

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DEHLEB BLIDA
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Aéronautique



Mémoire pour l'obtention
Du diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique

Spécialité : Construction aéronautique

Option : Structure-propulsion

022/01/10

THEME:

**PREDICTION DU FLOTTEMENT AEROELASTIQUE
D'UNE POUTRE COMPOSITE EN REGIME
SUPERSONIQUE**

Présenté par :

M^r : ALI BOUACIDA Lyes

M^r : ZEMANI kada

Encadré par :

M^{me} : HAMADOUCHE MAHI Amel

ANNEE UNIVERSITAIRE 2009 /2010.

Introduction générale

Les études statiques des matériaux homogènes ont d'abord permis de construire des modèles de plus en plus fins notamment en ce qui concerne les contraintes [1]. D. Gay a repris la théorie classique avec une prise en compte des cisaillements transverses en l'étendant au domaine dynamique [2].

L'extension aux matériaux composites a été permise par les travaux de J.M. Cieaux [3] et M.Carrier [4]. Le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place les outils nécessaires à la modélisation du comportement mécanique des matériaux composites et à l'analyse des structures stratifiées. L'objet de cette analyse est d'établir une synthèse de l'analyse du comportement mécanique et de la théorie des stratifiés, et d'en appliquer les développements aux problèmes de l'instabilité aéroélastique [5].

Parmi les problèmes d'aéroélasticité que risque de rencontrer un avion, le flottement [6] est probablement le plus complexe et potentiellement le plus désastreux de tous. Il se déclenche sans prévenir, sans qu'aucun indice ne permette au pilote de déceler l'approche de la vitesse critique. La rapidité avec laquelle s'amplifie la vibration, varie selon le cas, mais souvent elle est telle que la rupture survient avant que le pilote n'ait le temps de réduire la vitesse pour quitter le domaine d'instabilité. Dans ce cas les aéroélasticiens emploient le mot « explosif » pour donner une idée de la soudaineté du phénomène [6] d'où l'importance majeure de connaître la vitesse critique de flottement d'une structure.

Les matériaux composites ont pris une telle ampleur d'utilisation, particulièrement dans le domaine aéronautique et spatial, que nous optons dans notre étude de résoudre les équations du flottement pour le cas d'une structure fabriquée en matériau composite.

Cette étude comporte cinq chapitres. Le premier porte sur des généralités sur les matériaux composites, leurs définitions et leurs propriétés, ainsi que leurs applications dans le domaine aéronautique. Le deuxième et le troisième sont consacrés à l'analyse du comportement mécanique des stratifiés, à la théorie classique des stratifiés et à la théorie FSDBT. Le chapitre quatre présente la modélisation du comportement vibratoire de la poutre, les solutions du problème sont présentées dans le chapitre cinq passant par l'étude modale du système vibratoire et par la résolution du problème aux valeurs propres.

Introduction générale

Ce travail porte d'une part sur la détermination, par la méthode de variationnelle de Ritz, du comportement vibratoire d'une poutre plane composite stratifiée symétrique, se comportant d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope. D'autre part, nous déterminons la vitesse critique du flottement, dans le cadre de la prévision des instabilités aéroélastiques des structures d'avions. L'analyse, en effet, joue un rôle majeur dans la conception et la certification des avions civils.

Généralité sur les matériaux composites

Introduction :

Un matériau composite est un matériau différent du classique (les métaux, les plastiques) car il est constitué d'une matrice et d'un renfort. C'est pour cela que le matériau composite possède d'excellentes caractéristiques mécaniques, d'où son importance économique notoire. Les prévisions portent à penser que cette importance va croître dans les années qui viennent. Une grande diversité de fabrication est concernée, depuis les produits composites dits à grande diffusion jusqu'aux composants aérospatiaux à hautes performances mécaniques et thermomécaniques [2].

Parmi les composites, on distingue deux types : les composites grandes diffusions (GD) et les composites hautes performances (HP).

Les GD représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés. Les HP, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé.

1-1 Définition de base :

1-1-1 Définition M C :

Dans un sens large, le mot « composite » signifie « constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». En fait, l'appellation matériau composite ou composite évoque un matériau différent des matériaux macroscopiquement homogènes habituels.

On appelle maintenant de façon courante « matériaux composites » des arrangements de fibres continues ou non d'un matériau résistant (le renfort) qui sont noyées dans une (matrice) dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible, la matrice conserve la disposition géométrique des fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce. L'ensemble « renfort – matrice » se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

1-1-2 Isotropie, anisotropie :

Lorsqu'on aborde l'étude du comportement des corps élastiques sous charge (théorie d'élasticité), on est amené à mettre en évidence, avec des considérations et des moyens qui ne sont pas forcément compliqués, les propriétés fondamentales suivantes :

Un corps élastique soumis à des contraintes se déforme de façon réversible; En chaque endroit à l'intérieur du corps, on peut isoler des facettes privilégiées sur lesquelles ne s'exercent que des contraintes normales. Les normales à ces facettes sont appelées directions principales pour les contraintes.

Une petite sphère du matériau entourant un point du corps devient après application du chargement – et donc sous l'effet des contraintes – un petit ellipsoïde.

La position de cet ellipsoïde dans l'espace relativement aux directions principales pour les contraintes permet de caractériser la nature isotrope ou anisotrope du matériau constitutif du corps considéré (figure 1-1).

