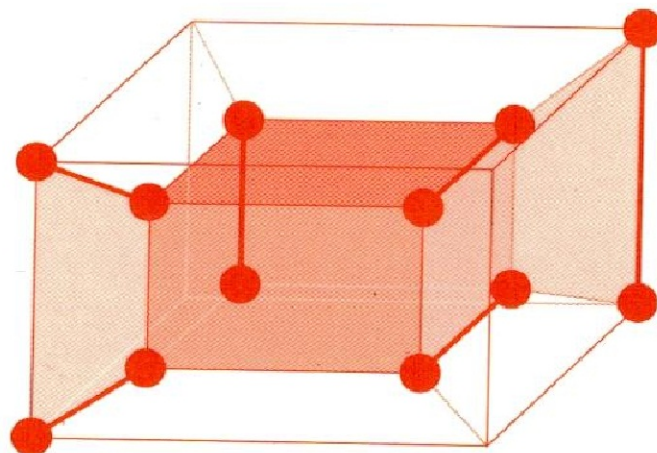


Eléments de mathématiques discrètes



Louis Frécon

2-004-1-1

2-004-1-1

Collection des sciences

Éléments de mathématiques discrètes

Louis Frécon



TABLE DES MATIÈRES

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE	V
SOMMAIRE.....	VII

Première partie	Fondements	1
------------------------	-------------------------	----------

Chapitre 0	MÉMENTO DE LOGIQUE	3
	0.1 Logique des propositions	3
	0.2 Logique des prédicats.....	11
	0.3 Exercices	15
	0.4 Problèmes.....	17
	0.5 Piste de réflexion.....	18
	0.6 Lectures	18

Chapitre 1	ENSEMBLES & ÉLÉMENTS.....	21
	1.1 Présentation.....	21
	1.2 Inclusions	23
	1.3 Parties d'un ensemble	25
	1.4 Union.....	26
	1.5 Intersection.....	27
	1.6 Différence ensembliste.....	28
	1.7 Couvertures	29
	1.8 Différence symétrique.....	31
	1.9 Partitions.....	32
	1.10 Paires & produits cartésiens.....	34
	1.11 Exercices	35
	1.12 Problèmes.....	37
	1.13 Lectures.....	40

Chapitre 2	RELATIONS BINAIRES	41
	2.1 Vue en extension.....	41
	2.2 Vue en compréhension	44
	2.3 Relation inverse.....	45
	2.4 Union, intersection, finesse.....	46
	2.5 Composition.....	46
	2.6 Exercices	47
	2.7 Problèmes.....	48
	2.8 Lectures.....	48

Chapitre 3	FONCTIONS.....	51
	3.1 Relations binaires régulières.....	51
	3.2 Fonctions.....	51
	3.3 Surjection.....	53
	3.4 Image & inverse.....	54
	3.5 Injection & bijection.....	54
	3.6 Synoptiques.....	56
	3.7 Composition de fonctions.....	57
	3.8 Ensembles dénombrables et finis.....	58
	3.9 Relations n-aires.....	59
	3.10 Fonctions généralisées.....	61
	3.11 Exercices.....	63
	3.12 Problèmes.....	64
	3.13 Lectures.....	65
Chapitre 4	RELATIONS BINAIRES INTERNES.....	67
	4.1 Présentation.....	67
	4.2 Propriétés des relations binaires internes.....	68
	4.3 Restriction.....	72
	4.4 Equivalence.....	72
	4.5 Ordres.....	75
	4.6 Préordre.....	79
	4.7 Récapitulatifs.....	84
	4.8 Exercices.....	85
	4.9 Problèmes.....	87
	4.10 Thèmes de réflexion.....	92
	4.11 Lectures.....	94
Chapitre 5	FONCTIONS, CALCULABILITÉ, RÉCURRENCE.....	95
	5.1 Calculabilité, décidabilité.....	95
	5.2 Calculabilité et récursivité.....	96
	5.3 Récursivités convergente, divergente, stationnaire.....	101
	5.4 Ensembles récursifs et récursivement énumérables.....	103
	5.5 Aux sources de l'arithmétique et de l'algèbre.....	104
	5.6 Exercices.....	106
	5.7 Problèmes.....	107
	5.8 Pistes de réflexion.....	108
	5.9 Lectures.....	109
Chapitre 6	NOTION DE COMPLEXITÉ.....	111
	6.1 Premier exemple.....	111
	6.2 Règles d'estimation de la complexité.....	112
	6.3 Préordre de complexité.....	115
	6.4 Classes de complexité.....	115
	6.5 Optimisation du calcul d'une fonction.....	117
	6.6 Représentations d'une table creuse.....	121
	6.7 Exercices.....	123
	6.8 Problèmes.....	124
	6.9 Lectures.....	125

