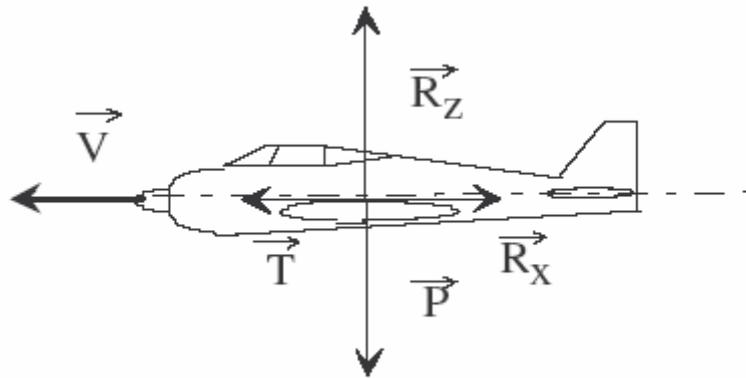
L'angle de dérapage est important car s'il n'est pas nul en croisière le drone consomme plus de carburant que nécessaire pour effectuer son vol. En phase d'approche, il est encore plus important car il augmente la vitesse de décrochage. En cas d'approche dérapée involontaire, une tenue rigoureuse de la vitesse habituelle d'approche peut entraîner un décrochage intempestif de l'appareil. Il est donc très important de surveiller ce dérapage. On n'en crée un volontairement que pour certaines figures de voltige ou des rattrapages de plan.

## **II.5. Les principales phases du vol [2]:**

### **II.5.1. Le vol rectiligne uniforme en palier :**

Le vol rectiligne en palier à vitesse constante reste la configuration de vol la plus fréquente.

Examinons la situation dans une telle configuration :



**Fig.2.9 :** Vol rectiligne uniforme en palier.

Pour maintenir l'équilibre du drone il faut que :

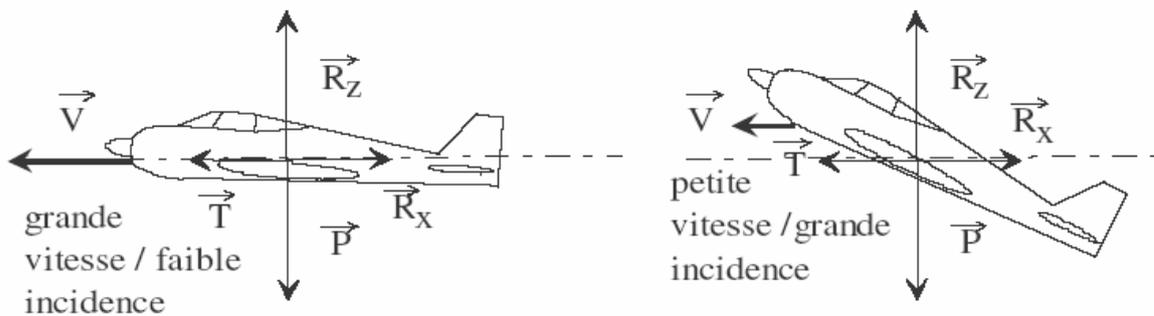
- la portance équilibre le poids :

$$R_z = m.g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_z \dots\dots\dots(2.9)$$

- la traction équilibre la traînée :

$$T = R_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_x \dots\dots\dots(2.10)$$

Pour une puissance motrice donnée il existe, en général, deux couples incidence - vitesse pour réaliser un palier rectiligne à vitesse constante :



**Fig.2.10 :** Couples incidence – vitesse.

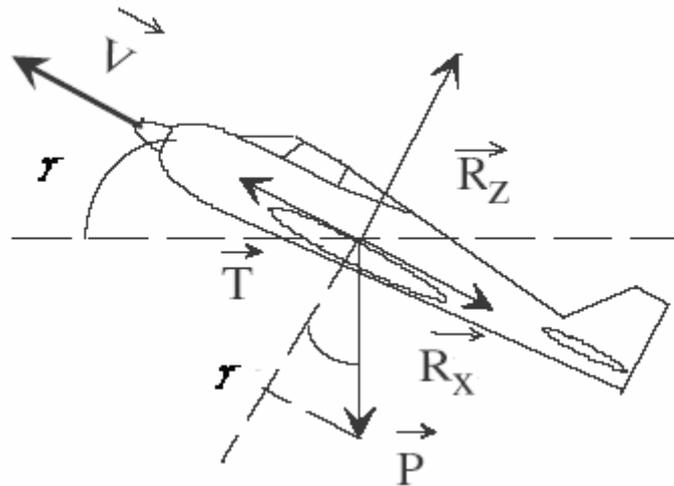
**II.5.2. La montée rectiligne uniforme :**

La montée est plus complexe à étudier. Du point de vue de la sustentation les choses restent assez simples :

$$R_z = m.g \cdot \cos(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_z \dots\dots\dots(2.11)$$

En revanche pour la propulsion on obtient :

$$T = R_x + m.g \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_x + m.g \cdot \sin(\gamma) \dots\dots\dots(2.12)$$



**Fig.2.11** : Montée rectiligne uniforme.

En pratique la vitesse ne peut être maintenue indéfiniment. Il existe plusieurs montées à vitesse stabilisée utilisées en pratique selon les priorités (gain d'altitude, temps de montée, rapport distance parcourue et altitude gagnée) :

- La montée à pente max (pour gagner beaucoup d'altitude sur une faible distance) pour les franchissements d'obstacles.
- La montée à Vz max (pour gagner le plus rapidement possible de l'altitude) pour des gains d'altitude rapides.
- La montée à vitesse optimale (VOM) pour obtenir le meilleur rapport altitude gagnée, distance parcourue, temps écoulé et consommation. C'est la plus employée quand aucun impératif de sécurité ne se présente.

**II.5.3. La descente rectiligne uniforme :**

Le principe de son étude est le même, cette fois le poids du drone devient moteur et on peut se permettre de diminuer la traction pour maintenir la vitesse. L'étude du vol plané est développée dans le cas d'un vol motorisé, il suffit de rajouter la traction.

**II.5.4. Le virage symétrique en palier a vitesse constante :**

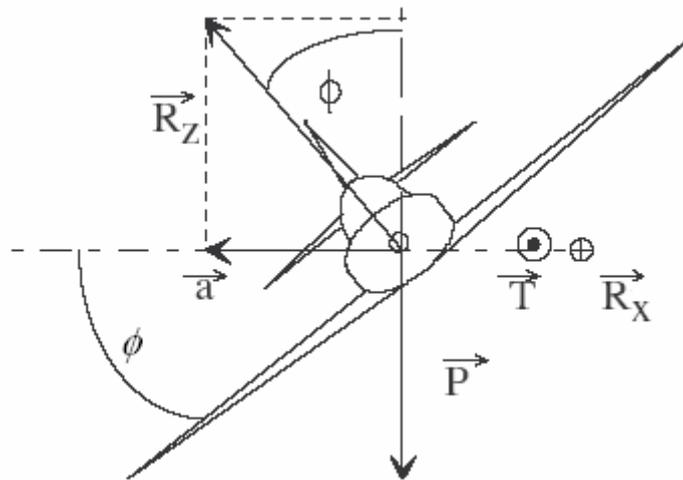
C'est également une configuration courante puisqu'en navigation les virages se font en général à altitude constante. Dans cette configuration l'équilibre des forces amène à écrire :

- La traction compense la traînée :

$$T = R_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_x \dots\dots\dots(2.13)$$

- La composante verticale de la portance compense le poids :

$$R_z \cdot \cos \phi = m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_z \cdot \cos \phi \dots\dots\dots(2.14)$$



**Fig.2.12:** Virage horizontal.

On définit le facteur de charge par le rapport des forces d'inertie et du poids, ce qui dans le cas d'un virage en palier à vitesse constante donne :

$$n = \frac{R_z}{p} = \frac{1}{\cos \phi} \dots\dots\dots(2.15)$$

Le facteur de charge maximum est de l'ordre de 2,5 pour les avions de ligne et d'aviation générale, il peut atteindre 7 pour les avions militaires ou d'acrobatie.

On peut alors déterminer que le facteur de charge d'un virage à 30° d'inclinaison est d'environ 1,15g (1,4 pour 45° et 2 pour 60°).

D'autre part l'accélération du drone est :  $a = v^2 / R$  .En projetant sur le rayon du virage la relation fondamentale de la dynamique on obtient :  $R_z \cdot \sin \phi = m(v^2 / R)$  soit en la divisant par la deuxième équation :  $\tan \phi = V^2 / R \cdot g$  .Cela signifie que pour une inclinaison donnée, le rayon de virage est déterminé par la vitesse.

**II.5.5. Le vol plane :**

Ce type de vol correspond au régime des planeurs et des parapentes. Etudions le cas d'une descente planée à vitesse constante :

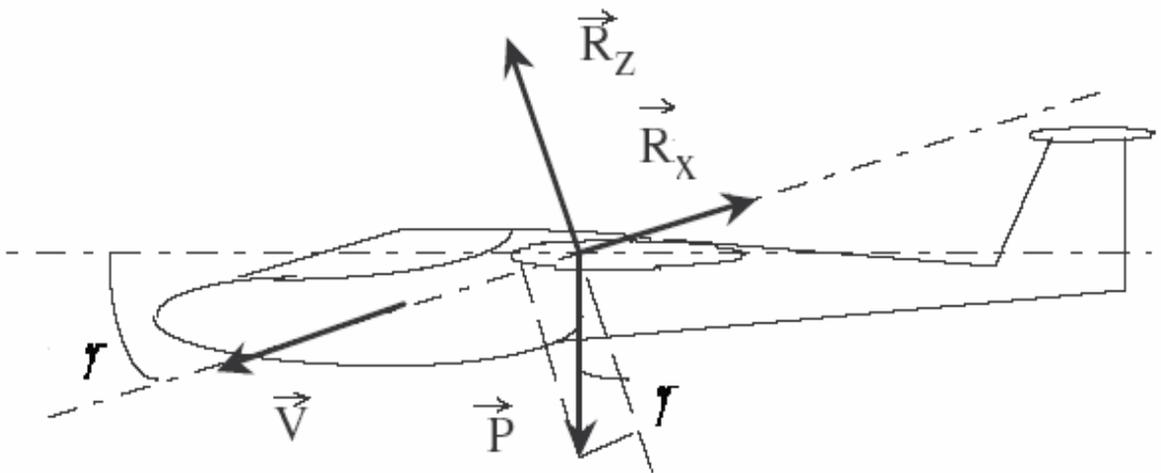


Fig.2.13: Vol plane.

L'équilibre du vol donne les deux équations suivantes :

- en projetant les forces sur la direction de  $R_z$  :

$$R_z = m \cdot g \cdot \cos(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_z$$

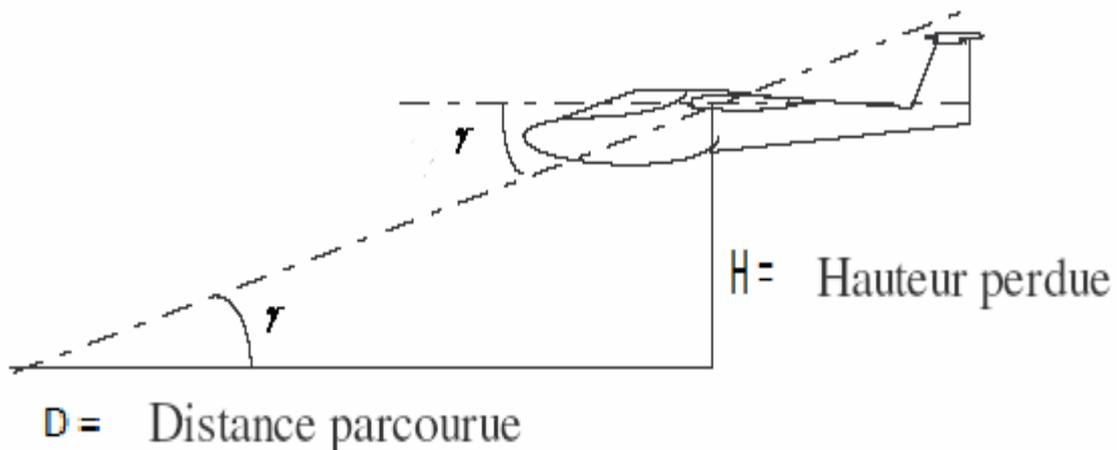
- en projetant sur la direction de  $R_x$  :

$$R_x = m \cdot g \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot C_x$$

On peut alors en déduire la pente de descente :

$$\tan(\gamma) = \frac{R_x}{R_z} = \frac{C_x}{C_z} = \frac{1}{f} \dots\dots\dots(2.16)$$

La pente de descente est donc d'autant plus faible que la finesse est importante.



**Fig.2.14:** Pente de descente.

Comme le montre le schéma ci contre, la tangente de la pente correspond aussi au rapport de l'altitude perdue sur la distance parcourue :  $\tan(\gamma) = \frac{H}{D} = \frac{1}{f}$

Connaissant f et H on peut calculer D :  $D = f.H$

# Chapitre 3

**ÉQUATIONS GÉNÉRALES**

**DU**

**MOUVEMENT**

### **III. ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT :**

#### **III.1. Introduction :**

Nous abordons dans ce chapitre le problème de la stabilité et du guidage du point de vue *dynamique*, c'est-à-dire l'analyse du *mouvement* de l'avion soumis à des perturbations ou à des actions sur les commandes. Comme on l'a souligné dans l'introduction générale, on considérera pour ce faire l'avion comme un *solide indéformable*. Il s'agit évidemment d'une approximation, qui néglige l'élasticité de l'avion, mais l'expérience a montré sa grande utilité pratique. Dans ces conditions, la dynamique du vol est simplement une application particulière de la dynamique des solides, dont la théorie générale a été présentée en détail dans le cours de mécanique rationnelle, qui se singularise par rapport à d'autres applications par la nature aérodynamique des forces qui s'exercent sur l'avion.

On commencera donc dans ce chapitre par rappeler les équations générales du mouvement d'un solide indéformable telles qu'elles s'appliquent au mouvement d'un avion, y compris en présence de parties tournantes, telles que les hélices ou les turboréacteurs. Ensuite, on considérera le cas particulier de petites perturbations autour d'un état d'équilibre, qui permet de linéariser les équations. Puis, on analysera l'expression des forces aérodynamiques et on montrera en particulier que, pour les avions de configuration symétrique, les mouvements de faible amplitude autour d'un état d'équilibre se décomposent en un problème longitudinal et un problème latéral.

#### **III.2. Les équations du mouvement :**

Les équations du mouvement d'un solide indéformable établies au cours de mécanique rationnelle sont :

$$\frac{d(m\overset{\text{I}}{V})}{dt} = \overset{\text{r}}{F} \dots\dots\dots(3.1)$$

$$\frac{d(\overset{\text{f}}{I} \cdot \overset{\text{r}}{\omega})}{dt} = \overset{\text{r}}{G} \dots\dots\dots(3.2)$$

Où  $\overset{\text{f}}{I}$  est le tenseur d'inertie,  $\overset{\text{r}}{\omega}$  la vitesse de rotation, et  $\overset{\text{I}}{F}$  et  $\overset{\text{I}}{G}$  les forces et moments appliqués respectivement, qui se composent du poids, des forces et moments aérodynamiques et des forces et moments des propulseurs, que l'on peut éventuellement inclure dans les forces et moments aérodynamiques.

Particularisons ces équations en les exprimant dans le repère avion présenté à la section (II.3.2). Comme ce repère n'est pas inertiel, les dérivées temporelles apparaissant dans les équations du mouvement (3.1 et 3.2) doivent être transformées par les règles habituelles, à savoir :

$$\left(\frac{da_i}{dt}\right)_{inertiel} = \left(\frac{da_i}{dxt}\right)_{avion} + \delta_{iik} \omega_j a_k \dots\dots\dots(3.3)$$

La masse de l'avion et le tenseur d'inertie étant constants en repère avion, les équations du mouvement en repère avion s'écrivent comme suit (en notations indicielles) :

$$m\left(\frac{dv_i}{dt} + \delta_{ijk} \omega_j v_k\right) = F_i \dots\dots\dots(3.4)$$

$$I_{ij}\left(\frac{dw_j}{dt} + \delta_{ijk} \omega_j I_{kl} w_l\right) = G_i \dots\dots\dots(3.5)$$

Établissons à présent l'expression de la transformation de coordonnées entre le repère inertiel et le repère avion, ainsi que celle des vitesses de rotation en fonction des angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ .

En vertu de la définition des angles d'Euler donnés, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \dots\dots(3.6)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

La vitesse de rotation, elle, vaut :

$$\vec{\omega} = \psi \vec{e}_{z_1} + \theta \vec{e}_{y_2} + \phi \vec{e}_{x_3} \dots\dots\dots(3.7)$$

Où  $\vec{e}_{x_j}$  est le vecteur unitaire selon l'axe  $x$  du repère  $j$ . En exprimant tous ces vecteurs dans le repère avion, on obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \phi - \sin \theta \psi \\ \sin \phi \cos \theta \psi + \cos \phi \theta \\ \cos \phi \cos \theta \psi - \sin \phi \theta \end{pmatrix}$$

Dont on tire l'expression inverse :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sin \phi q + \cos \phi r) \\ \cos \theta q - \sin \theta r \\ \sec \theta (\sin \phi q + \cos \phi r) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.9)$$

En utilisant les résultats précédents, les équations du mouvement s'explicitent comme suit :

$$m(\dot{u} + qw - rv) = -P \sin \theta + X \dots\dots\dots(3.10.a)$$

$$m(\dot{v} + ru - pw) = P \sin \phi \cos \theta + Y \dots\dots\dots(3.10.b)$$

$$m(\dot{w} + pv - qu) = P \cos \phi \cos \theta + Z \dots\dots\dots(3.10.c)$$

$$I_{xx}\dot{p} + I_{xy}(\dot{q} - pr) + I_{xz}(\dot{r} + pq) + I_{yz}(q^2 - r^2) + (I_{zz} - I_{yy})rq = L \dots\dots\dots(3.11.a)$$

$$I_{yy}\dot{q} + I_{xy}(\dot{p} + qr) + I_{yz}(\dot{r} - pq) + I_{xz}(r^2 - p^2) + (I_{xx} - I_{zz})pq = M \dots\dots\dots(3.11.b)$$

$$I_{zz}\dot{r} + I_{xz}(\dot{q} - qr) + I_{yz}(\dot{p} + pr) + I_{xy}(p^2 - q^2) + (I_{yy} - I_{xx})pq = N \dots\dots\dots(3.11.c)$$

On considérera par la suite le cas le plus fréquent où le plan  $x - z$  est un plan de symétrie. Dans ces conditions, les produits d'inertie  $I_{xy}$  et  $I_{yz}$  sont nuls. Si l'on prend comme axes du repère avion les axes principaux d'inertie, alors le produit d'inertie  $I_{xy}$  est nul également. Lorsqu'on étudie des petites perturbations autour d'un état d'équilibre symétrique (et donc un vol sans dérapage), il s'avère toutefois plus commode d'employer comme repère avion un repère dans lequel l'axe  $x$  est aligné avec la direction de vecteur vitesse à l'équilibre, car cela simplifie grandement l'expression des forces et moments aérodynamiques.

**III.2.1. Contribution des rotors :**

Les équations établies précédemment sont valides pour un avion entièrement fixe dans le repère avion, c'est-à-dire sans partie mobile. Or, les moteurs des avions comprennent des parties tournantes (rotors). Pour tenir compte de ces rotors, il suffit d'ajouter explicitement le moment cinétique des rotors dans l'expression du moment cinétique. En appelant  $h'_x, h'_y$  et  $h'_z$  les composantes du moment cinétique des rotors dans le repère avion, supposé constant dans le temps (orientation et vitesse de rotation des rotors constantes), il suffit d'ajouter dans le membre de gauche des équations (3.11) les termes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Composante } x \quad qh'_z - rh'_y \\ \text{Composante } y \quad rh'_x - ph'_z \\ \text{Composante } z \quad ph'_y - qh'_x \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3.12)$$

Connus sous le nom de couples gyroscopiques.

**III.2.2. Résumé et discussion :**

Dans le cas d'un avion symétrique, l'ensemble des équations du mouvement (dynamiques et cinématiques) se résumant comme suit (en l'absence de vent atmosphérique) :

$$m(\dot{u} + qw - rv) = -P \sin \theta + X \dots\dots\dots(3.13.a)$$

$$m(\dot{v} + ru - pw) = P \sin \phi \cos \theta + Y \dots\dots\dots(3.13.b)$$

$$m(\dot{w} + pv - qu) = P \cos \phi \cos \theta + Z \dots\dots\dots(3.13.c)$$

$$I_{xx} \dot{p} + I_{xz} (\dot{r} + pr) + (I_{zz} - I_{yy})rq + qh'_z - rh'_y = L \dots\dots\dots(3.14.a)$$

$$I_{yy} \dot{q} + I_{xz} (r^2 - p^2) + (I_{xx} - I_{zz})pr + rh'_x - ph'_z = M \dots\dots\dots(3.14.b)$$

$$I_{zz} \dot{r} + I_{xz} (\dot{p} - qr) + (I_{yy} - I_{xx})pq + ph'_y - qh'_x = N \dots\dots\dots(3.14.c)$$

$$\dot{x} = \cos \theta \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)w \dots\dots(3.15.a)$$

$$\dot{y} = \cos \theta \sin \psi u + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)v + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)w \dots\dots(3.15.b)$$

$$\dot{z} = -\sin \theta u + \sin \phi \cos \theta v + \cos \phi \cos \theta w \dots\dots\dots(3.15.c)$$

$$\dot{\phi} = p + \tan \theta (\sin \phi q + \cos \phi r) \dots\dots\dots(3.16.a)$$

$$\dot{\theta} = \cos \phi q - \sin \phi r \dots\dots\dots(3.16.b)$$

$$\dot{\psi} = \sec \theta (\sin \phi q + \cos \phi r) \dots\dots\dots(3.16.c)$$

Il s'agit d'un système de 12 équations différentielles non-linéaires dans les 12 inconnues,

$x_0, y_0, z_0, \phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q$  et  $r$  puisque les forces et couples aérodynamiques  $X, Y, Z, L, M$  et  $N$  dépendent du mouvement de l'avion représenté par son vecteur vitesse  $u, v, w$ , et son vecteur vitesse de rotation  $p, q, r$  ainsi que d'un vecteur  $c$  de paramètres de commandes :

$$c = (\delta_a, \delta_e, \delta_r, \Pi) \dots\dots\dots(3.17)$$

Où  $\delta_a, \delta_e$  et  $\delta_r$  représentent les braquages des ailerons et des gouvernes de profondeur et de direction, et  $\Pi$  la position de la manette des gaz, et sont des fonctions supposées données du temps.

Ce système différentiel est représenté symboliquement par le schéma-bloc de la figure 3.1 qui fait apparaître les variables d'entrée et de sortie de chaque sous-système. On constate que toutes les variables d'entrée se retrouvent comme variables de sortie, sauf les variables de commande qui doit être spécifiées.

Dans l'étude du mouvement de l'avion décrite par ce système, on peut distinguer divers types de problèmes :

- **Stabilité – commandes fixes** : Dans ce type de problèmes, on étudie le mouvement de drone consécutif à une perturbation, les commandes étant maintenues en position, c’est-à-dire pour un vecteur de commande constant. En raison de la non-linéarité du système mentionnée précédemment, il n’existe en général pas de solution analytique. Toutefois, pour des mouvements de faible amplitude, les équations du mouvement peuvent être linéarisées, ce qui permet d’obtenir des solutions analytiques.
- **Stabilité – commandes libres** : Dans ce cas également, on étudie le mouvement de drone consécutif à une perturbation, mais cette fois les commandes sont libres de se déplacer sous l’effet des couples aérodynamiques qui s’appliquent sur elles. Les variables de commande ne sont donc plus spécifiées, mais sont elles-mêmes liées aux variables d’état du système (orientation, vitesse, vitesse angulaire) par l’entremise des équations décrivant le mouvement des commandes, qui s’ajoutent donc au système de base. Ce type de problèmes présente un intérêt surtout pour les avions à commandes mécaniques.

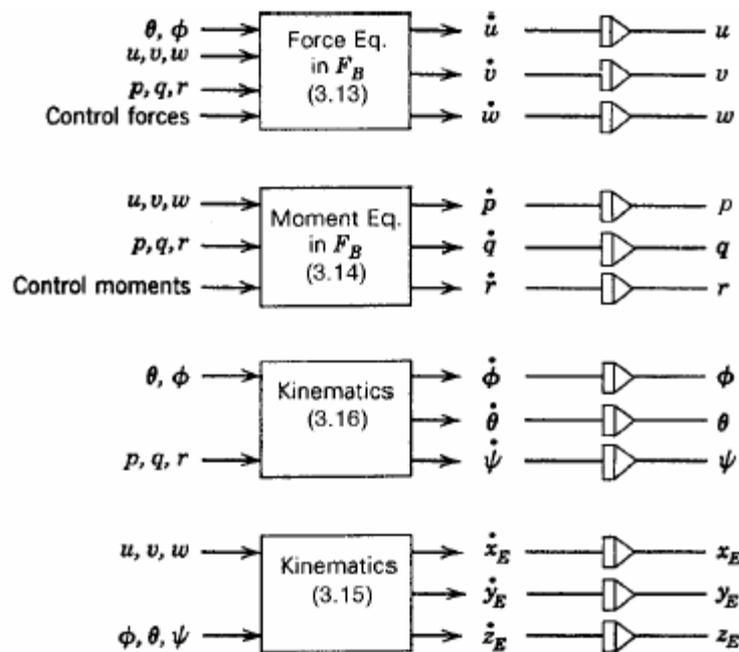


Fig.3.1: Schéma-bloc de la dynamique de drone.

- **Stabilité – commandes automatiques** : C’est encore une fois le mouvement de drone consécutif à une perturbation que l’on étudie, mais lorsque celui-ci est sous le contrôle d’un système de pilotage automatique qui actionne les commandes en fonction de l’évolution des variables d’état et éventuellement de commandes extérieures telles que données par un système de navigation.

- **Réponse aux commandes** : On étudie dans ce cas le mouvement de drone consécutif à l'actionnement d'une commande selon une loi de variation dans le temps spécifiée, généralement un échelon de commande.
- **Réponse à la turbulence atmosphérique** : L'étude du mouvement de drone et des forces qui s'exercent sur lui en raison de turbulences atmosphériques est extrêmement importante, tant du point de vue de la conception que du point de vue opérationnel. Les équations du mouvement se modifient simplement par l'ajout du vent atmosphérique, fluctuant en raison de la turbulence, au vecteur vitesse de drone par rapport à l'atmosphère  $(u, v, w)$ .
- **Problèmes inverses** : Cette dernière classe de problèmes correspond au cas où l'évolution de certaines des variables d'état est spécifiée. Par exemple, on peut chercher à déterminer quelle est l'action à appliquer aux commandes pour obtenir un mouvement donné. C'est aussi à des problèmes de ce type que conduit l'analyse d'essais en vol. Là, les mouvements de drone et des commandes sont connus (mesurés) et il s'agit de déterminer la valeur des paramètres de drone qui correspondent au mouvement observé. Il s'agit d'un exemple de l'important problème d'identification des paramètres en théorie des systèmes.

### **III.3. Théorie des petites perturbations [1] :**

On considère dans cette section des mouvements de faible amplitude autour d'un état d'équilibre. Dans ces conditions, les équations du mouvement peuvent *se linéariser*. L'expérience a montré que cette théorie simplifiée donne de bons résultats, notamment pour l'analyse de la stabilité des états d'équilibre et de la réponse aux commandes.

#### **III.3.1. Linéarisation des équations :**

On commence par décomposer le mouvement entre l'état d'équilibre de référence (vol rectiligne uniforme) identifié par l'indice 0 et les écarts par rapport à cet état (perturbations), identifiés par le préfixe  $\Delta$ . L'état de référence étant un mouvement rectiligne uniforme :  $p_0 = q_0 = r_0 = 0$ . De plus, on supposera que l'état de référence est un vol *symétrique*, de sorte que  $v_0 = \phi_0 = 0$ . Enfin, on peut sans perte de généralité prendre  $w_0 = 0$  en alignant l'axe  $x$  avec le vecteur vitesse à l'équilibre (repère avion de stabilité) et  $\psi_0 = 0$  en choisissant la direction  $x_0$  du repère sol dans le plan de symétrie de drone.

On négligera en outre le moment cinétique des rotors, soit que drone soit en vol plané, soit qu'il y ait un nombre pair de rotors tournant en sens inverse, de sorte que le moment

cinétique global est nul, soit enfin, dans le cas des monomoteurs, que le moment cinétique soit suffisamment faible pour être négligé. Enfin, l'atmosphère sera supposée au repos (vent nul).

Dans ces conditions, en négligeant les termes quadratiques dans les écarts et en linéarisant les expressions trigonométriques, les équations du mouvement (3.13 et 3.16) deviennent :

$$m\Delta u = -P(\sin \theta_0 + \cos \theta_0 \Delta \theta) + X_0 + \Delta X \dots\dots\dots(3.18.a)$$

$$m(\Delta v + ru_0) = P\Delta \phi \cos \theta_0 + Y_0 + \Delta Y \dots\dots\dots(3.18.b)$$

$$m(\Delta w - qu_0) = P(\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \Delta \theta) + Z_0 + \Delta Z \dots\dots\dots(3.18.c)$$

$$I_{xx} \Delta p + I_{xz} \Delta r = L_0 + \Delta L \dots\dots\dots(3.19.a)$$

$$I_{yy} \Delta \phi = M_0 + \Delta M \dots\dots\dots(3.19.b)$$

$$I_{zz} \Delta r + I_{xz} \Delta p = N_0 + \Delta N \dots\dots\dots(3.19.c)$$

$$\Delta u = \cos \theta_0 (u_0 + \Delta u) - u_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + \sin \theta_0 \Delta w \dots\dots\dots(3.20.a)$$

$$\Delta v = u_0 \cos \theta_0 \Delta \psi + \Delta v \dots\dots\dots(3.20.b)$$

$$\Delta w = -\sin \theta_0 (u_0 + \Delta u) - u_0 \cos \theta_0 \Delta \theta + \cos \theta_0 \Delta w \dots\dots\dots(3.20.c)$$

$$\Delta \phi = \Delta p + \tan \theta_0 \Delta r \dots\dots\dots(3.21.a)$$

$$\Delta \theta = \Delta q \dots\dots\dots(3.21.b)$$

$$\Delta \psi = \sec \theta_0 \Delta r \dots\dots\dots(3.21.c)$$

L'état de référence étant un état d'équilibre, il satisfait les équations d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -P \sin \theta_0 + X_0 \\ 0 &= Y_0 \\ 0 &= P \cos \theta_0 + Z_0 \\ 0 &= L_0 = M_0 = N_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.22)$$

de sorte que les équations des petites perturbations s'écrivent finalement, en omettant le préfixe  $\Delta$  pour les angles et les vitesses (de translation et de rotation) dont la valeur de référence est nulle et en écrivant les équations de translation pour l'écart  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  entre la position du centre de masse et sa position au même moment en vol rectiligne uniforme .

$$m\dot{\theta} = -P \cos \theta_0 \Delta \theta + \Delta X \dots\dots\dots(3.23.a)$$

$$m(\dot{\phi} + ru_0) = P \phi \cos \theta_0 + \Delta Y \dots\dots\dots(3.23.b)$$

$$m(\dot{\psi} - qu_0) = -P \sin \theta_0 \Delta \theta + \Delta Z \dots\dots\dots(3.23.c)$$

$$I_{xx} \dot{\rho} + I_{xz} \dot{\phi} = \Delta L \dots\dots\dots(3.24.a)$$

$$I_{yy} \dot{\phi} = \Delta M \dots\dots\dots(3.24.b)$$

$$I_{zz} \dot{\rho} + I_{xz} \dot{\phi} = \Delta N \dots\dots\dots(3.24.c)$$

$$\Delta \dot{\theta} = \cos \theta_0 \Delta u - u_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + \sin \theta_0 w \dots\dots\dots(3.25.a)$$

$$\Delta \dot{\phi} = u_0 \cos \theta_0 \psi + v \dots\dots\dots(3.25.b)$$

$$\Delta \dot{\psi} = -\sin \theta_0 \Delta u - u_0 \cos \theta_0 \Delta \theta + \cos \theta_0 w \dots\dots\dots(3.25.c)$$

$$\dot{\phi} = p + \tan \theta_0 r \dots\dots\dots(3.26.a)$$

$$\Delta \dot{\phi} = q \dots\dots\dots(3.26.b)$$

$$\dot{\psi} = \sec \theta_0 r \dots\dots\dots(3.26.c)$$

Pour obtenir le système différentiel sous forme canonique, il suffit alors de résoudre les équations du mouvement pour les dérivées des composantes de la vitesse et de la vitesse angulaire de perturbation, à savoir :

$$\Delta \dot{\theta} = -g \cos \theta_0 \Delta \theta + \frac{\Delta X}{m} \dots\dots\dots(3.27.a)$$

$$\dot{\phi} = g \phi \cos \theta_0 + \frac{\Delta Y}{m} - ru_0 \dots\dots\dots(3.27.b)$$

$$\dot{\psi} = -g \sin \theta_0 \Delta \theta + \frac{\Delta Z}{m} + qu_0 \dots\dots\dots(3.27.c)$$

$$\dot{\rho} = \frac{I_{zz} \Delta L - I_{xz} \Delta N}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \dots\dots\dots(3.28.a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\Delta M}{I_{yy}} \dots\dots\dots(3.28.b)$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_{xx} \Delta N - I_{xz} \Delta L}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} \dots\dots\dots(3.28.c)$$

**III.3.2. Forces et couples aérodynamiques :**

Comme on l'a mentionné précédemment, les forces et couples aérodynamiques dépendent du mouvement de l'avion représenté par son vecteur vitesse  $u, v, w$  et son vecteur vitesse de rotation  $p, q, r$ , ainsi que du vecteur de paramètres de commandes. La détermination de la manière dont ils en dépendent est au coeur de la dynamique du vol atmosphérique.

En toute rigueur, les forces et les couples aérodynamiques sont des fonctionnelles des variables d'état. Par exemple, la portance de l'aile dépend non seulement de la valeur instantanée de l'incidence mais aussi de toute son histoire passée, ce que l'on peut exprimer par la relation :

$$L(t) = L[\alpha(\tau)] \quad -\infty \leq \tau \leq t \quad \dots\dots\dots (3.29a)$$

En supposant que la fonction  $\alpha(\tau)$  soit développable en série de Taylor,

$$\alpha(\tau) = \alpha(t) + (\tau - t)\dot{\alpha}(t) + \frac{1}{2}(\tau - t)^2 \ddot{\alpha}(t) + \dots$$

$\alpha(t)$  Peut être remplacé dans la relation précédente par la série infinie  $\alpha(t), \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots$

En développant une nouvelle fois en série de Taylor par rapport à l'état d'équilibre initial (pour  $t = t_0$ ), on peut écrire :

$$\Delta L = L_\alpha \Delta \alpha + \frac{1}{2} L_{\alpha\alpha} (\Delta \alpha)^2 + \dots + L_{\alpha\dot{\alpha}} \Delta \alpha \dot{\alpha} + \frac{1}{2} L_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} (\Delta \dot{\alpha})^2 + \dots\dots\dots (3.29b)$$

Dans le cadre de la théorie des petites perturbations, on fait classiquement l'hypothèse, introduite par Bryan (1911), de forces aérodynamiques linéaires, c'est-à-dire que l'on ne retient que les termes linéaires dans l'expression précédente, même si la fonction  $\alpha(t)$  n'est pas analytique (développable en série de Taylor), c'est-à-dire :

$$\Delta L = L_\alpha \Delta \alpha + L_{\alpha\dot{\alpha}} \Delta \alpha \dot{\alpha} + L_{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + \dots \quad \dots\dots\dots (3.29c)$$

Les grandeurs  $L_\alpha, L_{\dot{\alpha}}, \dots$ , sont appelées *dérivées de stabilité* ou plus généralement *dérivées aérodynamiques*. Pour la plupart des forces aérodynamiques et des variables d'état, le premier terme suffit, mais dans certains cas, on doit garder les termes jusqu'à la dérivée seconde pour être suffisamment précis.

Une grande part du travail en mécanique du vol a été consacré à déterminer la valeur de ces dérivées aérodynamiques en fonction des caractéristiques géométriques des aéronefs et des conditions de vol, tant par des méthodes expérimentales que théoriques, et, plus récemment, numériques. Une quantité considérable de connaissances a ainsi été accumulée, qui seront largement présentées.

Une limitation de la théorie classique est l’hypothèse de régularité des variables d’état, qui est mise en défaut en cas de discontinuités, par exemple pour des échelons des variables (ou de leurs dérivées). Ainsi, pour un échelon d’incidence, l’expression classique donne :

$$\Delta L = L_\alpha \Delta \alpha = \text{const} .$$

Puisque  $\Delta \alpha$  est constant, ce qui est en contradiction avec l’observation expérimentale que la portance ne s’établit pas instantanément. Dans le cadre d’une théorie aérodynamique linéaire, on peut aisément résoudre ce problème en utilisant le concept de fonction de transfert. On n’abordera pas ici cette extension de la théorie classique de Bryan.

Pour terminer cette section, examinons les simplifications induites par l’hypothèse de l’existence d’un plan de symétrie et de la symétrie de l’état d’équilibre de référence. Pour une configuration symétrique, il est clair que la force latérale  $Y$  et les couples de lacet et de roulis  $L$  et  $N$  sont identiquement nuls pour tout vol symétrique, c’est-à-dire tel que  $\gamma = \gamma = 0 = \psi = 0$ , ceci étant vrai quelle que soit l’amplitude du mouvement (c’est-à-dire pas uniquement pour de petites perturbations). Par conséquent, les dérivées des forces et couples latéraux par rapport aux variables longitudinales  $(u, v, q)$  sont strictement nulles. Nous ferons en outre les approximations de négliger :

1. Les dérivées des forces et couples aérodynamiques longitudinaux par rapport aux variables latérales.
2. Les dérivées des forces et couples aérodynamiques par rapport aux dérivées temporelles des variables d’état, à l’exception des dérivées,  $Z_{\dot{w}}$  et  $M_{\dot{w}}$ .
3. La dérivée  $X_q$ .
4. Les variations de masse volumique de l’atmosphère avec l’altitude.

Il faut souligner qu’aucune de ces approximations n’est indispensable pour résoudre les problèmes de dynamique du vol, elles sont seulement motivées par l’expérience et la commodité, et peuvent être remises en cause au besoin. Avec ces approximations, les forces et couples aérodynamiques s’expriment comme suit :

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_w w + \Delta X_c \dots\dots\dots(3.32.a)$$

$$\Delta Y = Y_v v + Y_p p + Y_r r + \Delta y_c \dots\dots\dots(3.32.b)$$

$$\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + \Delta Z_c \dots\dots\dots(3.32.c)$$

$$\Delta L = L_v v + L_p p + L_r r + \Delta L_c \dots\dots\dots(3.32.d)$$

$$\Delta M = M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + \Delta M_c \dots\dots\dots(3.32.e)$$

$$\Delta N = N_v v + N_p p + N_r r + \Delta N_c \dots\dots\dots(3.32.f)$$

Où les termes avec l’indice  $c$  indiquent les forces et couples aérodynamiques résultant de l’actionnement des commandes.

Pour obtenir l'expression finale des équations du mouvement de faible amplitude sous forme canonique, il suffit d'introduire ces expressions des forces et couples aérodynamiques dans les équations (3.25, 3.26, 3.27 et 3.28), en résolvant les équations en translation selon  $z$  et en rotation de tangage pour  $\dot{\alpha}$  et  $q$ . De l'équation en translation selon  $z$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -g \sin \theta_0 \Delta \theta + qu_0 + \frac{Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + Z_q q + \Delta Z_c}{m} \rightarrow \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{1 - \frac{Z_{\dot{\alpha}}}{m}} \left[ -g \sin \theta_0 \Delta \theta + qu_0 + \frac{Z_u \Delta u + Z_w w + Z_q q + \Delta Z_c}{m} \right] \\ &= \frac{1}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \left[ Z_u \Delta u + Z_w w + (Z_q + mu_0)q - mg \sin \theta_0 \Delta \theta + \Delta Z_c \right] \dots\dots\dots(3.33) \end{aligned}$$

L'équation en rotation de tangage donne, quand à elle :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q q + \Delta M_c}{I_{yy}} \\ &= \frac{1}{I_{yy}} \left( \left( M_u + \frac{Z_u M_{\dot{\alpha}}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \right) \Delta u + \left( M_w + \frac{Z_w M_{\dot{\alpha}}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \right) w \right. \\ &\quad \left. + \left( M_q + \frac{(Z_q + mu_0) M_{\dot{\alpha}}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \right) q - \frac{mg \sin \theta_0 M_{\dot{\alpha}}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \Delta \theta + \Delta M_c + \frac{\Delta Z_c M_{\dot{\alpha}}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \right) \dots\dots\dots(3.34) \end{aligned}$$

En écrivant l'ensemble des équations en détail, on constate qu'elles se divisent en deux groupes indépendants décrivant respectivement les mouvements longitudinal et latéral, présentés sous forme matricielle en (3.35) et (3.36).

Le découplage ainsi obtenu résulte des hypothèses faites. Comme on l'a mentionné précédemment, un mouvement longitudinal n'induit aucune force latérale ni couple de lacet ou de roulis. Par conséquent, le système latéral est identiquement satisfait par  $v = \gamma = \phi = \psi = 0$  et le mouvement sera entièrement décrit par le système (3.35) qui constitue un système dans les 6 variables  $\Delta u, w, q, \Delta \theta, \Delta x_0$  et  $\Delta z_0$ . Ces mouvements pour lesquels les variables latérales sont identiquement nulles ne sont appelées longitudinaux ou symétriques, de même que le système d'équations qui les décrit. Inversement, le système longitudinal est entièrement satisfait par  $\Delta u = w = q = \Delta \theta = 0$ , et les mouvements correspondants sont purement *latéraux* et décrits par le système (3.36) appelé de même.

Systeme longitudinal:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \cos \theta_0 \\ \frac{Z_u}{m-Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_w}{m-Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_q - mu_0}{m-Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{-mg \sin \theta_0}{m-Z_{\dot{\alpha}}} \\ \frac{1}{I_{yy}} \left[ M_u + \frac{Z_u M_{\dot{\alpha}}}{m-Z_{\dot{\alpha}}} \right] & \frac{1}{I_{yy}} \left[ M_w + \frac{Z_w M_{\dot{\alpha}}}{m-Z_{\dot{\alpha}}} \right] & \frac{1}{I_{yy}} \left[ M_q + \frac{(Z_q + mu_0) M_{\dot{\alpha}}}{m-Z_{\dot{\alpha}}} \right] & \frac{-mg \sin \theta_0 M_{\dot{\alpha}}}{I_{yy} (m-Z_{\dot{\alpha}})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_c}{m} \\ \frac{\Delta Z_c}{m-Z_{\dot{\alpha}}} \\ \frac{\Delta M_c}{I_{yy}} + \frac{\Delta Z_c M_{\dot{\alpha}}}{I(m-Z_{\dot{\alpha}})} \\ 0 \end{bmatrix} \dots (3.35)$$

$$\Delta \xi_0 = \cos \theta_0 \Delta u - u_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + \sin \theta_0 w$$

$$\Delta \zeta_0 = -\sin \theta_0 \Delta u - u_0 \cos \theta_0 \Delta \theta + \cos \theta_0 w$$

Système latéral :

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \phi \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \frac{Y_r - u_0}{m} & g \cos \theta_0 \\ I'_{zz} L_v - I'_{xz} N_v & I'_{zz} L_p - I'_{xz} N_p & I'_{zz} L_r - I'_{xz} N_r & 0 \\ I'_{xx} N_v - I'_{xz} L_v & I'_{xx} N_p - I'_{xz} L_p & I'_{xx} N_r - I'_{xz} L_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta Y_c}{m} \\ I'_{zz} \Delta L_c - I'_{xz} \Delta N_c \\ I'_{xx} \Delta N_c - I'_{xz} \Delta L_c \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.36)$$

$$\psi = \sec \theta_0 r$$

$$\Delta \psi = u_0 \cos \theta_0 \psi + v$$

$$I'_{xx} = I_{xx} / (I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)$$

$$I'_{zz} = I_{zz} / (I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)$$

$$I'_{xz} = I_{xz} / (I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2)$$

Il faut remarquer toutefois que l'existence de mouvements purement longitudinaux est soumise à moins de conditions que celle de mouvements latéraux. En effet, les seules conditions à remplir sont simplement :

- L'existence d'un plan de symétrie.
- L'absence d'effets gyroscopiques de rotors.

En particulier, l'hypothèse de petites perturbations n'est pas nécessaire, il peut exister des mouvements purement longitudinaux de grande amplitude.

Par contre, l'existence de mouvements latéraux est soumise à des conditions supplémentaires, à savoir, outre les conditions d'existence des mouvements longitudinaux

- La faible amplitude des mouvements, condition de la linéarisation des équations, et
- L'absence de couplage aérodynamique entre mouvements latéraux et forces - couples longitudinaux.

La linéarisation est en effet indispensable en raison de la présence de termes tels que  $mr\dot{v}$  et  $mp\dot{v}$  dans les équations du mouvement longitudinal. Par conséquent, un mouvement latéral d'amplitude appréciable induit un mouvement longitudinal, mais l'inverse n'est pas vrai.

### **III.3.3. Forme adimensionnelle des équations :**

On connaît le grand usage fait en aérodynamique des coefficients adimensionnels, qui permet de prendre en compte automatiquement les effets principaux de grandeur, de vitesse et de masse volumique. De même, on peut définir des formes non-dimensionnelles des diverses dérivées aérodynamiques intervenant dans les équations du mouvement (3.35 et 3.36). Malheureusement, il n'existe pas de norme universellement acceptée pour cette adimensionnalisation. On adoptera ici le système employé par la NASA, qui est d'un usage répandu.