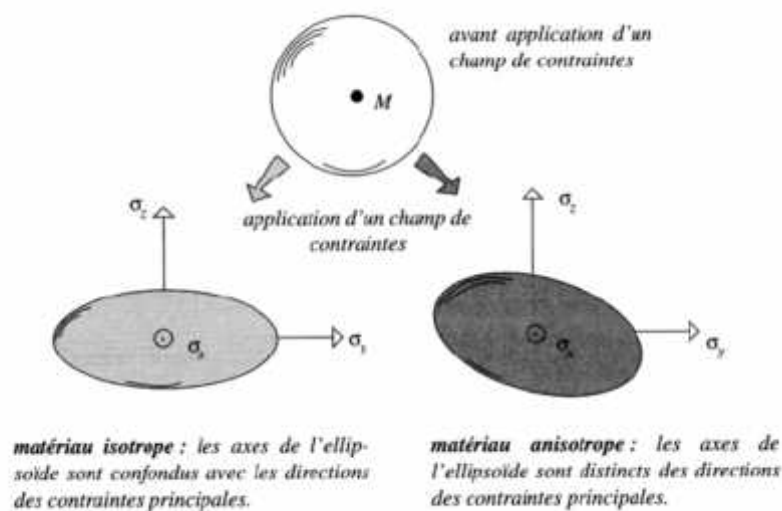


Figure (1-1) : Matériau isotrope / anisotrope.

Une manière simple de constater les effets de l'anisotropie lors de la déformation d'une pièce consiste à solliciter dans son plan une plaque de matériau anisotrope. Pour une plaque anisotrope, les traits obliques symbolisent par exemple la direction privilégiée suivant laquelle on a disposé des fibres de renfort. On peut constater que, pour une orientation quelconque du renfort, la même sollicitation uniaxiale appliquée successivement à la plaque isotrope et à la plaque anisotrope provoque chez cette dernière, en plus des dilatations longitudinales et transversales, une distorsion angulaire caractéristique (figure 1-2) [2].

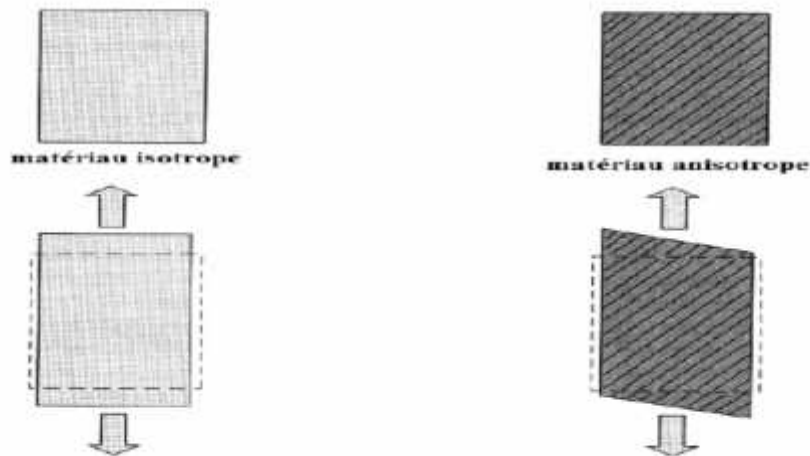


Figure (1-2) : Effets de l'anisotropie lors des déformations [2].

1-2 Quelques propriétés des matériaux composites :

1-2-1 Légèreté et rigidité :

La caractéristique principale d'un matériau composite est d'offrir le meilleur rapport légèreté/rigidité. A partir de 3 kg/m², la rigidité est déjà supérieure à celle d'une tôle d'aluminium 5 fois plus lourde ! Sa résistance mécanique le rend adaptable à tout niveau de charge et sollicitations statiques et dynamiques.

1-2-2 Esthétique :

Parce qu'il utilise les techniques du collage, le composite est un produit particulièrement esthétique, aussi bien dans son aspect général que dans sa finition. De plus, les panneaux peuvent être revêtus de toutes sortes de peaux : acier, inox, aluminium, composites, bois,...y compris de fines feuilles de marbre ; ils sont de ce fait particulièrement adaptés à la décoration intérieure ou extérieure.

1-2-3 Absorption de chocs :

Une qualité très remarquable du composite est sa capacité à absorber l'énergie cinétique. Il peut absorber des forces très importantes d'une manière constante parfaitement maîtrisée et sans générer de rebonds. Selon le type de nids d'abeilles, l'énergie absorbée couvre une large plage de 0,15 à 3,5 millions de J/m³.

1-2-4 Adaptabilité :

Le composite est souvent utilisé sous forme de panneaux de forme plane, mais sa structure, ses qualités propres et ses nombreuses possibilités de mise en œuvre lui permettent d'apporter une réponse technique à de très nombreux problèmes de forme et de structure, de la cloison décorative courbe à la coque autoporteuse de grandes dimensions.

En plus les matériaux composites ont les avantages suivants :

- Grande résistance à la fatigue.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone).
- Insensibles aux produits chimiques "mécaniques " comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.

1-3 Evaluation des gains :

1-3-1 La théorie :

C'est par exemple l'étude réalisée par la société Lockheed (USA) pour la conception d'un gros porteur ayant pour principales caractéristiques: charge utile 68 tonnes, transportée sur 8 300 km. Elle a fourni les résultats significatifs suivants :

-Pour un appareil en construction métallique classique :

Masse totale au décollage : 363 tonnes.