Deuxième partie	Graphes.....	127
Chapitre 7	DES POINTS ET DES FLÈCHES.....	129
	7.1 Présentation.....	129
	7.2 Degrés & demi-degrés	129
	7.3 Prédécesseurs, successeurs, adjacents.....	130
	7.4 Sommets initiaux, terminaux, isolés.....	130
	7.5 Sous-graphe.....	130
	7.6 Graphe partiel.....	131
	7.7 Graphe complet, cliques.....	131
	7.8 Représentations.....	131
	7.9 Propriétés des relations binaires et graphes associés.....	133
	7.10 Propriété faible / propriété forte	135
	7.11 Graphe valué.....	135
	7.12 Exercices	136
	7.13 Problèmes.....	136
	7.14 Thèmes de réflexion.....	137
	7.15 Lectures.....	137
Chapitre 8	CHEMINS & CIRCUITS.....	139
	8.1 Les chemins.....	139
	8.2 Circuits et boucles dans un graphe.....	141
	8.3 Chemins élémentaires dans un graphe.....	141
	8.4 Recherche de chemins dans un graphe	143
	8.5 Méthodes matricielles	145
	8.6 Méthode locale 1 : recherche par niveaux	152
	8.7 Méthode locale 2 : méthode du meilleur d'abord.....	155
	8.8 Méthode locale 3 : recherche en profondeur	158
	8.9 Problèmes hamiltoniens.....	161
	8.10 Problèmes eulériens	162
	8.11 Exercices.....	164
	8.12 Problèmes.....	165
	8.13 Thèmes de réflexion.....	169
	8.14 Lectures.....	169
Chapitre 9	FERMETURES TRANSITIVES.....	171
	9.1 Fermeture transitive et descendance stricte.....	171
	9.2 Fermeture réflexo-transitive et descendance large.....	171
	9.3 Interprétation des relations quelconques.....	172
	9.4 Accessibilité dans les systèmes à états.....	174
	9.5 Exercices	179
	9.6 Problèmes.....	179
	9.7 Lectures.....	181
Chapitre 10	ARBRES & CONNEXITÉ.....	183
	10.1 Chaînes & cycles.....	183
	10.2 Graphe (fortement) connexe.....	184
	10.3 Composante connexe d'un graphe.....	184

	10.4	Composantes fortement connexes	185
	10.5	Centres, rayon, diamètre d'un graphe	185
	10.6	Arbres, forêts, hiérarchies, arborescences	187
	10.7	Arbre couvrant	188
	10.8	Arbre couvrant minimal	189
	10.9	Points, ensembles d'articulation.....	190
	10.10	Isthme	191
	10.11	k-Connexité et robustesse structurelle	191
	10.12	Multi-graphes	192
	10.13	Exercices	196
	10.14	Problèmes.....	197
	10.15	Pistes de réflexion.....	198
	10.16	Vocabulaire	198
	10.17	Lectures.....	200
Chapitre 11		GRAPHES MULTIPARTIS	201
	11.1	Présentation.....	201
	11.2	Tests de multipartisme.....	202
	11.3	Jeux & fonctions de Grundy	204
	11.4	Coloriage de graphes	207
	11.5	Graphes bipartis.....	212
	11.6	Graphes et hypergraphes.....	214
	11.7	Exercices	218
	11.8	Problèmes.....	219
	11.9	Pistes de réflexion.....	220
	11.10	Lectures.....	220
Troisième partie		Algèbres	221
Chapitre 12		OPÉRATEURS & ALGÈBRES.....	223
	12.1	Opérateurs & signatures	223
	12.2	Syntaxe des expressions.....	224
	12.3	Sémantique formelle des expressions	225
	12.4	Algèbres.....	225
	12.5	Propriétés des opérateurs	227
	12.6	Éléments remarquables pour un opérateur.....	228
	12.7	Déparenthésages.....	231
	12.8	Propriétés inter-opérateurs.....	236
	12.9	Morphismes.....	237
	12.10	Formes normales & canoniques	239
	12.11	Exercices	240
	12.12	Problèmes.....	241
	12.13	Pistes de réflexion.....	242
	12.14	Lectures.....	243
Chapitre 13		MONOÏDES & GROUPES.....	245
	13.1	Présentation.....	245
	13.2	Semi-Groupe.....	248
	13.3	Groupe.....	249