Les facteurs d'adimensionnalisation pour la théorie des petites perturbations sont définis au tableau (3.1.) Il est intéressant de remarquer que dans le cadre de cette théorie, les vitesses adimensionnelles  $\hat{u}$  et  $\hat{w}$  ne sont rien d'autre que les angles aérodynamiques  $\beta$  et  $\alpha_x$ . En effet, au premier ordre dans les vitesses de perturbation :

$$V^2 = (u_0 + \Delta u)^2 + v^2 + w^2 \approx (u_0 + \Delta u)^2 \quad \rightarrow \quad V \approx u_0 + \Delta u$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{V} \approx \frac{v}{u_0 + \Delta u} \approx \frac{v}{u_0} = \hat{v}$$

$$\alpha_x = \tan^{-1} \frac{w}{u} = \tan^{-1} \frac{w}{u_0 + \Delta u} \approx \frac{w}{u_0} = \hat{w}$$

**Tableau. 3.1: Adimensionnalisation des équations.**

Grandeur dimensionnelle	Facteur de normalisation	Coefficient adimensionnel
$X, Y, Z$	$\frac{1}{2} \rho u_0^2 S$	$C_x, C_y, C_z$
$P$	$\frac{1}{2} \rho u_0^2 S$	$C_p$
$M$	$\frac{1}{2} \rho u_0^2 S \bar{c}$	$C_m$
$L, N$	$\frac{1}{2} \rho u_0^2 S b$	$C_l, C_n$
$u, v, w$	$u_0$	$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$
$\alpha, q$	$2u_0 / \bar{c}$	$\hat{\alpha}, \hat{q}$
$\beta, p, r$	$2u_0 / b$	$\hat{\beta}, \hat{p}, \hat{r}$
$m$	$\rho S \bar{c} / 2$	$\mu$
$I_{yy}$	$\rho S (\bar{c} / 2)^3$	$\hat{I}_{yy}$
$I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}$	$\rho S (b / 2)^3$	$\hat{I}_{xx}, \hat{I}_{zz}, \hat{I}_{xz}$
$t$	$t^* = \bar{c} / 2u_0$	$\hat{t}$

C'est la raison pour laquelle on a coutume d'exprimer les dérivées aérodynamiques adimensionnelles par rapport à  $\alpha, \alpha, \beta$  et  $\beta$  plutôt que par rapport aux vitesses réduites. Remarquons enfin que, puisque  $\alpha_x$  et l'incidence par rapport à la direction de portance nulle  $\alpha$  diffèrent d'un angle constant, les dérivées par rapport à  $\alpha_x$  et par rapport à  $\alpha$  sont identiques. L'ensemble des dérivées aérodynamiques adimensionnelles intervenant dans la théorie des petites perturbations sont rassemblées aux tableaux 3.2 et 3.3 pour les dérivées longitudinales et latérales respectivement, chaque symbole représentant la dérivée du coefficient aérodynamique en tête de colonne par rapport à la variable en tête de rangée.

Comme indiqué précédemment, on admettra que les dérivées  $C_{x\alpha}$  et  $C_{xq}$  sont nulles.

**Tableau.3.2: Dérivées longitudinales adimensionnelles.**

	$C_x$	$C_z$	$C_m$
$\hat{u}$	$C_{xu}$	$C_{zu}$	$C_{mu}$
$\alpha$	$C_{x\alpha}$	$C_{z\alpha}$	$C_{m\alpha}$
$\hat{q}$	$C_{xq}$	$C_{zq}$	$C_{mq}$
$\hat{\alpha}$	$C_{x\hat{\alpha}}$	$C_{z\hat{\alpha}}$	$C_{m\hat{\alpha}}$

**Tableau.3.3 : Dérivées latérales adimensionnelles.**

	$C_y$	$C_l$	$C_n$
$\beta$	$C_{y\beta}$	$C_{l\beta}$	$C_{n\beta}$
$\hat{p}$	$C_{yp}$	$C_{lp}$	$C_{np}$
$\hat{r}$	$C_{yr}$	$C_{lr}$	$C_{nr}$

Bien qu’il soit possible d’écrire les équations du mouvement (3.35 et 3.36) sous forme entièrement adimensionnelle (voir annexe C), la pratique courante de nos jours est plutôt de les résoudre numériquement sous forme dimensionnelle. Aussi, il faut exprimer les dérivées aérodynamiques dimensionnelles en fonction des dérivées adimensionnelles présentées aux tableaux (3.2) et (3.3).

**III.3.4. Dérivées aérodynamiques dimensionnelles :**

Pour conclure ce chapitre, établissons les expressions des dérivées aérodynamiques dimensionnelles. On utilise à cette fin une procédure systématique décrite en détail pour les dérivées de la force Z. En vertu de l’adimensionnalisation présentée au tableau (3.1).

$$Z = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_z$$

Par conséquent,

$$Z_u = \rho u_0 S C_z + \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{z_u} \frac{d\hat{u}}{du} = \rho u_0 S C_z + \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_u}$$

Mais d’autre part, en vertu des équations d’équilibre (3.22),  $C_z = -C_p \cos \theta_0$ , de sorte que :

$$Z_u = -\rho u_0 S C_p \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z_u} \dots\dots\dots (3.37)$$

Semblablement,

$$Z_w = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{z\alpha} \frac{d\alpha}{dw} = \frac{1}{2} \rho u_0 S C_{z\alpha}$$

$$Z_q = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{zq} \frac{d\hat{q}}{dq} = \frac{1}{4} \rho u_0 \bar{c} S C_{zq}$$

$$Z_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S C_{z\dot{\alpha}} \frac{d\hat{\alpha}}{d\dot{\alpha}} = \frac{1}{4} \rho \bar{c} S C_{z\dot{\alpha}}$$

En répétant la même procédure pour toutes les autres dérivées et compte tenu de ce qu’à l’état d’équilibre :

$$C_x = C_p \sin \theta_0 \quad , \quad C_m = C_l = C_n = 0$$

On obtient les expressions rassemblées aux tableaux (3.4) et (3.5) pour les dérivées longitudinales et latérales respectivement.

**Tableau.3.4: Dérivées longitudinales dimensionnelles.**

	X	Z	M
<i>u</i>	$\rho u_0 SC_p \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \rho u_0 SC_{x_u}$	$-\rho u_0 SC_p \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \rho u_0 SC_{z_u}$	$\frac{1}{2} \rho u_0 \bar{c} SC_{m_u}$
<i>w</i>	$\frac{1}{2} \rho u_0 SC_{x_\alpha}$	$\frac{1}{2} \rho u_0 SC_{z_\alpha}$	$\frac{1}{2} \rho u_0 \bar{c} SC_{m_\alpha}$
<i>q</i>	$\frac{1}{4} \rho u_0 \bar{c} SC_{x_q}$	$\frac{1}{4} \rho u_0 \bar{c} SC_{z_q}$	$\frac{1}{4} \rho u_0 \bar{c}^2 SC_{m_q}$
<i>w&amp;</i>	$\frac{1}{4} \rho \bar{c} SC_{x_{w&}}$	$\frac{1}{4} \rho \bar{c} SC_{z_{w&}}$	$\frac{1}{4} \rho \bar{c}^2 SC_{m_{w&}}$

**Tableau.3.5 : Dérivées latérales dimensionnelles.**

	Y	L	N
<i>v</i>	$\frac{1}{2} \rho u_0 SC_{y_\beta}$	$\frac{1}{2} \rho u_0 b SC_{l_\beta}$	$\frac{1}{2} \rho u_0 b SC_{n_\beta}$
<i>p</i>	$\frac{1}{4} \rho u_0 b SC_{y_p}$	$\frac{1}{4} \rho u_0 b^2 SC_{l_p}$	$\frac{1}{4} \rho u_0 b^2 SC_{n_p}$
<i>r</i>	$\frac{1}{4} \rho u_0 b SC_{y_r}$	$\frac{1}{4} \rho u_0 b^2 SC_{l_r}$	$\frac{1}{4} \rho u_0 b^2 SC_{n_r}$

# Chapitre 4

## **STABILITE DU DRONE**

## **IV.1. Introduction à la stabilité :**

Supposer que nous avons un drone dans un certain état de vol régulier. S'il est dérangé (perturbé) par une rafale, ou par le pilote, il est considéré comme stable s'il revient à un état raisonnablement stable dans un temps fini. L'état final, cependant, ne doit pas être identique à l'état initial. Selon des circonstances nous pouvons tolérer un petit degré d'instabilité ou concevoir même délibérément un drone pour être tout à fait stable ; dans le dernier cas, cependant, un fiable système automatique de stabilisation sera exigé. Nous exigeons normalement plus qu'une simple stabilité. La réponse aux rafales ne doit pas rendre la tâche du pilote difficile. Notre premier but est de concevoir un drone, afin de pouvoir étudier sa stabilité. Comparativement à la stabilité d'un avion, le drone est un avion autonome sans pilote à bord, d'où pas de perte humaine. La stabilité d'un drone est semblable à celle d'un avion.

### **IV.1.1. Choix des axes :**

En résolvant un problème impliquant la dynamique d'un corps il est habituellement nécessaire de définir les axes de référence et définir les variables du mouvement. Le drone vole dans une ligne droite avec des forces et des moments de l'inertie concernant les axes qui changent avec le temps et les rotations simples du drone ont le même effet. Nous sommes alors forcés d'adopter les axes qui restent fixes relativement au drone de sorte qu'elles se déplacent avec lui et reconnaître que nos équations de mouvement devront être modifiées en conséquence. De tels axes sont connus comme 'les axes du corps'. L'origine est placée au CG.

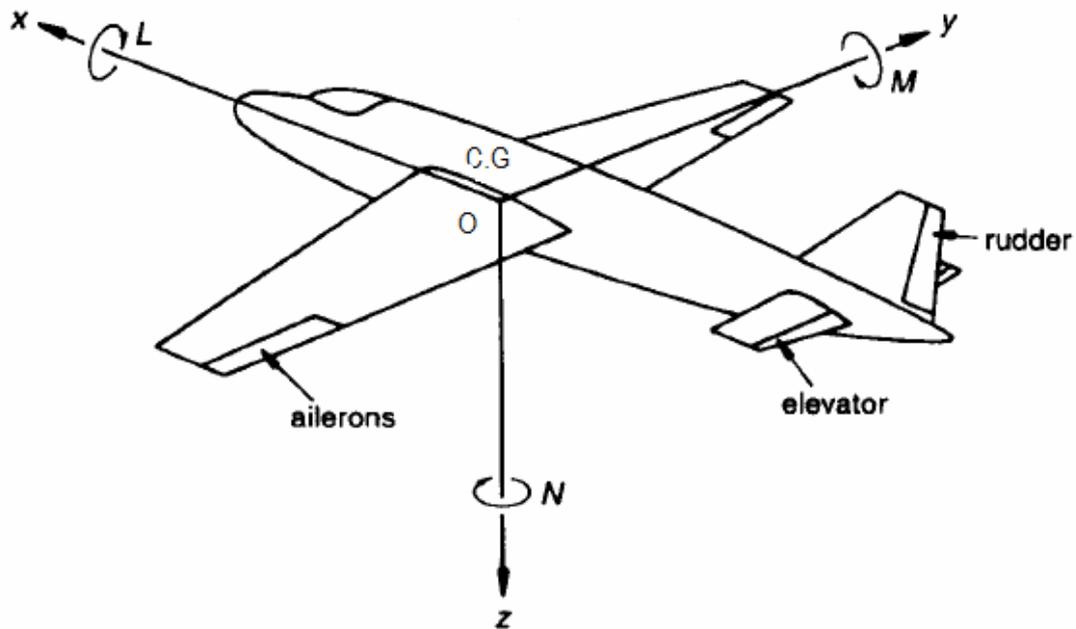
Nos axes sont alors choisis comme suit :

L'axe  $Ox$  se dirige dans la direction du vol.

L'axe  $Oy$  perpendiculairement au plan de la symétrie.

L'axe  $Oz$  se dirige vers le bas.

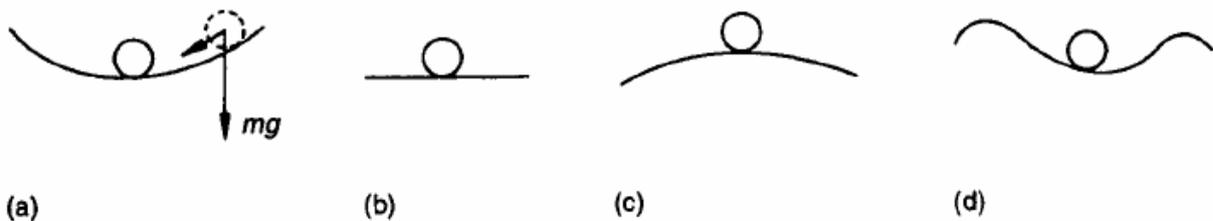
Le schéma ci-dessous montre les axes :



**Fig.4.1** : Axes de stabilité et gouvernes d'un drone.

Un drone en vol est complètement sans contrainte et ainsi a six degrés de liberté, trois pour la translation et trois pour la rotation. Ceci signifie qu'il y a différentes façon d'apparition de l'instabilité et pour cette raison des conséquences graves de vitesses élevées peuvent s'ensuivre. En faisant face à ces problèmes nous discutons d'abord une forme plus faible de stabilité, connue sous le nom de stabilité statique.

Un corps serait statiquement stable si une perturbation produite d'une force ou d'un moment, tend à ramener le corps à l'état initial.



**Fig.4.2** : Illustration de diverses variations de la stabilité statique.

- (a) Stabilité.
- (b) Stabilité neutre.
- (c) Instable.
- (d) Stabilité conditionnelle.

Considérer la boule dans une cannelure comme représenté sur le schéma (a). Si la boule est déplacée vers la droite comme montré alors, un composant du poids apparaît vers la position initiale; au début donc la boule était statiquement stable.

En revanche la boule sur le schéma (c), une fois déplacée, contient une force tendant à

augmenter le déplacement et donc devient statiquement instable.

La boule du schéma (b) n'a aucune force là-dessus qui produit un déplacement et ainsi il se trouve dans un état de stabilité statique neutre.

Dans le schéma (d) où la boule est stable à des petits déplacements mais instable s'il est déplacée trop loin, ceci peut être décrit comme cas de stabilité conditionnelle.

Un drone peut être statiquement stable à des petits changements d'incidence mais instable si le changement de l'incidence a comme conséquence la perte de vitesse d'aile.

Dans le cas de drone il est utile de mesurer la stabilité statique; le facteur de reconstitution est habituellement le moment, ainsi la quantité est le taux de changement d'un moment avec le déplacement, et ainsi a la forme d'une rigidité. Nous devons également changer les mêmes déplacements en utilisant les commandes ; les derniers moments qui s'appliquent sont renforcés par les mêmes moments de reconstitution. La conséquence est qu'un drone avec un degré élevé de stabilité statique exige également de grands mouvements de commande et vice versa. Nous trouvons souvent cette sorte de rapport entre la stabilité et la commande dans les systèmes mécaniques.

## **IV.2 STABILITÉ STATIQUE ET GUIDAGE :**

### **IV.2.1. Introduction :**

Avant d'entamer l'étude des caractéristiques de la stabilité, il convient d'en mesurer la portée réelle et d'autre part de définir précisément les notions qui seront utilisées par la suite et notamment la distinction entre stabilité *statique* et stabilité *dynamique*.

La contrôlabilité et stabilité d'un véhicule ne sont pas des concepts équivalents. En effet, la contrôlabilité d'un véhicule n'implique pas qu'il soit stable vis-à-vis de perturbations extérieures sans intervention du pilote. Un bon nombre de drone considérés excellents du point de vue de leurs caractéristiques de pilotage présentent une légère instabilité latérale appelée divergence spirale. Cette instabilité ne présente aucun problème car elle se développe tellement lentement que le pilote la corrige constamment sans même s'en rendre compte. Par contre, lorsque le drone est sous pilotage automatique, il est évidemment essentiel que le système en boucle fermée (drone + régulateur) soit stable vis-à-vis de perturbations atmosphériques et des commandes provenant du système de navigation.

Un aspect étroitement lié à la question de la stabilité est celle du guidage, à savoir l'action des commandes sur le drone. Les questions qui nous préoccupent à cet égard sont d'une part de déterminer le réglage des commandes requis pour obtenir une configuration de vol donnée et d'autre part la manière dont le drone répond dynamiquement à un échelon de commande. En général, on constate un certain conflit entre les exigences de stabilité et de manœuvrabilité: une

configuration très stable nécessite de fortes sollicitations pour changer l'état d'équilibre alors qu'une configuration très manœuvrable est souvent proche de l'instabilité.

Définissons à présent plus précisément les notions de stabilité statique et dynamique.

La stabilité est une propriété d'un état d'équilibre de drone, c'est-à-dire d'un vol stabilisé. L'état d'équilibre est *dynamiquement stable* si le véhicule y retourne après en avoir été écarté par une petite perturbation. La stabilité dynamique concerne par conséquent le comportement asymptotique (la limite pour  $t \rightarrow \infty$ ) du transitoire produit par un écart par rapport à l'équilibre. En se limitant à de petites perturbations, on peut linéariser les équations du mouvement autour du point d'équilibre. On parle alors d'une théorie linéaire de stabilité. La stabilité statique est relative quant à elle à la réponse initiale à la perturbation, c'est-à-dire à la limite de la réponse pour  $t \rightarrow 0$ . On dit qu'un drone est statiquement stable si les forces/couples résultant de la perturbation *ont tendance* à le ramener à l'état d'équilibre. Comme elle est relative à l'état initial, la stabilité statique s'étudie beaucoup plus simplement que la stabilité dynamique. On obtient de la sorte de nombreuses informations utiles, d'autant plus que la stabilité statique est une condition *nécessaire* de la stabilité dynamique. Enfin, on distingue les stabilités «commandes fixes» et «commandes libres» selon que les commandes soient maintenues en position ou au contraire libres de se déplacer sous l'effet des sollicitations résultantes de la perturbation.

#### **IV.2.2. Stabilité statique longitudinale manche fixe :**

##### **IV.2.2.1. Critère de stabilité statique longitudinale et implications :**

###### **Équilibre en rotation :**

Pour assurer l'équilibre longitudinal du drone, la somme des forces dans le plan de symétrie du drone (deux composantes) et du moment des forces dans la direction normale au plan de symétrie (une composante, moment de tangage) doivent s'annuler. Soit un aéronef donné (de configuration arbitraire : aile seule, aile et fuselage, aile, fuselage et empennage, ...). La géométrie étant fixée (en particulier le réglage de la gouverne de profondeur), en portant en graphique le coefficient de moment des forces aérodynamiques (et de propulsion) autour du centre de gravité de drone en fonction de l'incidence  $\alpha$  mesurée à partir de la direction de portance nulle de l'aéronef entier, on obtient typiquement une courbe telle que celles représentées à la figure (4.3), ainsi que le montre l'analyse de la section suivante. Dans ces conditions, l'équilibre en rotation n'est assuré qu'au point où la courbe de moment de tangage croise l'axe des abscisses, c'est-à-dire au point A. Cela signifie que, pour cette géométrie, le vol n'est possible qu'à l'incidence correspondante (et, vu l'équilibre en sustentation, qu'à la vitesse correspondante).

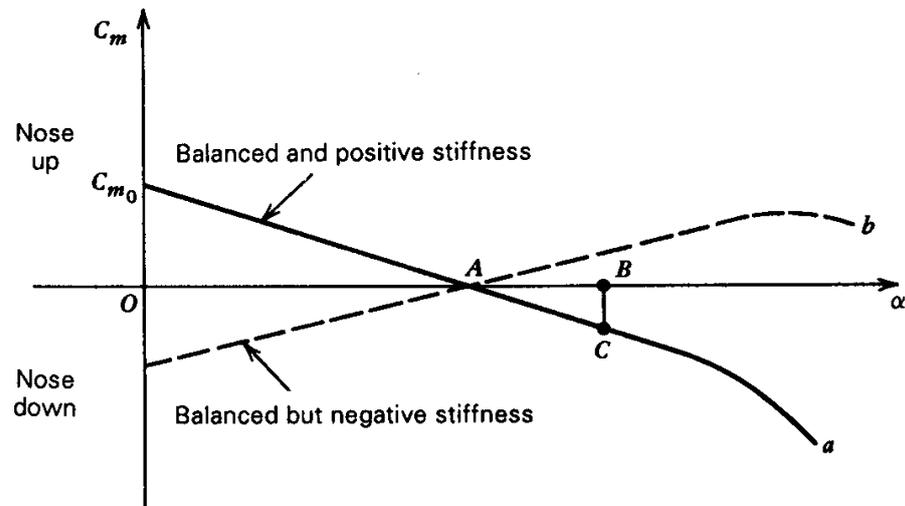


Fig. 4.3: Moment de tangage en fonction de l'incidence.

### Stabilité statique :

Examinons à présent la stabilité statique de ce point d'équilibre. En réalité, on considère une forme restreinte de la stabilité statique, que l'on appelle parfois « raideur en tangage » [3], à savoir la stabilité vis-à-vis de perturbations d'incidence uniquement. Supposons que le drone correspondant à la courbe *a* de la figure subisse une perturbation d'incidence positive. Le moment de tangage prendra alors une valeur négative (moment piqueur) et aura donc tendance à ramener le drone dans son état non perturbé. En accord avec la définition introduite à la section précédente, on en déduit que le drone est *statiquement stable* en tangage, ou qu'il présente une raideur en tangage positive. Inversement, le drone correspondant à la courbe *b* de la figure est statiquement instable.

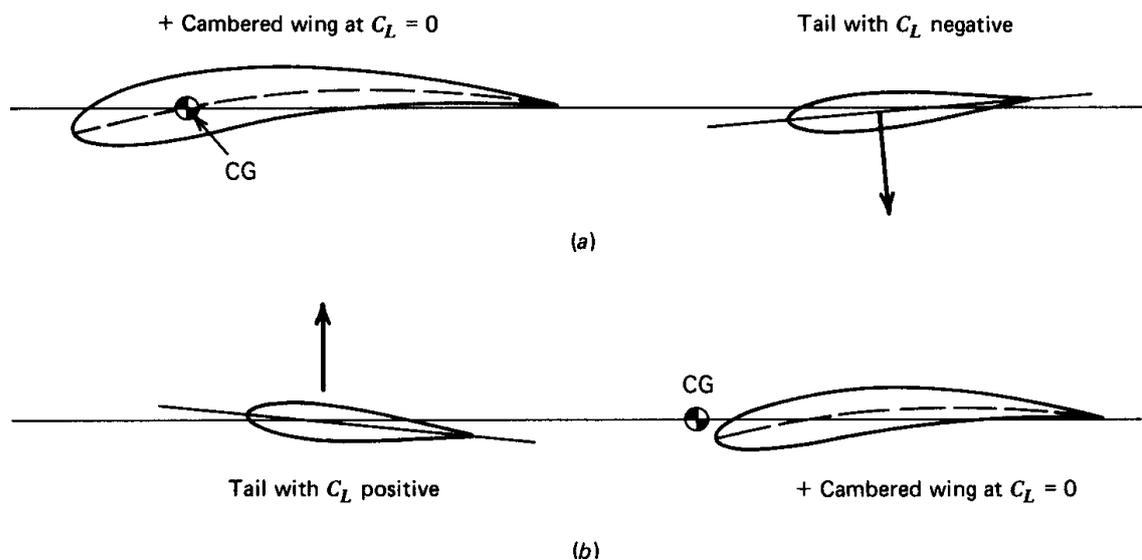
Une conséquence directe de cette analyse est que les deux conditions à remplir par une géométrie pour qu'il existe un état d'équilibre stable sont que le coefficient de moment pour une portance nulle  $C_m$  soit positif et que la pente de la courbe de moment de tangage en fonction de l'incidence  $C_{m\alpha}$  soit négative. Comme on le verra ultérieurement, cette dernière condition peut être remplie pour n'importe quelle configuration du drone en plaçant le centre de gravité suffisamment en avant. Par conséquent, il suffit pour assurer l'existence d'un état équilibre stable que la configuration possède un  $C_m$  positif.

### Configurations possibles:

Considérons tout d'abord le cas d'une aile droite isolée. Pour une telle aile, le coefficient de moment au foyer est de signe inverse de la cambrure de l'aile. Par conséquent, seule une aile de cambrure négative permet d'obtenir un état d'équilibre stable. Mais cette configuration

présente de nombreux défauts, notamment une traînée élevée et un faible coefficient de portance maximum.

La solution la plus utilisée en pratique pour obtenir une configuration avec un coefficient de moment positif consiste à utiliser deux (parfois trois) surfaces portantes. Le plus souvent, une de ces surfaces est beaucoup plus grande que l'autre. On distingue alors deux configurations (voir fig.4.4) : soit l'aile principale est située en avant, c'est la configuration classique avec empennage horizontal arrière, soit l'aile principale est située en arrière, ce qu'on appelle généralement configuration canard. Dans le cas de la configuration classique, l'empennage est calé négativement de manière à produire une portance négative à l'incidence de portance nulle, alors que pour la configuration canard, le canard est calé positivement de manière à produire une portance positive. Chacune des deux configurations a des avantages et des inconvénients dont la discussion sort du cadre de ce projet. On consultera avantageusement à ce propos la littérature relative à la conception des drones (Aircraft design) [4].



**Fig.4.4** : Configurations avec deux surfaces portantes

#### IV.2.2.2 Moment de tangage :

Analysons à présent l'expression du moment de tangage autour d'une configuration classique pour déterminer la condition à satisfaire par la position du centre de gravité pour obtenir un état d'équilibre stable.

#### **Contribution de l'aile principale :**

Le centre aérodynamique de l'aile (foyer) étant défini comme le point autour duquel le moment des forces aérodynamiques est indépendant de l'incidence (et donc de la portance), le moment

autour du centre de gravité de drone de ces forces s'obtient aisément par les règles de transport du moment. Avec les notations définies à la figure (4.5) où  $(c)$  est la *corde aérodynamique moyenne* de l'aile définie par :

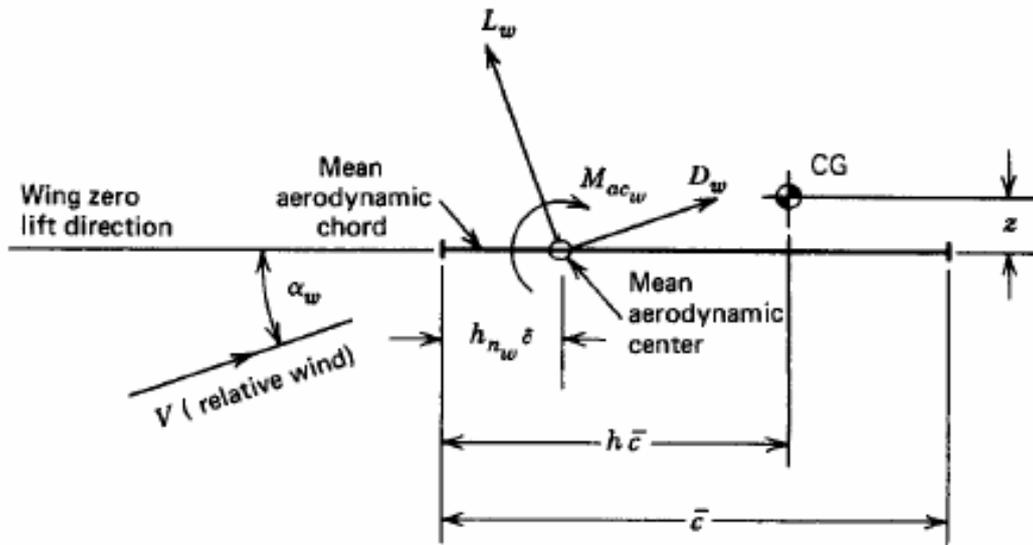
$$C = \frac{1}{s} \int_{-b/2}^{b/2} c^2 dy \dots\dots\dots(4.1)$$

On obtient:

$$M_w = M_{ac_w} + (L_w \cos \alpha_w + D_w \sin \alpha_w)(h - h_{n_w})\bar{c} + (L_w \sin \alpha_w - D_w \cos \alpha_w)z \dots\dots(4.2)$$

Remarquons que l'expression obtenue est indépendante de la position (arbitraire) du bord d'attaque de la corde aérodynamique moyenne par rapport à laquelle les distances sont mesurées. Et non-dimensionnées par  $\frac{1}{2}\rho V^2 c S$ , et en supposant des angles d'incidence faibles, on obtient :

$$C_{m_w} = C_{m_{ac_w}} + (C_{L_w} + C_{D_w} \alpha_w)(h - h_{n_w}) + (C_{L_w} \alpha_w - C_{D_w})z / \bar{c} \dots\dots\dots(4.3)$$



**Fig.4.5 :** Système de forces et moment sur l'aile

Dans la plupart des cas, le dernier terme est négligeable, de même que la contribution de la traînée dans le deuxième terme, de sorte qu'on obtient finalement :

$$\begin{aligned} C_{m_w} &= C_{m_{ac_w}} + C_{L_w} (h - h_{n_w}) \\ &= C_{m_{ac_w}} + a_w \alpha_w (h - h_{n_w}) \dots\dots\dots(4.4) \end{aligned}$$

En notant  $a_w$  la pente de la courbe de portance de l'aile ( $a_w = C_{L_{\alpha_w}}$ ).

**Contribution du fuselage et des nacelles :**

L'influence du fuselage et des nacelles est complexe. Un fuselage isolé subit également

des efforts aérodynamiques qui se réduisent globalement, pour des incidences modérées, à une portance, une traînée et un moment indépendant de l'incidence autour d'un centre aérodynamique. Les propriétés aérodynamiques d'une combinaison aile/fuselage ne s'obtiennent cependant pas par la simple superposition des propriétés de l'aile et du fuselage séparément car de fortes interférences existent. Ainsi, la présence du fuselage modifie l'écoulement autour de l'aile, en particulier la distribution de portance en envergure, et les vitesses induites par la nappe tourbillonnaire émise par l'aile produisent une contribution positive (déstabilisante) à la pente de la courbe :  $C_m - \alpha$ .

En résumé, l'adjonction du fuselage et des nacelles à une aile a généralement pour effet de déplacer le centre aérodynamique vers l'avant, d'augmenter légèrement la pente de la courbe de portance et de fournir une contribution négative au coefficient de moment au foyer.

L'équation du moment de tangage de la combinaison aile/fuselage/nacelles prend alors la même forme que pour l'aile seule mais avec des valeurs différentes des paramètres :

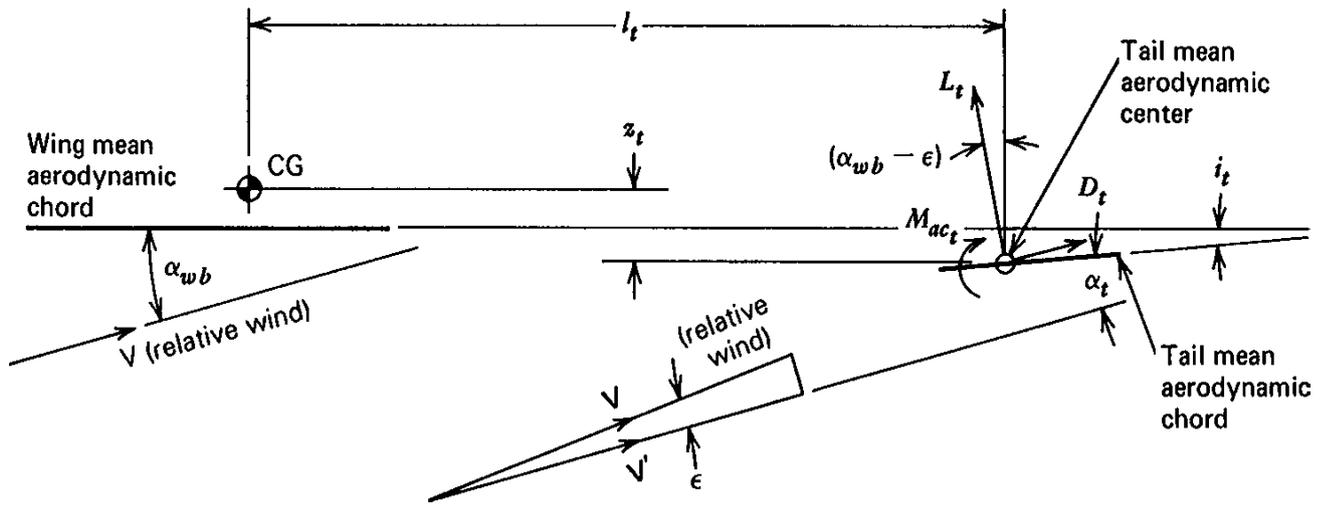
$$\begin{aligned} C_{m_{wb}} &= C_{m_{ac_{wb}}} + C_{L_{wb}}(h - h_{n_{wb}}) \\ &= C_{m_{ac_{wb}}} + a_{wb}\alpha_{wb}(h - h_{n_{wb}}) \dots\dots\dots (4.5) \end{aligned}$$

Où  $a_{wb}$  est la pente de la courbe de portance de la combinaison aile/fuselage/ nacelles.

**Contribution de l'empennage :**

Les efforts aérodynamiques sur l'empennage s'expriment exactement comme ceux sur l'aile principale, à ceci près que les interférences dues à la présence de l'aile principale doivent être prises en compte. L'effet dominant est la déflexion vers le bas de l'écoulement abordant l'empennage par la nappe tourbillonnaire émise par l'aile principale, qui a pour effet de réduire l'incidence d'un angle de déflexion  $\epsilon$ . La position de l'empennage par rapport à l'aile principale étant schématisée à la figure 4.6, on obtient l'expression suivante pour le moment de tangage produit par l'empennage :

$$\begin{aligned} M_t &= M_{ac_t} - l_t \left[ (L_t \cos(\alpha_{wb} - \epsilon) + D_t \sin(\alpha_{wb} - \epsilon)) \right] \\ &\quad - z_t \left[ (L_t \sin(\alpha_{wb} - \epsilon) - D_t \cos(\alpha_{wb} - \epsilon)) \right] \dots\dots\dots (4.6) \end{aligned}$$



**Fig.4.6:** Système de forces et moment sur l’empennage.

Où  $L_t$  et  $D_t$  sont respectivement portance et traînée — c’est-à-dire composantes perpendiculaire et parallèle au vent effectif  $V'$  de la force aérodynamique — de l’empennage. En pratique, le terme  $-l_t L_t \cos(\alpha_{wb} - \epsilon) \approx -l_t L_t$  est prépondérant. En définissant le coefficient de portance de l’empennage comme :

$$C_{L_t} = \frac{L_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S_t} \dots\dots\dots(4.7)$$

On obtient, en non-dimensionnalisant à nouveau par :  $\frac{1}{2} \rho V^2 \bar{c} S_t$

$$C_{m_t} = -\frac{l_t S_t}{\bar{c} S} C_{L_t} \dots\dots\dots(4.8)$$

Mentionnons que souvent dans la littérature le coefficient de portance de l’empennage est défini à partir de la pression dynamique locale ( $= \frac{1}{2} \rho V'^2$ ) qui diffère de la pression dynamique de l’écoulement libre en raison des interférences produites par l’aile principale, ce qui introduit dans l’expression du moment de tangage un facteur  $(V'^2 / V^2)$  que l’on appelle parfois un facteur d’efficacité de l’empennage. On adopte plutôt ici l’approche suivie par Etkin [3] qui consiste à intégrer ce facteur dans le coefficient de portance de l’empennage.

Le rapport  $(l_t S_t / \bar{c} S)$  qui apparaît dans l’expression du coefficient de moment de l’empennage est un rapport de volumes caractéristique de la géométrie de drone, que l’on appelle communément « rapport de volumes de l’empennage horizontal » et que l’on note  $V_H$ , de sorte qu’avec cette notation, on a :

$$C_{m_t} = -V_H C_{L_t}$$

Le centre de gravité d’un drone pouvant bouger en fonction du chargement et de la consommation de carburant, il est plus commode de définir la position de l’empennage par

rapport au foyer de la combinaison aile/fuselage/nacelles plutôt que par rapport au centre de gravité. En notant  $\bar{l}$  la distance le long de la direction de portance nulle de l'aile/fuselage entre le foyer de l'empennage et le foyer de l'aile, on a :

$$\bar{l}_t = l_t + (h - h_{n_{wb}}) \bar{c} \dots\dots\dots(4.9)$$

De sorte qu'en définissant :

$$\bar{V}_H = \bar{l}_t S_t / \bar{c} S = V_H + (h - h_{n_{wb}}) S_t / S$$

L'expression du coefficient de moment de l'empennage devient :

$$C_{m_t} = -\bar{V}_H C_{L_t} + (h - h_{n_{wb}}) \frac{S_t}{S} C_{L_t} \dots\dots\dots(4.10)$$

**Contribution du système de propulsion :**

Le système de propulsion fournit deux contributions au moment de tangage de drone: la contribution directe du moment des forces propulsives, et une contribution indirecte par l'interférence entre le souffle ou le jet propulsif et la cellule (aile/fuselages/empennage). En supposant que les effets indirects sont intégrés dans les coefficients aérodynamiques des éléments de la cellule, il reste la contribution directe que l'on notera  $C_{m_p}$ .

**IV.2.2.3. Point neutre manche fixe :**

En rassemblant l'ensemble des contributions au moment de tangage, on obtient :

$$C_m = C_{m_{ac_{wb}}} + C_{L_{wb}} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + (h - h_{n_{wb}}) \frac{S_t}{S} C_{L_t} + C_{m_p}$$

Cette expression se simplifie en remarquant que :

$$C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} = \frac{L_{wb} + L_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 \bar{c} S} = C_L \dots\dots\dots(4.11)$$

N'est rien d'autre que le coefficient de portance global, pour donner :

$$C_m = C_{m_{ac_{wb}}} + C_L (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H C_{L_t} + C_{m_p} \dots\dots\dots(4.12)$$

On obtient alors la raideur en tangage en dérivant par rapport à l'angle d'incidence  $\alpha$  :

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \dots\dots\dots(4.13)$$

Puisque, par la définition même du centre aérodynamique de l'ensemble aile/-fuselage, le coefficient de moment en ce point est indépendant de l'incidence. On observe que la raideur en tangage est une fonction linéaire de la position du centre de gravité. Le point pour lequel la raideur en tangage s'annule, prend un sens particulier puisqu'il définit la frontière entre centrages stables et instables. On lui donne le nom de *point neutre*. À partir de l'expression (4.13), on obtient immédiatement :

$$h_n = h_{n_{wb}} + \frac{1}{C_{L_\alpha}} \left[ \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} - \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] \dots\dots\dots(4.14)$$

En utilisant cette définition, la raideur en tangage s'exprime simplement comme :

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (h - h_n)$$

Qui suggère une manière simple de déterminer la position du point neutre à partir de mesures expérimentales de portance et de moment : la position du point neutre s'obtient directement à partir des pentes des courbes de  $C_m$  et  $C_L$  en fonction de ( $\alpha$ ):

$$h_n - h = -\frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_\alpha}} \dots\dots\dots(4.15)$$

On appelle communément *marge statique* cette distance entre le centre de gravité et le point neutre. Puisque  $C_{m_\alpha}$  doit être négatif pour que le drone soit statiquement stable, on en déduit que  $h_n - h$  doit être positif, c'est-à-dire que le centre de gravité doit se trouver *en avant* du point neutre. Plus le centre de gravité occupe une position avancée, plus la marge statique n'est pas élevée. Les règles de certification imposent que la marge statique demeure constamment plus grande ou égale à 5% de la corde aérodynamique moyenne.

L'expression de la position du point neutre peut être explicitée pour des expressions linéaires des forces de portance. Avec :

$$C_{L_{wb}} = a_{wb} \alpha_{wb}$$

$$C_{L_t} = a_t \alpha_t = a_t (\alpha_{wb} - i_t - \varepsilon)$$

Et en linéarisation l'expression de la déflexion  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb}$$

L'expression du coefficient de portance devient :

$$\begin{aligned}
 C_L &= C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} = a_{wb} \alpha_{wb} + \frac{S_t}{S} a_t (\alpha_{wb} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) - i_t - \varepsilon_0) \\
 &= \left[ a_{wb} + \frac{S_t}{S} a_t (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \right] \alpha_{wb} - \frac{S_t}{S} a_t (i_t + \varepsilon_0) \dots\dots\dots(4.16). \\
 &= a\alpha
 \end{aligned}$$

Avec :

$$a = a_{wb} + \frac{S_t}{S} a_t (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_{wb} - \frac{a_t S_t}{aS} (i_t + \varepsilon_0)$$

Semblablement, en linéarisation l'expression du coefficient de moment de tangage dû aux forces de propulsion selon :

$$C_{m_p} = C_{m_{0p}} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \alpha$$

L'expression du coefficient de moment devient :

$$\begin{aligned}
 C_m &= C_{m_{acwb}} + a\alpha(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H a_t (\alpha_{wb} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) - i_t - \varepsilon_0) + C_{m_{0p}} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \alpha \\
 &= C_{m_{acwb}} + C_{m_{0p}} + \bar{V}_H a_t (i_t + \varepsilon_0) + a\alpha(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H a_t (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \alpha_{wb} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \alpha \quad (4.17) \\
 &= C_{m_{acwb}} + C_{m_{0p}} + \bar{V}_H a_t (i_t + \varepsilon_0) \left[ 1 - \frac{a_t S_t}{aS} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \right] + \left[ a(h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H a_t (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] \alpha
 \end{aligned}$$

On en déduit la position du point neutre, à savoir :

$$h = h_{n_{wb}} + \frac{1}{a} \left[ \bar{V}_H a_t (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) - \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] \dots\dots\dots(4.18)$$

Comme  $C_{m_\alpha} = a(h - h_n)$  , le coefficient de moment au centre de gravité peut finalement s'exprimer simplement par la relation linéaire :

$$C_m = C_{m_0} + a\alpha(h - h_n) \dots\dots\dots(4.19)$$

**IV.3. Guidage et stabilité statique manche libre longitudinaux [1]:**

**IV.3.1. Angle de gouverne :**

Étudions à présent la question du guidage longitudinal du drone du point de vue statique, c'est-à-dire la relation entre l'état d'équilibre du drone et le réglage de la commande correspondante. À partir de l'expression finale du coefficient de moment de tangage, on en

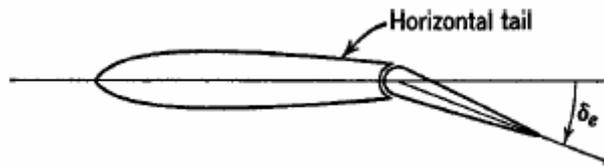
déduit que le point d'équilibre est obtenu pour l'incidence :

$$\alpha = \frac{C_{m_0}}{a(h_n - h)} \dots\dots\dots (4.20)$$

D'où on déduit qu'il est possible de contrôler l'état d'équilibre en faisant varier le centrage (la marge statique). Cette possibilité, qui a effectivement été mise en pratique par **Lilienthal**, un des pionniers de l'aviation, n'est évidemment pas utilisable pour la plupart des drones. En outre, elle présente le désavantage de faire varier la marge statique en même temps que le point d'équilibre, la marge statique diminuant alors que l'incidence augmente, et donc que l'on se rapproche du décrochage.

Pour ces raisons, on préfère contrôler l'incidence du drone par une déformation de sa géométrie qui modifie  $C_{m_0}$  en modifiant le moins possible la marge statique. La solution la plus communément employée consiste à introduire un volet mobile dans l'empennage appelée *gouverne de profondeur*, qui en modifie la cambrure et par conséquent l'incidence de portance nulle (voir figure 4.7) : Notant ( $\delta_e$ ) l'angle de la gouverne de profondeur, l'expression du coefficient de Portance de l'empennage se modifie comme suit :

$$C_{L_t} = a_t \alpha_t + a_e \delta_e = a_t (a_{wb} - i_t - \epsilon) + a_e \delta_e \dots\dots\dots (4.21)$$



**Fig.4.7:** Gouverne de profondeur.

C'est-à-dire que s'ajoute un terme dépendant linéairement de l'angle de gouverne. Par conséquent, le coefficient de portance et le coefficient de moment globaux s'en trouvent modifiés. En ce qui concerne le coefficient de portance, il devient :

$$C_L = a\alpha + \frac{S_t}{S} a_e \delta_e \dots\dots\dots (4.22)$$

En ce qui concerne le coefficient de moment,  $C_{m_\alpha}$  et donc la marge statique restent inchangés alors que  $C_m$  est modifié comme suit :

$$C_{m_0} = C_{m_{00}} + \left[ \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right] a_e \delta_e \dots\dots\dots (4.23)$$

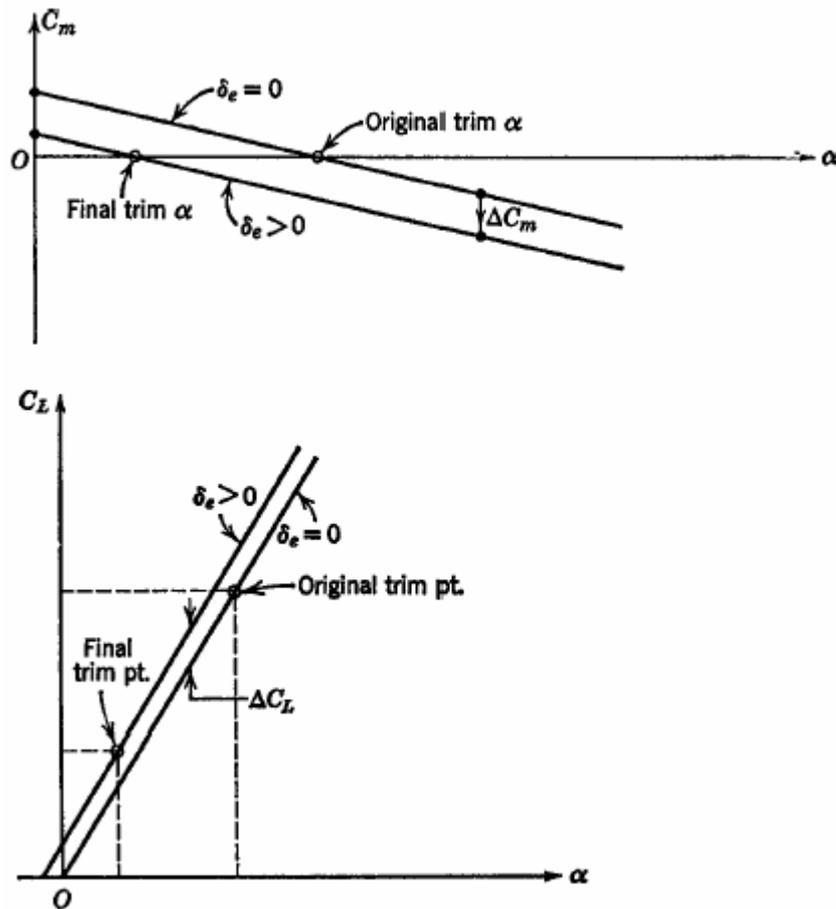
Ces modifications sont représentées à la figure 4.8. Une déflexion positive de la gouverne déplace le point d'équilibre vers une incidence plus faible (et donc une vitesse plus élevée).