Masse de la structure : 175 tonnes.

-Pour un appareil en construction composite:

Masse totale au décollage : 245 tonnes

Masse de la structure : 96 tonnes.

(Moins 33 % pour la même mission).

Une telle différence s'explique par des conséquences en cascade que l'on peut illustré comme suit (figure 3-1) :

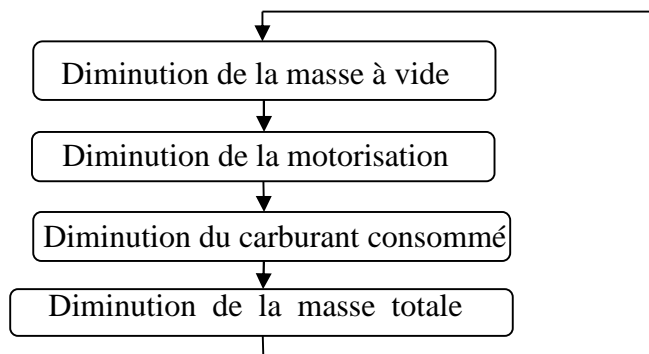


Figure (1-3) : Evaluation des gains sur le poids.

1-3-2 La pratique :

En réalité, l'introduction des matériaux composites dans les appareils est limitée à certaines parties de la structure ; elle se fait de plus en coup par coup et de façon progressive au cours de la durée de vie d'un appareil (opérations de revalorisation). On est alors amené à prendre en considération différentes notions :

➤ Notion de taux d'échange : c'est le coût du kilogramme gagné lorsqu'on substitue une pièce métallique classique par une pièce composite. Pour la substitution alliage léger-carbone/époxyde, ce coût est de l'ordre de 800 FF (1984) par kilogramme lorsque la pièce est dimensionnée en rigidité (déformations analogues pour une même sollicitation). Il est amorti en moins d'une année par le gain en charge payante.

➤ Notion de gain en charge payante : c'est le gain en passagers, en fret, ou en carburant : par exemple pour un gros porteur :

Un avion de 150 tonnes, 250 passagers comporte 60 tonnes de structure ; une introduction progressive de 1600 kg de matériaux composites à hautes performances amène à un gain de 16 passagers avec leurs bagages.

1-4 Constitution d'un matériau composite :

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) Et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène.

Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Des produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite. Qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

Pour les composites, on construit sa structure à la demande :

- La nature, la texture et la forme du renfort,
- Le taux de renforcement,
- La nature de la résine et des charges ou additifs,

- La qualité de l'interface renfort-matrice,
- La géométrie de la pièce à réaliser,
- Le procédé de mise en œuvre utilisé.

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise.

1-4-1 Les résines :

Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Trois grandes familles de résines existent : les résines thermoplastiques, les résines thermodurcissables et les résines thermostables.

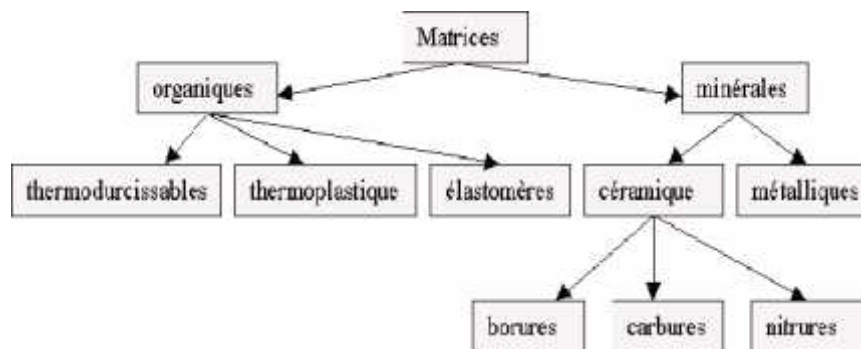


Figure (1-4) : Les différentes familles de matrice.

1-4-2 Les charges et additifs :

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût. L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du point fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre.

Les charges incorporées sont soit renforçantes pour l'amélioration des caractéristiques mécaniques de la résine, ou non renforçantes pour diminuer le coût des résines en conservant leurs performances.

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelque % et moins) et interviennent comme :

- ✓ Lubrifiants et agents de démoulage,
- ✓ Pigments et colorants,

- ✓ Agents anti-retrait,
- ✓ Agents anti-ultraviolets.

1-4-3 Les renforts (fibres et tissus) :

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques: rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenu au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en oeuvre, faible coût, etc. En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses : végétale, minérale, artificielle, synthétique, etc. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous formes de fibres ou formes dérivées. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- Sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- Sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- Sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

Des fibres courtes particulières, les whiskers, dont les caractéristiques mécaniques sont élevées, sont également développées. Leur utilisation est toutefois limitée du fait des difficultés de fabrication.