	13.4	Monoïde finiment engendré.....	251
	13.5	Langages formels.....	254
	13.6	Grammaires.....	254
	13.7	Exercices.....	256
	13.8	Problèmes.....	258
	13.9	Pistes de réflexion.....	260
	13.10	Lectures.....	261
Chapitre 14		DIOÏDES.....	263
	14.1	Présentation.....	263
	14.2	Semi-anneau.....	264
	14.3	Anneau.....	264
	14.4	Corps.....	265
	14.5	Graphe valué.....	265
	14.6	Calculs matriciels.....	267
	14.7	Thèse centrale.....	267
	14.8	Taille illimitée.....	267
	14.9	Taille limitée.....	269
	14.10	Exemples.....	270
	14.11	Graphes multivalués.....	273
	14.12	Exercices.....	274
	14.13	Problèmes.....	277
	14.14	Pistes de réflexion.....	277
	14.15	Lectures.....	279
	14.16	Famille des dioïdes.....	279
Chapitre 15		ALGÈBRE DE BOOLE.....	281
	15.1	Intérêt.....	281
	15.2	Algèbre de boole élémentaire.....	282
	15.3	Modélisation booléenne de technologies.....	283
	15.4	Fonctions booléennes.....	285
	15.5	Géométrie booléenne.....	286
	15.6	Bases d'une fonction.....	289
	15.7	Des sommes de monômes aux produits de clauses.....	300
	15.8	Approches dichotomiques.....	305
	15.9	Equations booléennes.....	308
	15.10	Anneau de Boole.....	309
	15.11	Equivalences majeures.....	312
	15.12	Exercices.....	313
	15.13	Problèmes.....	313
	15.14	Piste de réflexion.....	314
	15.15	Lectures.....	314
Chapitre 16		ALGÈBRE DE KLEENE & AUTOMATES À ÉTATS FINIS.....	317
	16.1	Notion d'automate à états finis.....	317
	16.2	Grammaires de Kleene.....	321
	16.3	Algèbre de Kleene.....	322
	16.4	Propriété centrale.....	325

105	16.5	Des expressions régulières aux graphes de transition.....	328
105	16.6	Synoptique.....	333
105	16.7	Exercices.....	333
105	16.8	Problèmes.....	335
105	16.9	Pistes de réflexion.....	336
105	16.10	Lectures.....	337
105		INDICATIONS SUR LES EXERCICES & PROBLÈMES.....	339
Annexe		Chapitre 0 : Memento de logique.....	339
		Chapitre 1 : Ensembles & éléments.....	341
		Chapitre 2 : Relations binaires.....	344
		Chapitre 3 : Fonctions.....	345
		Chapitre 4 : Relations binaires internes.....	348
		Chapitre 5 : Fonctions, calculabilité, récurrence.....	352
		Chapitre 6 : Notion de complexité.....	354
		Chapitre 7 : Des points et des flèches.....	355
		Chapitre 8 : Chemins & circuits.....	356
		Chapitre 9 : Fermetures transitives.....	357
		Chapitre 10 : Arbres & connexité.....	359
		Chapitre 11 : Graphes multipartis.....	359
		Chapitre 12 : Opérateurs et algèbres.....	361
		Chapitre 13 : Monoïdes.....	361
		Chapitre 14 : Dioïdes.....	363
		Chapitre 15 : Algèbre de Boole.....	364
		Chapitre 16 : Algèbres de Kleene & automates à états finis.....	364
		INDEX.....	367