La relation entre l'angle de gouverne et l'incidence d'équilibre s'obtient directement en résolvant l'équation d'équilibre en rotation  $C_m = 0$ . On obtient ainsi :

$$\delta_{e_{eq}} = -\frac{C_m(\alpha)}{a \left[ \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right]} = -\frac{C_{m_{00}} + a(h - h_n)\alpha}{a_e \left[ \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right]} \dots\dots\dots (4.24)$$

Et le coefficient de portance correspondant vaut :

$$C_{L_{eq}} = a\alpha + \frac{S_t}{S} a_e \delta_{e_{eq}}$$



**Fig.4.8:** Effet de la déflexion de la gouverne de profondeur sur les coefficients aérodynamiques.

En pratique, c'est le coefficient de portance qui est spécifié plutôt que l'angle d'incidence (en vol horizontal, le coefficient de portance est directement fonction de la vitesse de vol). L'incidence et la déflexion de la gouverne s'obtiennent alors en résolvant le système :

$$\begin{aligned}
 a\alpha_{\acute{e}q} + \frac{S_e}{S} a_e \delta_{e\acute{e}q} &= C_{L\acute{e}q} \\
 a(h-h_n)\alpha_{\acute{e}q} + a_e \left[ \frac{S_t}{S} (h-h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right] \delta_{e\acute{e}q} &= -C_{m_{00}} \dots\dots\dots (4.25)
 \end{aligned}$$

On obtient:

$$\alpha_{\acute{e}q} = a_e \frac{\left[ \frac{S_t}{S} (h-h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right] C_{L\acute{e}q} + \frac{S}{S_t} C_{m_{00}}}{D} \delta_{e\acute{e}q} = -a \frac{C_{m_{00}} + (h-h_n)C_{L\acute{e}q}}{D} \dots\dots (4.26)$$

Avec :

$$D = aa_e \left[ \frac{S_t}{S} (h_n - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right]$$

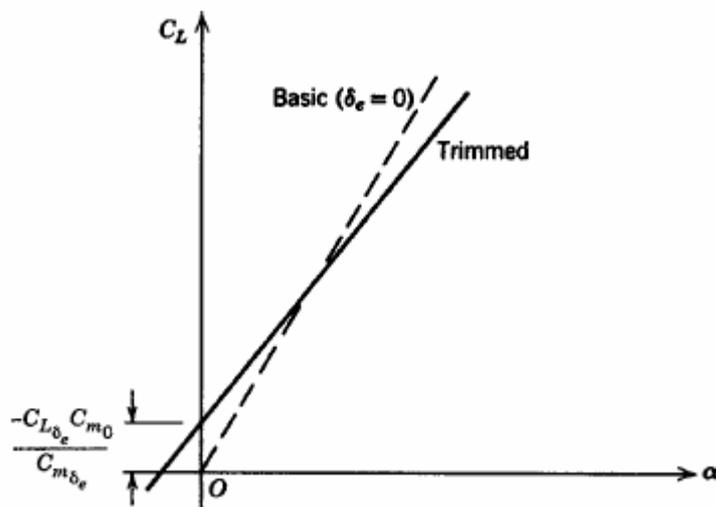
À partir de ces résultats, on peut en déduire la courbe de portance à l'équilibre ( $C_{L\acute{e}q}$  en fonction de  $(\alpha_{\acute{e}q})$ , à savoir :

$$C_{L\acute{e}q} = \frac{1}{\frac{S_t}{S} (h-h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H} \left[ -\frac{S_t}{S} C_{m_{00}} + \frac{D}{a_e} \alpha_{\acute{e}q} \right] \dots\dots\dots (4.27)$$

Dont la pente est :

$$\frac{dC_{L\acute{e}q}}{d\alpha_{\acute{e}q}} = \frac{D}{a_e} \frac{1}{\frac{S_t}{S} (h-h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H} = a \left[ 1 - \frac{\frac{S_t}{S} (h-h_n)}{\frac{S_t}{S} (h-h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H} \right] \dots\dots\dots (4.28)$$

Soit légèrement plus faible que la pente à géométrie fixe  $C_{L\alpha} = a$  comme illustré à la figure 4.9.



**Fig.4.9:** Pente de la courbe de portance à l'équilibre.

La variation de l'angle de gouverne en fonction du coefficient de portance à l'équilibre suggère une détermination expérimentale en vol de la position du point neutre. En effet, la pente de la courbe de l'angle de gouverne en fonction du coefficient de portance :

$$\frac{d\delta_{eq}}{dC_{L_{eq}}} = -\frac{a(h-h_n)}{D} \dots\dots\dots (4.29)$$

Est directement proportionnelle à la marge statique. Dès lors, en portant cette pente en fonction de la position du centre de gravité, on obtient le point neutre par extrapolation au point où la pente s'annule comme esquissé à la figure 4.10.

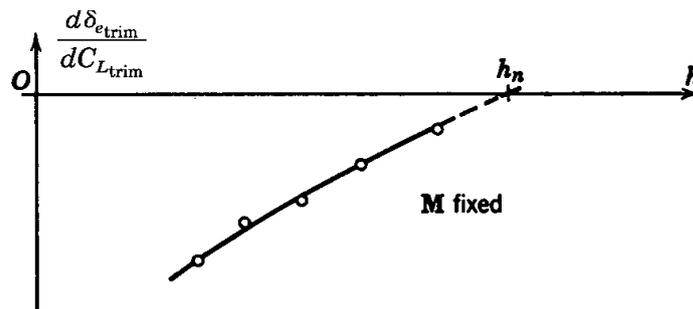
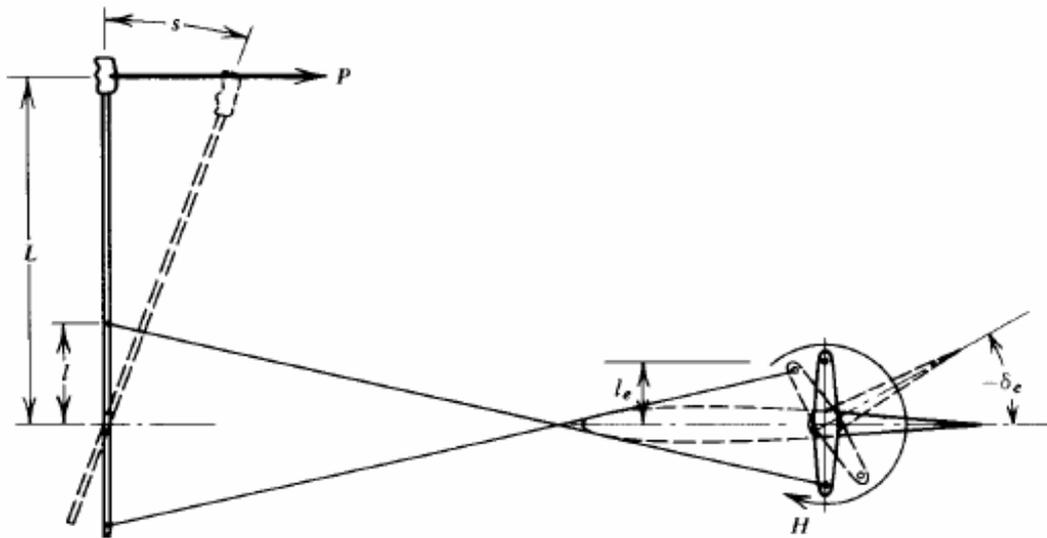


Fig. 4.10 : Détermination du point neutre par essais en vol.

#### IV.3.2. Couple de charnière et effort dans le manche :

Pour défléchir la gouverne de profondeur, il faut appliquer un effort dans le manche qui équilibre le couple produit par les pressions aérodynamiques résultant de la déflexion sur la charnière de la gouverne. Anciennement, et encore de nos jours pour beaucoup d'appareils d'aviation légère, la commande de la gouverne par le manche s'effectuait au moyen d'un système mécanique de câbles, tiges, leviers et poulies, dont le principe est schématiquement représenté à la figure (4.11). Avec l'augmentation de la vitesse des appareils, il est devenu



**Fig.4.11:**Schéma d'un système mécanique de commande de la gouverne de profondeur.

D'adjoindre une assistance via des actuateurs amplifiant l'effort fourni par le pilote. Actuellement, on recourt fréquemment à des systèmes de commandes électriques « fly-by-wire » ou opto-électriques (« fly-by-light »). En tout cas, quelle que soit la nature du système de commande, il est nécessaire, pour le concevoir correctement, de connaître précisément le couple à appliquer à la gouverne pour la défléchir d'un angle donné.

Considérons une géométrie typique d'empennage horizontal comprenant un compensateur (tab) tel que représenté à la figure 4.12. Le compensateur (tab), dont on discutera la fonction ultérieurement, est un petit volet qui a généralement un effet négligeable sur la portance de l'empennage (et donc sur le moment de tangage sur le drone) mais par contre un effet substantiel sur le couple de charnière de la gouverne  $H_e$ . Définissant le coefficient adimensionnel associé :

$$C_{he} = \frac{H_e}{\bar{q} S_e \bar{c}_e} \dots\dots\dots(4.30)$$

Où  $S_e$  est la surface de la partie de la gouverne en arrière de la charnière, elle s'exprime, dans le cadre d'une théorie linéarisée, de la manière suivante :

$$C_{he} = b_0 + b_1 \alpha_t + b_2 \delta_e + b_3 \delta_t \dots\dots\dots(4.31)$$

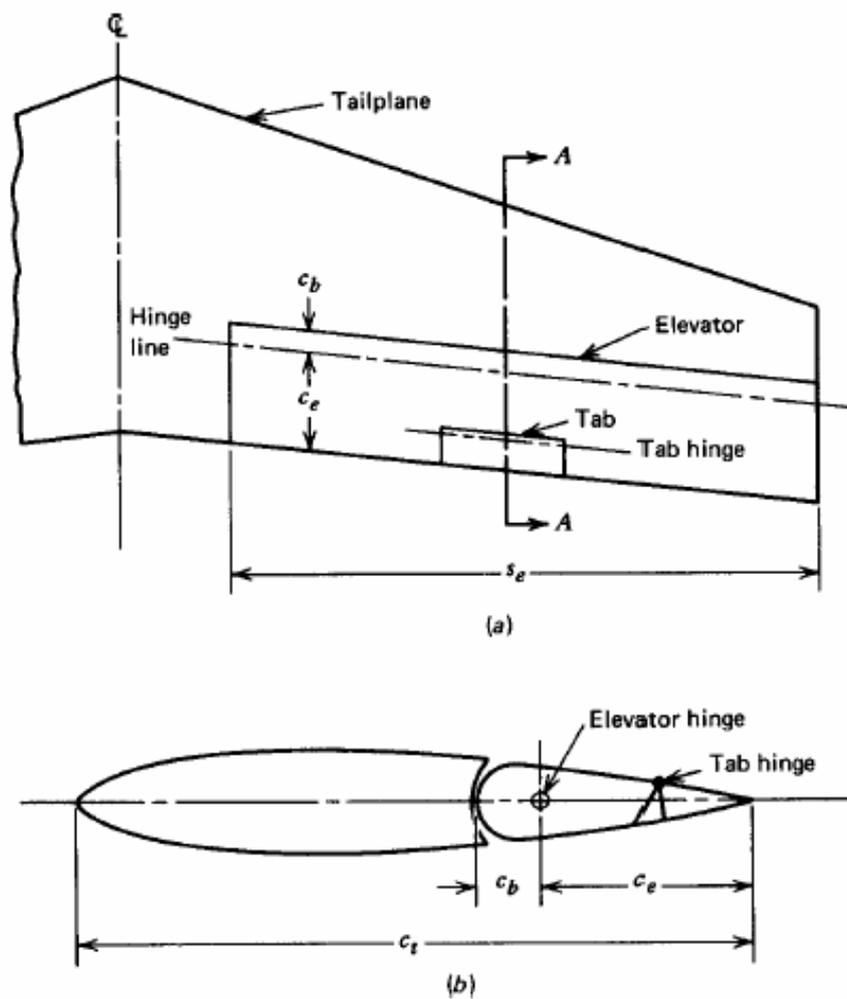


Fig.4.12: Géométrie d'un empennage horizontal.

Où  $\delta_i$  est la déflexion du compensateur, comptée positive vers le bas. Pour les empennages à profil symétrique ( $b_0 = 0$ ), cas le plus fréquent en pratique, compte tenu de l'expression de l'incidence sur l'empennage :

$$\alpha_t = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \alpha_{wb} - i_t - \varepsilon_0 = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \alpha - \left[1 - \frac{a_t S_t}{a S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] (i_t + \varepsilon_0) \dots \dots \dots (4.32)$$

Cette expression devient :

$$C_{he} = C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_i \dots \dots \dots (4.33)$$

Avec :

$$C_{he_0} = -b_1 \left[1 - \frac{a_t S_t}{a S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] (i_t + \varepsilon_0)$$

$$C_{he_\alpha} = b_1 \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)$$

Les coefficients  $b_{1,2,3}$  sont parmi les coefficients aérodynamiques intervenant en stabilité et guidage les plus difficiles à évaluer. Ils sont en effet extrêmement sensibles aux multiples paramètres définissant la géométrie de l'empennage — balance aérodynamique (rapport  $c_b / c_e$ ), fraction de corde de la gouverne (rapport  $c_e / c_t$ ), passage entre la gouverne et la partie fixe de l'empennage, angle de bord de fuite,... — mais aussi au nombre de Reynolds (état et épaisseur des couches limites sur l'empennage et la gouverne). On les évalue généralement à l'aide de corrélations empiriques basées sur des mesures en soufflerie et en vol mises à jour continuellement (Engineering Data Sheets britanniques et Datcom américains, disponibles sous forme informatique).

Dans le cas d'un système mécanique de commande de la gouverne (voir figure 4.10), la relation entre la force dans le manche et le moment de charnière de la gouverne s'obtient aisément par le théorème de l'énergie cinétique. Comme l'énergie cinétique du système est invariante, on en déduit que le travail total est nul, c'est-à-dire :

$$F_s + H_e \delta_e = 0 \dots\dots\dots (4.34)$$

de sorte que la force dans le manche est simplement proportionnelle au couple de charnière :

$$F = -\frac{\delta_e}{s} H_e = GH_e \dots\dots\dots (4.35)$$

Où le facteur  $G$  est la démultiplication du système mécanique. Pour un système avec assistance, la force dans le manche reste proportionnelle au couple de charnière, la seule différence étant que le facteur  $G$  comprend également l'effet de l'assistance. Enfin, même dans le cas de commandes électriques ou opto-électriques, la relation reste généralement valable car ces systèmes reproduisent une résistance dans le manche de manière à fournir au pilote une sensation (« artificielle ») semblable à celle (sensation « naturelle ») fournie par un système mécanique. Compte tenu de l'expression du coefficient de couple de charnière (4.33), la force dans le manche peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = \bar{q}(C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_t)$$

En exprimant l'incidence et la déflexion de la gouverne en fonction du coefficient de portance et en utilisant l'équilibre en sustentation  $\bar{q}C_{L_{\text{éq}}} = P/S$  cette équation devient :

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = \frac{C_{m_{\delta_e}} C_{he_\alpha} - b_2 C_{m_\alpha}}{D} \frac{P}{S} + \bar{q} \left[ C_{he_0} + b_3 \delta_t + \frac{C_{L_{\delta_e}} C_{he_\alpha} - b_2 C_{L_\alpha}}{D} C_{m_{00}} \right] \dots (4.36)$$

Ou encore :

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = A + B\bar{q} \dots\dots\dots (4.37)$$

D'où il apparaît que la force dans le manche est directement proportionnelle à la pression dynamique, ce qui explique la nécessité d'employer des dispositifs d'assistance pour les vols à grande vitesse.

### IV.3.3. Point neutre manche libre :

On a considéré précédemment la stabilité statique dans le cas où la gouverne de profondeur est calée dans une position fixe. En pratique, un pilote humain est incapable de maintenir le manche en position fixe lorsque le drone subit une perturbation d'incidence, alors que l'on s'en approche si le drone est équipé d'un dispositif d'assistance avec blocage. On s'intéresse maintenant à l'autre cas extrême, à savoir celui où la gouverne de profondeur est totalement libre de se déplacer sous l'effet des forces aérodynamiques qui s'exercent sur elle. Il s'agit d'un cas extrême en raison des frottements inévitables qui s'opposent au mouvement de la gouverne, mais il est néanmoins intéressant de l'analyser puisque la réalité se situe entre les deux cas extrêmes.

Lorsque la gouverne de profondeur est libre, le couple de charnière est nul. Par conséquent, la déflexion de la gouverne vaut :

$$\delta_{e_{Libre}} = \frac{1}{b_e} -(C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha + b_3 \delta_t) \dots\dots\dots (4.38)$$

Il en résulte que les expressions du coefficient de portance et de moment se modifient comme suit :

$$C_L = a\alpha + \frac{S_t}{S} a_e \delta_{e_{Libre}} = (a - C_{L_{\delta_e}} \frac{C_{he\alpha}}{b_2}) \alpha - \frac{C_{L_{\delta_e}}}{b} (C_{he0} + b_3 \delta_t) \dots\dots\dots (4.39)$$

$$\begin{aligned} C_m &= C_{m00} + a(h - h_n) \alpha + \left[ \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right] a_e \delta_{e_{Libre}} \\ &= C_{m00} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_{Libre}} \dots\dots\dots (4.40) \\ &= C_{m00} + (C_{m\alpha} - \frac{C_{m_{\delta_e}} C_{he\alpha}}{b_2}) \alpha - \frac{C_{m_{\delta_e}}}{b_e} (C_{he0} + b_3 \delta_t) \end{aligned}$$

On constate donc que la pente de la courbe de portance est réduite :

$$a' = a \left( 1 - \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha}}{ab_2} \right) \dots\dots\dots (4.41)$$

L'effet de la gouverne libre peut aussi s'exprimer comme une réduction de l'efficacité de l'empennage. En effet, le coefficient de portance de l'empennage étant donné par :

$$C_{l_i} = a_i \alpha_i + a_e \delta_e$$

Cette expression devient, dans le cas d'une gouverne libre :

$$C_{l_i} = \left( a_i - a_e \frac{b_1}{b_2} \right) \alpha_i - \frac{a_e b_3}{b_2} \delta_i \dots\dots\dots (4.42)$$

C'est-à-dire que la pente de la courbe de portance de l'empennage est réduite par un facteur  $F = \left( 1 - \frac{a_e b_1}{a_i b_2} \right)$  communément appelé *facteur de gouverne libre* de l'empennage.

Les propriétés de stabilité du drone avec gouverne libre s'obtiennent alors simplement à partir des propriétés avec gouverne fixe en remplaçant  $a$  par  $a'$  et  $a_i$  par  $F a_i$ . Par exemple, on tire de (4.40)

$$C'_{m_\alpha} = C_{m_\alpha} - \frac{C_{m\delta_e} C_{he_\alpha}}{b_2} = a(h - h_n) - \frac{C_{m\delta_e} C_{he_\alpha}}{b_2} \dots\dots\dots (4.43)$$

On en déduit que cette grandeur s'annule pour (point neutre manche libre) :

$$h = h_n + \frac{C_{m\delta_e} C_{he_\alpha}}{ab_2} = h_{n_{wb}} + \frac{1}{a} \left[ \bar{V}_H a_i \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] + \frac{C_{m\delta_e} C_{he_\alpha}}{ab_2} \dots\dots\dots (4.44)$$

Compte tenu des expressions de  $C_{m\delta_e}$  et de  $C_{L\delta_e}$ , à savoir :

$$C_{L\delta_e} = \frac{a_e S_t}{S} \quad , \quad C_{m\delta_e} = a_e \left[ \frac{S_t}{S} (h - h_{n_{wb}}) - \bar{V}_H \right] = C_{L\delta_e} (h - h_{n_{wb}}) - a_e \bar{V}_H$$

L'équation précédente devient :

$$h = h_{n_{wb}} + \frac{1}{a} \left[ \bar{V}_H a_i \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] + (C_{L\delta_e} (h - h_{n_{wb}}) - a_e \bar{V}_H) \frac{C_{he_\alpha}}{ab_2}$$

Ou encore, compte tenu de l'expression de  $C_{he_\alpha}$

$$h \left( 1 - \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha}}{ab_2} \right) = h_{n_{wb}} \left( 1 - \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha}}{ab_2} \right) + \frac{1}{a} \left[ \bar{V}_H a_i \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) \left( 1 - \frac{a_e b_1}{a_i b_2} \right) - \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] \dots\dots\dots (4.45)$$

En multipliant par  $a/a'$  on obtient finalement que  $C'_{m_\alpha}$  s'annule pour :

$$h'_n = h_{n_{wb}} + \frac{1}{a'} \left[ \bar{V}_H F a_t \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \right] \dots\dots\dots(4.46)$$

Soit effectivement la même expression que celle du point neutre manche fixe dans laquelle  $a$  est remplacé par  $a'$  et  $a_t$  par  $F a_t$ . Avec cette expression du point neutre manche libre, on obtient encore l'expression suivante pour la raideur en tangage :

$$C'_{m_\alpha} = a'(h - h'_n) \dots\dots\dots(4.47)$$

Où  $h - h'_n$  est appelée *marge statique manche libre*.

La différence entre la marge statique manche fixe et la marge statique manche libre est égale à :  $h'_n - h_n$ . À partir des expressions de la raideur en tangage :

$$\begin{aligned} C'_{m_\alpha} &= a'(h - h'_n) = a(h - h_n) - \frac{C_{m_{\delta_e}} C_{he_\alpha}}{b_2} \\ &= a(h - h_n) - (C_{L\delta_e} (h - h_{n_{wb}}) - a_e \bar{V}_H) \frac{C_{he_\alpha}}{b_2} \\ &= (h - h_n) \left( a - \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha}}{a'} \right) - (C_{L\delta_e} (h_n - h_{n_{wb}}) - a_e \bar{V}_H) \frac{C_{he_\alpha}}{b_2} \\ &= a'(h - h_n) - \frac{b_1}{b_2} \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) (C_{L\delta_e} (h_n - h_{n_{wb}}) - a_e \bar{V}_H) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} h'_n - h_n &= \frac{b_1}{a' b_2} \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) (C_{L\delta_e} (h_n - h_{n_{wb}}) - a_e \bar{V}_H) \\ &= - \frac{a_e b_1}{a' b_2} \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) \left( - \frac{S_t}{S} (h_n - h_{n_{wb}}) + \bar{V}_H \right) \dots\dots\dots(4.48) \end{aligned}$$

Qui est typiquement une grandeur négative de l'ordre de 0,08. Ceci signifie que le point neutre manche libre est sensiblement en avant du point neutre manche fixe, et par conséquent une réduction de la marge statique, donc de la stabilité par rapport au cas du manche fixe.

**IV.3.4. Compensateurs et gradient de force dans le manche :**

On a vu précédemment que pour voler à une vitesse donnée, et donc à un  $C_L$  donné, il fallait braquer la gouverne d'un angle  $\delta_{e_{\text{eq}}}$  bien précis. On a vu d'autre part qu'à chaque angle de gouverne correspondait un couple de charnière et par conséquent une force dans le manche. En régime de croisière pour une longue période, il serait extrêmement fatigant pour le pilote d'exercer constamment un effort dans le manche. Comme l'angle de gouverne libre  $\delta_{e_{\text{Libre}}}$  est fonction de la déflexion du compensateur, on se sert alors de celui-ci pour faire coïncider l'angle

de gouverne libre avec celui d'équilibre. L'angle de compensateur désiré s'obtient à partir de l'équation du moment de charnière (4.33) :

$$\delta_{t_{\acute{e}q}} = -\frac{1}{b_3} (C_{he_0} + C_{he_\alpha} \alpha_{\acute{e}q} + b_2 \delta_{t_{\acute{e}q}}) \dots\dots\dots (4.49)$$

Insérant dans cette équation les expressions de l'incidence et de l'angle de gouverne à l'équilibre, on obtient :

$$\delta_{t_{\acute{e}q}} = -\frac{1}{b_3} \left[ C_{he_0} + C_{m_{00}} \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha} - b_2 C_{L\alpha}}{D} + \delta_{L_{\acute{e}q}} \frac{C_{m\delta_e} C_{he_\alpha} - b_2 C_{m_\alpha}}{D} \right] \dots\dots\dots (4.50)$$

On remarque la ressemblance avec l'expression de la force dans le manche, que l'on peut donc réécrire comme :

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = \bar{q} C_{he} = \bar{q} b_3 (\delta_t - \delta_{t_{\acute{e}q}}) \dots\dots\dots (4.51)$$

D'autre part, compte tenu de la définition de la raideur en tangage manche libre :

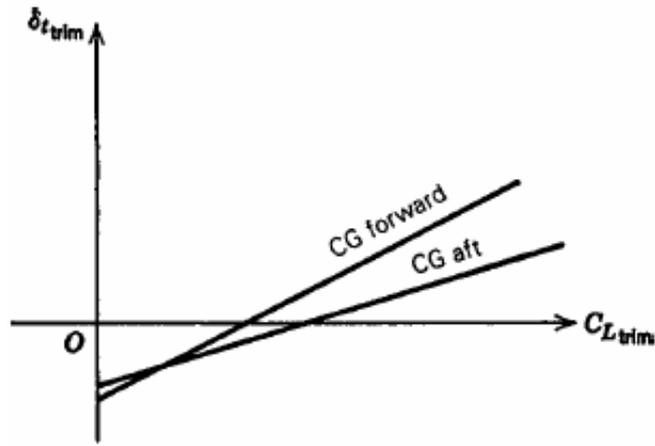
$$C'_{m_\alpha} = C_{m_\alpha} - \frac{C_{m\delta_e} C_{he_\alpha}}{b_2}$$

On peut reformuler l'expression de l'angle du compensateur à l'équilibre comme :

$$\begin{aligned} \delta_{t_{\acute{e}q}} &= -\frac{1}{b_3} \left[ C_{he_0} + C_{m_{00}} \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha} - b_2 C_{L\alpha}}{D} - \frac{b_2 C'_{m_\alpha}}{D} C_{L_{\acute{e}q}} \right] \\ &= -\frac{1}{b_3} \left[ C_{he_0} + C_{m_{00}} \frac{C_{L\delta_e} C_{he_\alpha} - b_2 C_{L\alpha}}{D} - \frac{b_2 a'}{D} (h - h'_n) C_{L_{\acute{e}q}} \right] \dots\dots\dots (4.52) \end{aligned}$$

D'où l'on observe que l'angle du compensateur à l'équilibre est fonction linéaire du coefficient de portance d'équilibre et que la pente est proportionnelle à la marge statique manche libre comme indiqué à la figure 4.13. L'expression de la pente est :

$$\frac{d\delta_{t_{\acute{e}q}}}{dC_{L_{\acute{e}q}}} = \frac{b_2 a'}{b_3 D} (h - h'_n) \dots\dots\dots (4.53)$$



**Fig.4.13:** Angle du compensateur à l'équilibre.

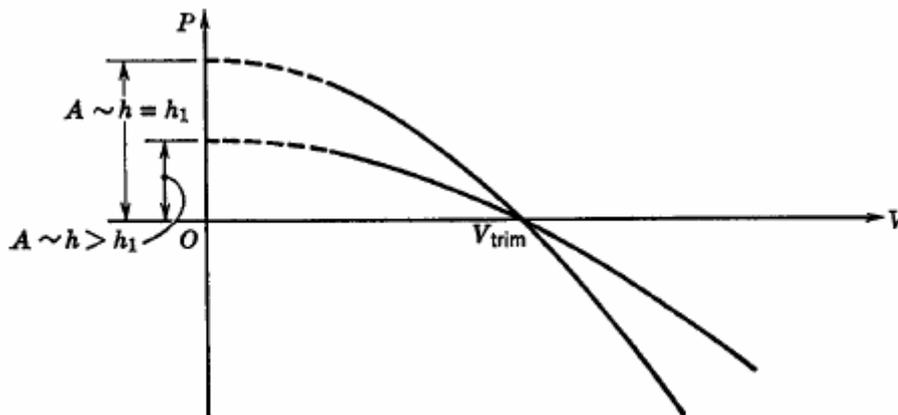
Soit une expression très semblable à celle de la pente de l'angle de gouverne (4.29). On en conclut que l'on peut déterminer le point neutre manche libre en vol par une procédure semblable à celle suggérée pour la détermination du point neutre manche fixe, à savoir en portant en graphique la pente  $d\delta_{t_{eq}} / dC_{L_{t_{eq}}}$  en fonction du centrage.

Pour terminer, reanalysons l'expression de la force dans le manche (4.36).

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = \frac{C_{m_{\delta_e}} C_{he_\alpha} - b_2 C_{m_\alpha}}{D} \frac{P}{S} + \bar{q} \left[ C_{he_o} + b_3 \delta_t + \frac{C_{L_{\delta_\alpha}} C_{he_\alpha} - b_2 C_{L_\alpha}}{D} C_{m_{o_0}} \right]$$

Avec l'expression de la raideur en tangage manche libre, on obtient l'expression alternative :

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = \frac{b_2 a'}{D} (h - h'_n) \frac{P}{S} + \bar{q} \left[ C_{he_o} + b_3 \delta_t + \frac{C_{L_{\delta_\alpha}} C_{he_\alpha} - b_2 C_{L_\alpha}}{D} C_{m_{o_0}} \right] \dots\dots\dots (4.54)$$



**Fig.4.14:** Effet du centrage sur la force dans le manche et son gradient au point d'équilibre.

D'où l'on voit que le terme constant est proportionnel à la marge statique manche libre, comme illustré à la figure 4.14. Comme  $F = 0$  à la vitesse correspondant à la position d'équilibre du compensateur, on peut encore réécrire ceci comme :

$$\frac{F}{GS_e \bar{c}_e} = \frac{b_2 a'}{D} (h - h'_n) \frac{P}{S} \left(1 - \frac{\bar{q}}{\bar{q}_{\acute{e}q}}\right) \dots\dots\dots (4.55)$$

Le gradient de cette force par rapport à la vitesse au point d'équilibre constitue une importante caractéristique de pilotage. Dérivant l'expression précédente par rapport à la vitesse, on obtient :

$$\frac{1}{GS_e \bar{c}_e} \frac{dF}{dV} = \frac{\rho V}{GS_e \bar{c}_e} \frac{dF}{dq} = \frac{b_2 a'}{D} (h - h'_n) \frac{P}{S} \frac{\rho V}{\bar{q}_{\acute{e}q}}$$

Et la valeur au point d'équilibre est donc :

$$\frac{1}{GS_e \bar{c}_e} \left( \frac{dF}{dV} \right)_{\acute{e}q} = \frac{b_2 a'}{D} (h - h'_n) \frac{P}{S} \frac{2}{V_{\acute{e}q}} \dots\dots\dots (4.56)$$

C'est-à-dire proportionnelle à la marge statique manche libre. Au point neutre manche libre, le gradient de force dans le manche s'annule et la force dans le manche est nulle pour toutes les vitesses. Il s'agit là d'une propriété caractéristique du point neutre manche libre, à savoir que lorsque le centre de gravité est en ce point, on ne doit exercer aucune force pour modifier la vitesse de vol.

En examinant l'expression du gradient de force dans le manche, on observe également que la commande sera d'autant plus ferme que le drone est grand ( $F \propto S_e \bar{c}_e$ , c'est-à-dire au cube de la taille du drone), que la vitesse est faible et donc, à pression dynamique constante, que l'altitude est faible, que le centre de gravité est avancé et que le poids est élevé.

#### **IV.4. Stabilité statique latérale [1]:**

##### **IV.4.1. Notations et remarques préalables :**

À ce stade, il devient nécessaire de préciser les notations pour les diverses composantes du couple aérodynamique, ainsi que pour les angles définissant l'attitude du drone et les angles définissant la configuration aérodynamique. Tant qu'on se restreint au vol stabilisé dans le plan de symétrie, l'attitude du drone se caractérise en effet uniquement par l'angle d'assiette et la seule composante du couple aérodynamique est le moment de tangage, mais dans le cas général, il faut considérer les deux autres composantes du couple aérodynamique et les deux autres angles caractérisant l'attitude du drone.

L'orientation du drone par rapport au système inertiel d'axes liés à la terre est entièrement définie par *trois* paramètres : on peut utiliser à cette fin les cosinus directeurs des

vecteurs de base du repère lié au drone (remarquer que seuls trois parmi les neuf sont indépendants, les autres étant liés par les conditions d'ortho normalité) ou les *angles d'Euler*, angles de trois rotations successives à appliquer au repère inertiel pour l'amener sur le repère lié au drone. C'est cette dernière option que l'on adopte ici, comme dans la plupart des ouvrages de mécanique du vol, en raison de son plus grand sens physique. Les rotations définissant les angles d'Euler sont (voir figure 4.18) :

1. une rotation d'angle  $\psi$ , appelé *azimut*, autour de l'axe  $z_1$  du repère local (avec origine au centre de gravité du drone) parallèle au repère inertiel  $Ox_0y_0z_0$
2. une rotation d'angle  $\theta$ , appelé *assiette longitudinale* ou en abrégé *assiette*, autour de l'axe  $y_2$  du repère obtenu par la rotation précédente.
3. une rotation d'angle  $\phi$ , appelé *angle de gîte* ou encore *de roulis*, autour de l'axe  $x_3$  du repère obtenu par la rotation précédente.

Il faut remarquer que l'ordre des rotations n'est pas indifférent, car la valeur des angles serait modifiée si l'on adoptait un ordre différent. Il ne devient indifférent que pour des rotations infinitésimales.

On note respectivement  $L$ ,  $M$  et  $N$  les composantes du couple aérodynamique dans le repère drone et  $p$ ,  $q$  (à ne pas confondre avec la pression dynamique) et  $r$  les composantes de la vitesse de rotation du drone.

Le repère aérodynamique, lui, est entièrement défini par rapport au repère drone par deux angles. L'axe  $x_1$  étant aligné avec vecteur vitesse, l'axe  $z_1$  est défini comme étant l'intersection du plan perpendiculaire à  $x_1$  et du plan de symétrie du drone, et l'axe  $y_1$  complète le repère. Avec cette définition, on amène le repère drone sur le repère aérodynamique par les deux rotations suivantes :

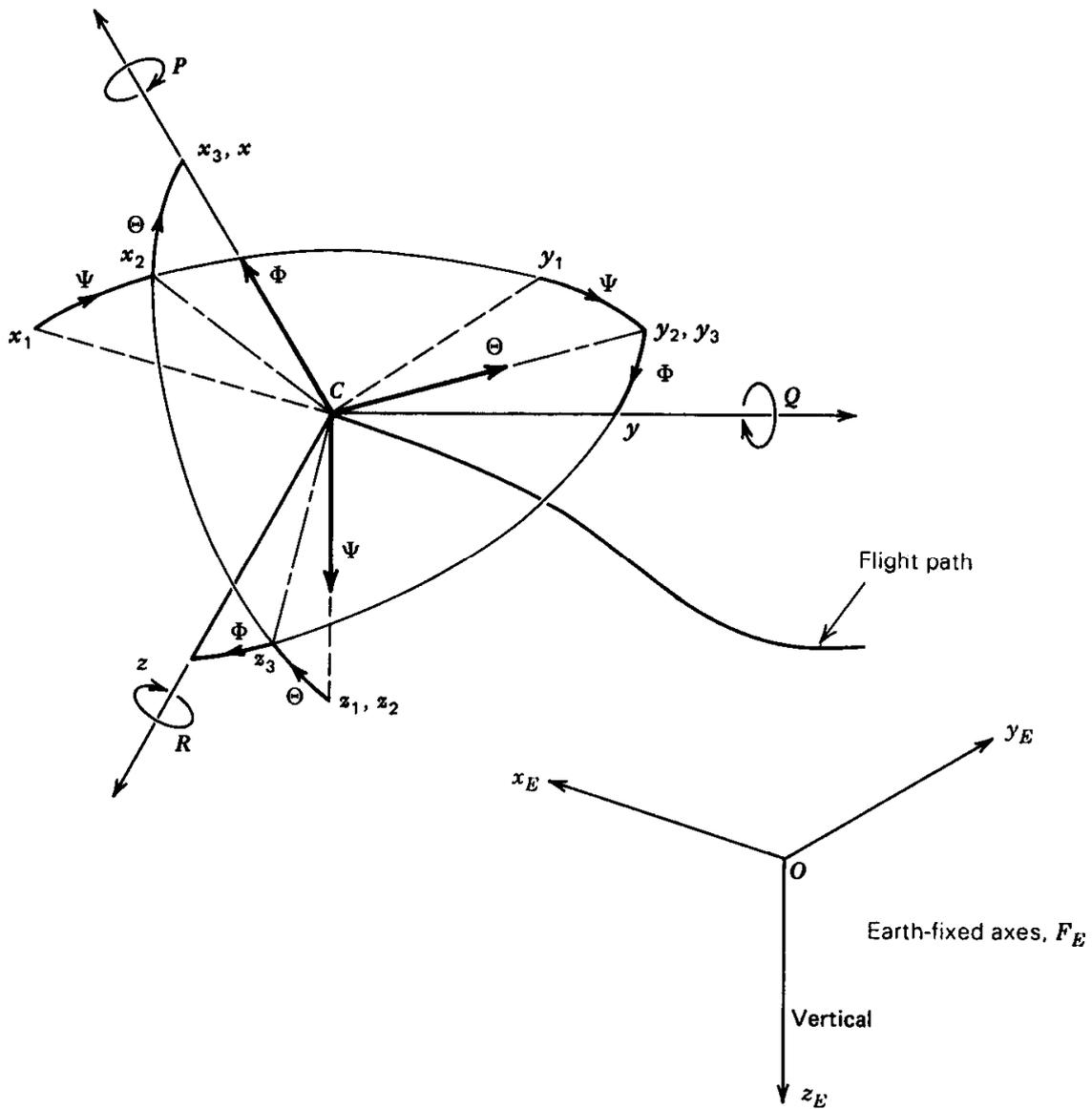


Fig.4.15: Orientation du drone.

1. Une rotation d'angle  $-\alpha_x$ , appelé incidence, autour de l'axe  $y$ .
2. Une rotation d'angle  $\beta$ , appelé *dérapage*, autour de l'axe  $z_1$ .

Ces angles peuvent aussi se définir à partir du vecteur  $\vec{V}'$ , projection orthogonale de vecteur vitesse sur le plan de symétrie du drone,  $\alpha_x$  étant l'angle entre l'axe  $x$  et le vecteur  $\vec{V}'$  et  $\beta$  étant l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur  $\vec{V}'$ . Ils se calculent simplement à partir des composantes  $u, v, w$  du vecteur  $V$  dans le repère drone par les expressions suivantes :

$$\alpha_x = \tan^{-1} \frac{w}{u} \dots\dots\dots (4.57)$$

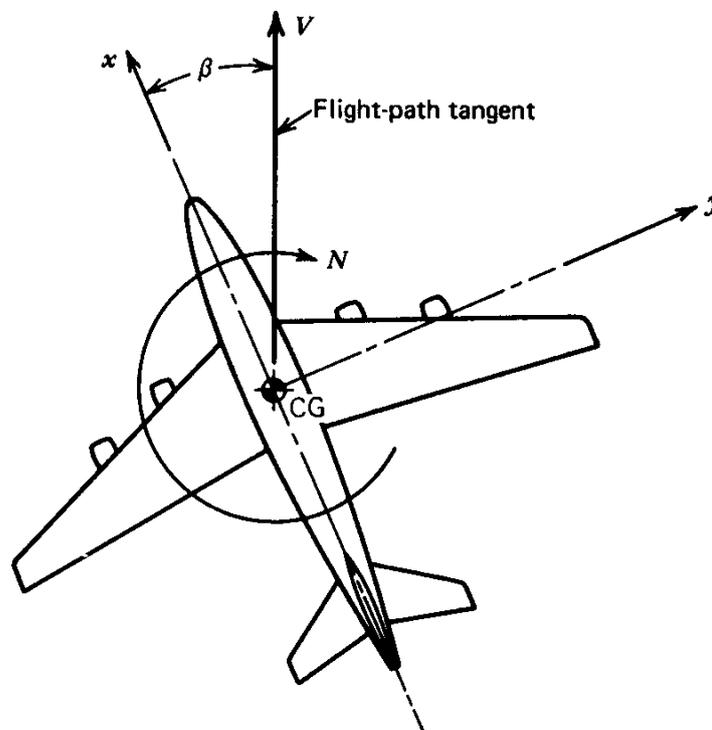
$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{V}$$

Il existe de grandes différences entre les mouvements longitudinal et latéral. Alors que le mouvement longitudinal ne comporte qu'un seul degré de liberté en rotation, ce qui a pour conséquence que la stabilité est étroitement liée à la raideur en tangage, le mouvement latéral, lui, comporte deux degrés de liberté en rotation, qui de plus sont couplés. En effet, un mouvement de roulis (composante  $p$  de la vitesse de rotation) produit généralement non seulement un couple de roulis  $L$  mais aussi un couple de lacet  $N$  et un mouvement de lacet (composante  $r$  de la vitesse de rotation) produit tout à la fois un couple de lacet et de roulis.

D'autre part, en vol stabilisé symétrique, le problème de guidage latéral ne se pose pas : les positions d'équilibre des ailerons et du gouvernail sont nulles par symétrie. Ce n'est plus vrai en cas de rupture de symétrie, par exemple en cas de défaillance d'un moteur. Enfin, du fait que pour un vol stabilisé symétrique, l'accélération de la gravité est dans le plan de symétrie, il en résulte que la position du centre de gravité ne joue pas un rôle prépondérant pour les caractéristiques de stabilité latérale, comme pour les caractéristiques de stabilité longitudinale.

#### IV.4.2. Stabilité directionnelle et guidage :

Considérons un drone subissant une perturbation de dérapage  $\beta$  (voir figure 4.16). Selon la définition de la stabilité statique, la condition de stabilité statique sera que le couple aérodynamique produit ait tendance à ramener le drone en vol symétrique, c'est-à-dire que la raideur en lacet  $\partial N / \partial \beta$  soit positive. Le coefficient adimensionnel de moment de lacet est :

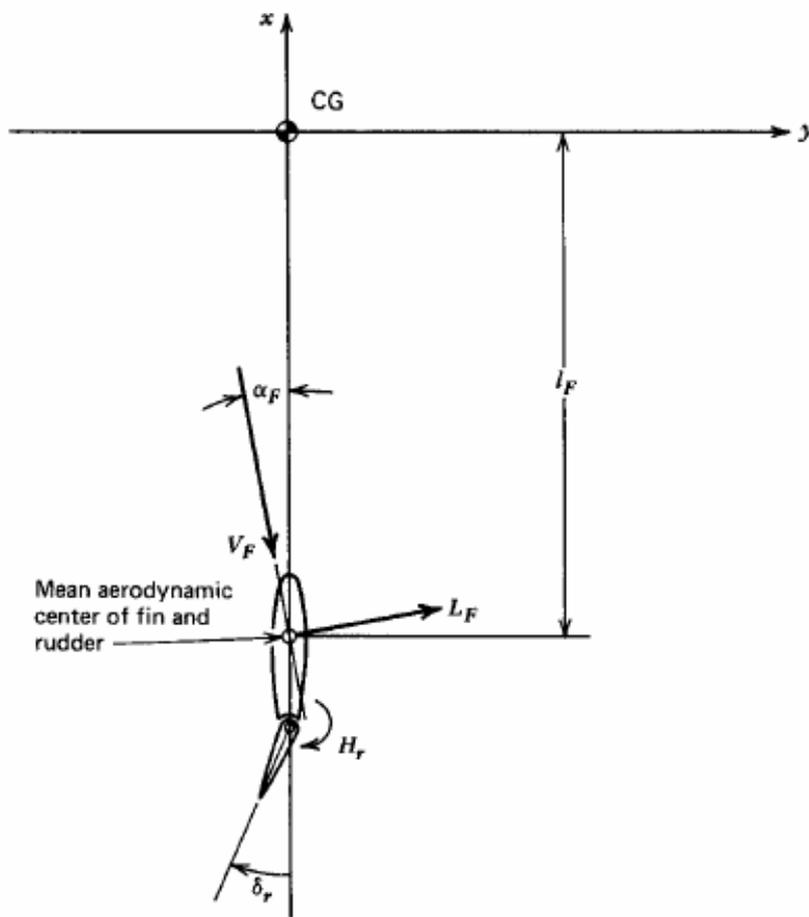


**Fig. 4.16 :** Drone en dérapage.

$$C_n = \frac{N}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} \dots\dots\dots (4.58)$$

(Remarquer que la longueur de référence est l'envergure  $b$  et non la corde  $\bar{c}$ ) et sa dérivée par rapport au dérapage est notée  $C_{n_\beta}$  de manière analogue à la notation adoptée pour la raideur en tangage ( $C_{m_\alpha}$ ).

Tout comme on l'avait fait pour cette dernière, on évalue  $C_{n_\beta}$  par assemblage des contributions des diverses composantes du drone. Les contributions principales sont celles du fuselage et de la dérive, alors que la contribution de l'aile est généralement faible et que la position du centre de gravité joue peu.