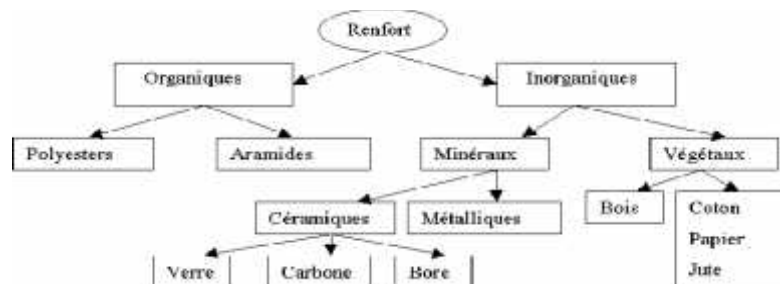


Figure (1-5) : Principaux matériaux de renfort.

1-4-4 Les principales fibres :

1-4-4-1 Les fibres de verre :

Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.

1-4-4-2 Les fibres de carbone :

Le graphite a une structure hexagonale d'atomes de carbone, disposés en plans cristallographiques parallèles (figure 1-6). Ces plans décalés de telle sorte qu'un atome de carbone se projette au milieu d'un hexagone des plans voisins. Les liaisons entre atomes voisins de même plan sont fortes, et donnent au graphite des propriétés mécaniques élevées dans la direction parallèle aux plans cristallographiques. L'étude théorique des liaisons prévoit dans cette direction un module d'Young de 1200 gpa et une résistance à la rupture de 20000 Mpa. D'autre part, la masse volumique faible (inférieur à 2000 kg/m³) conduit à des propriétés mécaniques spécifiques théoriques remarquablement élevées [5].

1-4-4-3 Les fibres aramides :

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont généralement connues sous le nom de « Kevlar », nom commercial de la fibre mise au point par Dupont de Nemours (USA), et commercialisée en 1972. L'élaboration des fibres est effectuée par synthèse à basse température (-10° C), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

1-4-4-4 Les fibres céramiques :

Diverses fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) Peuvent être élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production sont :

- Les fibres de bore (B),
- Les fibres de bore (B)-carbure de bore (B₄C),
- Les fibres de carbure de silicium (sic),
- Les fibres de bore-carbure de silicium, appelées borsic.

1-4-4-5 Les fibres synthétiques thermostables :

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse, et qui conservent leurs caractéristiques mécaniques à températures élevées.

Associées à des résines thermostables, elles permettent d'obtenir des matériaux dont les caractéristiques mécaniques en température sont conservées. Les caractéristiques mécaniques de ces fibres sont toutefois nettement plus faibles que celles des fibres usuelles. Elles sont utilisées dans les isolants électriques et thermiques, les protections

thermiques : boucliers de missiles, cônes de rentrée de véhicule spatial, etc. Parmi ces fibres, nous avons :

- Le Kermel élaboré par Rhône-Poulenc,
- Le Nomex développé par Dupont de Nemours,
- Le Kynol fabriqué par Nippon kynol,
- La fibre PBI (polybenzimidazole) élaboré par Hoechst-Celanese,
- La fibre Apyeil de Unitika Ltd.

Autres fibres :

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte de rupture, excepté les fibres métalliques.

Parmi ces fibres nous avons [5]:

- Les fibres d'origine végétale : le bois, le sisal, le jute, le lin, etc.,
- Les fibres d'origine minérale : l'amiante, la silice,
- Les fibres synthétiques : polyester, polyamides, polyéthylène,
- Les fibres métalliques : acier, cuivre, aluminium.

1-5 Architecture des matériaux composites :

1-5-1 Les monocouches :

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

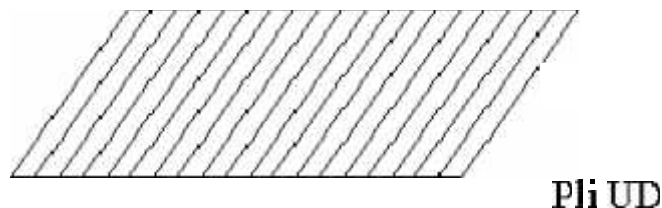


Figure (1-6) : pli unidirectionnelle.

1-5-2 Les stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

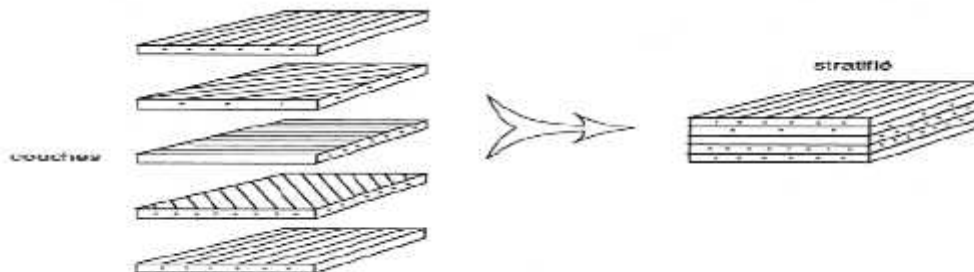


Figure (1-7) : Constitution d'un stratifié.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

1-5-2-1 Notation :

Un stratifié possédant l'empilement (90, -45, -45, 90)s est un stratifié avec 4 couches dans les directions 90°, -45°, -45° et +90°, l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

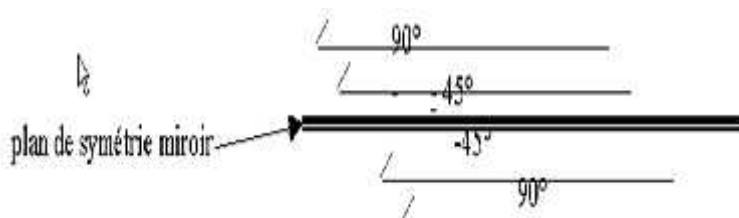


Figure (1-8) : stratifié.