**Fig.4.17:** Forces aérodynamiques sur la dérive.

Le rôle de la dérive est illustré à la figure (4.16). En absence de composantes autres, la vitesse de l'écoulement abordant la dérive  $V_F$  serait bien évidemment égale à la vitesse  $V$  et l'incidence  $\alpha_F$  sur la dérive égale à l'opposé du dérapage  $\alpha_F = -\beta$ . En réalité cependant, il faut

tenir compte des interférences dues au souffle des hélices, au fuselage et à l'aile. En direction, ces interférences sont représentées par une déflexion angulaire  $\sigma$  semblable à la déflexion  $e$  ressentie par l'empennage horizontal, à laquelle on attribue un signe positif si elle a pour effet d'augmenter l'incidence. On aura donc :

$$\alpha_F = -\beta + \sigma \quad \dots\dots\dots (4.59)$$

Avec une expression linéaire pour le coefficient de portance sur la dérive :

$$C_{L_F} = a_F(-\beta + \sigma) + a_r \delta_r \quad \dots\dots\dots (4.60)$$

Où  $\delta_r$  est le braquage du gouvernail, on obtient le coefficient de moment de lacet dû à la dérive :

$$C_{n_F} = -C_{L_F} \frac{S_F l_F}{Sb} \left( \frac{V_F}{V} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (4.61)$$

Où le rapport  $S_F l_F / Sb$  est appelé le *rapport de volumes de la dérive* et noté  $V_V$  semblablement au rapport analogue pour l'empennage horizontal. Dérivant par rapport au dérapage, on obtient :

$$\frac{\partial C_{n_F}}{\partial \beta} = V_V \left( \frac{V_F}{V} \right)^2 a_F \left( 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \quad \dots\dots\dots (4.62)$$

D'une manière générale, la déflexion latérale  $\sigma$  est difficile à évaluer. Les contributions principales sont celles du fuselage agissant comme une surface portante lorsque mis en dérapage, de l'hélice mais aussi de l'aile en raison de la structure asymétrique de l'écoulement lorsque le drone est en dérapage, cette dernière contribution étant d'autant plus importante pour les ailes en flèche de faible allongement. Quant au rapport des vitesses  $V_F / V$ , il ne diffère pas sensiblement de l'unité, sauf lorsque la dérive est dans le souffle d'une hélice.

Il existe en outre une contribution au couple de roulis provenant de la force normale qui agit sur une hélice lorsqu'elle est mise en dérapage. Cette force fournit une contribution négative (donc déstabilisante) lorsque l'hélice est située en avant du centre de gravité et à l'inverse positif pour une configuration avec hélice en position arrière (hélice propulsive). Les turboréacteurs produisent une contribution semblable.

La plupart des conditions de vol souhaitables sont des configurations symétriques, c'est-à-dire sans dérapage. Un drone vraiment symétrique ayant une raideur en lacet positive aura naturellement tendance à se placer dans de telles conditions de vol. Mais il peut se produire des couples de lacet résultant de la défaillance d'un moteur, de la rotation du souffle propulsif ou encore de l'asymétrie de l'écoulement en virage. Dans ces conditions, il faudra produire un couple aérodynamique de sens contraire par braquage du gouvernail pour assurer l'équilibre en lacet. Contrairement à la gouverne de profondeur, ce rôle d'équilibrage n'est pour le gouvernail qu'un rôle secondaire. Cela étant, l'analyse de l'effet du gouvernail est en tout point semblable à

celle de l'effet de la gouverne de profondeur. À partir des équations (4.60 et 4.61), on obtient :

$$C_{n\delta_r} = \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r} = -a_r V_V \left( \frac{V_F}{V} \right)^2 \dots\dots\dots (4.63)$$

Cette dérivée, que l'on appelle parfois « puissance du gouvernail », doit être suffisamment élevée pour maintenir un dérapage nul dans les conditions les plus défavorables d'une poussée asymétrique en virage.

Un autre indicateur utile de l'effectivité du gouvernail est l'angle de dérapage qui peut être maintenu pour un braquage de gouvernail donné. Le couple de lacet étant donné par :

$$C_n = C_{n\beta} \beta + C_{n\delta_r} \delta_r \dots\dots\dots (4.64)$$

Et puisqu'il doit être nul à l'équilibre, l'effectivité du gouvernail est donc :

$$\frac{\beta}{\delta_r} = - \frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}} \dots\dots\dots (4.65)$$

Le couple de charnière et la force dans le palonnier correspondante se calculent également de manière semblable à celle employée pour la gouverne de profondeur. Avec une expression du coefficient de couple de charnière de la forme :

$$C_{hr} = b_1 \alpha_F + b_2 \delta_r \dots\dots\dots (4.66)$$

La force dans le palonnier s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} F &= G \frac{\rho V_F^2}{2} S_r \bar{c}_1 (b_1 \alpha_F + b_2 \delta_r) \\ &= G \frac{\rho V_F^2}{2} S_r \bar{c}_1 [b_1 (-\beta + \sigma) + b_2 \delta_r] \end{aligned} \dots\dots\dots (4.67)$$

Où  $G$  est le rapport de démultiplication du système de commande du gouvernail. L'influence d'un gouvernail libre sur la raideur en lacet s'obtient en annulant le coefficient de couple de charnière. L'angle de flottement du gouvernail étant :

$$\delta_{r_{free}} = - \frac{b_1}{b_2} \alpha_F$$

La pente de la courbe de portance de la dérive s'obtient directement à partir de (4.60)

$$C'_{L_F} = a_F \alpha_F \left( 1 - \frac{a_r b_1}{a_F b_2} \right) \dots\dots\dots (4.68)$$

De sorte que l'efficacité du gouvernail est réduite par un facteur semblable à celui obtenu pour celle de la gouverne de profondeur.

**IV.4.3. Stabilité en roulis et guidage :**

Pour aborder la stabilité en roulis, considérons par la pensée un drone qui serait contraint à ne se mouvoir que selon ce degré de liberté. Ce serait le cas par exemple d'un modèle en

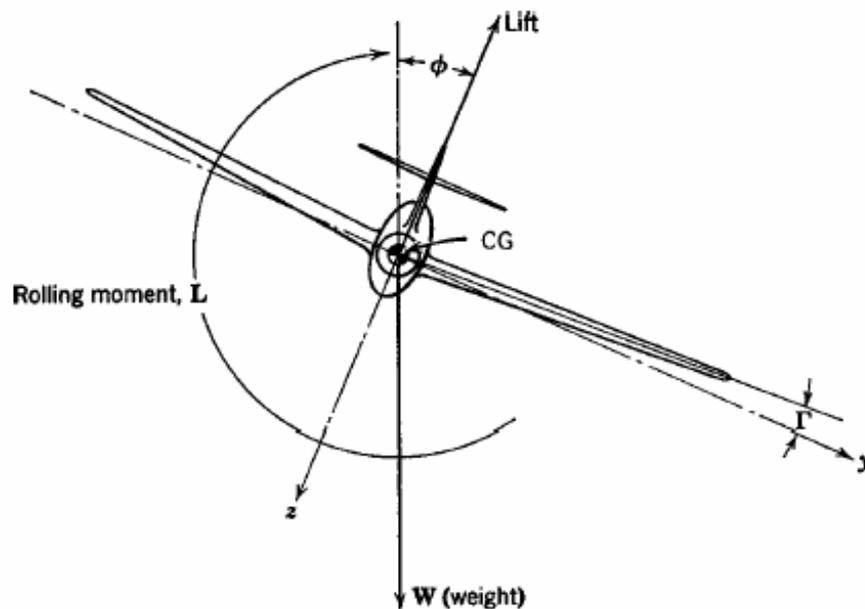
soufflerie libre de tourner autour de l'axe de son support. Remarquons que si cet axe est aligné avec la vitesse du vent, une rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe ne modifie en rien la configuration aérodynamique. Par conséquent, aucun couple de roulis n'est créé et donc la dérivée aérodynamique  $C_{l_\phi}$  est nulle.

Si la vitesse  $V$  n'est pas alignée avec l'axe de rotation (donc que l'incidence  $\alpha$  est non nulle), alors une rotation d'angle  $\phi$  produit un dérapage. En effet, si la configuration originale est sans dérapage et donc que la composante transversale de la vitesse  $v$  est nulle, après rotation d'angle  $\phi$  on a (en identifiant les variables après rotation par le symbole)  $v' = V \sin \alpha \sin \phi$ , de sorte que  $\beta' = \sin^{-1}(\sin \alpha \sin \phi)$ . Il apparaîtra donc une raideur en roulis du second ordre par l'entremise de la dérivée aérodynamique  $C_{l_\beta}$  qui représente le moment de roulis engendré par un dérapage. Avec l'expression précédente pour l'angle de dérapage produit par la rotation d'angle  $\phi$ , on obtient, en considérant de petits angles,

$$C_{l_\phi} = \sin \alpha C C_{l_\beta} \approx \alpha C_{l_\beta} \dots\dots\dots (4.69)$$

$C_{l_\beta}$  : étant généralement négative, on aura donc un couple tendant à ramener les ailes dans leur orientation initiale (supposée horizontale) pour des incidences positives. Si l'incidence est négative, alors le drone poursuivra sa rotation jusqu'à un angle de roulis de  $180^\circ$  où le moment de roulis s'annule et  $C_{l_\phi}$  est négative (configuration statiquement stable).

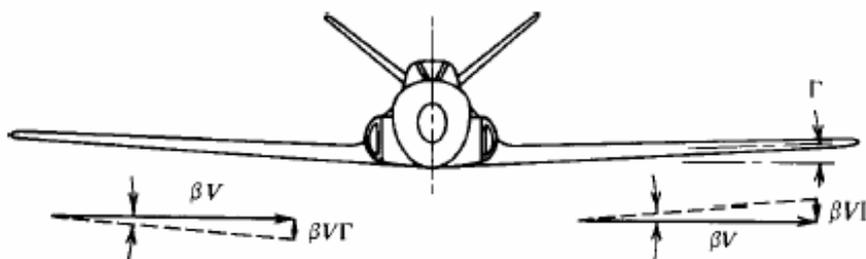
Pour des drones libres de se mouvoir selon leurs 6 degrés de liberté, la question de savoir si, à la suite d'une perturbation en roulis, ils ont tendance à revenir à leur état initial est beaucoup plus complexe et ne peut recevoir une réponse que par une analyse dynamique complète. D'une manière générale cependant, on constate que la plupart des drones ont une tendance naturelle à voler avec les ailes horizontales, en raison de l'influence du paramètre  $C_{l_\beta}$ , que l'on nomme communément « l'effet dièdre ». En effet, si un drone est incliné en roulis d'un angle  $\phi$ , il apparaît une composante du poids dans la direction  $y$  qui a tendance à mettre le drone en dérapage.



**Fig.4.18:** Drone incliné en roulis.

Et le dérapage résultant produit un couple de roulis  $C_{l_\beta}\beta$  négatif ayant tendance à ramener les ailes en position horizontale si  $C_{l_\beta}$  est négatif. Comme indiqué précédemment, le détail du mouvement ne peut se déterminer que par une analyse dynamique, mais la discussion illustre bien l'importance des effets de couplage sur les mouvements latéraux et du paramètre  $C_{l_\beta}$ .

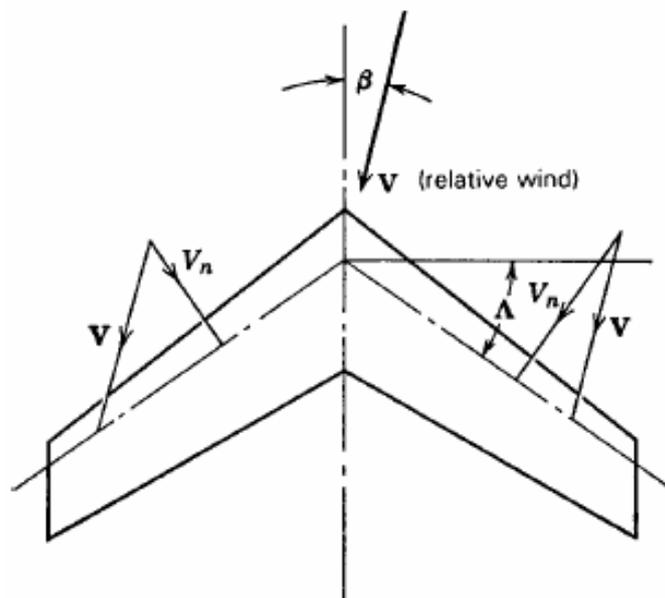
La dérivée aérodynamique  $C_{l_\beta}$  dont on vient de montrer l'importance, est principalement produite par l'aile, dont plusieurs paramètres géométriques (dièdre, flèche, allongement, position par rapport au fuselage) influencent fortement la valeur. On voit que la composante latérale de la vitesse ( $v = V \sin \beta \approx V\beta$ ) fournit une contribution  $v\Gamma = V\beta\Gamma$  à la vitesse normale au plan de l'aile tribord (à gauche sur la figure) et une contribution opposée à la vitesse normale au plan de l'aile bâbord. Il en résulte les incréments d'incidence  $\Delta\alpha = \pm\beta\Gamma$  respectivement sur les ailes tribord et bâbord, ce qui produit un couple de roulis proportionnel à  $\beta\Gamma$  et donc une contribution à  $C_{l_\beta}$  proportionnelle à  $\Gamma$ .



**Fig.4.19:** Rôle du dièdre.

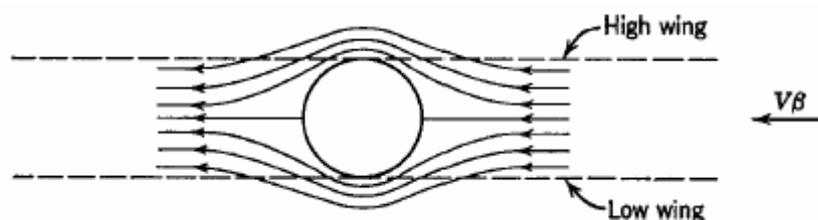
La flèche de l'aile joue également un rôle important (La flèche de l'aile est toutefois déterminée principalement en fonction de considérations autres). En effet, comme indiqué à la figure, en présence d'un dérapage, la composante de la vitesse perpendiculaire à l'axe aérodynamique de l'aile est plus élevée sur l'aile tribord que sur l'aile bâbord. Il en résulte que la

portance est plus élevée également et donc qu'il apparaît un couple de roulis négatif, proportionnel au coefficient de portance de l'aile et au dérapage.



**Fig.4.20:** Effet de la flèche sur  $C$ .

La position de l'aile joue aussi un grand rôle. En effet, l'écoulement autour du fuselage interagit avec l'écoulement sur l'aile comme illustré à la figure (vue de l'arrière). On voit que l'écoulement autour du fuselage induit par le dérapage a tendance à augmenter/réduire l'incidence sur l'aile tribord selon que l'aile est en position haute ou basse et réciproquement pour l'aile bâbord. On en conclut que l'interférence entre aile et fuselage produit une contribution négative à  $C_{l_\beta}$  pour une aile haute et positive pour une aile basse. C'est la raison pour laquelle les ailes hautes ont un dièdre moins élevé que les ailes basses, surtout pour les ailes en flèche, pour lesquelles on peut même observer parfois des dièdres négatifs (Harrier). En effet, s'il est souhaitable que  $C_{l_\beta}$  soit négatif, une valeur trop basse rend l'appareil inconfortable à piloter.



**Fig. 4.21:** Effet du fuselage sur  $C_{l_\beta}$ .

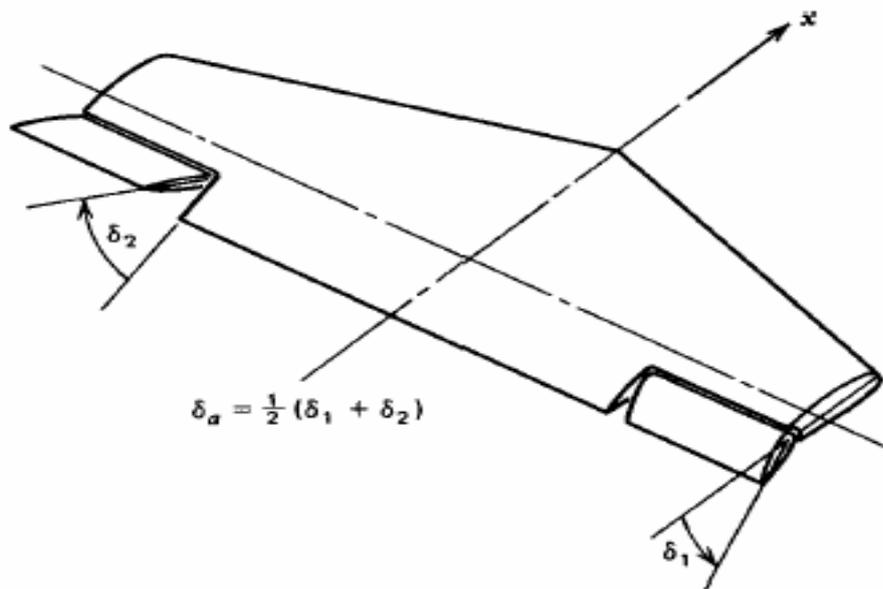
Enfin, la dernière contribution importante à  $C_{l_\beta}$  est celle de la dérive. La portance sur la dérive résultant d'un dérapage (voir section précédente) produit en effet un couple de roulis égal à  $L_F z_F$ , où  $z_F$  est la distance entre le centre aérodynamique de la dérive et l'axe  $x$ . Par conséquent, le coefficient de couple de roulis vaut :

$$\Delta C_l = a_F (-\beta + \sigma) \frac{z_F S_F}{Sb} \left( \frac{V_F}{V} \right)^2 \dots\dots\dots (4.70)$$

Et la contribution à  $C_{l_\beta}$  :

$$\Delta C_{l_\beta} = -a_F \left( 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \frac{z_F S_F}{Sb} \left( \frac{V_F}{V} \right)^2 \dots\dots\dots (4.71)$$

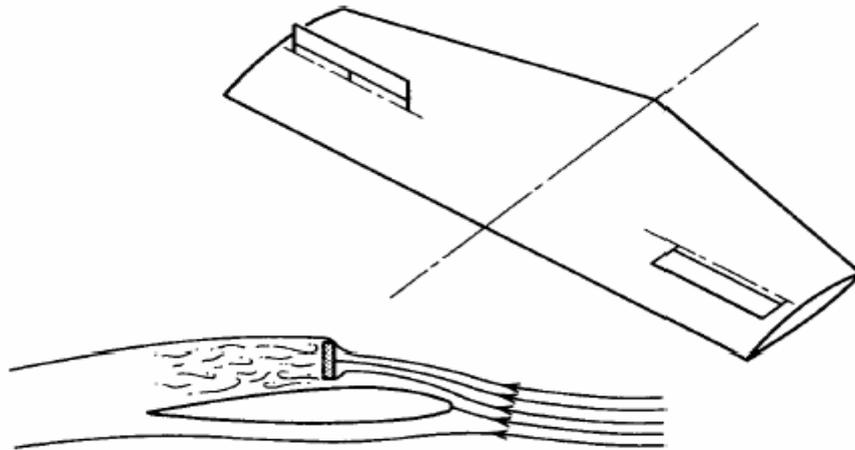
On terminera l'examen de la stabilité statique latérale en abordant brièvement la question du guidage en roulis. L'angle de gîte du drone est commandé par les ailerons, qui sont le plus souvent des volets mobiles de l'aile principale braqués de manière différentielle comme indiqué sur la figure. L'effet principal des ailerons est de produire un couple de roulis, mais ils



**Fig.4.22:** Ailerons.

Produisent également un couple de lacet. On représente ces deux effets par les dérivées aérodynamiques  $C_{l_{\delta_a}}$  et  $C_{n_{\delta_a}}$ . Le braquage des ailerons est défini comme la moyenne arithmétique du braquage vers le bas de l'aileron tribord et du braquage vers le haut de l'aileron bâbord. En raison de cette définition,  $C_{l_{\delta_a}}$  est donc normalement négative, un braquage positif de l'aileron produisant un couple de roulis négatif. L'augmentation de portance sur l'aile tribord et

la diminution sur l'aile bâbord résultant d'un braquage positif des ailerons s'accompagnent de variations semblables des traînées, ce qui produit un couple de lacet positif. Comme on braque les ailerons positivement pour amorcer un virage vers la gauche, ce couple de lacet est donc de sens inverse à celui souhaité, ce qui peut entraîner des difficultés de guidage latéral pour les drones de grand allongement. Une manière de remédier à ce problème est d'utiliser des aérofreins (spoilers) ou des ailerons Frise. L'action des aérofreins est illustrée ci-dessous. Le déploiement de l'aérofrein bâbord a pour effet de réduire la portance et d'augmenter la traînée



**Fig.4.23:** Aérofreins.

De l'aile bâbord, et donc des couples de roulis et de lacet négatifs. Remarquons pour terminer que les ailerons diffèrent fonctionnellement des autres commandes (gouvernes de profondeur et de direction) en ce qu'ils constituent une commande de *vitesse* de roulis, c'est-à-dire qu'une déflexion constante des ailerons produit une vitesse de rotation constante, alors que les gouvernes de profondeur et de direction sont des commandes d'*angle* d'incidence et de dérapage.

Mentionnons enfin que la plupart des drones conventionnels tant subsoniques que supersoniques, sont affectés par un effet aéroélastique connu sous le nom d'*inversion des ailerons*. Le braquage des ailerons produit un couple de torsion de l'aile qui a tendance à vriller l'aile dans le sens inverse du braquage des ailerons. Le couple de torsion de l'aile étant proportionnel à  $\frac{1}{2} \rho V^2 \delta_a$ , l'angle de vrillage, et par conséquent le couple de roulis correspondant, seront également proportionnels à  $\frac{1}{2} \rho V^2 \delta_a$ . On aura donc que le couple de roulis résultant d'un braquage des ailerons vaudra :

$$\Delta C_l = (C_{l\delta_a})_{indéf} \delta_a + k \frac{1}{2} \rho V^2 \delta_a \dots\dots\dots (4.72)$$

et donc :

$$C_{l\delta_a} = (C_{l\delta_a})_{indéf} + k \frac{1}{2} \rho V^2 \dots\dots\dots (4.73)$$

Comme on l'a mentionné précédemment,  $(C_{l\delta_a})_{indéf}$  est négative et par ailleurs, la constante de proportionnalité  $k$  est positive si, comme c'est généralement le cas, le centre de poussée de l'incrément de portance dû aux ailerons est en arrière de l'axe élastique de l'aile. Il en résulte que l'effectivité des ailerons diminue avec la vitesse et même s'annule pour une certaine vitesse  $V_R$ , que l'on appelle la *vitesse d'inversion des ailerons*. À partir des expressions précédentes, on obtient :

$$V_R^2 = -\frac{2}{\rho k} (C_{l\delta_a})_{indéf} \dots\dots\dots (4.74)$$

et l'expression suivante de l'efficacité des ailerons :

$$C_{l\delta_a} = (C_{l\delta_a})_{indéf} \left( 1 - \frac{V^2}{V_R^2} \right) \dots\dots\dots (4.75)$$

On peut éviter l'inversion des ailerons en raidissant l'aile (réduisant le coefficient  $k$ ) de manière à faire en sorte que la vitesse d'inversion soit au-delà de la vitesse maximale, mais cela induit une augmentation de poids. Une solution alternative est l'utilisation des aérofreins pour le guidage en roulis.

## **IV.5. STABILITÉ DYNAMIQUE ET RÉPONSE AUX COMMANDES:**

### **IV.5.1. Introduction :**

La stabilité dynamique caractérise la nature du mouvement transitoire vers la position d'équilibre ou bien l'analyse des mouvements du drone consécutif à une perturbation ou à l'actionnement d'une commande. Le comportement du drone consécutif à une petite perturbation autour d'un état d'équilibre (la *stabilité dynamique*) est une propriété extrêmement importante des drones. En effet, les états d'équilibre (vols stabilisés) occupent l'essentiel du temps de vol et, dans ces conditions de vol, les perturbations doivent demeurer faibles pour que le drone soit acceptable pour un usage civil ou militaire. On assure un comportement dynamique adéquat par conception (dimensionnement adéquat des surfaces portantes et des gouvernes), en telle manière qu'un pilote humain ou automatique puisse garder les perturbations à un niveau acceptable.

**IV.5.2. Solution générale des équations des petites perturbations :**

**IV.5.2.1. Forme de la solution :**

Les équations des petites perturbations sont de la forme :

$$\dot{x} = Ax + \Delta f_c \dots\dots\dots (4.76)$$

Où  $x$  est le vecteur de variables d'état,  $A$  une matrice carrée à coefficients constants et  $\Delta f_c$  le vecteur des forces et couples de commande. Soit  $R$  la matrice des vecteurs propres droits (colonnes)  $r_k$ ,  $L$  la matrice des vecteurs propres gauches (lignes)  $l_k$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_k$  de la matrice  $A$ . Grâce à l'identité algébrique

$$LA = \Lambda L$$

Le système devient diagonal après multiplication à gauche par  $L$ .

$$L\dot{x} = LAX + L\Delta f_c = \Lambda \underbrace{Lx}_{=w} + L \underbrace{\Delta f_c}_{=(mvt \text{ libre})} \rightarrow w_k = w_k(0)e^{\lambda_k t} \dots\dots\dots (4.77)$$

La solution finale s'obtient alors en multipliant par la matrice des vecteurs propres droits  $R$  (puisque  $RL = LR = I$  pour des vecteurs propres unitaires).

$$x = R w = \sum_k r_k w_k(0) e^{\lambda_k t} \dots\dots\dots (4.78)$$

Chaque solution de la forme  $a r_k e^{\lambda_k t}$  est un *mode naturel* du drone, et la solution générale est une superposition des modes naturels,  $w_k(0)$  étant l'amplitude du mode  $k$ .

On obtient le même résultat en appliquant la transformée de Laplace à l'équation (3.1.)

$$sX(0) - x(0) = AX(s) + \Delta F_c(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + \Delta F_c(s)$$

En l'absence de forces de commande (mouvement libre), on obtient finalement après multiplication par  $L$ .

$$(sI - \Lambda) \underbrace{LX(s)}_1 = L \underbrace{x(0)}_{w(0)}$$

Et en appliquant la transformation inverse, on retrouve :

$$w_k = w_k(0) e^{\lambda_k t} .$$

**IV.5.2.2. Caractéristiques du mouvement :**

La matrice  $A$  étant réelles, les valeurs propres sont soit réelles, soit complexes conjuguées et, dans ce dernier cas, les vecteurs propres correspondants (et les amplitudes correspondantes) sont complexes conjugués également. Posant  $\lambda = \sigma \pm i\omega$ , on a donc des modes réels de la forme  $ae^{\sigma t}$  et des modes oscillatoires de la forme  $(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)e^{\sigma t}$ . Selon le signe de  $\sigma$ , on a donc quatre comportements possibles, représentés à la figure 4.24. Lorsque  $\sigma > 0$

(cas (a) et (c)), l'amplitude de la perturbation augmente et le mode est donc dynamiquement instable. D'autre part, dans les trois cas (b), (c) et (d), la dérivée initiale est négative (la perturbation décroît initialement) et par conséquent la configuration est statiquement stable au sens de la définition de la stabilité statique donnée. On vérifie donc bien que la stabilité statique est une condition nécessaire mais non suffisante de stabilité dynamique. On a coutume de dénommer *divergence* le comportement statiquement instable (a) et *oscillation divergente* le comportement (c) alors que les comportements stables (b) et (d) sont dénommés respectivement *convergence* et *oscillation amortie* ou *convergente*.

On caractérise généralement le comportement des modes naturels par les paramètres suivants :

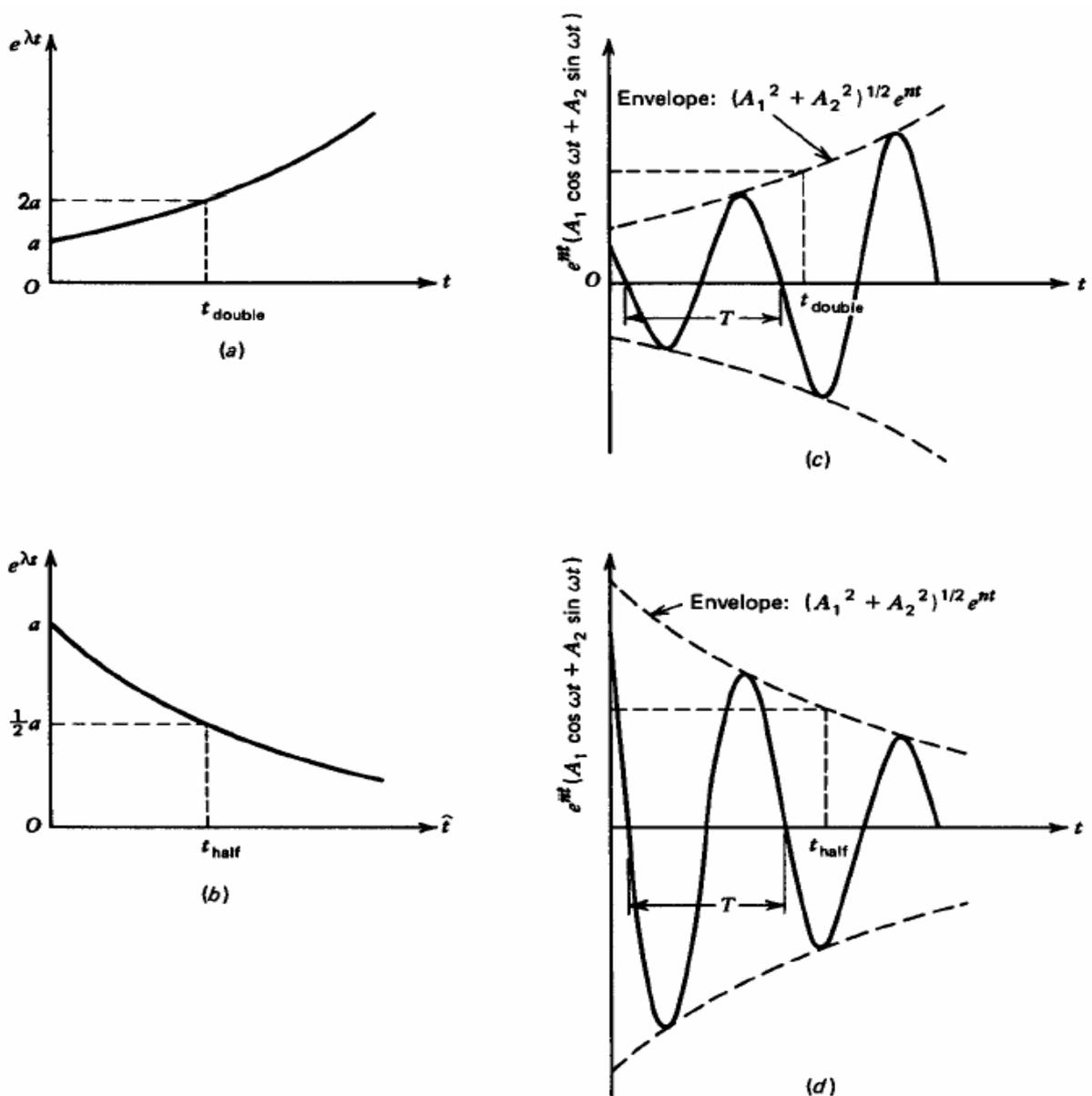


Fig.4.24: Comportements possibles des modes naturels [1].

1. La période  $T = 2\pi / \omega$ ,
2. Le temps pour doubler ou réduire de moitié,
3. Le nombre de cycles pour doubler ( $N_{double}$ ) ou réduire de moitié ( $N_{moitié}$ )

En définissant la pulsation non-amortie  $\omega_n$  et le facteur d'amortissement  $\zeta$  de la manière suivante :

$$\lambda = \sigma + i\omega = \omega_n(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}) \rightarrow \omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \quad \zeta = -\frac{\sigma}{\omega_n}$$

On obtient aisément les expressions suivantes pour les paramètres caractéristiques.

- **Temps pour doubler ou réduire de moitié** : En notant  $T_{1/2}$  le temps pour réduire de moitié, il doit satisfaire :

$$e^{\sigma T_{1/2}} = 1/2.$$

On obtient donc :

$$T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\sigma} = \frac{\ln 2}{\zeta \omega_n} \dots\dots\dots (4.79)$$

Le temps pour doubler  $T_2$  s'obtient en changeant de signe. Les mouvements amplifiés correspondent donc à des temps pour réduire de moitié *negatifs*.

- **Nombre de cycles pour doubler ou réduire de moitié** : Le nombre de cycle pour réduire de moitié s'obtient directement à partir du temps pour réduire de moitié et de la période :

$$N_{moitié} = \frac{T_{1/2}}{T} = -\frac{\ln 2}{2\pi} \frac{\omega}{\sigma} = \frac{\ln 2}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \dots\dots\dots (4.80)$$

- **Décroissement logarithmique** : Le décroissement logarithmique  $\delta$  est défini comme le logarithme du rapport entre deux maxima successifs. On a donc :

$$\delta = \ln \frac{e^{-\sigma t}}{e^{-\sigma(t+T)}} = -\sigma T = -2\pi \frac{\sigma}{\omega} = \frac{\ln 2}{N_{moitié}} \dots\dots\dots (4.81)$$

**IV.5.3. Critère de stabilité :**

Comme on l'a souligné précédemment, la stabilité du mouvement libre exige que les parties réelles des valeurs propres  $3/4$  soient négatives. Or, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres pour déterminer si certaines ont une partie réelle négative, on peut utiliser à cette fin le *critère de Routh*, qui impose qu'un certain ensemble d'expressions soient toutes positives. Dans le cas particulier des racines d'une équation du quatrième ordre que constituent les équations caractéristiques des mouvements longitudinaux et latéraux

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0 \dots\dots\dots (4.82)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les parties réelles des racines soient négatives sont :

$$A, B, D, E > 0$$

Et :

$$R = D(BC - AD) - B^2 E > 0 \dots\dots\dots (4.83)$$

Dont il résulte que *C* doit aussi être positif.

De plus, on peut montrer que l’annulation de *E* et de *R* correspond à des cas critiques particuliers.

1. Le changement de signe de *E* correspond au changement de signe d’une racine réelle. Par conséquent, lorsque *E* devient négatif, cela correspond à l’apparition d’une divergence. *E* > 0 constitue donc le critère de stabilité statique au sens général.
2. Le changement de signe de *R* correspond au changement de signe de la partie réelle d’une paire de racines complexes conjuguées, et donc *R* devenant négatif marque l’apparition d’une oscillation divergente.

**Note** : on peut utiliser plusieurs méthodes ou plusieurs critères .Il existe 2 types de critères : les critères numériques (comme celui de Routh) ou les critères graphiques (comme le critère de Revers, ou le critère Nyquist). Ces critères permettent uniquement de déterminer si le système est stable ou instable mais ils n’indiquent pas la degré de stabilité (c’est-à-dire si le système est plus ou moins stable).

**IV.5.4. Modes longitudinaux :**

**IV.5.4.1. Valeurs propres :**

Les racines de l’équation caractéristique sont les deux paires de racines Complexes ( $\sigma + i\omega$ ) conjuguées suivantes :

Mode 1(Phugoïde)	: $\lambda_{3,4} = c \pm di$	}	..... (4.84)
Mode 2 (Oscillation d’incidence)	: $\lambda_{3,4} = c \pm di$		

Il s’agit de deux modes oscillatoires amortis, l’un de grande période faiblement amorti et l’autre de faible période fortement amorti, identifiés par les dénominations conventionnelles indiquées. Ce résultat est assez typique.

**IV.5.4.2. Approximation des modes longitudinaux :**

Le calcul numérique des modes nous a certes permis d’en mettre en évidence les propriétés, mais ne fournit guère d’explication physique quant à leur origine. Pour déterminer et comprendre l’influence des paramètres du drone et du vol sur les modes propres, on doit pouvoir

en exprimer les caractéristiques (pulsation non-amortie, amortissement) *analytiquement* en fonction de ces paramètres. Comme de telles expressions ne peuvent être obtenues à partir du système complet d'équations, on cherchera à établir des expressions analytiques *approchées* décrivant les modes. Outre leur vertu de fournir une interprétation physique des modes, de telles expressions sont également utiles pour la conception de système de pilotage automatique.

Deux méthodologies peuvent être utilisées pour établir de telles approximations.

Une première méthodologie, plutôt d'inspiration mathématique, consiste à analyser l'ordre de grandeur des divers termes de l'équation caractéristique et de faire les simplifications qui en résultent. Ainsi, si l'on sait que l'équation caractéristique possède une racine petite en module, on peut en obtenir une valeur approchée en négligeant les termes en puissances supérieures de  $\lambda$ , dans l'équation caractéristique, c'est-à-dire en résolvant l'équation approchée :

$$D\lambda + E = 0$$

Semblablement, on peut obtenir une valeur approchée d'une paire de racines complexes conjuguées de grand module en ne conservant que les termes en puissances supérieures de  $\lambda$ , à savoir :

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 = 0$$

Cette méthodologie très souvent utile est parfois la seule permettant d'obtenir une approximation.

Une deuxième méthodologie, d'inspiration plus physique, consiste, à partir d'une connaissance qualitative préalable des caractéristiques des modes, à apporter certaines simplifications dans les équations du mouvement, qui réduisent l'ordre du système étudié. Dans le cas des modes longitudinaux qui nous occupe ici, c'est essentiellement la deuxième méthodologie qui sera adoptée, alors que pour les modes latéraux, l'une et l'autre méthodologie seront employées.

Il faut souligner qu'aucune approximation analytique simple ne peut fournir des résultats numériques fiables en toutes circonstances. Pour cela, la seule voie assurée est la résolution numérique du système complet. La précision des diverses approximations sera évaluée à l'aide d'exemples.

Les modes longitudinaux se distinguent généralement par une grande séparation d'échelles de temps et aussi par le fait que certaines variables d'état ne sont quasiment pas excitées dans chacun des deux modes. On met cette dernière propriété à profit pour établir des approximations des modes longitudinaux en simplifiant les équations du mouvement de manière correspondante.

**IV.5.4.3. Phugoïde :**

**Théorie de Lanchester :** Comme on l’a mentionné précédemment, le mode Phugoïde a été étudié en premier par Lanchester (1908) qui lui a donné son nom. L’analyse de Lanchester est basée sur les hypothèses que l’incidence  $\alpha$  reste constante et que la poussée reste constamment égale à la traînée ( $T - D = 0$ ). Dans ces conditions, il n’y pas de force nette dans la direction du vol et donc pas de travail sur le drone si ce n’est celui de la gravité. Le mouvement est donc à énergie totale constante, comme on l’a évoqué précédemment, c’est-à-dire :

$$m \frac{v^2}{2} - mgz_0 = const \dots\dots\dots (4.85)$$

Ou :

$$V^2 = u_0^2 + 2g\Delta z_0 \dots\dots\dots (4.86)$$

L’incidence étant constante, le coefficient de portance  $CL$  reste également constant si l’on néglige les effets de nombre de Reynolds et de Mach ainsi que les effets aéroélectriques éventuels. En multipliant l’équation précédente par  $1/2(\rho g SC_L)$ , on obtient dès lors :

$$L = P + \frac{1}{2} \rho g SC_L \dots\dots\dots (4.87)$$

Puisque  $\frac{1}{2} \rho u_0^2 SC_L = L_0 = P_0$ . L’équation du mouvement dans la direction verticale étant :

$$m\Delta \ddot{z}_0 = P - L \cos \gamma \approx P - L \dots\dots\dots (4.88)$$

Pour les faibles pentes, elle s’écrit finalement, compte tenu du résultat précédent :

$$m\Delta \ddot{z}_0 + \rho SC_L \Delta z_0 = 0 \dots\dots\dots (4.89)$$

Qui est l’équation d’un mouvement harmonique de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g SC_L}} = 2\pi \sqrt{\frac{u_0^2}{2g^2}} = \pi\sqrt{2} \frac{u_0}{g} \dots\dots\dots (4.90)$$

Puisque  $m / \rho SC_L \Delta z_0 = 1/2(u_0^2 / g)$ .

Ce résultat d’une grande simplicité, selon lequel la période de la phugoïde ne dépend que de la vitesse de vol (et non des caractéristiques du drone ni de l’altitude) n’est pas seulement d’un intérêt historique, il fournit une bonne approximation pour les drones rigides volant à des vitesses en dessous de la limite à laquelle apparaissent les effets de compressibilité (de nombre de Mach).

**Deuxième approximation :**

On peut obtenir une approximation meilleure encore en introduisant des simplifications appropriées dans les équations du mouvement. Comme la phugoïde s'effectue quasiment sans mouvement de tangage  $q \approx 0$ , on peut en déduire que le drone est en permanence en équilibre en tangage (équilibre quasi-statique). De plus, puisque  $q$  et les variations d'incidence sont très faibles, on peut négliger leur influence sur le moment de tangage et la force selon  $z$ , c'est-à-dire les dérivées  $M_q, M_{\dot{\alpha}}, Z_q$  et  $Z_{\dot{\alpha}}$ . Dans ces conditions, les équations du mouvement se simplifient comme suivant :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \dot{w} \\ 0 \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & u_0 & 0 \\ \frac{M_u}{I_{yy}} & \frac{M_w}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ 0 \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.91)$$

Où l'on peut simplifier la troisième équation en la multipliant par  $I_{xx}$ . On constate que le système n'est pas sous forme canonique, mais plutôt sous la forme  $M\dot{x} = Ax$ . On peut montrer aisément que dans ce cas, les modes propres sont donnés par l'équation caractéristique:

$$\det(A - \lambda M) = 0 \dots\dots\dots (4.92)$$

En développant les calculs, on montre que cette équation se met sous la forme :

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \dots\dots\dots (4.93)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= -u_0 M_w \\ B &= gM_u + \frac{u_0^2}{m} (X_u M_w - M_u Z_w) \dots\dots\dots 4.94 \\ C &= \frac{g}{m} (Z_u M_w - M_u Z_w) \end{aligned}$$

Dont on déduit la pulsation non-amortie et le facteur d'amortissement :

$$\omega_n^2 = -\frac{g}{mu_0} \left( Z_u - \frac{M_u Z_w}{M_w} \right) \dots\dots\dots (4.95)$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega_n} \left[ \frac{g}{u_0} \frac{M_u}{M_w} + \frac{1}{m} \left( X_u - \frac{M_u}{M_w} X_w \right) \right] \dots\dots\dots (4.96)$$

Dans le cas particulier où  $M_u = 0$  (ce qui est le cas pour les drones rigides en l'absence d'effets de compressibilité), ces expressions se simplifient en :

$$\begin{aligned}
 A &= -u_0 M_W \\
 B &= \frac{u_0}{m} X_u M_W \dots\dots\dots 4.97 \\
 C &= \frac{g}{m} Z_u M_W
 \end{aligned}$$

D'ou:

$$\omega_n^2 = -\frac{gZ_u}{mu_0} \dots\dots\dots (4.98)$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega_n} \frac{X_u}{m} = -\frac{X_u}{2} \sqrt{\frac{u_0}{-mgZ_u}} \dots\dots\dots (4.99)$$

En exprimant les dérivées aérodynamiques dimensionnelles en fonction des dérivées adimensionnelles et en supposant  $C_{z_u} = 0$  (hypothèse vérifiée dans les mêmes conditions que l'hypothèse  $M_u = 0$ ) et que la poussée est indépendante de la vitesse : ( $\partial T / \partial u = 0 \rightarrow C_{T_u} = -2C_{D_0}$ )

On obtient finalement :

$$\omega_n^2 = \frac{\rho g S C_{L_0}}{m} = 2 \left( \frac{g}{u_0} \right)^2 \dots\dots\dots (4.100)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C_{D_0}}{C_{L_0}} \dots\dots\dots (4.101)$$

On retrouve donc le résultat de Lanchester pour la pulsation non-amortie et un facteur d'amortissement inversement proportionnel à la finesse. Alors que l'approximation pour la période reste bonne même pour des  $C_{m_u}$  différentes de zéro, l'approximation pour le facteur d'amortissement se détériore pour des valeurs positives élevées de  $C_{m_u}$ .