On pourra avoir des stratifiés de type :

- Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$
- Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90°.

1-5-3 Les sandwichs :

Ce sont des Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

$$10 \leq e_c / e_p \leq 100$$

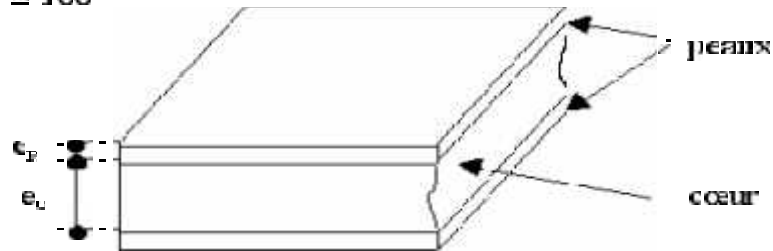


Figure (1-9) : matériau sandwich.

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



Figure (1-10) : Matériaux sandwichs à âmes pleines.



Figure (1-11) : Matériaux sandwichs à âmes creuses.

1-6 Applications des matériaux composites :

L'éventail des applications est très large, et le tableau suivant nous donne une idée sur l'utilisation des matériaux composites dans les domaines suivants :

Electricité et électronique	Batiment et travaux publics
Isolants de construction Electrique, Supports de disjoncteurs, Supports des circuits imprimés, Antenne, radômes,	Cellules d'habitation, Coffrages, Moules à béton, Cloisons, portes, mobilier, sanitaire
Transport routier	Mecanique générale et diverse
Pièces de carrosseries, Roues, boucliers, calandres, Arbre de transmission, Ressorts de suspension, Bouteilles de carburant gazeux,	Engrenages, coussinets, Boîtiers, carters, corps de vérins, Lances de métier à tisser, Eléments de tables traçantes, Bouteilles de gaz sous pression,
Transport spatial	Transport maritime
Corps de propulseur, Réservoirs, Tuyères, Corps de rentrée dans l'atmosphère	Embarcations de sauvetage, Engins de débarquement, Voiliers de compétition.
Transport aérien	Sports et loisirs
Avions de tourisme <tout composite>, Planeurs <tout composite>, Certaines de pièces d'avions : radôme, Volets, Pales d'hélicoptères, hélices, Arbres de transmission,	Raquettes de tennis et de squash, Cannes à pêche, javolets, Planches à voile de surfing, à roulettes, Casques de protection, Cadres de bicyclette, Clubs de golf, avirons.

Tableau (1-1) : Applications des matériaux composites [2].

1-7 Applications aéronautiques :

1-7-1 Les gros porteurs :

Avion européen Airbus A - 310 – 300 [7]

-Masse de la structure : 44.7 tonnes,

-Masse de composites : 6.2 tonnes ; composites à hautes performances : 1.1 tonne

Pourcentage de composites : 13.8 % de la masse de la structure.

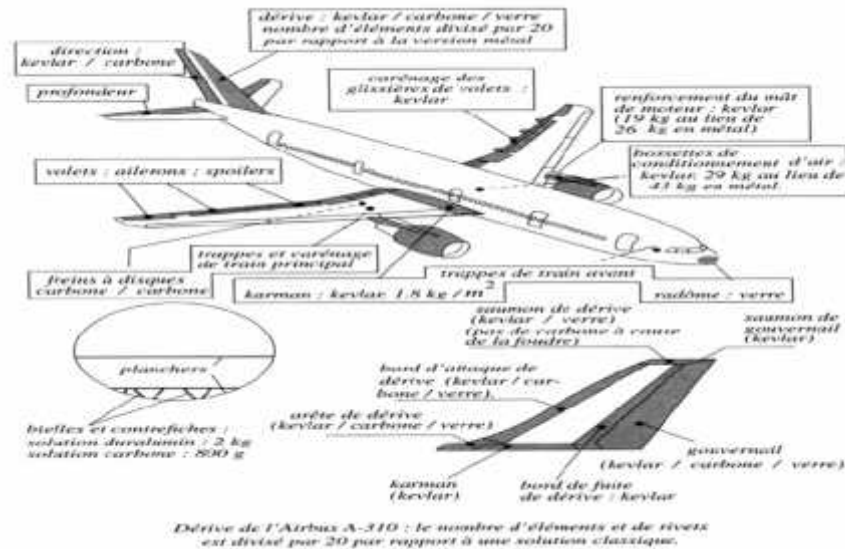


Figure (1-12) : Eléments en composite de l'Airbus A - 310 – 300.