**IV.5.4.4. Oscillation d'incidence :**

L'oscillation d'incidence est essentiellement un mode à deux degrés de liberté, la vitesse restant pratiquement constante alors que le drone subit un mouvement de tangage assez rapide. On obtient dès lors une approximation du mouvement en annulant  $\Delta u$  et en éliminant l'équation selon  $x$ . En faisant en outre les approximations que  $Z_{\dot{w}}$  et  $Z_q$  sont faibles par rapport à  $m$  et  $mu_0$  respectivement (qui sont bien vérifiées dans le cas de l'exemple), on obtient finalement

(pour  $\theta_0 = 0$ ) le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_w}{m} & u_0 \\ \frac{1}{I_{yy}} \left[ M_w + \frac{Z_w M_{\dot{\alpha}}}{m} \right] & \frac{1}{I_{yy}} \left[ M_q + u_0 M_{\dot{\alpha}} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.102)$$

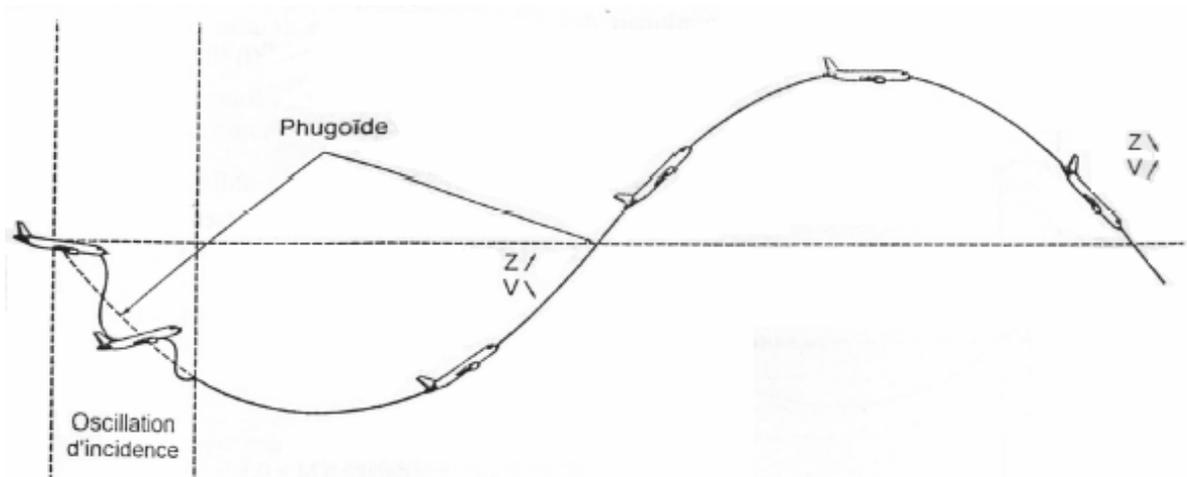
Dont on tire directement l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda \left[ \frac{Z_w}{m} + \frac{1}{I_{yy}} (M_q + u_0 M_{\dot{\alpha}}) \right] - \frac{1}{I_{yy}} \left( u_0 M_w - \frac{M_q Z_w}{m} \right) \dots\dots (4.103)$$

En exprimant les dérivées aérodynamiques dimensionnelles en fonction des dérivées adimensionnelles, cette expression devient :

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{t^*} \left[ \frac{C_{z\alpha}}{2\mu} + \frac{1}{\hat{I}_{yy}} (C_{m\alpha} + C_{m\dot{\alpha}}) \right] - \frac{1}{t^{*2} \hat{I}_{yy}} \left( C_{m\alpha} - \frac{C_{m_q} C_{z\alpha}}{2\mu} \right) \dots\dots\dots (4.104)$$

Dont les racines sont des valeurs pratiquement les mêmes que celles obtenues à partir du système complet. L'approximation de l'oscillation d'incidence donne effectivement de très bons résultats pour une large gamme de véhicules et de conditions de vol.



**Fig.4.25:** Représentation des modes longitudinaux.

**IV.5.5. Stabilité statique longitudinale:**

Comme on l'a mentionné précédemment l'apparition d'une racine réelle positive (divergence) qui constitue le critère d'instabilité statique rigoureux s'accompagne du changement de signe du coefficient  $E$  de l'équation caractéristique de positif à négatif.

Or,  $E = \det(A)$ . Évaluant cette grandeur dans le cas  $\theta_0 = 0$  en négligeant  $Z_{\dot{\alpha}}$  et  $Z_q$

Et on trouve :

$$E = \frac{g}{mI_{yy}} (Z_u M_w - M_u Z_w) \dots\dots\dots(4.105)$$

Et comme  $g$ ,  $m$  et  $I_{yy}$  sont tous positifs, le critère rigoureux de stabilité statique est donc :

$$Z_u M_w - M_u Z_w > 0 \dots\dots\dots(4.106)$$

Ou encore, sous forme non-dimensionnelle :

$$C_{m_\alpha} (C_{z_u} - 2C_{p_0}) - C_{m_u} C_{z_\alpha} > 0 \dots\dots\dots(4.107)$$

En l'absence d'effets de vitesse (compressibilité et aéroélasticité), c'est-à-dire pour  $C_{z_u} = C_{m_u} = 0$ , ce critère se réduit effectivement au critère simple  $C_{m_\alpha} < 0$ .

On peut montrer [3] que le critère général coïncide exactement avec le critère d'une pente de la courbe de l'angle de gouverne en fonction de la vitesse positive lorsqu'on tient compte des effets de vitesse (compressibilité, aéroélasticité) sur les coefficients aérodynamiques ( $C_l$ ,  $C_m$ ).

#### **IV.5.5.1. Effet des conditions de vol sur les modes longitudinaux :**

##### **IV.5.5.1.1. Effet de la vitesse et de l'altitude :**

La période de la phugoïde augmente avec la vitesse comme prédit par la théorie de **Lanchester**, et diminue avec l'altitude pour un nombre de Mach donné. La période de l'oscillation d'incidence varie en sens inverse, diminuant avec la vitesse et augmentant avec l'altitude. L'effet le plus frappant est l'augmentation importante et soudaine de la période de la phugoïde à grand nombre de Mach aux deux altitudes. Ce phénomène résulte de la perte de stabilité statique véritable due à la diminution jusqu'à une valeur négative de  $C_{mu}$  en raison des effets de compressibilité et aéroélasticités, qui induit une diminution importante du coefficient  $E$ .

##### **IV.5.5.1.2. Effet du centrage :**

Comme on l'a souligné à de nombreuses reprises, le paramètre le plus important pour la stabilité longitudinale est la raideur en tangage,  $C_{m_\alpha}$  qui est directement liée au centrage,  $C_{m_\alpha} = a(h - h_n)$  où  $h_n - h = K_n$  est la marge statique. L'effet de ce dernier paramètre est effectivement très important. Tel que la période et l'amortissement de la phugoïde varient rapidement avec la marge statique lorsqu'elle est faible et que les expressions approchées ne sont fiables que pour les marges statiques importantes. En ce qui concerne l'oscillation d'incidence, on voit que sa période varie peu avec la marge statique, sauf pour les marges statiques faibles pour lesquelles l'oscillation d'incidence a tendance à se séparer en deux modes réels, alors que son amortissement diminue lorsque la marge statique augmente. On constate également que les

expressions approchées sont excellentes sur toute la gamme des marges statiques.

Mais en général, l'effet de  $k_n$  sur les modes longitudinaux est très compliqué, c.-à-d. que sa valeur (négative, positive ou proche de zéro) montre la stabilité (ou l'instabilité) de ces modes.

**IV.5.6. Modes latéraux :**

**IV.5.6.1. Dérivées aérodynamiques, matrice du système et équation caractéristique :**

Les dérivées de stabilités adimensionnelles et dimensionnelles valeurs qui sont présentées nous permettent d'écrire la matrice du système latéral

On en tire l'équation caractéristique :

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0$$

Les deux critères de stabilité de Routh :

$$A, B, D, E > 0 \quad , \quad R = d(BC - AD) - B^2E > 0$$

**IV.5.6.2. Valeurs propres :**

Les racines de l'équation caractéristique sont les deux racines réelles et la paire de racines complexes conjuguées suivantes :

- Mode 1 (Spiral) :  $\lambda_1 = a$  .....4.108
- Mode 2 (Convergence en roulis) :  $\lambda_2 = b$  .....4.109
- Mode 3 (Oscillation latérale1) :  $\lambda_{2,3} = c \pm d$  .....4.10

**IV.5.7. Présentation des modes [2] :**

**IV.5.7.1. Mode 1 : mode spiral :**

Nous avons vu lors de l'étude de la flèche de l'aile et de l'empennage vertical sur la stabilité de route et de l'effet de dièdre, qu'il pouvait y avoir antagonisme.

Dérapiage à droite :

- Effet de dièdre → roulis à gauche
- Stabilité de route → lacet à droite

C'est la stabilité (ou l'instabilité) spirale.

Supposons que l'inclinaison a droite croisse légèrement : il s'en suit un dérapage a droite :

- effet de dièdre > 0 → roulis à gauche
- stabilité de route → lacet a droite → induction → roulis a droite.

Deux cas :

- 1- L'effet de dièdre l'emporte sur la stabilité de route : le roulis a gauche est prépondérant le drone desserre son virage .il y a stabilité spirale.

2- La stabilité de route l'emporte sur l'effet de dièdre : le roulis a droite est prépondérant le drone serre son virage .Il y a une instabilité spirale.

- Une bonne stabilité spirale s'obtient au détriment de la stabilité de route.
- Si la stabilité de lacet (route) est insuffisante en regard de la stabilité de roulis, il s'en suivra une tendance au Roulis hollandais (Dutch roll) :

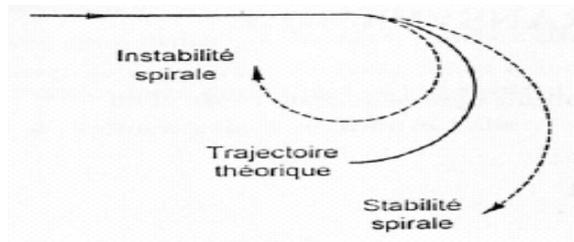


Fig.4.26.A: Stabilité spirale.

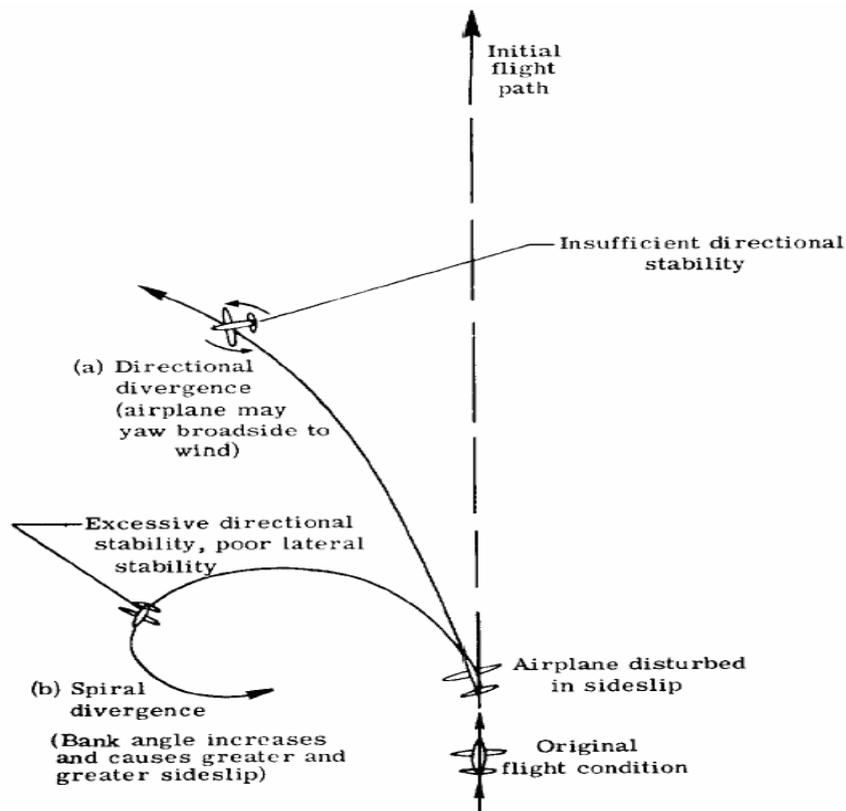


Fig.4.26.B: Divergence directionnelle et spirale [21].

Après une perturbation lente sur l'un des axes transversaux (lacet ou roulis), le déséquilibre transversal associé tend à disparaître, ou au contraire s'accroître, selon que le drone est stable, ou instable.

#### IV.5.7.2. Mode 2 : convergence en roulis :

C'est un mouvement de lacet et de roulis. Il vient de superposer au mouvement spirale.

Le mouvement qui a lieu, a la fois, en roulis et lacet peut subir un déphasage selon les deux axes

et une différence d'amplitude ; le mouvement de lacet l'emportant sur le moment de roulis : c'est l'oscillation de dérapage.

Si cette oscillation de dérapage s'amortit rapidement il y a : stabilité oscillatoire.

Dans le cas contraire, instabilité et risque de Dutch roll.

Comme dans le cas de l'oscillation d'incidence, le risque est pratiquement inexistant ; la réglementation de construction des drones récents impose des valeurs d'amortissement prévenant ce risque.

#### **IV.5.7.3. Mode 3 : Le roulis hollandais (Dutch roll) :**

C'est un mouvement transversal oscillatoire et de courte période affectant un couplage lacet-roulis et le dérapage .les risques qu'ils surviennent sont d'autant plus importants que la vitesse indiquée est faible (en approche, en croisière à haute altitude). Il provient d'une insuffisance de stabilité de lacet en regard de la stabilité de roulis. Les couples de rappel sont trop importants ; le mouvement au lieu de s'amortir, peut s'entretenir. Le drone décrit en contre virage une sinusoïde tracée sur le fond d'une gouttière.

Simultanément :

- Lacet vers la gauche –roulis vers la droite.
- Aile droite basse -lacet vers la gauche.
- Ailes horizontales et nouvelle séquence.
- Lacet à droite – roulis à gauche et ainsi de suite.



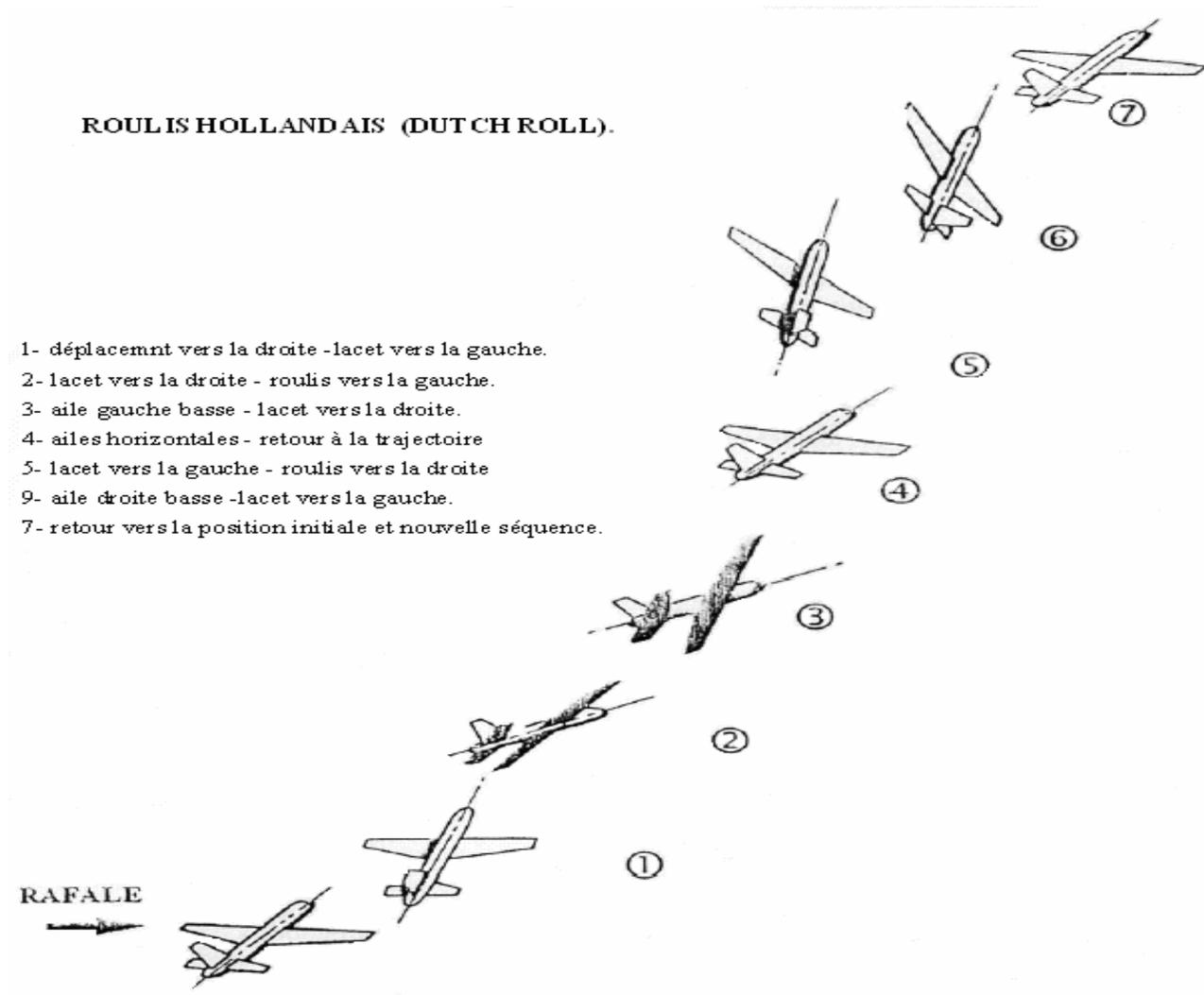
**Fig.4.28 :** Roulis hollandais de forme « 8 » et « gouttière ».

Ce mouvement prend naissance sur une mise en dérapage volontaire ou non. Ce mouvement s'opère au détriment de la cause qui le provoque : c'est la recherche de la stabilité spirale. Aussi préfère-t-on équiper les drones actuels de servomécanismes amortisseurs de lacet, "yaw-dampers".

Le roulis induit, le dièdre, la hauteur de l'empennage vertical, et surtout la flèche ont une influence défavorable sur l'amortissement .Par contre, la dérive ventrale augmente la stabilité de route (lacet) en diminuant l'effet de dièdre (roulis).

Lors de la construction, il faudra modérer les couples de rappel, pour ne pas tomber dans le cas de l'instabilité oscillatoire, en dosant les paramètres donnant de l'effet de dièdre.

La figure suivante représente un roulis hollandais :



**Fig.4.29:**Un drone en roulis hollandais (Dutch roll).

#### **IV.5.8. Approximation des modes latéraux [1] :**

On tentera dans cette section d'établir des expressions approchées pour les modes latéraux comme on l'a fait précédemment pour les modes longitudinaux. On montrera qu'il existe des approximations convenables pour chaque mode, mais qui doivent être manipulées avec précaution car leur précision ne peut réellement être vérifiée qu'a posteriori, par comparaison avec les solutions exactes. On ne peut les employer avec confiance que dans des situations semblables à celles pour lesquelles on a montré précédemment qu'elles donnaient de bons résultats.

##### **IV.5.8.1. Mode spiral :**

La comparaison des valeurs propres exactes montre que la valeur propre du mode spiral est deux ordres de grandeurs plus petites en module que la valeur propre suivante. Ceci suggère que l'on puisse obtenir une bonne approximation de ce mode en ne gardant que les deux termes

d'ordre le plus petit dans l'équation caractéristique, à savoir :

$$D\lambda + E = 0 \rightarrow \lambda_s \approx -\frac{E}{D} \dots\dots\dots(4.111)$$

Où  $\lambda_s$  dénote la valeur propre réelle du mode spiral. Avant de développer les expressions analytiques de  $D$  et  $E$ , réécrivons la matrice du système latérale de manière plus compacte, en faisant l'approximation  $y_p = 0$ .

$$A = \begin{bmatrix} y_v & 0 & y_r & g \cos \theta_0 \\ l_v & l_p & l_r & 0 \\ n_v & n_p & n_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.112)$$

Où la signification des symboles composés en police calligraphique s'obtient par comparaison avec le système 3.36, par exemple :

$$y_v = \frac{Y_v}{m}, \quad l_v = I'_{zz} L_v - I'_{xz} N_v$$

Avec ces notations, le calcul de  $\det(A - \lambda I)$  donne :

$$E = g [(l_v n_r - l_r n_v) \cos \theta_0 + (l_p n_v - l_v n_p) \sin \theta_0] \dots\dots\dots(4.113.a)$$

$$D = g (l_v \cos \theta_0 + n_v \sin \theta_0) + y_v (l_r n_p - l_p n_r) + y_r (l_p n_v - l_v n_p) \dots\dots\dots (4.113.b)$$

Lorsqu'on compare l'ordre de grandeur des divers termes de  $D$ , on s'aperçoit que le deuxième terme peut être complètement négligé et que  $Y_r$  peut être négligé dans  $y_r$  ( $y_r \approx -u_0$ ) de sorte que L'on a :

$$D = g (l_v \cos \theta_0 + n_v \sin \theta_0) + u_0 (l_v n_p - l_p n_v) \dots\dots\dots (4.114)$$

On a vu que le coefficient  $E$  revêt une signification particulière eu égard à la stabilité statique.

Le critère rigoureux de stabilité statique latérale est donc :

$$(l_v n_r - l_r n_v) \cos \theta_0 + (l_p n_v - l_v n_p) \sin \theta_0 > 0 \dots\dots\dots(4.115)$$

En exprimant chacun des termes en fonction des dérivées aérodynamiques adimensionnelles, on obtient l'expression équivalente :

$$(C_{l_\beta} C_{n_r} - C_{l_r} C_{n_\beta}) \cos \theta_0 + (C_{l_p} C_{n_\beta} - C_{l_\beta} C_{n_p}) \sin \theta_0 > 0 \dots\dots\dots (4.116)$$

Comme plusieurs dérivées latérales apparaissant dans cette dernière équation dépendent de  $C_{L_0}$ , la stabilité statique varie avec les conditions de vol et il n'est pas rare que le mode spiral soit instable dans une partie de l'enveloppe de vol ainsi qu'on l'a déjà souligné.

**IV.5.8.2. Convergence en roulis :**

On a remarqué à la section précédente que la convergence en roulis correspondait à très peu de choses près à un mouvement de pure rotation en roulis. Ceci suggère que l'on puisse l'approximer en supposant le dérapage et la vitesse de rotation de lacet nulles et en considérant uniquement l'équation du mouvement en roulis, à savoir :

$$\dot{p} = l_p p \dots\dots\dots (4.117)$$

ce qui donne la valeur propre approchée :

$$\lambda_R \approx l_p = I'_{zz}L_p - I'_{xz}N_p \dots\dots\dots (4.118)$$

Cette approximation conduit à un système du second ordre dont les deux racines sont des approximations des valeurs propres des modes spiraux et de convergence en roulis. Dans certains cas, les racines peuvent être complexes, ce qui correspond à une « phugoïde latérale », une oscillation latérale de grande période. L'approximation se base sur l'hypothèse physique que la force latérale due à la gravité produit la même rotation de lacet qu'en l'absence de dérapage, ce qui se traduit par le remplacement de l'équation selon  $y$  par l'équation quasi-statique

$$0 = y_r r + g \cos \theta_0 \phi \dots\dots\dots (4.119)$$

On suppose en outre que  $Y_p$  et  $Y_r$  sont négligeables. Sans faire d'approximation additionnelle sur les équations de rotation en roulis et en lacet, le système d'équation devient par conséquent pour un vol de référence horizontal :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u_0 & g \\ l_v & l_p & l_r & 0 \\ n_v & n_p & n_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.120)$$

Dont l'équation caractéristique s'obtient comme pour l'approximation de la phugoïde, à savoir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -u_0 & g \\ l_v & l_p - \lambda & l_r & 0 \\ n_v & n_p & n_r - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (4.121)$$

Qui, tous calculs faits, donne :

$$C\lambda^2 + D\lambda + E = 0 \dots\dots\dots (4.122)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 C &= u_0 n_v \\
 D &= u_0 (l_v n_p - l_p n_v) - g l_v \dots\dots\dots (4.123) \\
 E &= g (l_v n_r - l_r n_v)
 \end{aligned}$$

**IV.5.8.3. Roulis hollandais :**

Un modèle physique de l'oscillation latérale est un mouvement de lacet/dérapiage, dans laquelle on néglige le roulis. Les équations correspondantes s'obtiennent à partir du système complet en annulant  $p$  et  $\phi$  et en éliminant l'équation de rotation en roulis. On néglige également la dérivée  $Yr$ . Le système simplifié est donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_v & -u_0 \\ n_v & n_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.124)$$

D'où l'on tire directement l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - (y_v + n_r)\lambda + (y_v n_r + u_0 n_v) = 0 \dots\dots\dots (4.125)$$

On peut obtenir une meilleure approximation de l'amortissement de ce mode en combinant l'équation exacte et l'approximation pour les modes spiraux et de convergence en roulis. En effet, on sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice (somme des éléments diagonaux), d'où :

$$2\sigma_{DR} + \lambda_s + \lambda_r = y_v + l_p + n_r \rightarrow \sigma_{DR} = 1/2(y_v + l_p + n_r - (\lambda_s + \lambda_r)) \dots (4.126)$$

Mais l'approximation précédente pour les modes spiraux et de roulis donne :

$$\lambda_s + \lambda_r = -\frac{D}{C} = l_p + \frac{l_v}{n_v} \left( \frac{g}{u_0} - n_p \right)$$

De sorte qu'on obtient finalement :

$$\lambda_{DR} = \frac{1}{2} \left[ y_v + n_r + \frac{l_v}{n_v} \left( \frac{g}{u_0} - n_p \right) \right] \dots\dots\dots (4.127)$$

À comparer avec  $1/2(y_v + n_r)$ . L'amortissement donné par cette dernière approximation est mieux que l'approximation précédente.

**IV.6. Réponse aux commandes :**

**IV.6.1. Introduction :**

La réponse du drone à l'actuation des principales commandes : gouvernes de profondeur et de direction, ailerons et manette des gaz. Remarquons que ce ne sont pas les seules commandes qui peuvent être employées. Ainsi on a parfois recours à l'orientation de la poussée

(vectored thrust) ou encore à une commande directe de portance. Étroitement liés à ces problèmes sont les réponses du drone à un changement de configuration de vol : déflexion des volets hypersustentateurs, lâcher de masses (bombes ou réservoirs), déploiement des aérofreins.

#### **IV.6.1.1. Guidage longitudinal :**

Les deux grandeurs principales à contrôler en vol symétrique sont la vitesse et la pente de la trajectoire. Pour ce faire, il faut bien entendu être capable d'appliquer des forces parallèlement et perpendiculairement à la trajectoire de vol. On agit sur les premières au moyen de la commande de poussée (manette des gaz) et en réglant la traînée (aérofreins), et sur les secondes en réglant la portance par l'entremise de la gouverne de profondeur ou de volets. Il est évident, par simple raisonnement physique (ou en se fondant sur les équations du mouvement) que la réponse *initiale* à une augmentation des gaz (et donc de poussée) est une accélération. De même, la principale réponse *initiale* à une déflexion de la gouverne est un mouvement de tangage, qui induit par la suite une variation d'incidence et de portance, et donc un changement de direction de vol.

Asymptotiquement, le nouvel état d'équilibre correspondant aux nouvelles positions des commandes se détermine précédemment. Ainsi, un changement de la poussée à braquage de la gouverne (et donc à incidence) donné produit un changement de pente de la trajectoire sans changement de vitesse. Au contraire, une déflexion de la gouverne modifie l'incidence d'équilibre et donc la vitesse, ce qui, à poussée constante, entraîne secondairement un changement de pente de la trajectoire.

On constate que les effets initiaux et asymptotiques des commandes sont en quelques sortes inversées. Il est donc nécessaire d'étudier les transitoires qui lient ces réponses initiales et finales. Nous verrons par la suite que ceux-ci sont dominés par l'oscillation faiblement amortie et de longue période qu'est la phugoïde, et que l'état final n'est obtenu que longtemps après l'actuation de la commande.

#### **IV.6.1.2 Guidage latéral :**

Les fonctions des commandes latérales sont triples :

- assurer l'équilibre en cas d'asymétrie de la poussée due à la défaillance d'un moteur,
- corriger les mouvements indésirés induits par la turbulence atmosphérique,
- permettre d'effectuer les manœuvres de virage.

Les deux premières fonctions s'obtiennent grâce aux couples de lacet et de roulis produits par les commandes. Pour la troisième, il faut appliquer une force horizontale perpendiculaire à la vitesse du drone, ce qui s'obtient en inclinant le drone d'un angle de gîte  $\phi$ .

Les commandes latérales permettent donc de mettre le drone en virage comme sous-produit de leur faculté de contrôler l'angle de gîte.

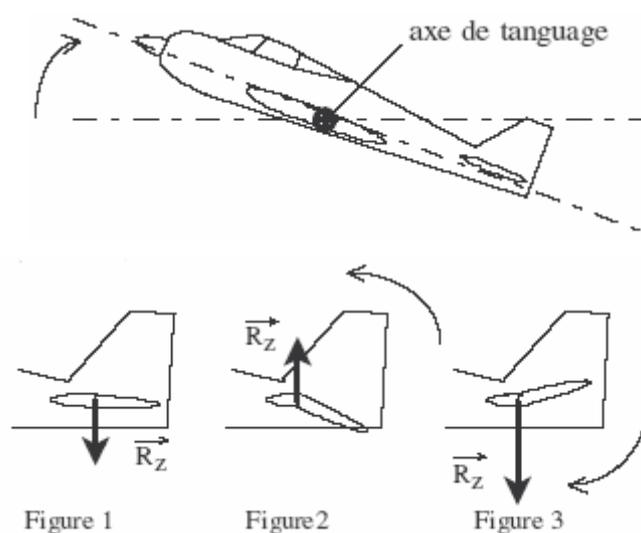
D'ordinaire, les réponses au braquage des ailerons ou de la gouverne de direction sont très compliquées, tous les modes latéraux étant simultanément excités. Dans ce cas, seule la solution des équations non-linéaires du mouvement permet de le décrire correctement.

#### IV.6.1.3. Utilisation des forces aérodynamiques pour le contrôle de la trajectoire [2]:

On va expliquer plus l'effet des gouvernes sur les trois mouvements rotatives citées précédemment. Afin de diriger le drone dans l'espace, on utilise des efforts aérodynamiques (portances et traînées) créés sur de petites surfaces que l'on appelle **gouvernes** afin de provoquer des rotations sur les trois axes du drone (roulis, tangage et lacet).

##### **Le contrôle du tangage :**

Pour faire monter le drone, il faut lui basculer le nez vers le ciel et pour le faire descendre, il faut lui axe de tangage basculer le nez vers le sol. Autrement dit, il faut provoquer une rotation autour de l'axe de tangage. C'est à dire celui qui joint les extrémités des deux ailes. En pratique, on joue sur la portance de l'empennage horizontal. Si on augmente sa portance, la queue du drone va monter et le nez va basculer vers le sol : le drone descendra (figure 2). Si on diminue sa portance, la queue va s'enfoncer et le nez du drone va basculer vers le ciel : le drone montera (figure 3). Il est à noter qu'initialement pour un vol en palier équilibré, l'empennage horizontal du drone est déporteur (c'est à dire que sa portance est orienté vers le bas).

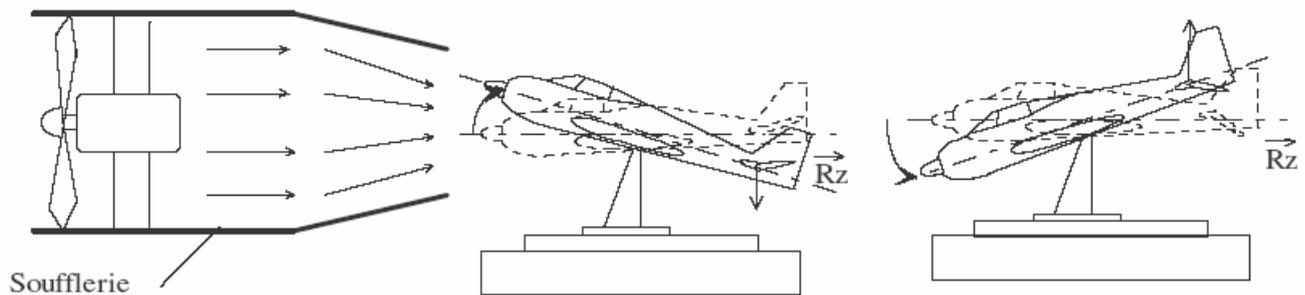


**Fig. (4.30)-** Contrôle de tangage

Les modifications de la portance de l'empennage horizontal sont obtenues en braquant la

- **gouverne de profondeur** : Celle-ci permet de modifier le profil et l'incidence de l'empennage horizontal. On peut choisir de basculer entièrement l'empennage horizontal (empennage monobloc). Les variations de portance sont alors obtenues simplement par la variation de l'incidence de la gouverne. Les mouvements de la profondeur sont symétriques sur la partie droite et la partie gauche de l'empennage horizontal.

Pour vérifier l'efficacité de ce dispositif, il suffit de placer dans la soufflerie une maquette dont la profondeur est orientable. On vérifie bien qu'un braquage de la gouverne de profondeur vers le bas (manche à piquer) fait basculer le nez vers le bas et qu'un braquage de la gouverne vers le haut (manche à cabrer) fait basculer le nez vers le haut :

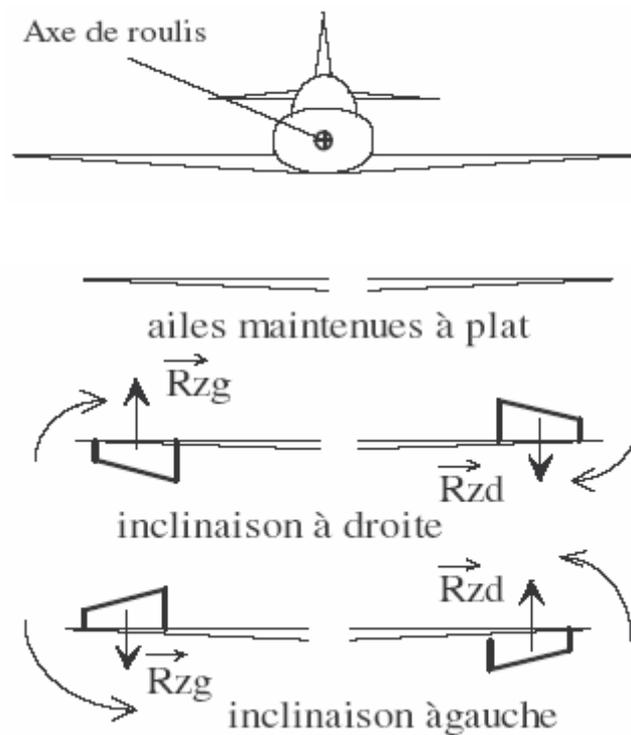


**Fig.4.31:** Contrôle de tangage dans une soufflerie.

La commande de profondeur n'a pas d'effets secondaires sur la trajectoire. Toutefois, si on tire sur le manche, la montée que l'on amorce engendre une diminution de la vitesse si on n'augmente pas le régime moteur. De même si on pousse sur le manche, il faut réduire les gaz pour éviter que la vitesse n'augmente.

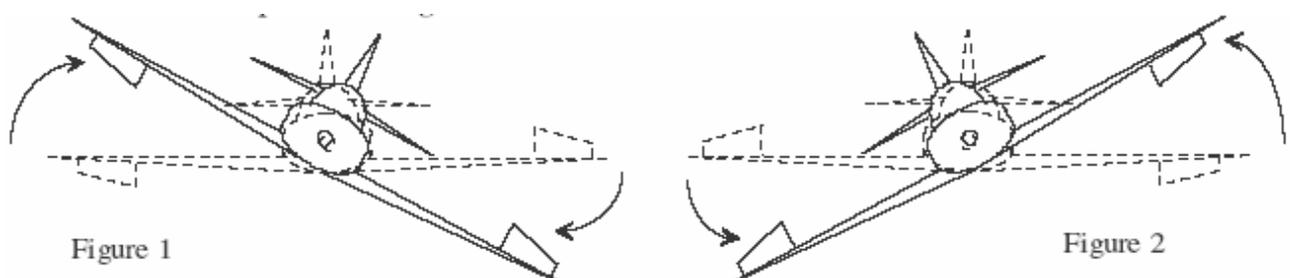
### **Le contrôle du roulis :**

Pour faire basculer le drone sur l'aile gauche ou sur l'aile droite, il faut jouer sur la portance de chaque aile. Autrement dit, pour provoquer une rotation autour de l'axe de roulis, c'est à dire celui qui joint le nez du drone à la queue, il faut augmenter la portance d'une aile et diminuer celle de l'autre. Pour s'incliner à droite, il faut diminuer la portance de l'aile droite et augmenter celle de l'aile gauche. Pour s'incliner à gauche, il faut faire le contraire. Pour modifier la portance des ailes on utilise des **ailerons**. Ces gouvernes situées en bout d'aile (pour augmenter leur efficacité) et permettent d'obtenir un effet opposé sur les deux ailes par un braquage différentiel. On baisse l'aileron du côté où il faut augmenter la portance et on le lève du côté où il faut la diminuer. Baisser un aileron rend le profil plus cambré en bout d'aile et augmente également son incidence. Il en résulte une augmentation de la portance du bout de l'aile.



**Fig.4.32:** Contrôle de roulis.

Le braquage opposé sur l'autre aile produit l'effet inverse. On observe donc une rotation du drone autour de l'axe de roulis. En résumé pour incliner le drone à droite, il faut monter l'aileron droit et baisser l'aileron gauche (en mettant le manche à droite); pour incliner le drone à gauche il faut monter l'aileron gauche et baisser l'aileron droit (en mettant le manche à gauche). Pour vérifier l'efficacité de ce dispositif, il suffit de placer dans la soufflerie une maquette dont les ailerons sont mobiles. Dans le langage des pilotes, plutôt que dire que l'on incline le drone à droite ou à gauche, **on dit que l'on gauchit à droite ou à gauche**. Ce terme vient de l'époque où la rotation autour de l'axe de roulis s'obtenait en déformant les ailes entières et il est resté. La commande en roulis se dénomme par le terme **gauchissement**.



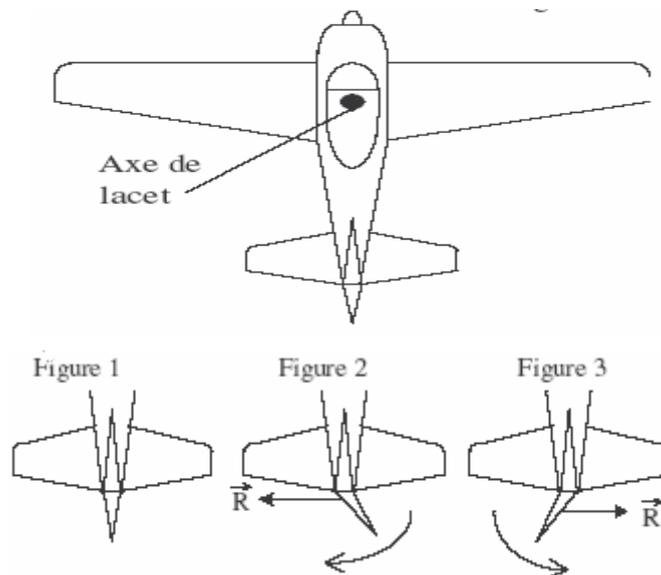
**Fig.4.33:** L'effet de gauchissement.

Le gauchissement entraîne un **effet secondaire** sur la trajectoire : en effet, lorsqu'on incline le drone, l'aile voyant sa portance augmenter, voit également sa traînée augmenter. Il se

produit alors une rotation autour de l'axe de lacet. Le nez part du côté de l'aile haute. Une inclinaison sur la droite engendre donc du lacet à gauche. **On parle de lacet inverse.**

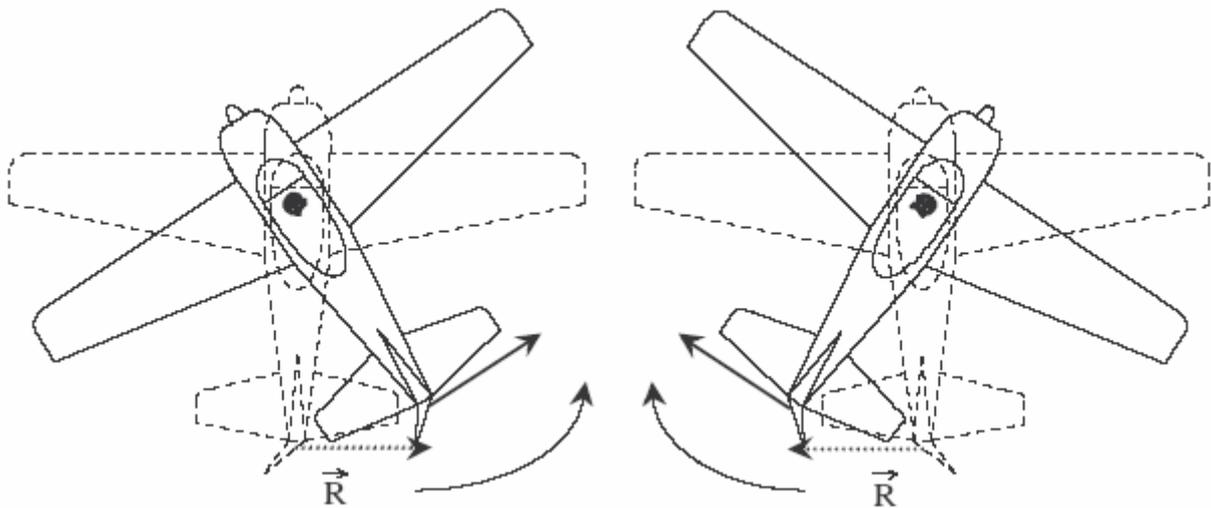
### Le contrôle du lacet :

Pour faire basculer le nez du drone à gauche ou à droite, il faut provoquer une rotation autour de l'axe de lacet, c'est à dire l'axe perpendiculaire au plan des ailes et passant par le centre de gravité du drone. C'est l'empennage vertical qui permet de créer cette rotation. Une surface mobile verticale, la gouverne de direction, permet de créer un effort aérodynamique qui engendre une rotation de la queue vers la droite ou vers la gauche. En position de repos la gouverne de direction est dans l'axe du drone. La dérive n'entraîne qu'une traînée dans l'axe du drone.



**Fig.4.34:** Contrôle de lacet.

Lorsqu'on braque la gouverne à droite (en enfonçant le palonnier à droite), on engendre une résultante aérodynamique vers la gauche sur l'empennage vertical. Celui-ci est donc entraîné dans cette direction et le nez du drone part à droite. Si on braque la gouverne vers la gauche, en enfonçant le palonnier à gauche, on engendre une résultante aérodynamique sur l'empennage vertical dirigée vers la droite. La queue part donc à droite et le Nez à gauche. En conclusion, pour amener le nez vers la droite ou vers la gauche, il faut enfoncer le pied du côté ou on veut amener le nez.



**Fig.4.35:** Braquage de la gouverne de direction.

Pour vérifier l'efficacité de ce dispositif, il suffit de placer dans la soufflerie une maquette dont la direction est orientable.

En réalité, l'empennage horizontal n'est pas toujours dans l'axe du drone; il peut être légèrement décalé, notamment sur les monomoteurs à hélice. En effet le souffle hélicoïdal de l'hélice entraîne un écoulement dissymétrique sur l'empennage et la rotation de l'hélice engendre un couple gyroscopique. Le drone a donc tendance à partir en lacet. Pour rendre son pilotage plus confortable, on donne initialement un angle de calage à l'empennage vertical de telle sorte qu'en palier à la vitesse de croisière le pilote n'ait pas besoin de toucher au palonnier. En revanche dans les phases de décollage et d'atterrissage il doit utiliser des braquages de direction pour maintenir un vol symétrique et contrer la tendance naturelle du drone au lacet.

Lorsque la direction est enfoncée d'un côté, le drone se met en rotation autour de l'axe de lacet de ce côté. Il a alors une aile qui avance plus vite que l'autre dans l'écoulement d'air. Cette aile voit donc sa portance augmenter par rapport à l'autre et cela engendre du roulis. Par exemple si on enfonce la direction à gauche, le nez défile par la gauche et l'aile droite accélère par rapport à l'aile gauche. Sa portance augmente et elle se soulève. Le drone se met en roulis par la gauche. Un mouvement de lacet dans un sens entraîne donc du roulis dans le même sens. **On parle de roulis induit.**

#### **IV.6.2. Réponse longitudinale [23]:**

Le vecteur de commande a été déterminé au chapitre 3 (3.35). En reliant les efforts aérodynamiques au braquage de la gouverne et au niveau de poussée :

$$\begin{bmatrix} \Delta X_c \\ \Delta Z_c \\ \Delta M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\Pi} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\Pi} \\ M_{\delta_e} & M_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \Pi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.128)$$

On déduit l'expression de la matrice  $B$  :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} & \frac{X_{\Pi}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{Z_{\Pi}}{m - Z_{\dot{\alpha}}} \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_{yy}} + \frac{Z_{\delta_e} M_{\dot{\alpha}}}{I_{yy} (m - Z_{\dot{\alpha}})} & \frac{M_{\Pi}}{I_{yy}} + \frac{Z_{\Pi} M_{\dot{\alpha}}}{I_{yy} (m - Z_{\dot{\alpha}})} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.129)$$

L'utilisation de dérivées aérodynamiques constantes implique une réponse instantanée aux commandes, en particulier que la poussée réagisse instantanément à l'actionnement de la manette des gaz. Cette hypothèse est assez réaliste pour les drones à hélice mais elle devient caduque pour les turboréacteurs, qui possèdent un temps de réaction plus important. On peut prendre cet effet en compte en remplaçant les dérivées aérodynamiques par rapport à la commande de poussée par des fonctions de transfert, par exemple  $X_{\Pi}$  par  $G_{s\Pi}(s)$ , ce qui est équivalent à modéliser la réponse des efforts aérodynamiques par rapport au niveau de la manette des gaz par une équation différentielle additionnelle.

**IV.6.3. Réponse latérale :**

Les fonctions de transfert latérales se calculent exactement de la même manière que les fonctions de transfert longitudinales, à savoir  $G = (sI - A)^{-1}B$ . En reliant les efforts aérodynamiques latéraux au braquage des ailerons et de la gouverne de direction,

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_c \\ \Delta L_c \\ \Delta N_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.130)$$

on déduit de l'expression du vecteur de commande établi au chapitre 3 (3.36) l'expression de la matrice  $B$  :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_a}}{m} & \frac{Y_{\delta_r}}{m} \\ I'_{zz}L_{\delta_a} - I'_{xz}N_{\delta_a} & I'_{zz}L_{\delta_r} - I'_{xz}N_{\delta_r} \\ I'_{xx}N_{\delta_a} - I'_{xz}L_{\delta_a} & I'_{xx}N_{\delta_r} - I'_{xz}L_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.131)$$

**IV.6.3.1. Réponse transitoire aux ailerons et à la gouverne de direction :**

Comme on l’a mentionné précédemment, l’action des commandes latérales produit rapidement des angles (notamment de gîte) importants, de sorte que les équations linéarisées perdent leur validité. Pour les drones de ligne et d’aviation générale qui ne sont pas sujets à des manœuvres violentes, un modèle intermédiaire entre le modèle linéarisé et le modèle non-linéaire général, dans lequel seuls certains effets non-linéaires sont pris en compte s’avère utile. Il consiste à garder une représentation linéaire des effets aérodynamiques et d’inertie, mais d’employer la formulation non-linéaire exacte des forces de gravité. De la sorte, les angles  $\phi, \theta$  et  $\psi$  peuvent prendre des valeurs arbitraires. Comme on le verra dans l’exemple suivant, la validité de la solution ainsi obtenue est limitée par l’augmentation de la vitesse du drone au-delà de la gamme de validité de l’approximation linéaire, c’est-à-dire que la solution perd sa validité lorsque les non-linéarités aérodynamiques commencent à devenir importantes.