1-7-2 Les moyens porteurs :

Avion de transport ATR 72. Aérospatiale (FRA) et Aeritalia (ITA)

Masse totale en charge : 20 tonnes,

Pourcentage de matériaux composites supérieur à 25 % de la masse de la structure,

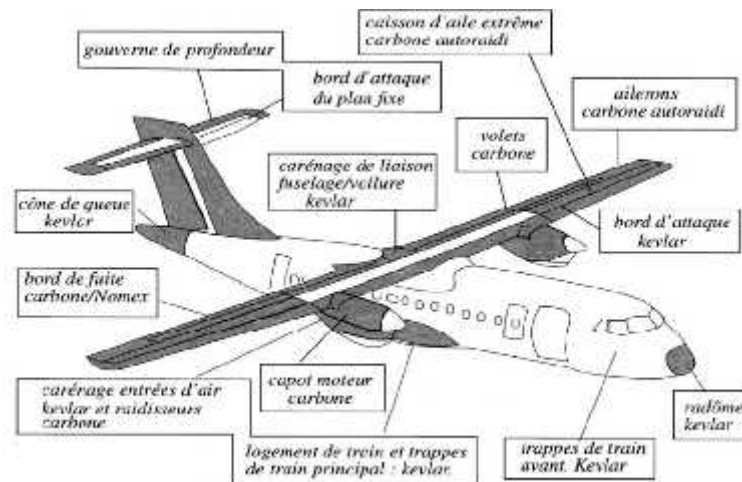


Figure (1-13) : Eléments composites sur l'avion ATR 72.

1-7-3 Les avions de combat :

Avion Mirage 2000 A.M.D.-B.A. (FRA) [7].

Masse de matériaux composites : 65 kg.

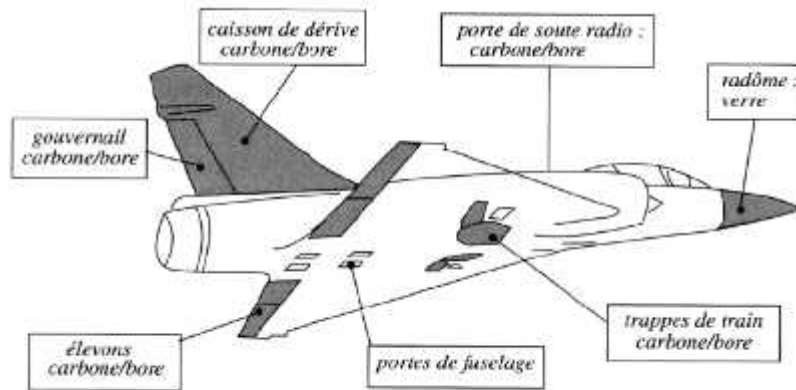


Figure (1-14) : Les zones composites sur l'avion Mirage 2000.

1-7-4 Les hélicoptères :

Evolution de la masse des matériaux composites sur les hélicoptères de l'Aérospatiale (FRA).

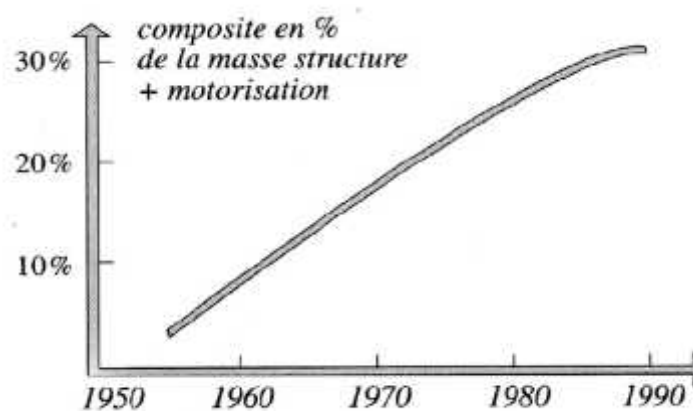


Figure (1-15) : Evolution de la masse des composites sur les hélicoptères.

En comparaison d'une construction métallique conventionnelle, on peut noter des gains de masse : de 15 % sur les structures secondaires, Jusqu'à 50 % pour les pièces travaillantes, comme des éléments de transmission de puissance et de commande.

La figure suivante (figure 1-17) Montre les éléments composites sur un hélicoptère :

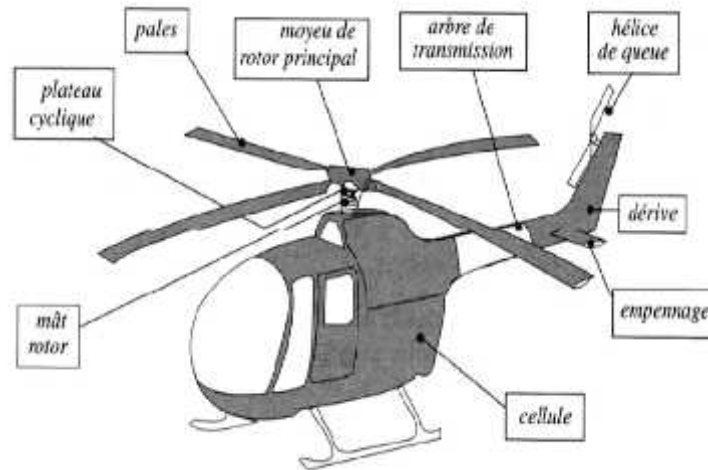


Figure (1-16) : Les zones composites sur hélicoptère.

Conclusion :

Ce chapitre nous a permis d'avoir un aperçu global sur les matériaux composites. Nous avons vu leurs définitions, leurs constituants et leurs architectures. Les matériaux composites sont différents des matériaux classiques car ils ont d'excellentes propriétés mécaniques, ainsi que des géométries différentes. La connaissance de quelques éléments mécaniques des composites est indispensable pour aborder par la suite le problème de vibration de la poutre composite. Dans le chapitre qui suit, nous allons mettre la loupe sur la théorie des stratifiés.