Si, dans les équations générales du mouvement, on introduit les approximations linéaires aérodynamiques et on néglige les termes d’inertie quadratiques, on obtient, pour un vol initialement horizontal ( $\theta_0 = 0$ ), le système d’équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X}{m} - g \sin \theta \\ \frac{\Delta Z}{m} - g(1 - \sin \phi \cos \theta) + u_0 q \\ \frac{\Delta M}{I_{yy}} \\ \cos \phi q - \sin \phi r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.132)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta Y}{m} + g \sin \phi \cos \theta - u_0 r \\ I'_{zz} \Delta L - I'_{xz} \Delta N \\ I'_{xx} \Delta N - I'_{xz} \Delta L \\ P + \tan \theta (\sin \phi q + \cos \phi r) \\ \sec \theta (\sin \phi q + \cos \phi r) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.133)$$

Il est intéressant de remarquer que, bien que les efforts aérodynamiques longitudinaux ne dépendent toujours que des variables du mouvement longitudinal (pas de couplage aérodynamique), un couplage apparaît entre mouvements longitudinal et latéral par l'entremise du terme  $-\sin\phi r$  dans l'équation du moment de tangage, c'est-à-dire qu'un mouvement au départ uniquement latéral induira des composantes longitudinales.

#### **IV.6.4. Réponse aux commandes longitudinales et latérales :**

Nous savons la forme générale de l'équation de mouvement :

$$G = (sI - A)^{-1} B .$$

Tel que pour le mouvement longitudinal on a :

X : le vecteur de variables  $u, \omega, q, \theta$  .

A : la matrice de système longitudinal.

Bu : le vecteur de commandes.

B : est la matrice des efforts aérodynamiques.

$$u = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \Pi \end{bmatrix} : \text{Tel que :}$$

$\delta_e$  : est l'angle de braquage de la gouverne de profondeur.

$\Pi$  : est la commande de poussée.

Et pour le système latéral on a :

X : le vecteur de variables  $v, p, r, \phi$  .

A : la matrice de système latéral.

Bu : le vecteur de commandes.

B : est la matrice des efforts aérodynamiques.

$$u = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} : \text{Tel que :}$$

$\delta_a$  : est l'angle de braquage de l'aileron.

$\delta_r$  : est l'angle de braquage de gouverne de la direction.

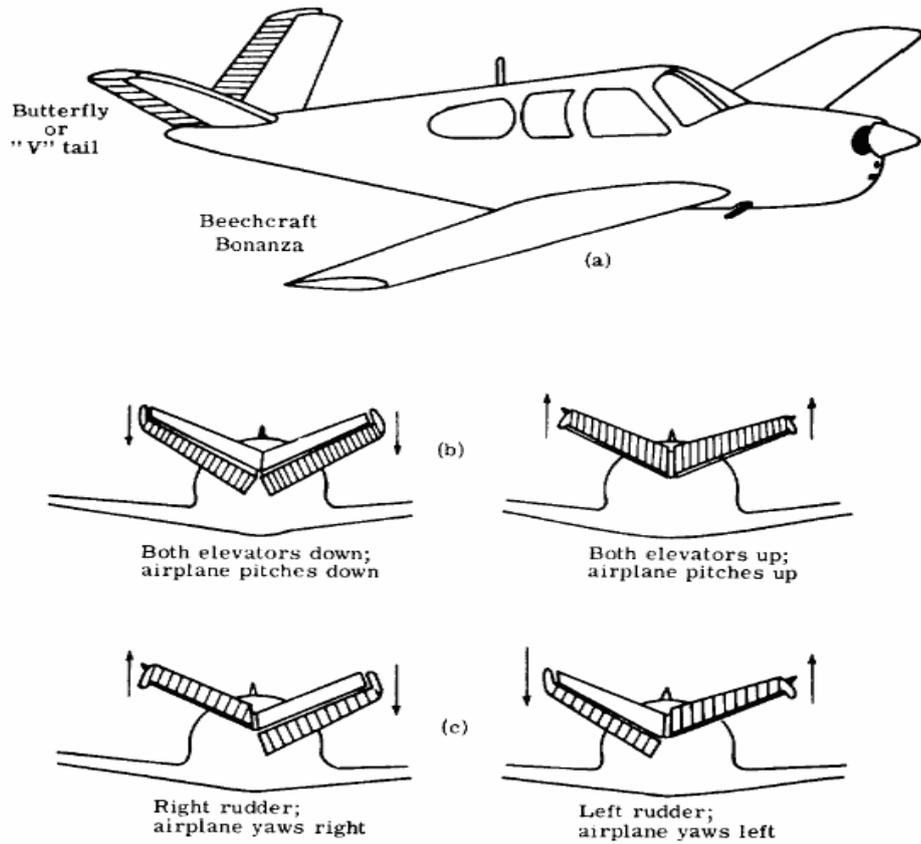


Fig.4.36: Commandes de la gouverne de profondeur [21].

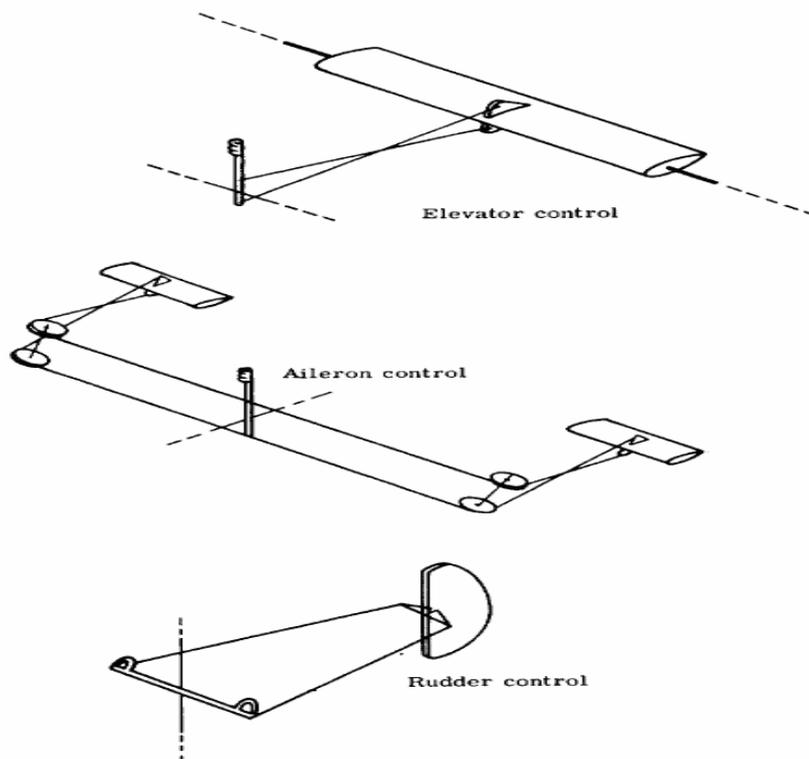


Fig.4.37: Système de contrôle [21].

#### IV.6.5. Solution des problèmes de réponse aux commandes [13], [14], [24]:

En parallèle de la révolution de l'informatique, l'intégration numérique des équations non-linéaires du mouvement se fait aisément à l'aide de logiciels mathématiques tels que MATLAB ou encore par des programmes spécifiques qui utilisent le plus souvent la méthode de Runge-Kutta. L'aspect le plus difficile du recours à l'intégration numérique des équations du mouvement est d'élaborer le modèle aérodynamique général fournissant les efforts aérodynamiques en fonction des paramètres de vol et du braquage des commandes.

Aussi, bien que l'on soit alors limité à l'analyse de mouvements de faible amplitude, l'usage du modèle linéaire des petites perturbations est néanmoins très utile et instructif. Non seulement révèle-t-il les caractéristiques dynamiques importantes mais de plus, il est tout-à-fait approprié pour la conception de systèmes de régulation destinés à maintenir les perturbations à un faible niveau. Pour l'étude des réponses aux commandes, on est amené à introduire des dérivées aérodynamiques par rapport aux paramètres de commande définies selon les conventions habituelles. Ainsi,

$$C_{m_{\delta_e}} \equiv \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e}$$

Les dérivées dimensionnelles s'obtiennent à partir des dérivées adimensionnelles selon les définitions habituelles des facteurs d'adimensionnalisation.

##### IV.6.5.1. L'analyse à l'aide de la fonction de transfert (disponible dans MATLAB) :

Les équations du mouvement du modèle linéaire s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u$$

Où apparaissent les contributions des commandes représentées par leur vecteur.

On obtient aisément la solution générale de ces équations par application de la transformée de Laplace :

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}u(s)$$

En supposant  $\mathbf{X}(0) = 0$  (état initial à l'équilibre), on trouve immédiatement :

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}u(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(s)$$

Et on pose :

$$\mathbf{G}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u$$

Où  $\mathbf{G}(s)$  est la matrice des fonctions de transfert. Comme :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{cof}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

où  $\text{cof}(sI - A)$  est la matrice des cofacteurs de la matrice  $(sI - A)$ , il est clair que les pôles de  $G(s)$  sont les valeurs propres de  $A$ . Alors, on peut écrire finalement :

$$G(s) = \frac{\text{cof}(sI - A)Bu}{\det[sI - A]} = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$$

Ensuite on retrouve  $G(t)$  à l'aide de la transformation de Laplace, et le résoudre en introduisant les conditions initiales.

#### **IV.6.5.2. L'analyse à l'aide de la fonction d'état (disponible dans MATLAB):**

On a toujours le système précédent à résoudre avec la méthode de fonction d'état, qu'il peut être écrit comme suivant (suivi par des conditions initiales données) :

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX + Du$$

Et  $Y$  ici consiste le vecteur de sortie « output vector », ou la solution du système présentée graphiquement par MATLAB.

$C$  : est la matrice unitaire  $I$ .

$D$  : est le vecteur nul.

# Chapitre 5

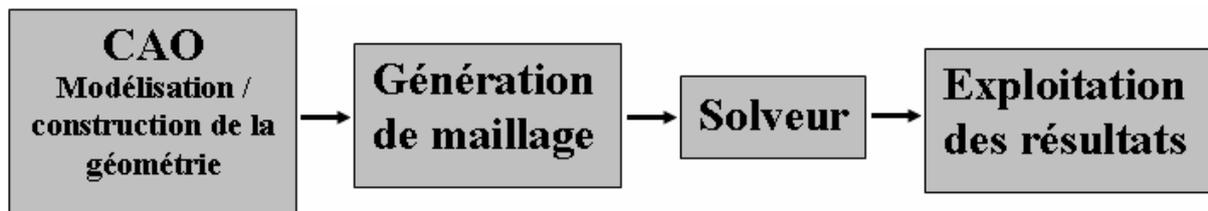
## **OUTILS DE MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE**

## **V. OUTILS DE MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE:**

Afin de valider la partie théorique, nous entamons la partie modélisation numérique. Cette dernière nécessite un certain nombre d'outils de modélisation et de conception tels que SolidWorks, ICEM CFD, ainsi que des logiciels de simulation numérique telle que FLUENT V6.

L'outil CFD (Computational Fluid Dynamics) devient de plus en plus intéressant surtout après le saut énorme dans le domaine informatique en termes de vitesse des processeurs et d'espace mémoire disponible. Ce qui rend la CAO (Conception Assistée par l'Ordinateur) et la simulation numérique des phénomènes physiques plus économiques et plus rapide que les méthodes classiques.

La méthodologie générale d'un calcul CFD est indiquée dans la figure 5.1 qui consiste en la création des pièces et assemblages, générateur du maillage et définition des conditions aux limites, et en fin la résolution avec un solveur.



**Fig.5.1** : Etapes d'une simulation C.F.D.

### **V.1. Présentation de SolidWorks :**

Créé en 1993 par l'éditeur américain éponyme, SolidWorks a été acheté le 24 juin 1997 par la société Dassault Systèmes. Parmi les plus grandes entreprises utilisant SolidWorks, on peut citer Michelin, Patek Philippe, Mega Bloks, Axiome, ME2C, SACMO, Le Boulch, Robert Renaud.

SolidWorks est un modèleur 3D utilisant la conception paramétrique. Il génère 3 types de fichiers relatifs à trois concepts de base : la pièce, l'assemblage et la mise en plan. Ces fichiers sont en relation. Toute modification à quelque niveau que ce soit est répercutée vers tous les fichiers concernés.

Un dossier complet contenant l'ensemble des relatifs à un même système constitue une maquette numérique. De nombreux logiciels viennent compléter l'éditeur SolidWorks. Des utilitaires orientés métiers (tôlerie, bois, BTP...), mais aussi des applications de simulation mécanique ou d'image de synthèse travaillent à partir des éléments de la maquette virtuelle.

**Les pièces :** la pièce est l'objet 3D monobloc. La modélisation d'une telle entité dépendra de la culture de l'utilisateur. Comme de nombreux logiciels conviviaux, SolidWorks permet

d'aboutir à un même résultat apparent par des voies souvent différentes. C'est lors de la retouche de ces fichiers ou de leur exploitation qu'on appréciera la bonne méthode.

Une pièce est la réunion d'un ensemble de fonctions volumiques avec des relations d'antériorité, des géométriques, des relations booléennes (ajout retrait)... Cette organisation est rappelée sur l'arbre de construction. Chaque ligne est associée à une fonction qu'on peut renommer à sa guise.



**Fig.5.2** : Interface de SolidWorks.

#### **Parmi les fonctions génératrices on trouve:**

- **l'extrusion** : déplacement d'une section droite dans une direction perpendiculaire à la section. La section est définie dans une esquisse (qui apparaît alors dans l'arbre de création comme élément générateur de la fonction). Cette esquisse contient l'ensemble des spécifications géométriques (cotation) nécessaires à la complète définition de la section. Cet ensemble de cotes auquel il faut ajouter la (ou les) longueur d'extrusion constitue l'ensemble des paramètres de la fonction; il est possible de les modifier une fois la fonction validée.
- **la révolution** : déplacement d'une section droite autour d'un axe, ou extrusion suivant un cercle ou un arc de cercle.
- **le balayage** : déplacement d'une section droite le long d'une ligne quelconque. Lorsque la génératrice de balayage est gauche, l'esquisse est en 3 dimensions.

D'autres fonctions, plutôt orientées métier intègrent des notions qu'il serait fastidieux de modéliser :

- congés et chanfreins,
- nervure,
- dépouille,

- coque (permettant d'évider un objet en lui conférant une épaisseur constante),
- trous normalisés (perçages, mortaises...),
- plis de tôle...

Des fonctions d'ordre logiciel comme la répétition linéaire, circulaire, curviligne ou par symétrie...

Les dernières versions autorisent la réalisation de pièces momentanément disjointes, ce qui permet de concevoir un objet fonctionnellement, c'est-à-dire en définissant d'abord les éléments fonctionnels, puis en joignant les différentes parties par de la matière (nervures, carter...).

L'édition de familles de pièces est possible en associant à SolidWorks, le tableur Microsoft Excel: Un tableau devient ainsi éditeur des références (lignes) donnant la valeur des paramètres variables des fonctions (colonnes) :

- valeur de certaines cotes.
- valeur de certaines propriétés (nombre d'occurrence...).
- état de suppression d'une fonction.

Ainsi, il est possible d'obtenir à partir d'un seul fichier de type pièce, l'ensemble des modèles de vis d'assemblage (toutes forme de tête ou dimensions), ou encore toutes les combinaisons de briques LEGO (1x1, 1x2 etc.).

Avec tous ces outils, la méthode de conception d'une pièce très proche du métier du concepteur qui ne soucis plus de savoir où placer les traits du dessin mais les formes de la pièce.

Les possibilités d'éditeurs sont complétées par un ensemble d'outils de mesures géométriques. Ainsi il est possible de connaître le volume de la pièce, son poids, la position de centre de masse, sa matrice d'inertie, la surface...

**Les assemblages :** Les assemblages sont obtenus par la juxtaposition de pièces. La mise en position de pièces est définie par un ensemble de contraintes d'assemblage associant, deux entités respectives par une relation géométrique (coïncidence, tangence, coaxialité...). Dans une certaine mesure, ces associations de contraintes s'apparentent aux liaisons mécaniques entre les pièces. Le mécanisme monté, s'il possède encore des mobilités, peut être manipulé virtuellement. On peut alors aisément procéder à des réglages à l'aide des différents outils disponibles (déplacement composants, détection de collision, mesure des jeux, etc.)

Comme pour les pièces, la gestion de l'ensemble est portée par un arbre de création qui donne accès à l'arbre de création de chaque pièce. Il est d'ailleurs possible d'assembler des assemblages, donc de former des sous-groupes de pièces. Cette opération étant préalable ou en cours d'édition.

L'intérêt de cet outil, c'est qu'il rend possible la création d'une pièce dans l'assemblage, c'est qu'il propose la même méthode au concepteur que celle qu'il appliquait sur la table à dessin : tout concevoir en même temps. En effet, à part sur les petits ensembles simples (ou déjà définis), il n'est pas raisonnable de concevoir chaque pièce dans son coin pour corriger ensuite, lors de l'assemblage, les problèmes éventuels d'interférence, ou de coïncidence. La conception intégrée lie automatiquement les géométries des pièces entre elles, si bien qu'une modification sur une, est automatiquement répercutée sur les autres. Alors l'édition de pièce est la conséquence de l'édition de l'ensemble.

**Les mises en plan :** Dessin de définition établi avec SolidWorks

Les mises en plan concernent à la fois les pièces (dessin de définition) ou les assemblages (dessin d'ensemble). Pour aboutir à un plan fini d'une pièce on peut estimer mettre 2 fois moins de temps qu'avec un outil DAO (temps de conception et exécution du dessin). En effet, en DAO, chaque trait est indépendant, et c'est au dessinateur de savoir quelles entités graphiques sont concernées par une modification. Le logiciel 3D ne fait qu'une projection de l'objet. Les modifications éventuelles sont opérées sur l'objet représenté, et ne concernent pas directement le plan.

**Vues :** La projection sur plan du modèle ne pose aucun problème. Aujourd'hui il est très facile d'obtenir un plan, forcément juste (avec un logiciel de DAO il est possible d'éditer un plan faux). Les vues en coupes, les vues partielles, perspectives, sont exécutées d'un simple clic. Les seuls problèmes encore rencontrés concernent la représentation des filetages et taraudages dans les assemblages.

De plus, chaque vue peut être exécutée avec un habillage différent, filaire, conventionnel ou ombré rendant encore plus accessible la lecture de plans aux non initiés.

**Cotation :** La cotation regroupe l'ensemble des spécifications géométriques définissant la pièce. Bien sûr, les paramètres déclarés des esquisses en font partie. Ils peuvent être automatiquement intégrés, de manière équilibrée, à la mise en plan. À ce niveau il est encore possible de modifier la pièce en changeant la valeur des cotes. L'indépendance de ces paramètres, se rapproche du principe dit d'indépendance (cotation GPS). Cependant, la mise en forme définitive de la cotation demande encore un peu de travail (avec un éditeur DAO ou sur le calque aussi!).

**Fond de plan :** SolidWorks par défaut propose ses propres fonds de plan. Mais il est possible de les faire soi-même.

Il existe deux types de fond de plan :

- Le fond de plan statique, où il faut remplir à la main chacun des champs.
- Le fond de plan dynamique, où il se remplit automatiquement suivant les paramètres mis dans l'assemblage ou dans la pièce.

Des modèles sont proposés (équivalent du .dot de word).

**Nomenclature.** Le fichier assemblage contient chacune des pièces qui composent l'assemblage, on peut donc sortir de façon automatique la nomenclature appartenant à la maquette 3D.

**Les extensions des fichiers.** La simple ouverture d'un fichier dans une version ultérieure le rend inutilisable pour toutes versions antérieures. Vu leur très faible interopérabilité et le fait que leur contenu soit sauvé sans que l'on utilise la commande de sauvegarde, ces fichiers SolidWorks ne doivent pas être considérés comme des sauvegardes à long terme d'un contenu, mais comme une simple extension de la mémoire physique ayant la propriété de rémanence.

Chaque type de fichier possède une extension qui lui est propre. On retrouve :

**.sldprt**, pour les fichiers pièce.

**.sldasm**, pour les fichiers assemblage.

**.slddrw**, pour les fichiers plans.

**.sldprt**, pour les fichiers de fond de plan.

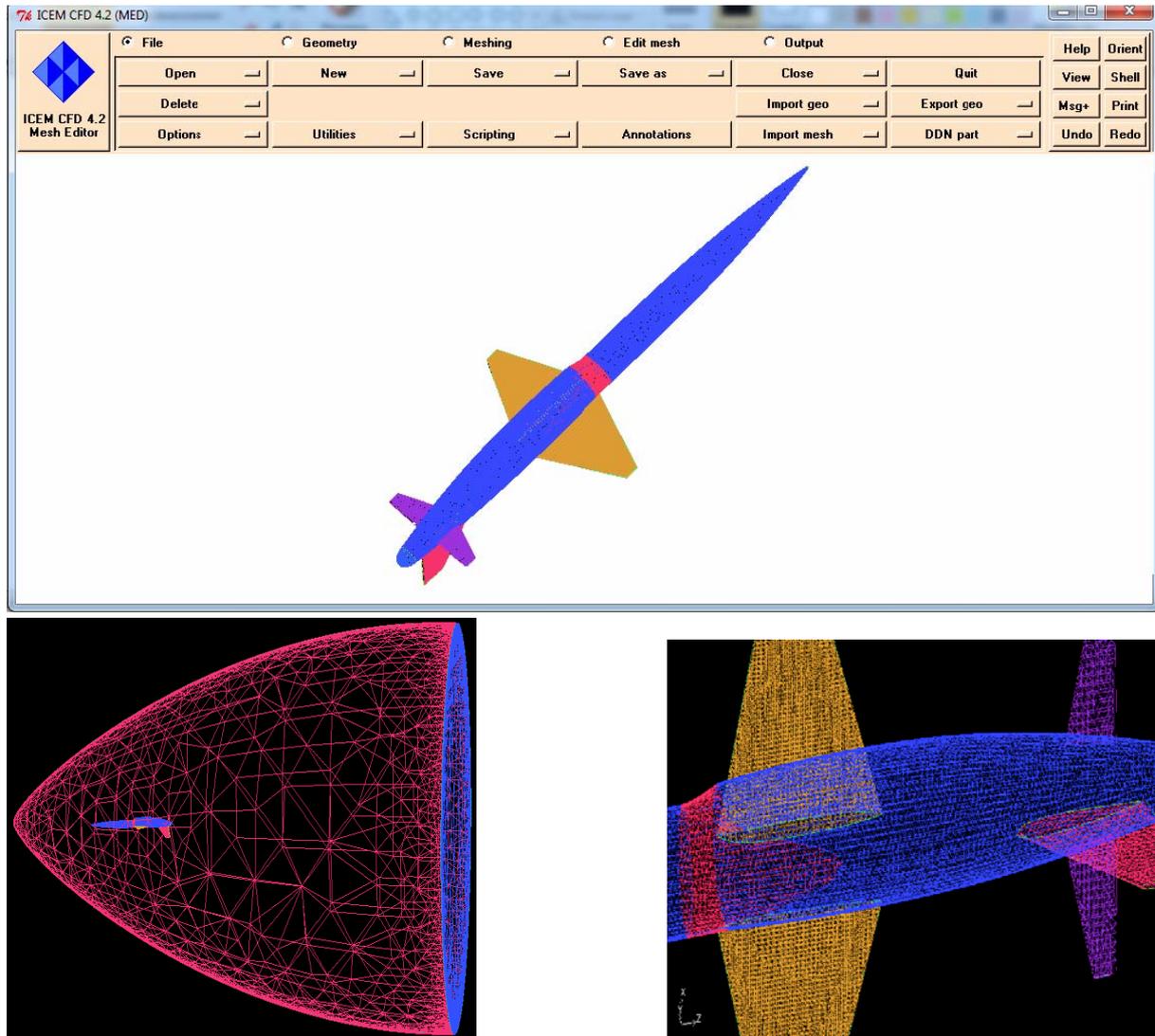
Certains formats proposés par le logiciel permettent d'envisager une sauvegarde à long terme.

## **V.2. Présentation du générateur de maillage ICEM-CFD :**

Lien puissant entre la CAO et l'analyse numérique, Ansys ICEM-CFD, offre des interfaces CAO, des outils géométriques, un générateur de maillages et des outils de post-traitement et d'optimisation. Destiné à la mécanique des fluides ou au calcul de structures, ce logiciel permet de créer des maillages hexaédriques (structurés ou non-structurés), tétraédriques, hybrides (combinaison de tous types de cellules), des maillages cartésiens, et de spécifier des conditions aux limites.

ICEM CFD offre des interfaces directes CAO (notamment Catia, Cadds5, ICEM surf, Pro E, Ideas, SolidWorks, SolidEdge...) permettant un transfert de la géométrie de l'un à l'autre des systèmes CAO.

Elle comprend plus de 100 interfaces, exportation du maillage vers les principaux codes CFD et FEA (Ansys, Abaqus, Fluent, Star-CD, CFX, Flotran...) ou d'autres codes CAE (codes d'électromagnétisme...), ainsi que des formats de sorties standard dont CGNS.



**Fig.5.3 :** Interface de ICEM – CFD.

### **V.3. Initiation à la simulation numérique par (Fluent/UNS) :**

La première opération consiste à importer le maillage dans Fluent/UNS sous la forme d'un nouveau cas (read case). Il est tout d'abord utile de savoir que le maillage peut être modifié dans le logiciel Fluent/UNS. On peut par exemple changer les dimensions et les unités de la géométrie (grid scale) avant d'initialiser la solution. Il est également possible de faire une adaptation du maillage (adapt) selon divers critères permettant de définir des régions à l'intérieur du domaine de calcul. L'adaptation du maillage n'est toutefois permise que sur la base d'une solution pour l'écoulement. Si l'on désire faire une adaptation sans effectuer un calcul détaillé de l'écoulement, on peut utiliser la solution obtenue après l'initialisation du problème à partir des conditions initiales.

Les essais de force du drone cible supersonique ont été réalisés dans le Langley tunnel transsonique de pression de 8 pieds pour déterminer la stabilité longitudinale et latérale et pour contrôler des caractéristiques aux vitesses transsoniques. Les essais ont été effectués sur

une portée de nombre de mach de 0.50 à 1.20 pour l'incidence de - 6 à 12° et à angle de dérapage de -4° avec 6°.

Les résultats des essais ont indiqué que le modèle était longitudinalement et latéralement stable par l'incidence, angle de dérapage, et de nombre de mach des essais. Les empennages horizontaux mobiles ont fourni le contrôle longitudinal efficace et leur fléchissement différentiel a fourni le contrôle latéral efficace pour la portée de contrôle de fléchissement des essais. Le gouvernail de direction a fourni le contrôle directionnel efficace, mais au nombre de mach le plus élevé d'essai de 1.20. Son efficacité a diminué approximativement à moitié de sa valeur subsonique. Pour les fléchissements de contrôle examinés, aucun problème d'interaction de contrôle n'a été indiqué excepté la possibilité que les moments des déviations (yawing moments) favorables ont produite par différentiel, la déflexion des empennages horizontaux serait désagréablement grande.

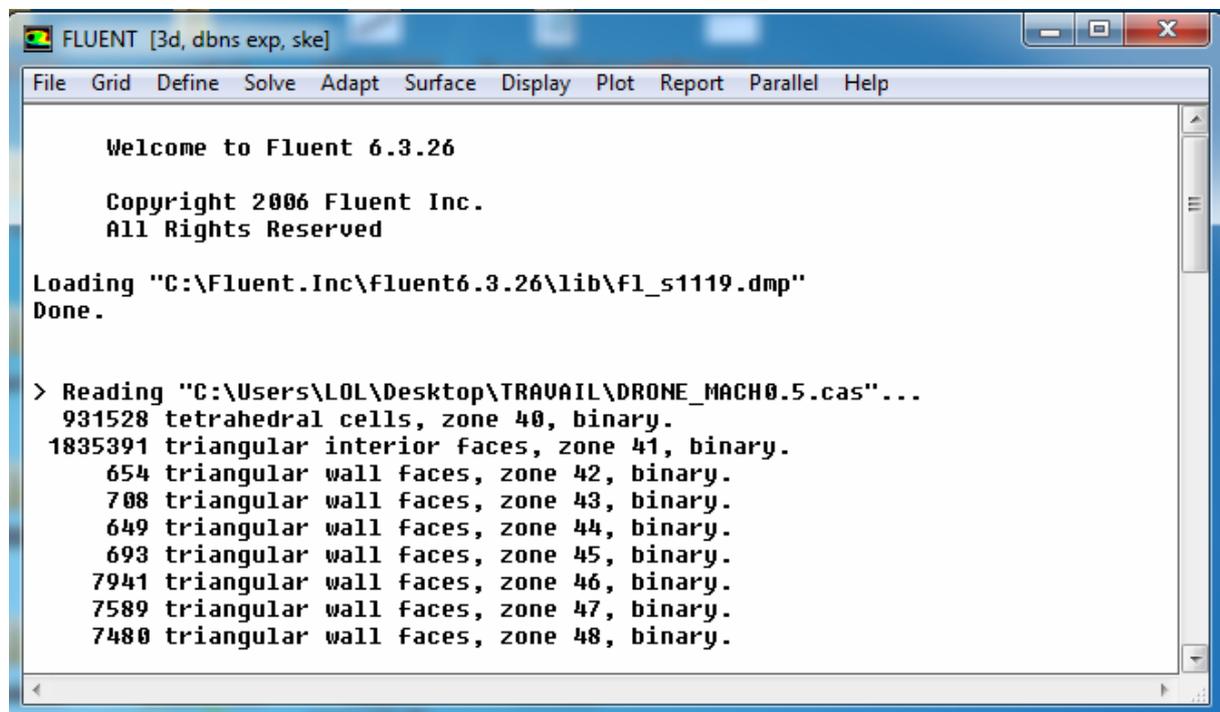


Fig.5.4 : Interface de FLUENT.

En ce qui concerne la définition du domaine de calcul en bidimensionnel, il est possible de choisir entre une configuration 2D et 2D-axisymétrique. Si cette dernière est activée, il est important de transformer les conditions aux limites de type "Symmetry" en type "Axis" pour éviter des problèmes lors du calcul de la solution.

On a mentionné précédemment que le maillage complet pouvait être composé des "sous-maillages" définis séparément et assemblés avec tfilter tmerge. Afin d'assurer la continuité entre les différents domaines (particulièrement au niveau du fluide) les options merge et fuse du menu Grid permettent de combiner (merge) ou de fusionner (fuse) certaines arêtes, faces ou blocs afin que l'ensemble du maillage soit correctement connecté. Ces opérations sont également utilisées avec des maillages hybrides pour lesquels il est nécessaire

de connecter les parties structurées et non-structurées. On fait généralement dans ce cas une fusion (fuse) des arêtes ou des faces se trouvant à l'interface entre les deux types de maillages.

Fluent/UNS propose deux modèles de turbulence à deux équations: un modèle standard et un modèle avec renormalisation. Si l'on désire imposer une transition dans l'écoulement, il faut choisir un modèle de turbulence pour l'ensemble du domaine et définir ensuite une région laminaire (laminar zone) dans laquelle le calcul turbulent ne sera pas activé. La création d'une telle zone se fait généralement en séparant la région laminaire du reste du domaine avec les menus Adapt (nécessite donc une solution initiale) et GridlSeparate/Cells, puis en activant l'option laminar zone dans les conditions aux limites du "sous-élément" fluide correspondant à la région laminaire.

On mentionne finalement à propos du calcul de la solution qu'il est préférable d'utiliser un schéma de discrétisation du deuxième ordre pour garantir une certaine précision dans les résultats. Le schéma de discrétisation utilisé dans Fluent par défaut étant du premier ordre, on suggère de modifier ce paramètre avant d'effectuer la simulation. La convergence du calcul est visualisée graphiquement au cours de la simulation.

Pour conclure, on note encore que la sauvegarde des cas et des solutions devrait toujours se faire en binaire (option binary à activer avant de sauvegarder), ceci afin de réduire la taille des fichiers (en particulier pour les calculs 3D). Il est également intéressant de noter que l'on peut sauvegarder les fichiers avec une extension **.cas.gz** ou **.cas.Z** (resp. **.dat.gz** ou **.dat.Z**) et ils seront automatiquement compressés par Fluent en format gzip ou compress. La décompression se fait aussi de manière automatique si l'extension est donnée lors de la lecture des fichiers.

### V.3.1 Conditions aux limites :

-Afin de définir un problème avec une solution unique, on doit fournir des informations sur les variables aux frontières du domaine.

- Spécifier les flux de masse, quantité de mouvement, énergie, etc. dans le domaine.

-Définir les conditions aux limites implique:

- Identifier la position des frontières (e.g. entrées, parois, symétrie)
- Donner les informations sur ces frontières

-Les données dépendent du type de conditions aux limites et des modèles employés.

-Vous devez connaître l'information nécessaire aux frontières et positionner ces frontières où l'information est connue ou peut être correctement approchée.

- Des mauvaises conditions aux limites ont un impact négatif sur les résultats.

-Types de conditions limites pour les *External Faces*

- **General**: Pressure inlet, Pressure outlet
- **Incompressible**: Velocity inlet, Outflow

- **Compressible flows:** Mass flow inlet, Pressure far-field
- **Special:** Inlet vent, outlet vent, intake fan, exhaust fan
- **Other:** Wall, Symmetry, Periodic, Axis

-Types de conditions limites pour les *Cell 'Boundaries'*

- Fluide et Solide

-Types de conditions aux limites *Double-Sided Face 'Boundaries'*

- Fan, Interior, Porous Jump, Radiator, Walls

-Voici quelques définitions concernant les conditions aux limites

- Condition 'velocity inlet' : la vitesse à l'entrée du domaine.
- Condition 'pressure outlet' : la pression totale à la sortie du domaine.
- Condition 'symmetry' : les gradients normaux et la vitesse normale au plan de symétrie sont nuls.
- Condition 'wall' : condition de paroi solide.
- Condition 'interior' : Condition de paroi perméable.
- Condition 'periodic'.

Les conditions aux limites sont spécifiées en général dans le solveur, cependant l'utilisation de la condition type 'periodic' doit nécessairement être définie à l'étape de génération du maillage dans ICEMCFD.

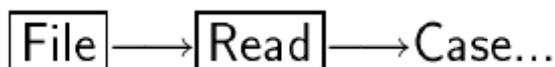
### **V.3.2. Calcul de l'écoulement autour du drone en utilisant FLUENT/UNS :**

a) **Préparation :** avant de commencer le calcul, il faut avoir les fichiers suivants :

- Le fichier du maillage **drone.msh.gz**

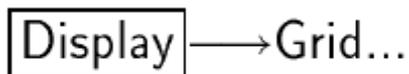
b) **Maillage :**

1. Lire le fichier du maillage du drone :



Importer le fichier **drone.msh.gz** dans **Files**.

2. Afficher le maillage.



a) Définir les conditions aux limites.



b) Sélectionner **Entre Surface** dans **Zone**. Cliquer sur **Set...** pour ouvrir le panneau **Velocity-Inlet**. Spécifier **Velocity Magnitude** sur la valeur de 20 m/s dans la direction positive des X. cliquer sur OK pour sortir.

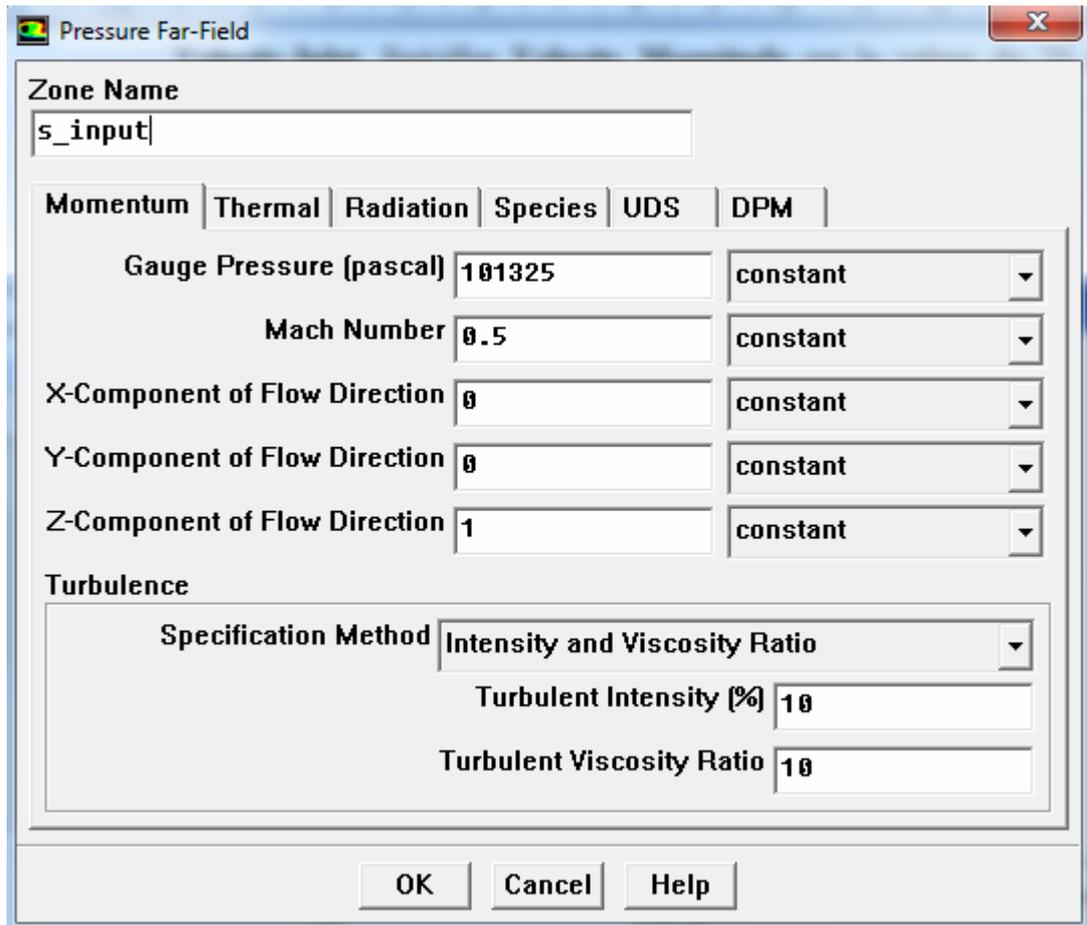


Fig.5.5 : Boundary Conditions

Spécifier **Udfxmom\_scr** comme une fonction source en le sélectionnant dans la liste **X Momentum**. De même, sélectionner **Udfymom\_scr** dans **Y Momentum** et **Udfzmom\_scr** dans **Z Momentum**.

### V.3.3. Solution :

1. Initialiser le domaine de l'écoulement en utilisant les conditions aux limites définies dans **Entree Surface**.

2. Réduire le facteur de relaxation à 0,3

**Solve** → **Control** → Underrelaxation....

3. Activer l'affichage des résidus durant le calcul, pour cela sélectionner **Plot** dans **Options** et valider par **OK**.

**Solve** → **Monitors** → Residual...

4. Activer l'affichage de la force de portance sur le fuselage du drone.

**Solve** → **Monitors** → Force...

5. Etablir les valeurs de référence qui seront utilisées pour le calcul des coefficients de portance et de pression.

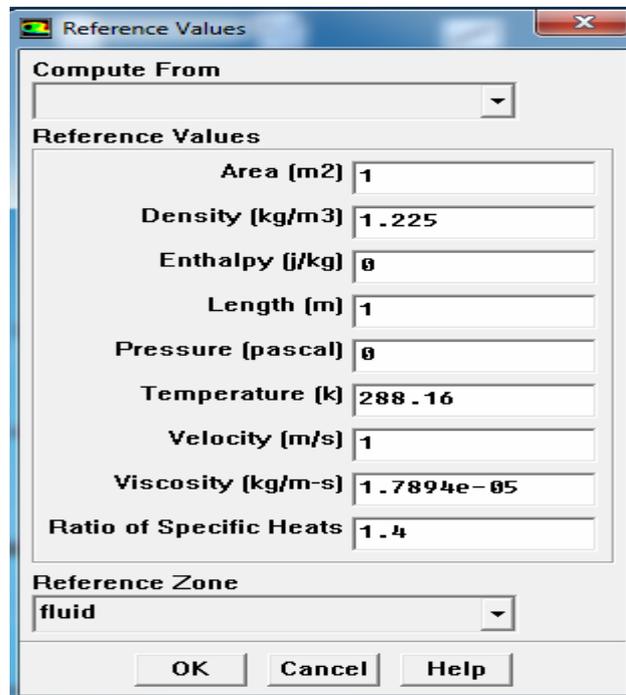
**Report** → **Reference...**

(a) Sélectionner **EntreeSurface** dans la liste de **Compute From**.

(b) Etablir la longueur **Length** de 1 m.

(c) Etablir la surface **Area** de 1 m<sup>2</sup>

Cliquer sur **OK** pour sauvegarder et quitter le panneau **Reference Values**.



**Fig.5.6** : Valeurs de référence.

6. Sauvegarder le fichier **drone.case.gz**.

**File** → **Write** → **Case&Data...**

7. Effectuer 4000 itérations.

**Solve** → **iterate...**

Entrer 4000 itérations dans **Number of Iteration** et cliquer sur **Iterate**.

Quand le solveur commence les itérations, l'affichage des résidus et de la portance sera montré. Si, vers la fin du calcul, la solution n'a pas encore convergé, on peut lancer de plus 4000 à 6000 itérations. Et si on remarque qu'il y a une diminution des résidus, et un tout petit changement dans la force de portance, donc la solution a convergé.

8. Enregistrer le fichier des données **drone.dat.gz**.

**File** → **Write** → **Data...**

**V.3.4. Présentation des résultats de calcul :**

1. Créer un plan à  $y = 0$  pour l'affichage des champs et des vecteurs.

**Surface** → Iso-Surface...

Sélectionner **Grid...** et **Y-Coordinate** dans la liste de **Surface of Constant** du panneau **Iso-Surface**. Spécifier le nom de la surface  $y = 0$  dans le domaine **New Surface Name**. Cliquer sur **Create** pour créer la surface  $y = 0$ .

2. Afficher le champ de la pression statique.

**Display** → Contours...

Sélectionner **Pressure...** et ensuite **Static Pressure** dans les listes de **Contours Of**. Sélectionner **Filled** dans **Options**. Sélectionner  $y = 0$  à partir de la liste de **Surfaces**. Cliquer sur **Display** pour afficher le champ de pression dans le plan de symétrie.

Il est préférable de sélectionner le fuselage pour voir la distribution de la pression autour du fuselage.

3. Afficher le champ de la vitesse. Sélectionner **Velocity...** et ensuite **Z-Velocity** dans les listes de **Contours Of**. Sélectionner **Filled** dans **Options**. Sélectionner la surface du drone dans la liste de **Surfaces**. Cliquer sur **Display** pour voir les distributions du vecteur vitesse dans la direction des coordonnées  $z$ .

Pour quitter le panneau **Contours**, cliquer sur **Close**.

4. Afficher le champ de pression statique sur le drone

Sélectionner **pressure...** et ensuite **Static pressure** dans les listes de **Contours Of**. Sélectionner **Filled** dans **Options**. Cliquer sur **Display** pour voir la distribution du champ de pression statique.

5. Afficher les vecteurs vitesses

**Display** → Velocity Vectors...

6. Calculer les forces s'exerçant sur le drone.

**Report** → **Forces**

Cliquer sur **Report** puis **Forces** pour obtenir les forces et coefficients de pression et de viscosité ainsi que les moments de ces derniers, les résultats sont représentés sous forme de tableau, par la figure suivante :

FLUENT [3d, dbns exp, ske]

File Grid Define Solve Adapt Surface Display Plot Report Parallel Help

Force vector: (1 0 0)

zone name	pressure force n	viscous force n	total force n	pressure coefficient	viscous coefficient	total coefficient
s_extra_emp_h_d	97892.578	-4363.834	93528.744	159824.62	-7124.6269	152699.99
s_intra_emp_h_d	-11629940	-3444.271	-11633384	-18987657	-5623.2996	-18993280
s_extra_emp_h_g	-425545.13	4975.3257	-420569.8	-694767.55	8122.9807	-686644.57
s_intra_emp_h_g	11574873	3433.7969	11578307	18897752	5606.199	18903358
s_intar_aile_d	-39845076	771.27295	-39844305	-65053185	1259.2211	-65051926
s_extra_aile_d	-23447156	1129.4597	-23446027	-38281071	1844.0159	-38279227
s_extra_aile_g	23444888	-1813.8173	23443074	38277368	-2961.3343	38274407
s_intra_aile_g	39595628	-512.32452	39595116	64645923	-836.4482	64645087
s_intra_emp_u	-9.1223142e+08	-744.98621	-9.1223217e+08	-1.4893574e+09	-1216.304	-1.4893586e+09
s_extra_emp_u	9.1175443e+08	1539.0769	9.1175597e+08	1.4885787e+09	2512.7786	1.4885812e+09
s_fuselage	3435910.3	565.85687	3436476.1	5609649.4	923.84796	5610573.2
s_cabine	-700627.56	194.42484	-700433.14	-1143881.7	317.4283	-1143564.3
s_nez	-1881.7671	3.6584263	-1878.1087	-3072.2728	5.9729409	-3066.2999
s_queue	-130619.43	219.13821	-130400.29	-213256.21	357.77668	-212898.44
s_tipe_aile	2934.2087	-0.013711567	2934.195	4790.5449	-0.022386232	4790.5225
s_bf	-19576.566	-15.310662	-19591.877	-31961.741	-24.997	-31986.738
s_tipe_emp_u	162.92902	21.831144	184.76016	266.00656	35.642685	301.64924
s_tip_emp_h	3284.4116	0.00084989273	3284.4125	5362.3047	0.00138758	5362.3061
net	1478158.9	1959.2851	1480118.2	2413320.7	3198.8329	2416519.5

Fig.5.7: Forces et moments de pression et de viscosité appliqués sur le drone.