Aéroélasticité et la théorie générale des stratifiés

Introduction

Les problèmes d'aéroélasticité n'existeraient pas si les structures, en particulier celles des avions étaient parfaitement rigides. Parmi les phénomènes d'aéroélasticité que risque de rencontrer un avion, le flottement (flutter), il est probablement le plus complexe et potentiellement le plus désastreux de tous. Pour étudier l'influence des phénomènes d'aéroélasticité sur les structures en composites, il faut d'abord dégager les grandes lignes de l'étude de comportement mécanique d'une structure complexe (étude vibratoire). Cette étude comportera deux phases :

- l'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelée comportement micromécanique du matériau composite. Cette étude est assez souvent désignée par microanalyse du matériau composite.
- l'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs couches, est désignée généralement par le comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

L'analyse des structures simples (poutre et plaque) peut généralement être abordée par une méthode analytique. Alors que l'étude de structure complexe nécessite l'utilisation de méthodes approximatives telle que la MEF. L'analyse du comportement mécanique d'une structure en matériau composite est schématisée sur la (figure 2-1).

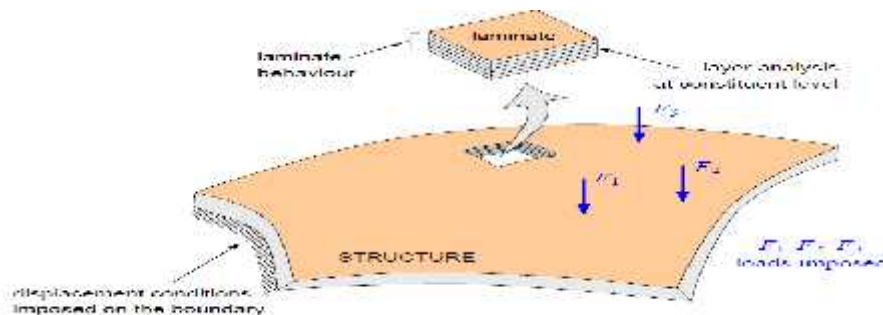
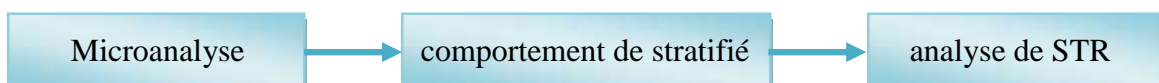


Figure (2-1) : Processus d'étude des matériaux composites [5].

Processus d'étude :



2-1 Aéroélasticité :

L'aéroélasticité est la science qui étudie l'interaction entre les forces d'inertie, élastique et aérodynamique. Il a été défini par Collier en 1947 comme « L'étude de l'interaction mutuelle qui se déroule dans le triangle des forces d'inertie, élastique et aérodynamiques agissant sur les éléments de structure exposée à un courant d'air, et l'influence de cette étude sur la conception ».

Deux ensembles peuvent être définis : l'aéroélasticité statique et l'aéroélasticité dynamique. L'étude du flottement (ou flutter) fait partie de l'aéroélasticité dynamique [6].

2-2 Définition de flottement :

On le définit comme étant une auto-excitation dynamique d'une structure élastique. Il correspond à l'apparition d'une oscillation divergente de la structure soumise aux forces aérodynamiques. Son étude revient à déterminer les conditions de stabilité dynamique de cette structure associée aux phénomènes aérodynamiques. Cette instabilité est souvent catastrophique car elle conduit à une rupture localisée ou globale de la partie sollicitée. Dans ce phénomène, la vitesse critique de flottement correspond à la vitesse d'apparition du flottement.

2-3 Les types du flottement :

Les types les plus dangereux sont :

- La divergence : ou flottement à fréquence nulle.
- Le flottement de décrochage : qui se produit lorsqu'il y a décollement de la couche limites, en particulier à un grand angle d'incidence.
- Le flottement des modes couplés : dans le quelle les fréquences des oscillations de deux ou plusieurs modes convergent vers une même valeur provoquant ainsi l'instabilité de la structure. Ce type de flottement est le plus fréquent sur les structures d'avion.

2-4 Prévention du flottement :

Dans le passé la prévention contre le flottement reposait sur des règles empiriques, tout d'abord on se concentrait uniquement sur le dimensionnement statique de l'avion. Puis les constructeurs effectuaient des contrôles. Si la vitesse de flottement s'aurait inférieure à celle requise, des corrections sur la masse et la rigidité étaient apportées conduisant ainsi à des structures lourdes et trop rigides, ce qui est un grand défaut pour des structures aéronautiques. Ceci est une méthode révolue depuis longtemps.



Une autre méthode qui permet actuellement une analyse de flottement plus complète est de construire des modèles de la structure à une échelle réduite et d'utiliser la soufflerie. Malheureusement, ces modèles sont trop onéreux à réaliser puisqu'ils doivent être une réplique reproduisant aussi fidèlement que possible, non seulement la géométrie externe de l'avion, mais également la distribution de la masse et de rigidité. Pour ces raisons plutôt économiques que techniques, les essais expérimentaux en soufflerie ne sont que très rarement utilisés.