V.3.5. Simulation numérique :

1ère cas : (M=0.5,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ )

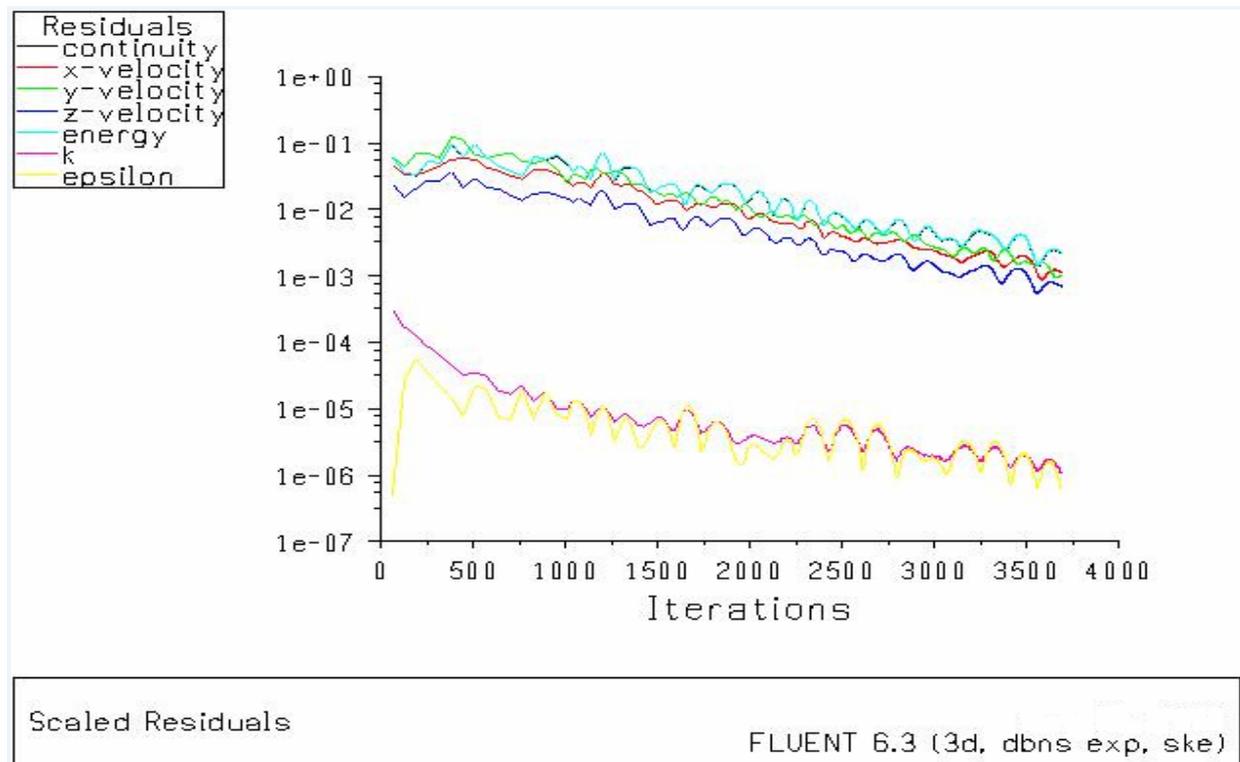
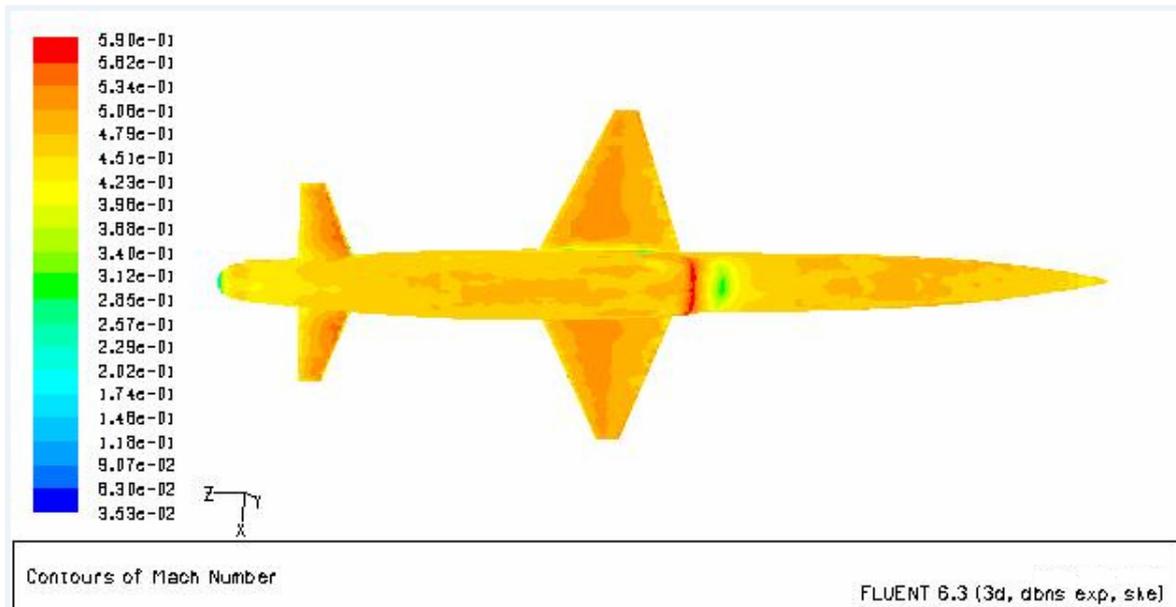


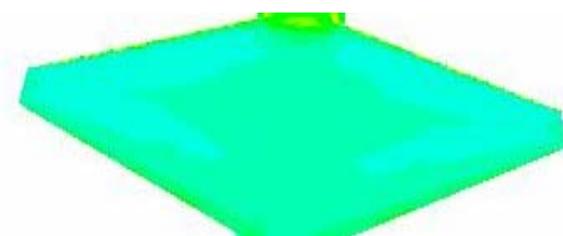
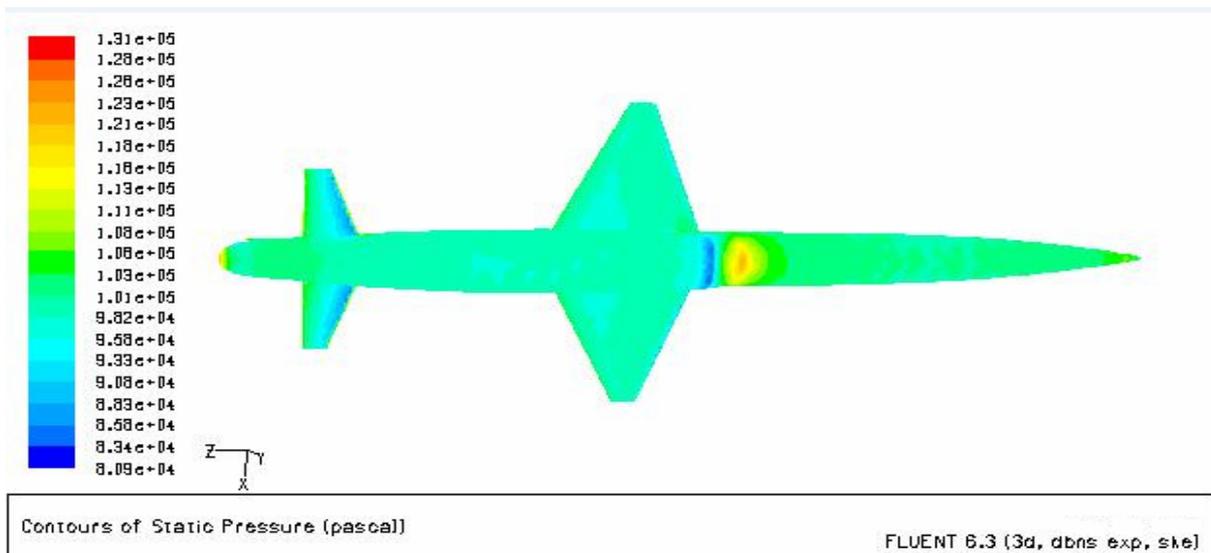
Fig.5.8a : Résidus du cas test de Fluent (M=0.5,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).

4000 itérations ont été suffisantes pour atteindre la convergence, une décroissance de l'ordre 3 en magnitude de l'équation de continuité, 6 pour la vitesse suivant Z,

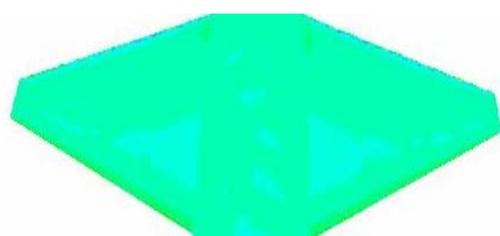
néanmoins les vitesse X, Y sont de l'ordre 7, ce qui nous donne une très bonne convergence.



**Fig.5.8 b :** Champ de vitesse sur le drone ( $M=0.5$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).



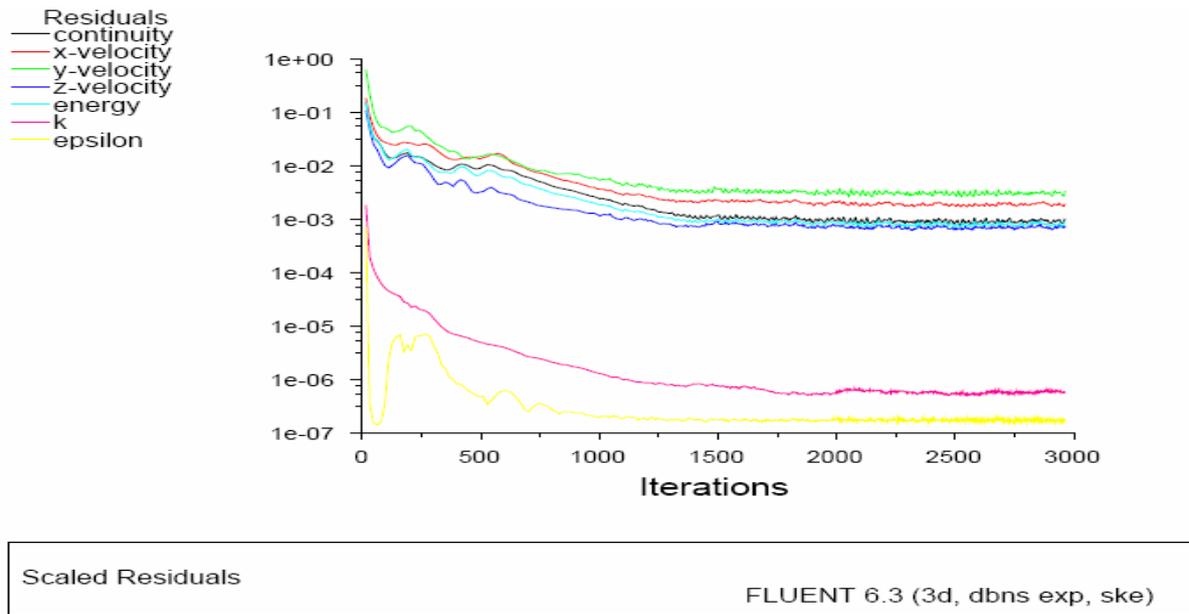
**Intrados :**



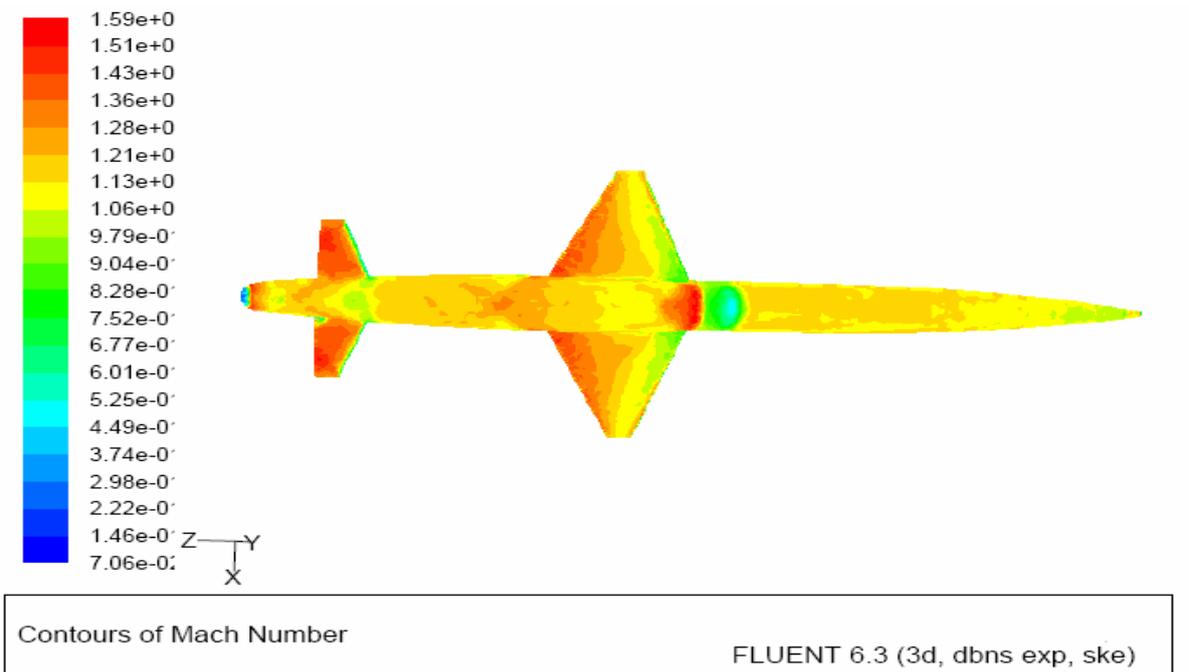
**Extrados :**

**Fig.5.8 c :** Champ de pression statique sur le drone ( $M=0.5$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).

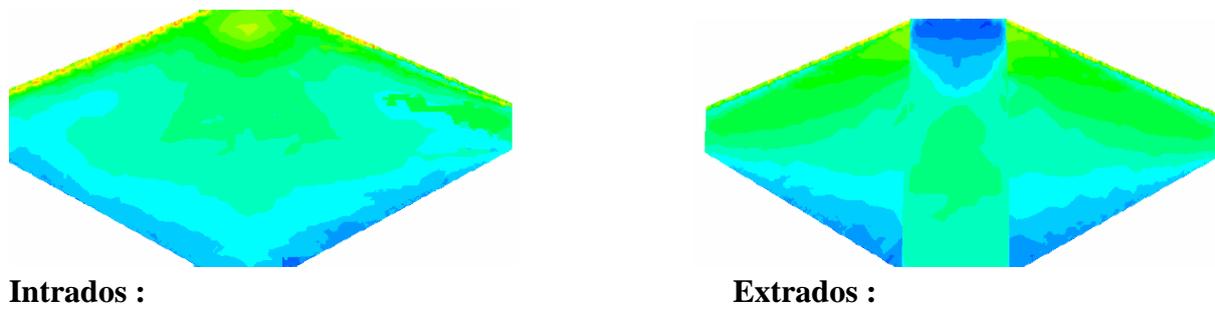
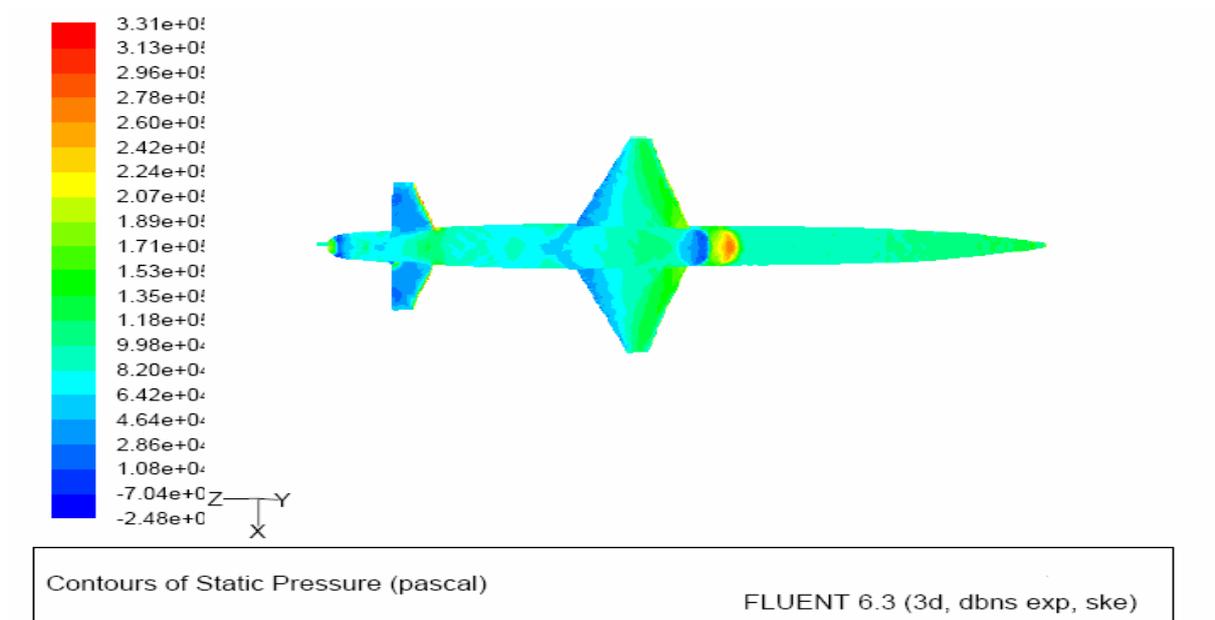
**2<sup>ème</sup> cas :** ( $M=1.2$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).



**Fig.5.9 a :** Résidus du cas test de Fluent ( $M=1.2$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).

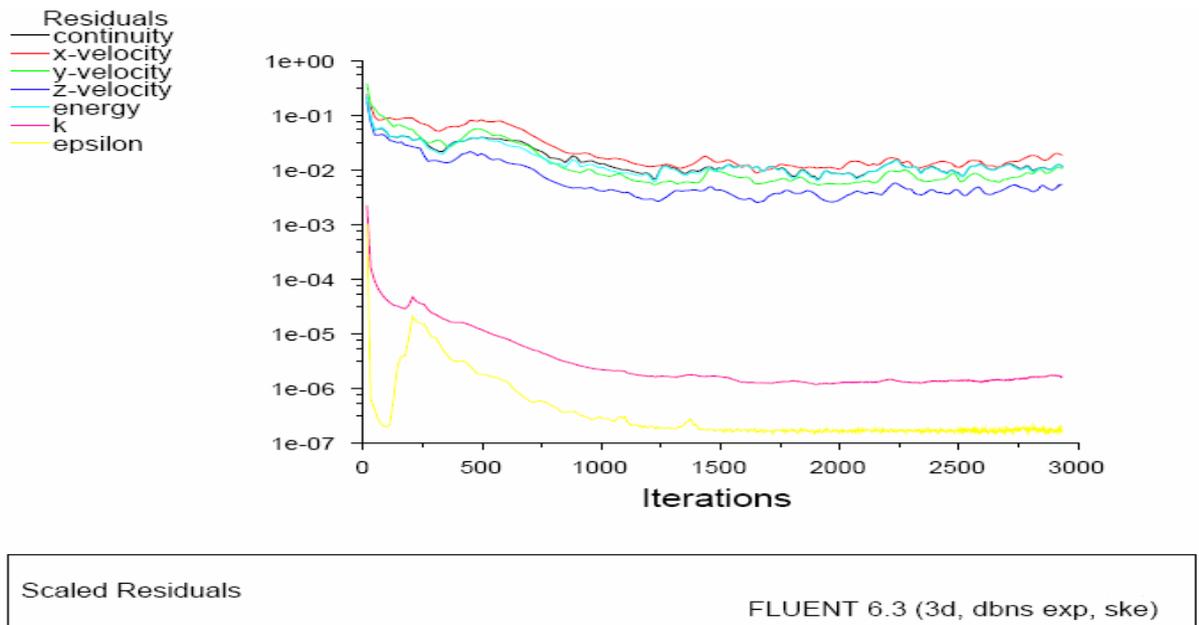


**Fig.5.9 b :** Champ de vitesse sur le drone ( $M=1.2$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).

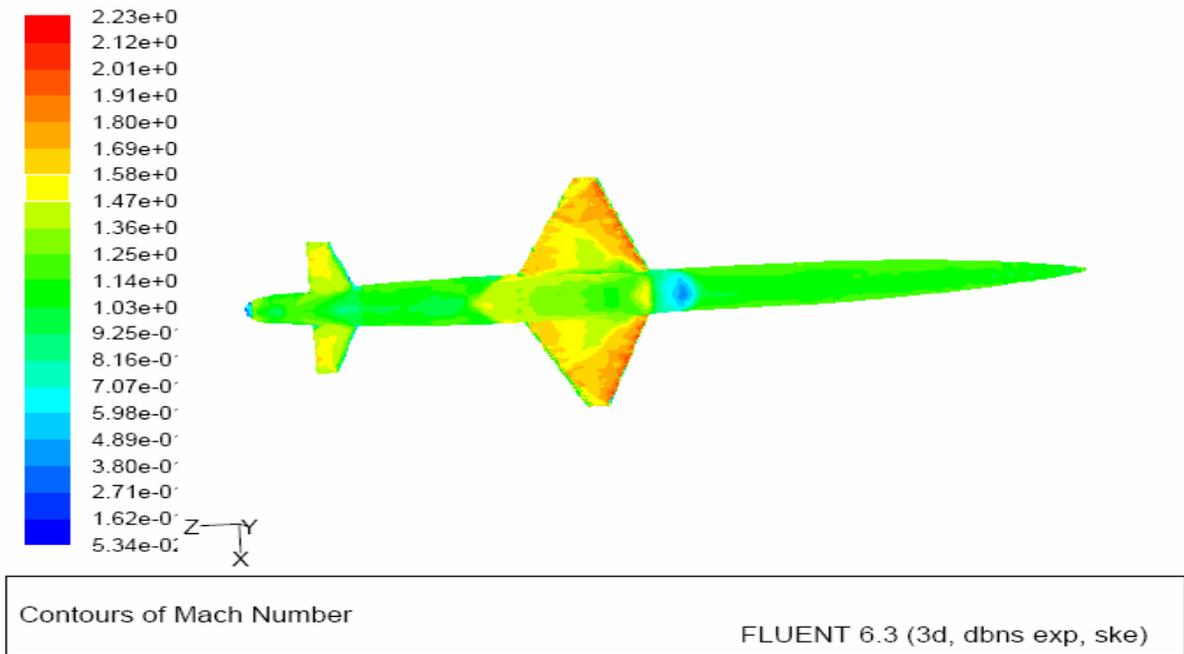


**Fig.5.9 c :** Champ de pression statique sur le drone ( $M= 1.2, \alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ ).

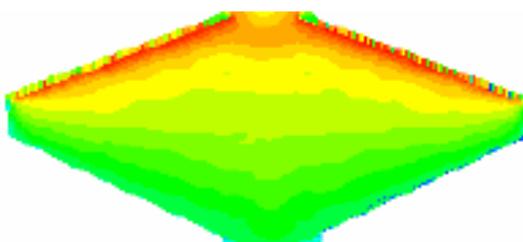
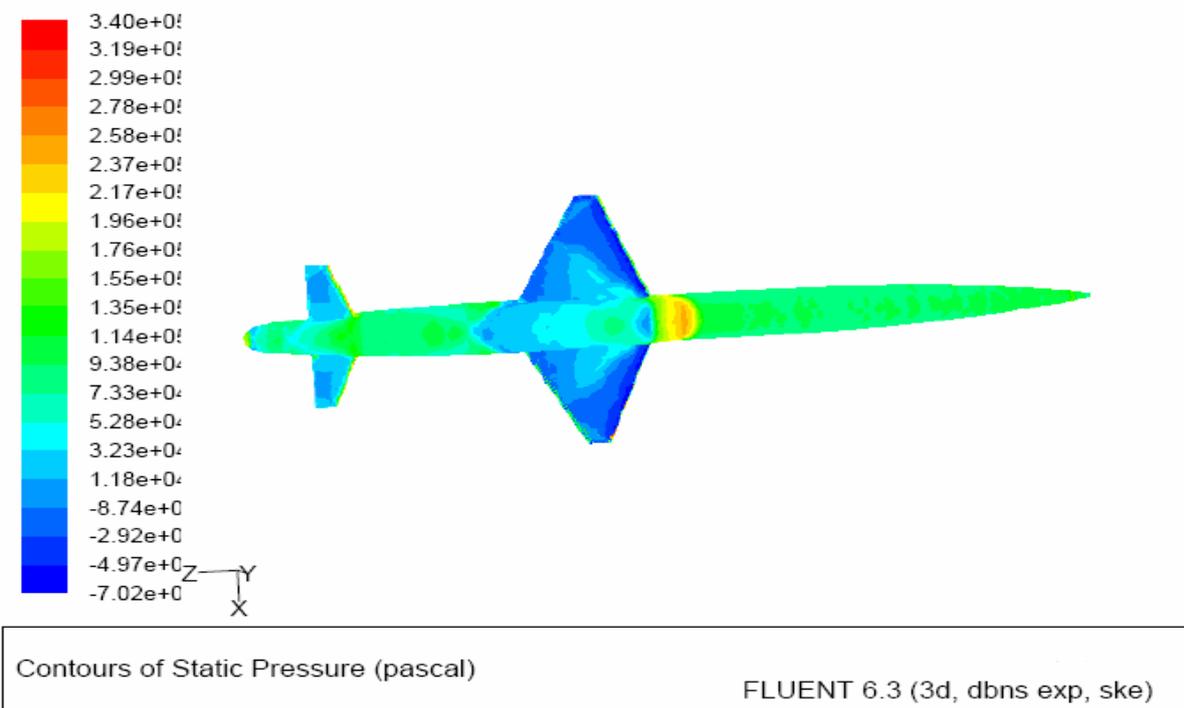
**3ème cas :** ( $M=1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ ).



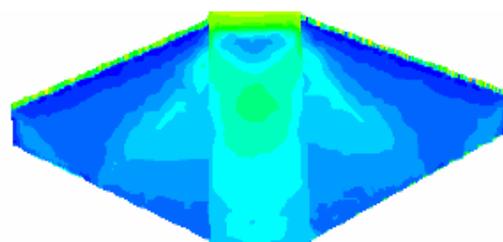
**Fig.5.10 a :** Résidus du cas test de Fluent ( $M=1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ ).



**Fig.5.10 b :** Champ de vitesse sur le drone ( $M=1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ ).



**Intrados :**



**Extrados :**

**Fig.5.10 c :** Champ de pression statique sur le drone ( $M= 1.2, \alpha = 12^\circ, \beta = 0^\circ$ ).

La variation dans la distribution de la vitesse et de la pression statique sur le drone est due à la variation des charges aérodynamiques d'une position quelconque.

La couleur dominante montre une distribution stable de vitesse sur le drone, par contre la couleur verte prouve une décélération au niveau de la cabine, cela est dû au changement de la géométrie. L'air passe de point d'arrêt vers un champ libre, ou tout simplement par une surface de glissement : c'est la couleur rouge. Enfin, au niveau de la queue du drone, on remarque une zone de recirculation.

Nous allons interpréter de la même manière en ce qui concerne le champ de pression, mais tout en nous basant au théorème de Bernoulli qui dit que la vitesse et la pression sont inversement proportionnelles.

Aussi, en faisant varier l'angle d'incidence et le nombre de Mach (voir fig.5.10.c), nous remarquons très clairement qu'il y a une surpression sous l'intrados et une dépression sur l'extrados ; ce qui est à l'origine de la portance.



**Fig.5.11** : Vecteurs vitesses dans le plan de symétrie du cas test.

Cette figure montre la direction du vecteur vitesse au voisinage du drone d'où l'écoulement suit la géométrie du drone fidèlement.

**V.4. Application sur le modèle - type :**

A l'aide du MATLAB, on va analyser toutes les réponses aux commandes dans les mouvements longitudinal et latéral numériquement, et graphiquement.

**V.4.1. Système longitudinal [8], [23] :**

Vol horizontal stabilisé (H=26000 ft, M=0.8).

**A. Caractéristiques :**

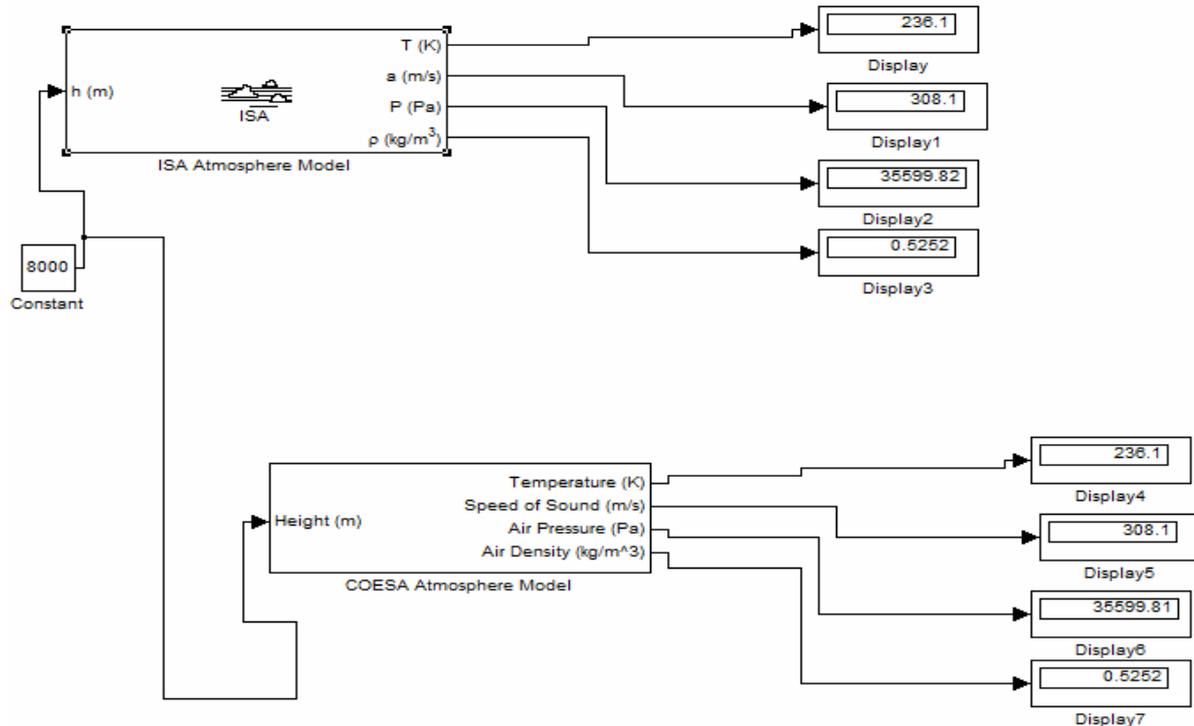
Les paramètres représentatifs de ce cas sont rassemblés ci-dessus :

Dimension, masse et inertie.

- Densité =  $2.8e+003 \text{ kg/m}^3$
- Masse = 8.75 kg
- Volume =  $0.00312 \text{ m}^3$
- Superficie =  $0.273 \text{ m}^2$
- P = 0.88057 N

- |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $I_{xx} = 3.4$       | $I_{xy} = 4.28e-008$ | $I_{xz} = -0.000512$ |
| $I_{yx} = 4.28e-008$ | $I_{yy} = 3.4$       | $I_{yz} = 0.0466$    |
| $I_{zx} = -0.000512$ | $I_{zy} = 0.0466$    | $I_{zz} = 0.00837$   |

**B. Condition de vol :**



**Fig.5.12 :** Interface donnant les conditions de vol.

Tableau.5.1: Exactitude des coefficients.

$C_L$	$C_D$	$C_m$	$C_l$	$C_n$	$C_Y$
$\pm 0.030$	$\pm 0.003$	$\pm 0.016$	$\pm 0.001$	$\pm 0.001$	$\pm 0.004$

### C. Matrice du système et équation caractéristique :

La matrice de système longitudinal est :

$$A = \begin{bmatrix} 3.4, & 4.28e-008, & 0, & -0.000512; \\ 4.28e-008, & 3.4, & 0.0466, & 0; \\ -0.000512, & 0.0466, & 0.00837, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

On en tire l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 - 1.0000\lambda^3 - 6.8084\lambda^2 + 11.6147\lambda - 0.0894 - 0.0000 = 0$$

#### 1. Les deux critères de stabilité de Routh :

$E = -1.2216e-008 < 0$  et  $R = 7.0595 > 0$ . Donc, l'un de deux modes est instable.

#### 2. Valeurs propres :

Les valeurs propres de la matrice A sont aussi les deux paires racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique :

Mode 1(phugoïde):  $\lambda_{1,2} = 3.40e+000$

Mode 2(short-period):  $\lambda_3 = 7.73e-00$

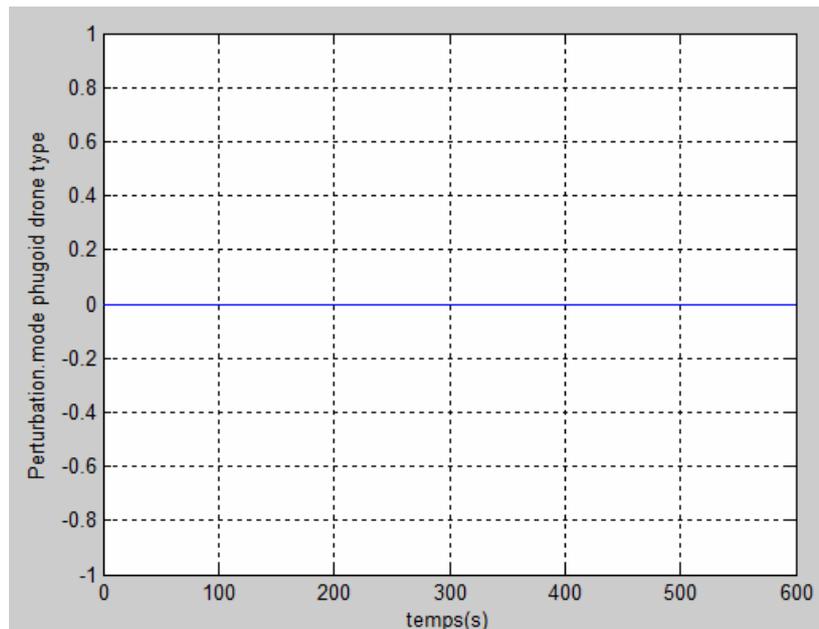
$\lambda_4 = -1.37e-007$

Il s'agit de deux modes oscillatoires amortis, l'un de grande période faiblement amorti et l'autre de faible période fortement amorti, identifiés par les dénominations conventionnelles indiquées.

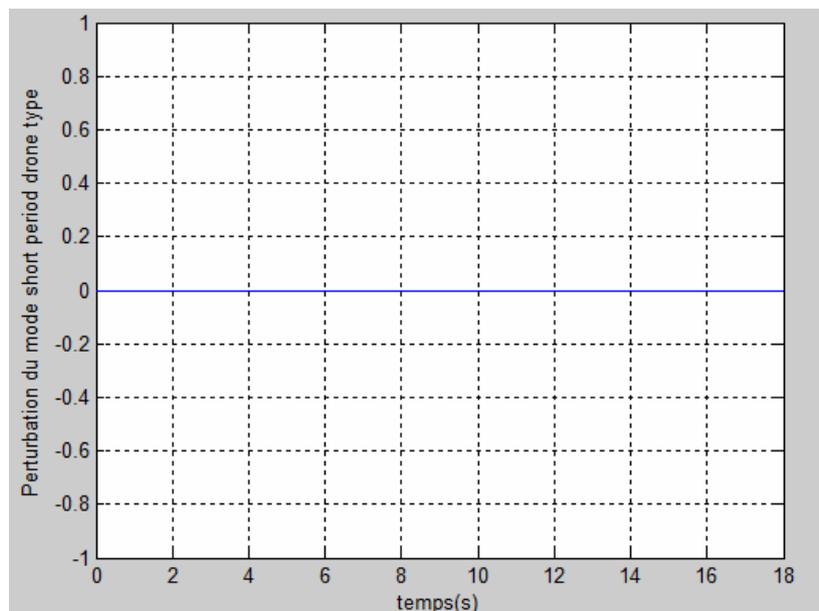
Leurs paramètres caractéristiques sont donnés au tableau (5.2), et le comportement transitoire correspondant est représenté à la Fig.5.13 et Fig.5.14.

Tableau 5.2 : Caractéristiques des modes longitudinaux du drone.

Mode	Dénomination	T(s)	$T_{1/2}(s)$	$N_{moitié}(s)$	S	Pulsation $\omega$	Facteur d'amortissement $\zeta$
1	Phugoïde	812.8325	- 89.6699	-0.1103	- 6.2832	3.40e+000	-1.00e+000
2	Short-period	1.8480	- 0.2039	-0.1103	- 6.2832	7.73e-003 -1.37e-007	-1.00e+000 1.00e+000



**Fig.5.13:** Comportement transitoire du mode Phugoïde.



**Fig.5.14:** Comportement transitoire du mode Short-period.

Nous constatons que pour les deux modes (Phugoïde et Short-period) il n'y a pas de perturbation, alors notre drone présente un comportement stable.

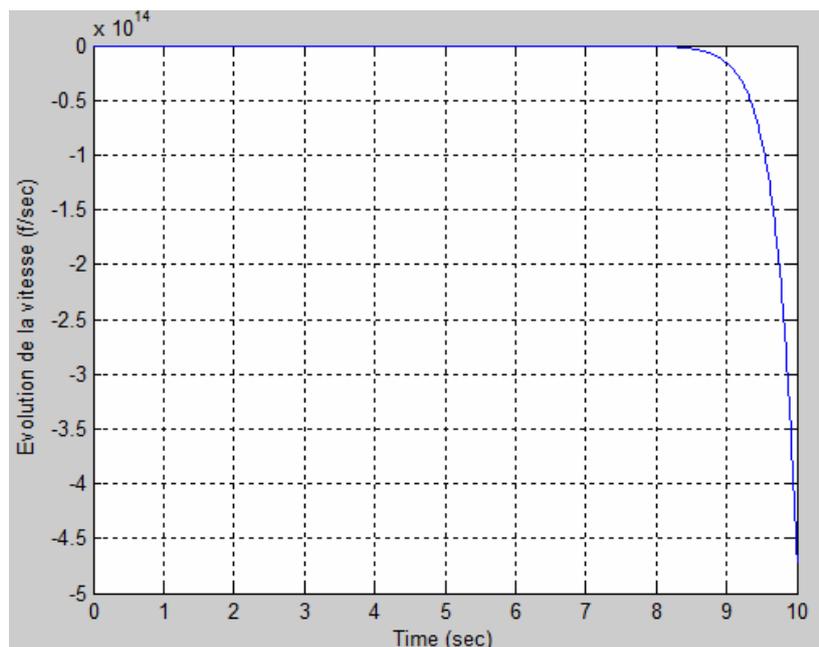
#### **V.4.1.1. Réponse à un échelon d'angle de gouverne :**

On a représenté aux figures (5.15), (5.16), (5.17), (5.18), (5.19) les évolutions de la vitesse, de l'incidence et de la pente de la trajectoire consécutives à un échelon d'un degré d'angle de gouverne de profondeur  $\Delta\delta_e = 1^\circ$ .

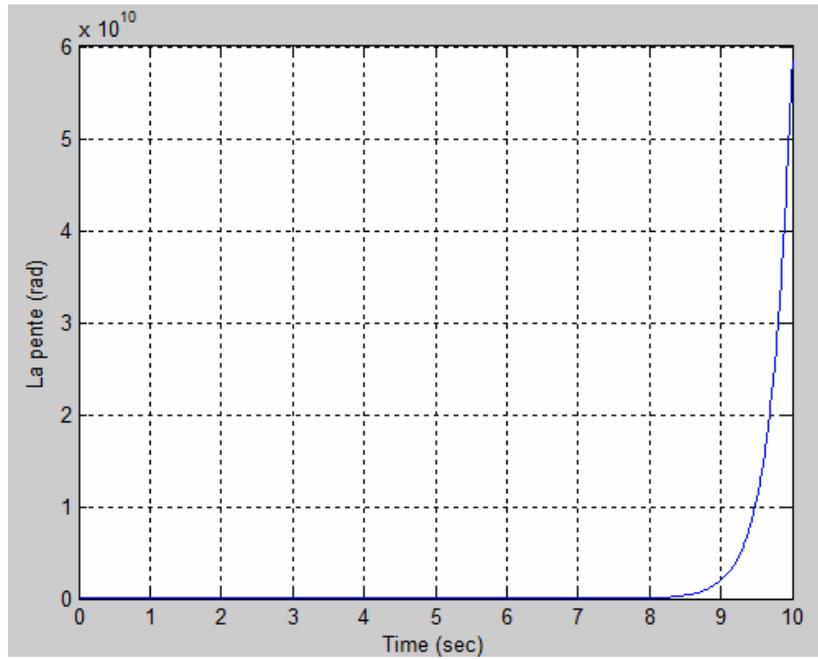
On observe aux figure (5.16.A), (5.17.A), (5.18.A), qui montrent les 10 premières secondes de la réponse, que seul l'angle d'incidence répond rapidement au déplacement de la gouverne, et que son évolution est dominée par le mode bien amorti.

Au contraire, les variables de trajectoire (vitesse et pente) répondent beaucoup plus lentement. On observe aux figures (5.16.B), (5.17.B), (5.18.B), qui présentent l'évolution des variables sur une durée de 10 minutes, que les transitoires persistent très longtemps, et qu'après quelques secondes, c'est le mode phugoïde qui domine l'évolution.

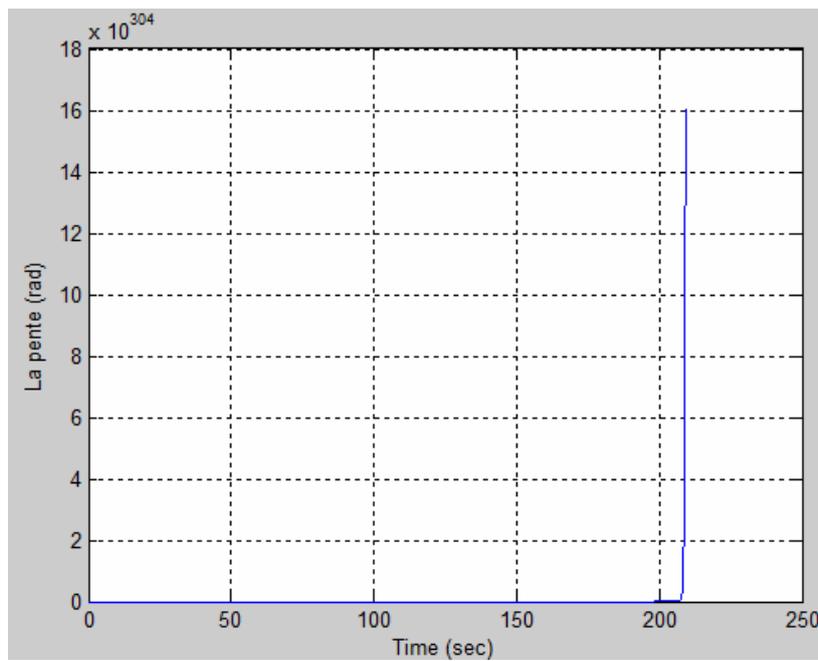
L'état de régime approché si lentement se caractérise par une vitesse plus élevée, correspondant à la diminution d'incidence attendue comme suite au braquage vers le bas de la gouverne. La pente de la trajectoire change à peine (augmentation d'environ  $0,1^\circ$ ). L'augmentation s'explique par le fait que le vol de départ est à une vitesse inférieure à la vitesse de traînée minimale. Si l'objectif du braquage de la gouverne était de modifier les conditions de vol, on ne peut pas dire que la manœuvre soit une réussite. Manifestement, un guidage longitudinal satisfaisant exige une manœuvre un peu plus sophistiquée.



**Fig.5.15:** Evolution de la vitesse.

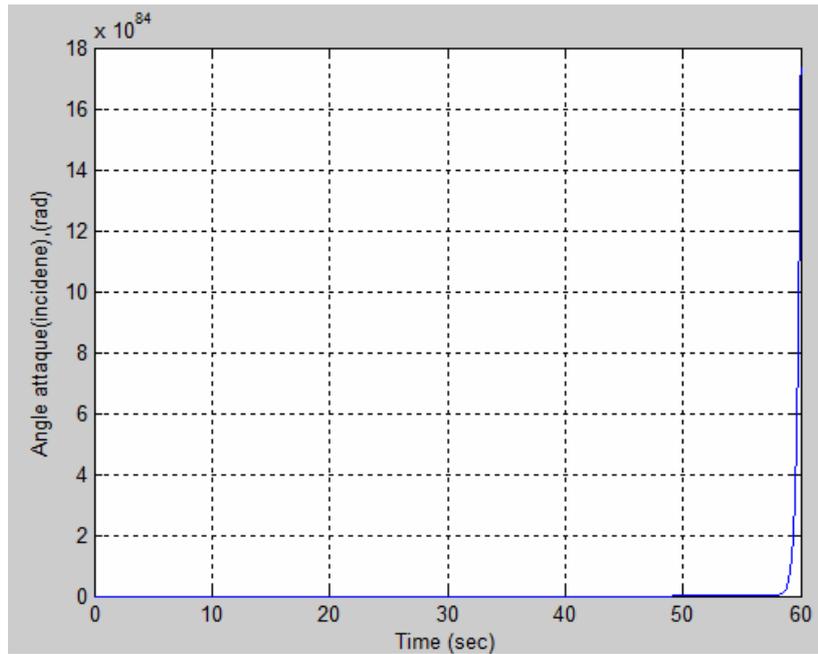


(A)

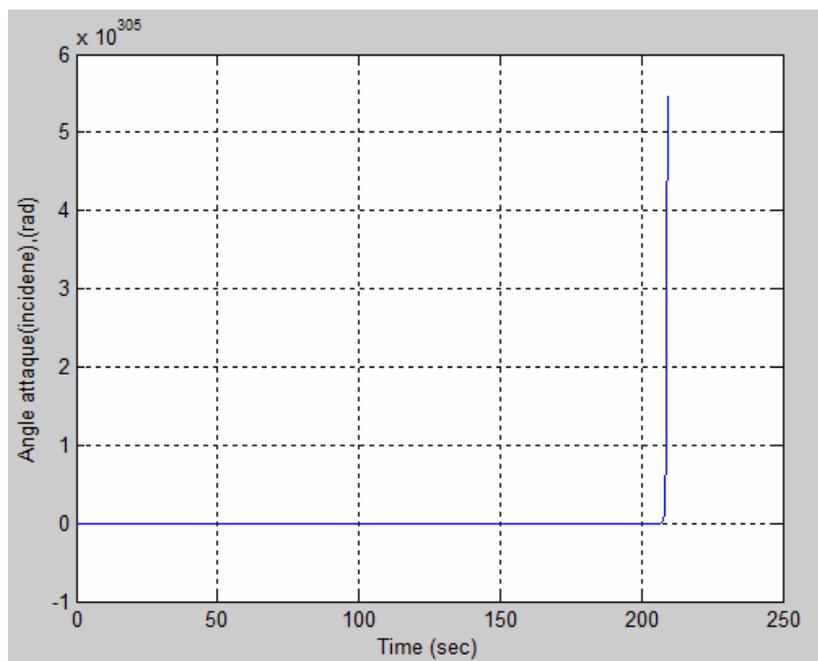


(B)

**Fig.5.16:** Variation de la pente.

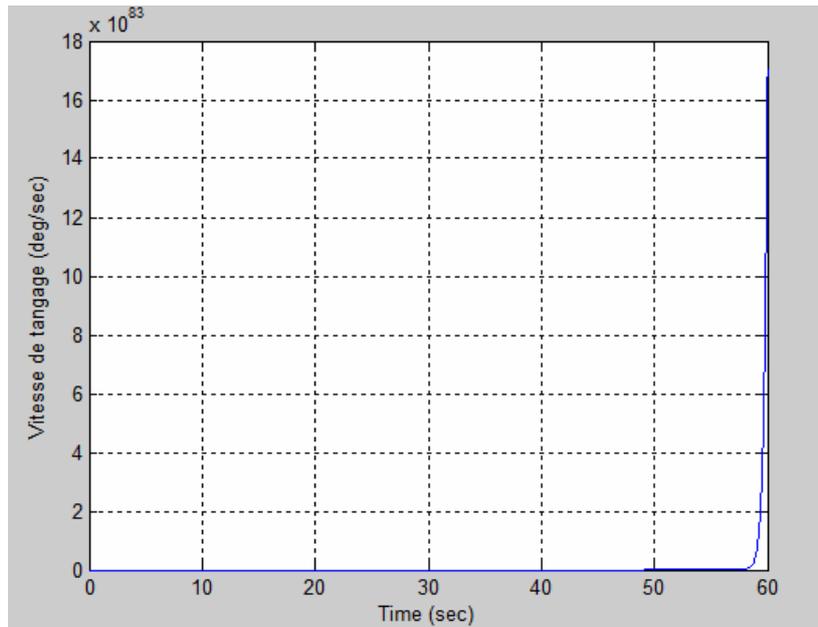


(A)

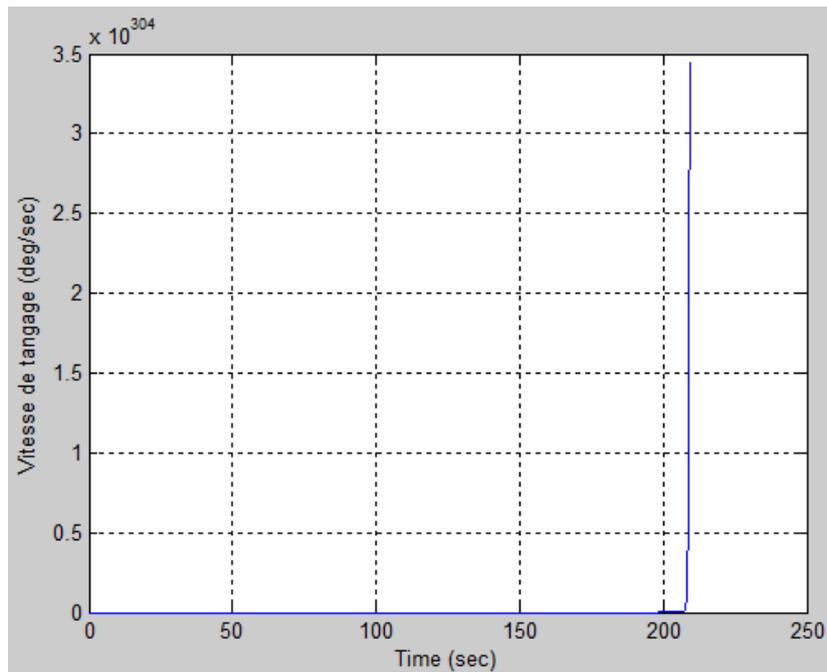


(B)

**Fig.5.17** : Variation d'angle d'attaque.

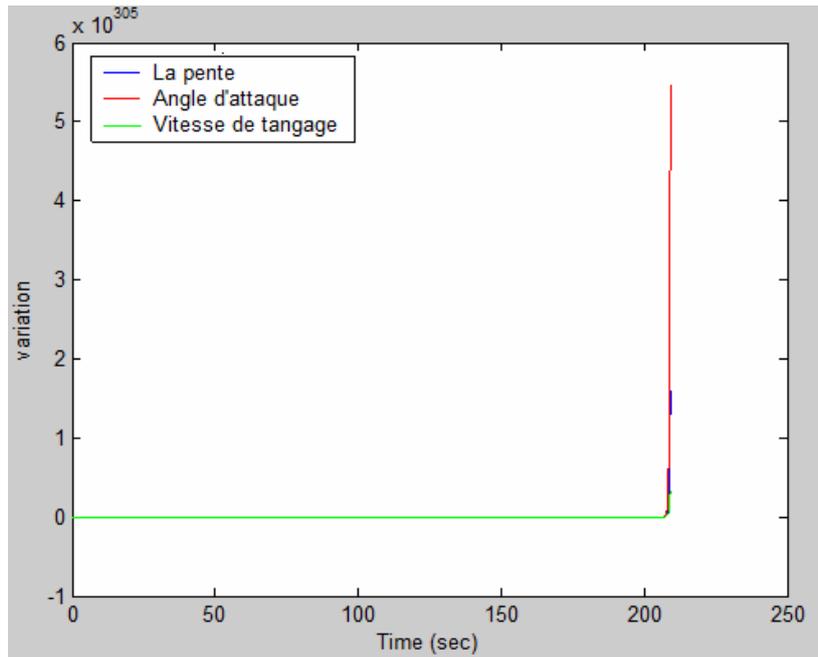


(A)



(B)

**Fig.5.18:** Variation de la vitesse de tangage.



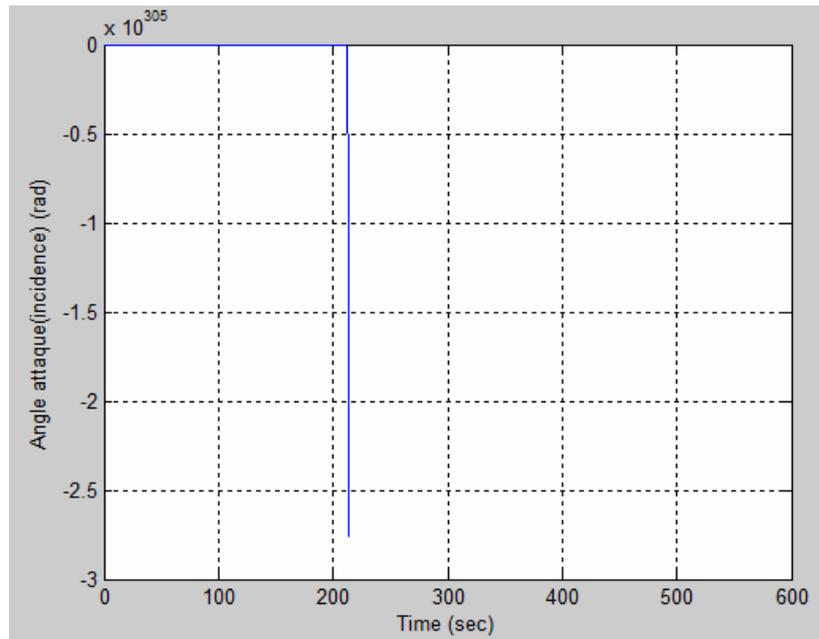
**Fig.5.19:** Réponse à un échelon d'angle de gouverne de profondeur  $\Delta\delta_e = 1^\circ$ .

#### **V.4.1.2. Réponse à la commande de poussée : ( $\Pi = 1/6$ ) :**

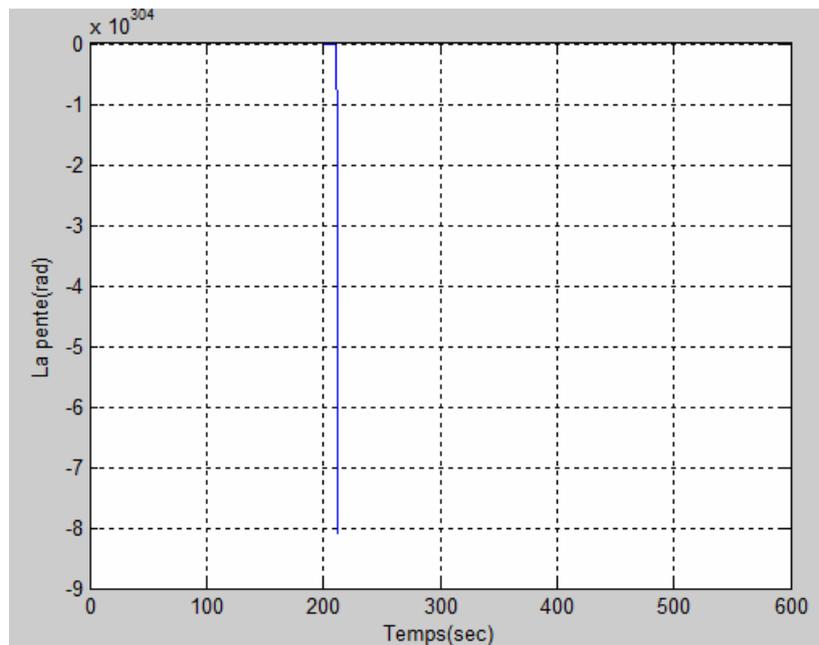
La réponse du drone à un échelon de poussée : les résultats sont représentés aux figures (5.20), (5.21), (5.22), (5.23), (5.24). Comme le modèle suppose une réponse immédiate des moteurs, les résultats ne sont pas valides pour les premières secondes.

De toute façon, cette phase ne présente pas beaucoup d'intérêt dans ce cas car le mouvement est clairement dominé par la phugoïde faiblement amortie. La vitesse augmente immédiatement, avant que les autres variables aient le temps de varier.

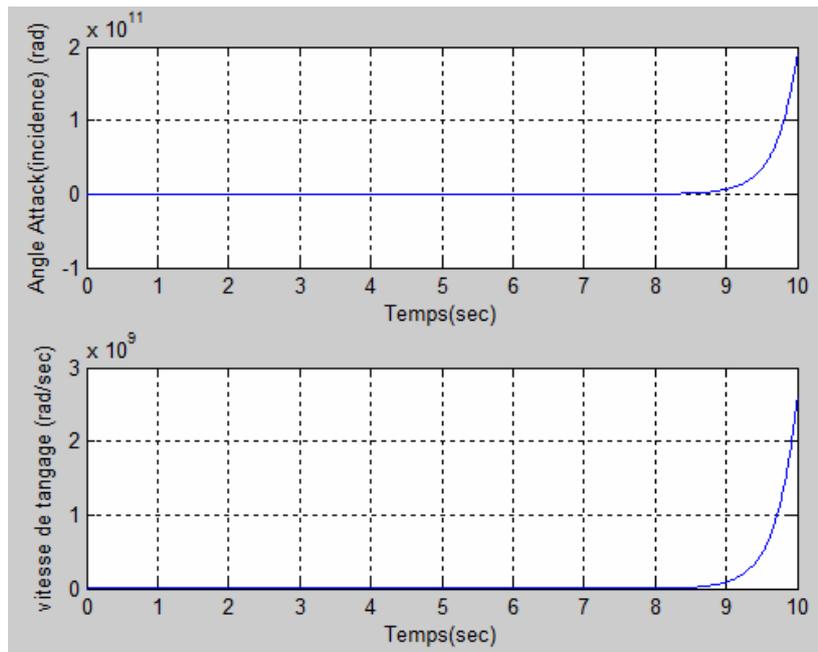
L'incidence varie peu, et la pente approche sa valeur finale, l'état final étant un vol en montée avec  $\Delta u = \Delta\alpha = 0$ . Lorsque l'axe de la poussée ne passe pas par le centre de gravité et qu'il y a par conséquent une contribution de la poussée au moment de tangage, la réponse diffère par plusieurs détails. Principalement, le moment de tangage dû à la poussée produit une variation rapide d'incidence, suivie par une relaxation oscillatoire vers une nouvelle incidence, et la vitesse tend vers une nouvelle valeur.



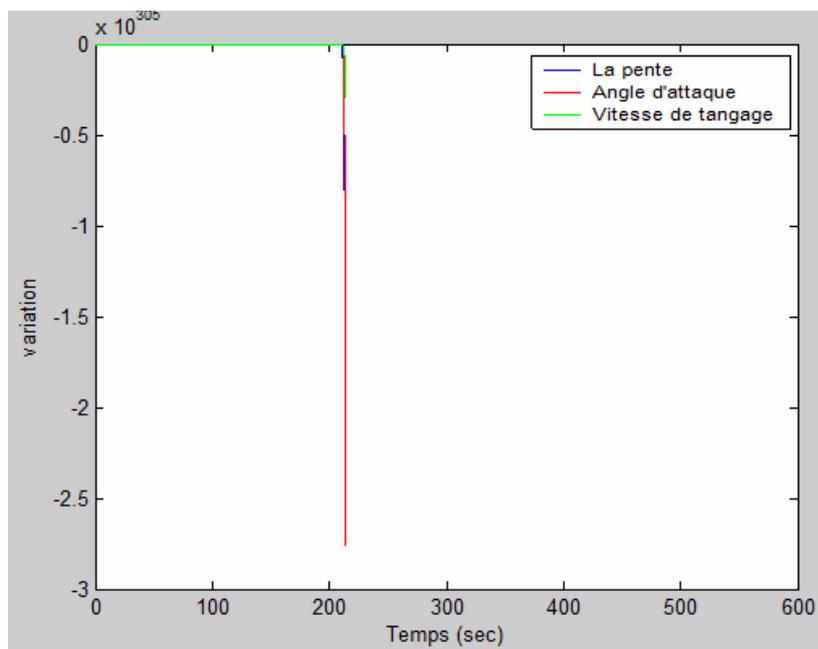
**Fig.5.20:** Variation d'angle d'attaque.



**Fig.5.21:** Variation de la pente.

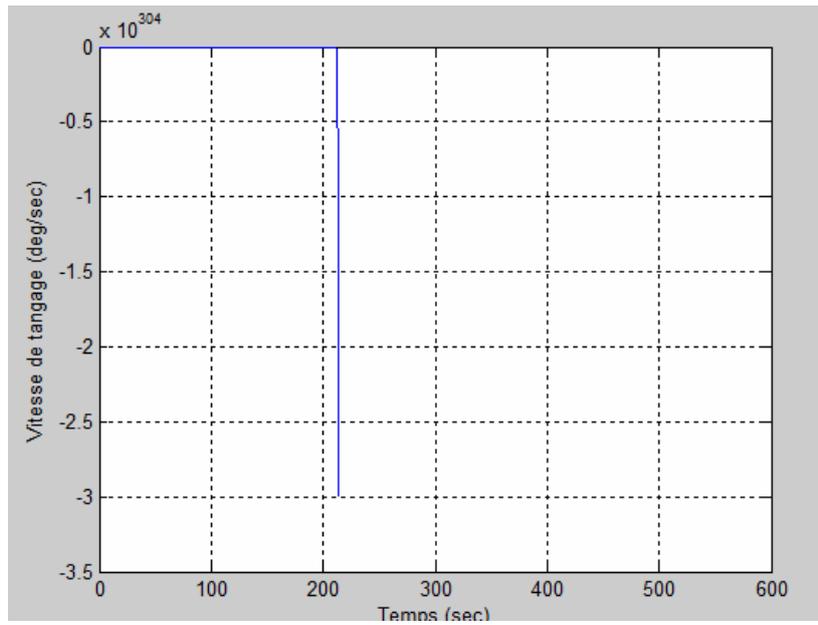


**Fig.5.22:** Variation d’angle d’attaque et de la vitesse de tangage.

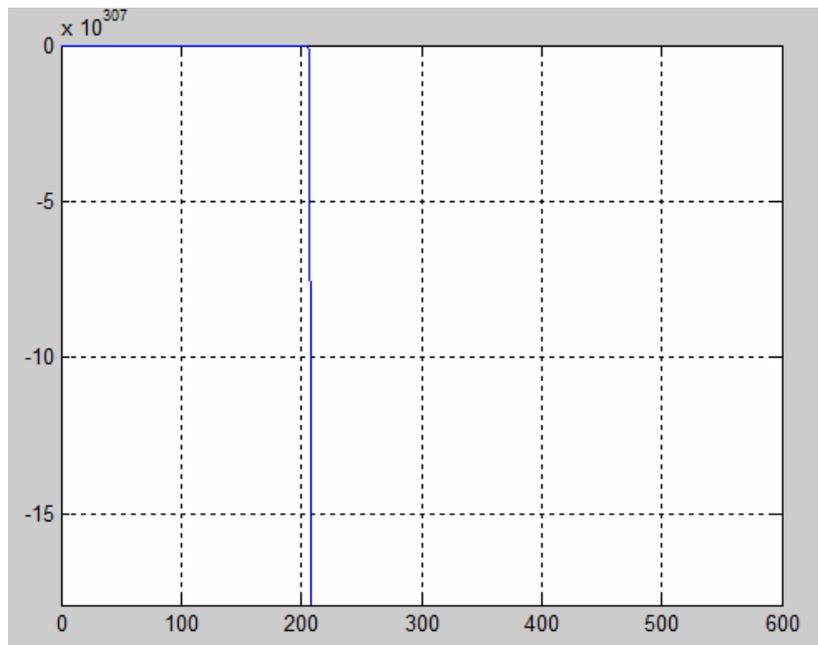


**Fig.5.23 :** Répons à un échelon d’angle de poussée ( $\Pi = 1/6$ ) :

Evolution de la vitesse, variation de la pente, angle d’attaque, et vitesse de tangage en fonction du temps.



(A)



(B)

**Fig.5.24:** Variation de la vitesse de tangage.

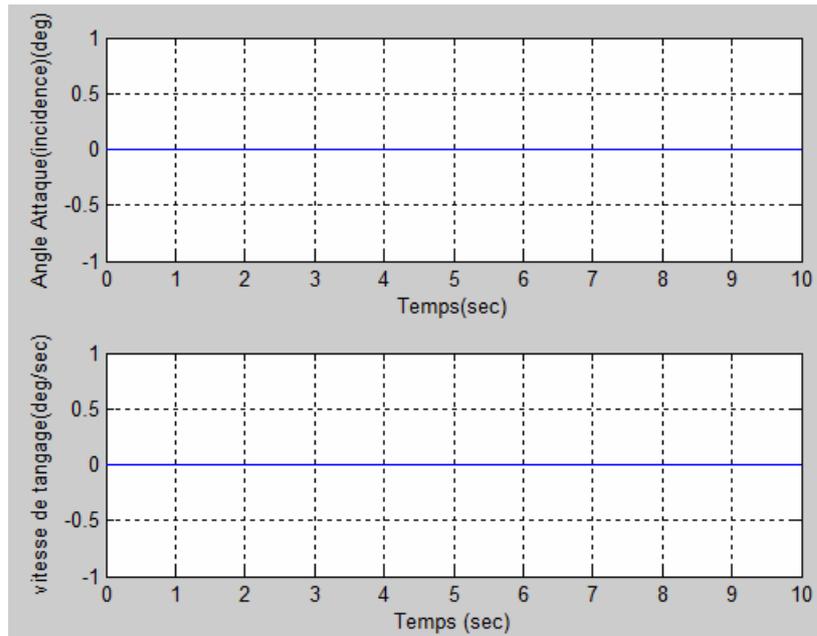


Fig.5.25: Variation de la vitesse de tangage et d'angle d'attaque.

#### V.4.2. Système latérale : [24] :

Système d'unité **B.E.S.** Voir annexe (B).

##### A. Matrice du système et équation caractéristique :

Nous avons la nouvelle matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 3.4, & 0, & 4.28e-008, & -0.000512; \\ 4.28e-008, & 3.4, & 0, & 0.0466; \\ -0.000512, & 0.0466, & 0.00837, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \end{bmatrix}$$

On tire l'équation caractéristique de la matrice A :

$$\lambda^4 - 1.0000\lambda^3 - 6.8084\lambda^2 + 11.5703\lambda - 0.0621 - 0.0013 = 0$$

Les deux critères de Routh :  $E = -0.0013 < 0$ , et  $R = -4.8322 < 0$ . Il n'y a donc pas de mode stable.

##### 1. Valeurs propres :

Les racines de l'équation caractéristique sont les deux racines réelles et la paire de racines complexes conjuguées suivantes :

Mode (1) (Spiral) :

$$\sigma_{1,2} = 3.41e+000$$

Mode (2) (convergence en roulis) :

$$\sigma_3 = 8.37e-003$$

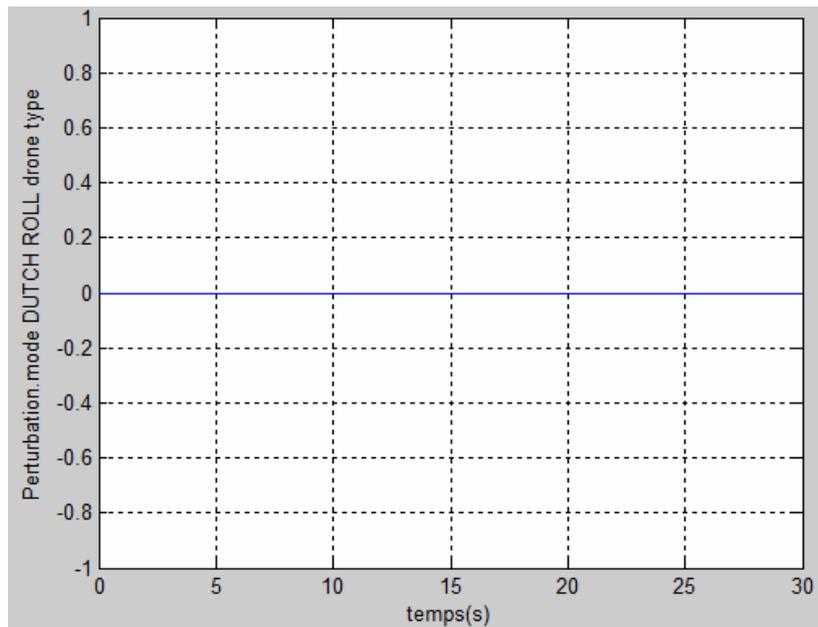
Mode (3) (Oscillation latérale [Dutch roll]) :

$$\sigma_4 = -1.37e-002$$

Les caractéristiques de ces modes sont rassemblées au tableau (5.3). Une des deux convergences est très lente et l'autre très rapide, et le mode oscillatoire est faiblement amorti, avec une période comparable à celle de l'oscillation d'incidence.

Tableau 5.3 : Paramètres des modes latéraux du drone type.

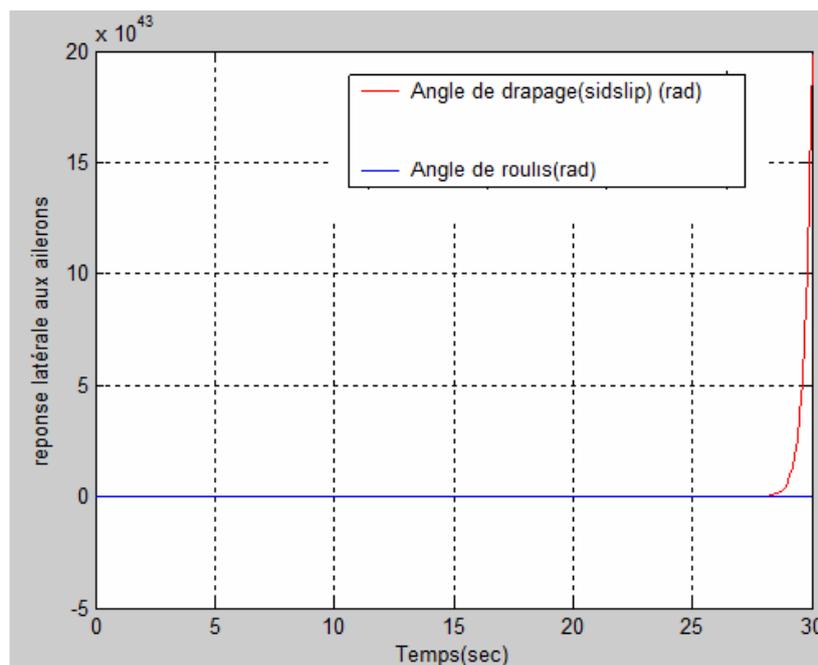
Mode	Dénomination	T(s), (Cr), (Dr)	T <sub>1/2</sub> (s), (Cr), (Dr)	N <sub>moitié</sub> (s) (Cr), (Dr)	S	Pulsation $\omega$	Facteur d'amortissement $\zeta$
1	Spiral	750.6792	50.7760	0.0676	10.2476	3.41e+000	-1.00e+000
2	Convergence en roulis	460.2704	-0.2039	0.1103	6.2832	3.40e+000	-1.00e+000
3	Dutch roll	1.8406	-0.2031	-0.1103	-6.2832	8.37e-003 -1.37e-002	-1.00e+000 1.00e+000



**Fig.5.26:** Comportement transitoire de mode Dutch roll.

L'analyse de réponses latérales doit être faite graphiquement par la résolution des équations différentielle de système latéral de la forme  $\dot{X} = AX + Bu$ .

#### V.4.2.1. Réponse latérale aux ailerons:



**Fig.5.27:** Réponse latérale aux ailerons.

Pour notre cas de notre drone à un nombre de Mach subsonique, l'évolution des modes latéraux avec la vitesse et l'altitude ne sont généralement pas simples, en raison du fait que les dérivées aérodynamiques latérales dépendent de manière complexe du coefficient de portance.

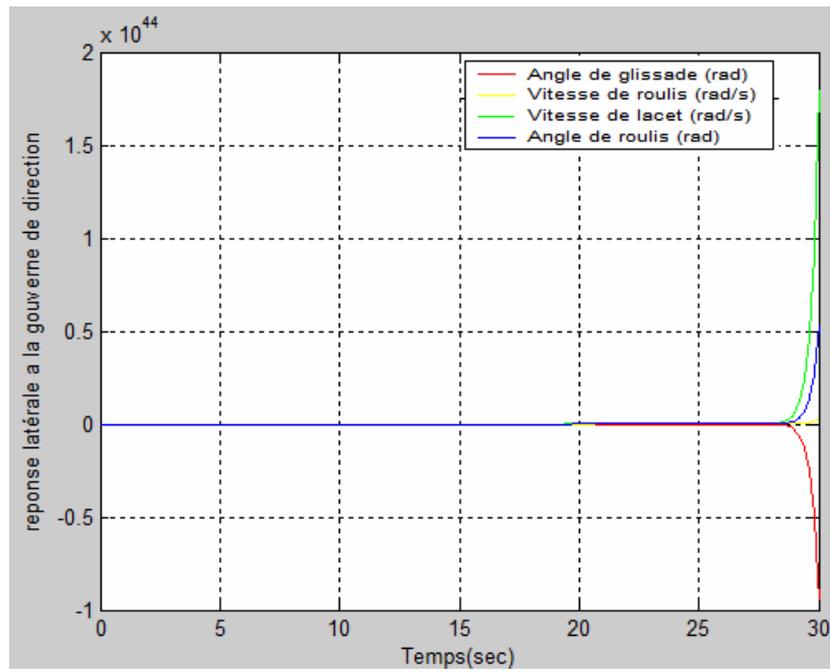
Le mode spiral est fréquemment très faible et instable dans une partie du domaine de vol, dépendamment du couplage entre les dérivées latérales. La figure montre la faiblesse de mode spiral si on remarque que l'angle de dérapage et l'angle de roulis (graphes rouge, et bleu) sont dans le même sens (à droite, ou à gauche selon le braquage des ailerons).

La convergence en roulis est un mouvement de lacet et de roulis. Mais ce mode correspondait à très peu de choses près à un mouvement de pure rotation en roulis comme nous avons vu dans la figure précédente où l'angle et vitesse de roulis sont amortis à partir de (05) premières secondes, tant que la convergence en roulis est fortement amortie dans toutes les conditions de vol, sachant que l'amortissement augmente normalement avec la vitesse.

Nous avons vu que le roulis hollandais (Dutch roll) est un mouvement transversal faiblement amorti avec une courte période à basse vitesse affectant un couplage lacet-roulis et le dérapage comme il est indiqué sur la figure au dessus où on peut remarquer que la vitesse de lacet a une grande période (10s) et faible amplitude. Il provient d'une insuffisance de stabilité de lacet en regard de la stabilité de roulis, surtout que les couples de rappel sont trop importants.

Le mouvement qui a lieu, à la fois, en roulis et lacet peut subir un déphasage selon les deux axes et une différence d'amplitude ; Si le dérapage s'amortit rapidement, il y a une stabilité oscillatoire. Dans le cas contraire, instabilité et risque de Dutch roll. Alors l'angle de dérapage reste sous l'effet de couplage compliqué lacet-roulis des modes de convergence et Dutch roll qui doivent l'amortir comme tout le mouvement en générale vers l'état d'équilibre, et leurs graphes sur la figure montre la convergence vers l'axes de l'état initiale, tel que le temps de réponse sera terminé après environ 300 s (5mn) vers une autre réponse d'une autre commande de déflexion ou braquage des gouvernes de direction et des ailerons.

#### **V.4.2.3. Réponse latérale à la gouverne de direction :**



**Fig.5.28:** Réponse latérale à la gouverne de direction.

## CONCLUSION GENERALE :

En guise de conclusion, les drones sont des engins volants sans pilote à bord ; cependant, vue l'importance de leurs mission, il est fondamental de discuter l'importance de l'étude de stabilité qui apparait dans leurs objectifs tels que la sécurité matérielle, la détermination des performances, les limites conseillées des commandes pour la sécurité des appareils à bord et la base théorique de la conception des drones.

Aussi, les calculs de la stabilité d'un drone varient totalement sous l'effet d'un changement d'une seule des conditions ou des paramètres tels que la masse, l'inertie, la structure c'est-à-dire les dimensions du drone et leurs surfaces portantes, l'altitude, le nombre de Mach, et l'atmosphère. Donc le degré ou niveau de la stabilité est dépendant du type d'usage ou fonction du drone.

## BIBLIOGRAPHIE :

[1] Gérard Degrez, <b>Performances et stabilité des avions.</b>
[2] John D. Anderson Jr. <b>Introduction to flight.</b> McGraw Hill, third edition, 1989.
[3] Francis J. Hale. <b>Aircraft performance, selection and design.</b> JohnWiley, 1984.
[4] Barnes W. McCormick. <b>Aerodynamics, aeronautics and flight mechanics.</b> JohnWiley, 1979.
[5] Bernard Etkin and Lloyd Duff Reid. <b>Dynamics of flight. Stability and control.</b> JohnWiley, third edition, 1996.
[6] Daniel P. Raymer. <b>Aircraft design: a conceptual approach. AIAA Education series.</b> American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989.
[7] Uy-Loi Ly. <b>Stability and Control of Flight Vehicle.</b> Department of Aeronautics and Astronautics, Box 352400.University of Washington. Seattle, WA98195.
[8] E. L. Houghton and N. B. Carruthers. <b>Aerodynamics for engineering students.</b> Arnold, third edition, 1984.
[9] T. du PUY de GOYNE, Y. PLAYS, P. LEPOURRY, J. BESSE. <b>Initiation à l'aéronautique.</b> Editions CEPADUES.
[10] Nelson, Robert, <b>Flight Stability and Automatic Control,</b> McGraw-Hill Book Co. 1989.
[11] Fabrice DEMOURANT. <b>Interactions identification commande robuste:méthodes et applications à l'avion souple.</b> Thèse soutenue le 17 décembre 2002 en vue de l'obtention du titre de Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
[12] Gérard Degrez, <b>Performances et stabilité des avions.</b> University of Seattle.wash.US. Automne 2001.
[13] Henrik b. pettersson. <b>Variable stability transfer function simulation.</b> june 200 blacksburg, Virginia.US.
[14] G.J.Mullen.CAO Report N0011.June 2001, <b>Aircraft parameter identification using Matlab.</b> college of Aeronautics,Cranfield University.UK.
[15] David G. Hull. <b>Fundamentals of airplane flight mechanics.</b> The University of Texas Austin. Aerospace Engineering and Engineering Mechanics.US.
[16] F.Goineau,M.V.Cook.The stability and control characteristics of neutrally buoyant non- rigid airship.(August1999)..College of Aeronautics,Cranfield University.UK.
[17] Robert Stengel, MAE 331, 2006. <b>Linearized longitudinal equations of motion.</b>
[18] Dava J. Newman and Amir R. Amir . <b>Introduction to Aircraft Stability and Control.</b>
[19] Prof. EarlI Murman. <b>Introduction to Aircraft Performance and Static Stability.</b> September 18, 2003.

[20] Princeton Satellite Systems. Inc. New Jersey. . <b>Aircraft control toolbox learning edition tutorial</b> ,(november 2004).
[21] Theodore A. Talay et Langley Research Center, <b>introduction to the aerodynamics of flight. Scientific and Technical Information office 1975.</b> national aeronautics and space administration washington, D,C.
[22] Subodh Bhandari, <b>development of six-degree-of-freedom, piecewise simulation of aircraft motion in simulink.</b> Mississippi State University, August, 2004.
[23] Professor Jonathan P. Howr . <b>Aircraft stability and control.</b> Fall 1990/00.
[24] D. A. Caughey. <b>Control of Aircraft Motions.</b> Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering. Cornell University. Ithaca, New York 14853-7501.

**Sites Internet :**

- <a href="http://www.lerc.nasa.gov">www.lerc.nasa.gov</a>
- <a href="http://www.nas.gov">www.nas.gov</a>
- <a href="http://www.cranfielduniversity.org">www.cranfielduniversity.org</a> (Université de Cranfield, Angleterre)
- <a href="http://www.mitopencourseware.com">www.mitopencourseware.com</a>

**Mots clés pour les moteurs de recherches (Google, Yahoo,.....) :**

-Aircraft stability and control
-Longitudinal and lateral aircraft motion
-Aircraft directionnel system
-Aircraft response for elevator, rudder, and aileron

## ANNEXE A :

### 1) États de niveau de la mer :

$$T_0 = +15^\circ\text{C} = 288,16 \text{ K}$$

$$\mu_0 = 1,783 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$$

$$p_0 = 101325 \text{ Nm}^{-2}$$

$$\nu_0 = 1,455 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$\rho_0 = 1,2256 \text{ kgm}^{-3}$$

### 2) Valeurs relatives :

Altitude(m)	La température	pression	Densité		Viscosité	
	$\theta = T/T_0$	$\delta = p/p_0$	$\sigma = \rho/\rho_0$	$\sigma^{1/2}$	$\tilde{\mu} = \mu/\mu_0$	$\tilde{\nu} = \nu/\nu_0$
0	1	1	1	1	1	1
250	0.9944	0.9707	0.9762	0.9880	0.9956	1.0198
500	0.9887	0.9421	0.9528	0.9761	0.9911	1.0402
750	0.9831	0.9142	0.9299	0.9643	0.9867	1.0610
1000	0.9774	0.8869	0.9074	0.9526	0.9822	1.0824
1250	0.9718	0.8604	0.8853	0.9409	0.9777	1.1044
1500	0.9661	0.8344	0.8637	0.9293	0.9733	1.1269
1750	0.9605	0.8091	0.8424	0.9178	0.9688	1.1500
2000	0.9549	0.7845	0.8215	0.9064	0.9642	1.1737
2250	0.9492	0.7604	0.8011	0.8950	0.9597	1.1980
2500	0.9436	0.7369	0.7810	0.8837	0.9552	1.2230
2750	0.9379	0.7141	0.7613	0.8725	0.9506	1.2487
3000	0.9323	0.6918	0.7420	0.8614	0.9461	1.2750
3250	0.9266	0.6701	0.7231	0.8503	0.9415	1.3020
3500	0.9210	0.6489	0.7045	0.8394	0.9369	1.3298
3750	0.9154	0.6283	0.6863	0.8285	0.9323	1.3584
4000	0.9097	0.6082	0.6685	0.8176	0.9277	1.3877
4250	0.9041	0.5886	0.6511	0.8069	0.9231	1.4178
4500	0.8984	0.5696	0.6339	0.7962	0.9184	1.4488
4750	0.8928	0.5510	0.6172	0.7856	0.9138	1.4806
5000	0.8872	0.5329	0.6007	0.7751	0.9091	1.5133
5250	0.8815	0.5154	0.5846	0.7646	0.9044	1.5470
5500	0.8759	0.4983	0.5689	0.7542	0.8997	1.5816
5750	0.8702	0.4816	0.5534	0.7439	0.8950	1.6172
6000	0.8646	0.4654	0.5383	0.7337	0.8903	1.6538
6250	0.8589	0.4497	0.5235	0.7236	0.8855	1.6915
6750	0.8533	0.4344	0.5091	0.7135	0.8808	1.7303
6750	0.8477	0.4195	0.4949	0.7035	0.8760	1.7702
7000	0.8420	0.4050	0.4810	0.6936	0.8713	1.8113
7250	0.8364	0.3910	0.4674	0.6837	0.8665	1.8536
7500	0.8307	0.3773	0.4542	0.6739	0.8617	1.8972
7750	0.8251	0.3640	0.4412	0.6642	0.8568	1.9421

2.1) Valeurs relatives (suite) :

Altitude (m)	Température $\theta = T/T_0$	Pression $\delta = p/p_0$	Densité		Viscosité	
			$\sigma = \rho/\rho_0$	$\sigma^{1/2}$	$\tilde{\mu} = \mu/\mu_0$	$\tilde{\nu} = \nu/\nu_0$
8000	0.8194	0.3511	0.4285	0.6546	0.8520	1.9884
8250	0.8138	0.3386	0.4161	0.6450	0.8471	2.0361
8500	0.8082	0.3264	0.4039	0.6356	0.8423	2.0852
8750	0.8025	0.3146	0.3921	0.6262	0.8374	2.1359
9000	0.7969	0.3032	0.3805	0.6168	0.8325	2.1881
9250	0.7912	0.2921	0.3691	0.6076	0.8276	2.2420
9500	0.7856	0.2813	0.3581	0.5984	0.8227	2.2976
9750	0.7799	0.2708	0.3472	0.5893	0.8177	2.3549
10 000	0.7743	0.2607	0.3367	0.5802	0.8128	2.4141
10 250	0.7687	0.2509	0.3264	0.5713	0.8078	2.4752
10 500	0.7630	0.2413	0.3163	0.5624	0.8028	2.5383
10 750	0.7574	0.2321	0.3064	0.5536	0.7978	2.6034
11 000	0.7517	0.2232	0.2968	0.5448	0.7928	2.6707
11 500		0.2062	0.2743	0.5238		2.8897
12 000		0.1906	0.2535	0.5035		3.1268
12 500		0.1761	0.2343	0.4841		3.3833
13 000		0.1628	0.2166	0.4654		3.6608
13 500		0.1505	0.2001	0.4474		3.9611
14 000		0.1390	0.1850	0.4301		4.2860
14 500		0.1285	0.1709	0.4135		4.6376
15 000	Constante	0.1188	0.1580	0.3975	Constante	5.0180
15 500		0.1098	0.1460	0.3821		5.4297
16 000	dans	0.1014	0.1349	0.3673	dans	5.8751
16 000	la stratosphère	0.0937	0.1247	0.3531	la stratosphère	6.3570
17 000		0.0866	0.1153	0.3395		6.8785
17 500		0.0801	0.1065	0.3264		7.4427
18 000		0.0740	0.0984	0.3138		8.0532
18 500		0.0684	0.0910	0.3016		8.7138
19 000		0.0632	0.0841	0.2900		9.4286
19 500		0.0584	0.0777	0.2788		10.202
20 000		0.0540	0.0718	0.2680		11.039

## **ANNEXE B :**

### **DIMENSIONS ET UNITÉS :**

Il y a une différence fondamentale entre les dimensions et les unités. Une dimension représente la définition d'une propriété physique inhérente que l'indépendant des restes de l'arrangement particulier avait l'habitude de dénoter sa mesure. Par exemple, la quantité de matière actuelle dans un morceau de métal a la dimension de masse et la taille physique du bord d'un livre a la dimension de la longueur.

Une unité représente l'arrangement particulier et arbitraire employé pour dénoter l'importance d'une propriété physique. Ainsi, la masse de la matière dans le morceau du métal peut être exprimée en kilogrammes ou noyaux et la longueur du livre exprimé en compteurs ou pieds selon le système des unités choisies. Habituellement la quantité à être des influences mesurées le choix des unités à utiliser, c'est-à-dire, dose ou des pieds pour mesurer la longueur du livre plutôt que des kilomètres ou des milles.

#### **Dimensions de base:**

Il y a quatre dimensions de base d'intérêt général aux aérodynamiciens. Ceux-ci s'appellent les dimensions de base ou primaires et sont longueur, masse, temps, et température. Ils peuvent être abrégés en utilisant, respectivement, L, M, T, et  $\theta$ .

#### **Dérivées de Dimensions:**

Les dimensions de toutes autres quantités peuvent s'avérer des combinaisons des quantités exprimables en termes de dimensions de base ou primaires. Celles-ci sont connues en tant que dimensions dérivées ou secondaires. Par exemple, le secteur peut être représenté en tant que temps d'une longueur par longueur ou  $L^2$ . Une liste des quantités plus communes produites en aérodynamique et leurs dimensions est incluse dans le tableau.

#### **Systèmes des unités :**

Il y a deux systèmes de technologie des unités de base en service en aérodynamique. Elles sont le système des unités internationales (SI) et le système de technologie des unités britannique (B.E.S.). Dans 1964 le bureau national des Etats-Unis des normes a officiellement adopté le système des unités international à utiliser en tout de ses publications. La NASA ont adopté une politique semblable et c'est le système des unités utilisées dans ce rapport. Le tableau II énumère les unités de SI et de B.E.S. pour les deux les dimensions de base et certaines des quantités aérodynamiques plus communes.

**ANNEXE B (suite) :**

**DIMENSIONS ET UNITÉS (suite) :**

**Tableau (1)- Systèmes des unités**

Quantity	Basic dimensions	Units	
		SI	B.E.S.
Length	L	meter	foot
Mass	M	kilogram	slug
Time	T	second	second
Temperature	$\theta$	°C (relative) K (absolute)	°F (relative) °R (absolute)

Quantity	Derived dimensions	Units	
		SI	B.E.S.
Area	$L^2$	meters <sup>2</sup>	feet <sup>2</sup>
Volume	$L^3$	meters <sup>3</sup>	feet <sup>3</sup>
Velocity	$LT^{-1}$	meters/second	feet/second
Acceleration	$LT^{-2}$	meters/second <sup>2</sup>	feet/second <sup>2</sup>
Force	$MLT^{-2}$	newton	pound
Pressure	$ML^{-1}T^{-2}$	newtons/meter <sup>2</sup>	pounds/foot <sup>2</sup>
Density	$ML^{-3}$	kilogram/meter <sup>3</sup>	slugs/foot <sup>3</sup>
Kinematic viscosity	$L^2T^{-1}$	meters <sup>2</sup> /second	feet <sup>2</sup> /second
Momentum	$MLT^{-1}$	newton-second	pound-second
Energy	$ML^2T^{-2}$	joule	foot-pound
Power	$ML^2T^{-3}$	watt	foot-pound/second
Angle	-----	radian or degree	radian or degree
Angular velocity	$T^{-1}$	radians/second	radians/second
Angular acceleration	$T^{-2}$	radians/second <sup>2</sup>	radians/second <sup>2</sup>
Moment of inertia	$ML^2$	kilogram-meter <sup>2</sup>	slug-ft <sup>2</sup>

$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$

$1 \text{ inch} = 0.0254 \text{ m}$

$1 \text{ slug} = 14.5939 \text{ kg}$

$1 \text{ slug} / \text{ft}^2 = 1.3558 \text{ kg} / \text{m}^2$

$1 \text{ slug} / \text{ft}^3 = 515.37 \text{ kg} / \text{m}^3$

$1 \text{ lbf} = 4.4412 \text{ N}$

$1 \text{ lbf} / \text{ft}^2 = 47.8802 \text{ N} / \text{m}^2$

$1 \text{ lbf} / \text{inch}^2 = 6894.7572 \text{ N} / \text{m}^2$

$1 \text{ kgf} = 9.8066 \text{ N}$