Avec les machines de calculs très rapides et le développement d'algorithmes efficaces, l'analyse théorique du problème de flottement a réalisé un grand pas en avant. On utilise souvent la méthode des éléments finis afin d'avoir des informations sur la distribution de masse et de rigidité et sur les modes d'oscillations et des méthodes de calcul aérodynamique. Il est ainsi possible de construire des structures optimales et qui ne flottent pas [6].

2-5 Conditions de compatibilité et le champ de déplacement :

Il existe un lien entre déplacements et déformations, et entre les déformations elles-mêmes.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_1 \partial x_3} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

2-5-1 Expressions générales du champ de déplacement :

L'expression de déplacement en tout point M d'une poutre, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynôme en z , généralement limitée au degré trois, et de coefficients dépendant de (x, y) . Le champ de déplacement est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\psi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y)
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

Cette forme du champ de déplacement répond aux conditions de compatibilité des déformations (2-1), et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section



droite des poutres et plaques lors de la déformation .dans le cas d'un problème de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans la relation (2-2).

Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (2-2), en série de la variable z a coefficients en (x, y) , a partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$. Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par :

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u(x, y, 0) \\ v_0(x, y) &= v(x, y, 0) \\ w(x, y) &= w(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2-3)$$

2-5-2 Schémas du premier degré :

Les schémas les plus simples et les plus utilisées (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchoff) se réduit a des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2-4)$$

Les schémas du premier degré permettent de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas ou un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer au 2^e degré, voire au 3^e degré.

2-6 Champ de déformation :

Le champ des déformations se déduit de l'équation (2-2)

$$\begin{aligned} v_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial w_x}{\partial x} \\ v_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial w_y}{\partial y} \\ v_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \xi_z + 2z\xi_z \\ \chi_{xy} = 2v_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \\ \chi_{xz} = 2v_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \xi_x \right) + z \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial x} + 2\xi_x \right) + z^2 \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial x} + 3w_x \right) \\ \chi_{yz} = 2v_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-5)$$



2-7 Champ des contraintes :

2-7-1 Illustration des contraintes dans un cube élémentaire :

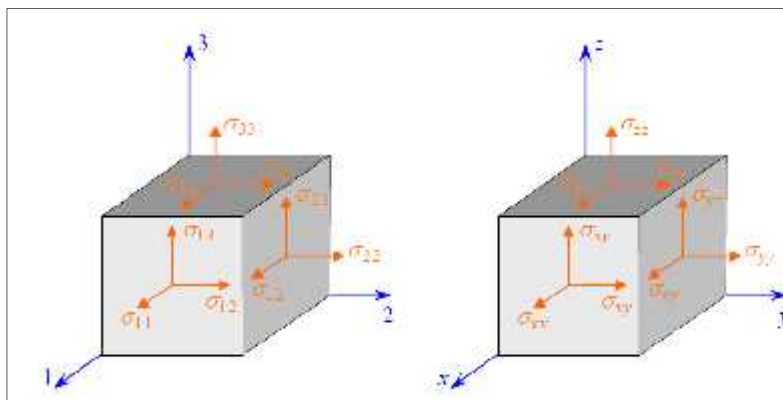


Figure (2-2) : Représentation des contraintes sur les faces d'un cube élémentaire.

2-7-2 Notation :

Le champ de contraintes au point M d'un solide est un tenseur symétrique noté $\sigma(M)$

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_R$$

Comme $\sigma(M)$ est symétrique, $\sigma_i = \sigma_j$ pour tout $i \neq j$

Nous utiliserons indifféremment les deux notations $(1,2,3) = (x, y, z)$.

L'état des contraintes en un point M de stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations, le champ de contrainte rapportée aux axes de référence du stratifié ($\bar{0}$) s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{zz} \\ \dagger_{yz} \\ \dagger_{xz} \\ \dagger_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{xx} \\ v_{yy} \\ v_{zz} \\ x_{yz} \\ x_{xz} \\ x_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2-6}$$

Ou C'_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k .

Dans le cas général, le champ des déformations est donné par les expressions (2-5).

Il en résulte que les contraintes dans la couche k sont des polynômes en z . La théorie des stratifiés a pour objet de simplifier le problème a trois dimensions (x, y, z) , la réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur, cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments.



2-7-3 Simplification des tenseurs de rigidité dans le cadre de la théorie des stratifiés:

La théorie élémentaire des stratifiés fait l’hypothèse que les contraintes normales σ_z sont négligeables dans le volume de la poutre, par rapport aux autres composantes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x$.

Avec l’hypothèse précédente, la relation (2-6) contrainte-déformation s’écrit [9]:

$$\begin{Bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ 0 \\ \dagger_{yz} \\ \dagger_{xz} \\ \dagger_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{xx} \\ v_{yy} \\ v_{zz} \\ x_{yz} \\ x_{xz} \\ x_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2-7}$$

Quelle simplification de tenseur de rigidité :

➤ Matériau orthotrope :

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère.

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

9 constantes d’élasticité

➤ Matériau unidirectionnel :

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l’axe O . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{22}-C'_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

5 constantes d’élasticité



➤ Matériau isotrope :

Le matériau isotrope est un matériau possédant même propriétés dans toutes les directions.

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{11} & C'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{12} & C'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{11}-C'_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{11}-C'_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C'_{11}-C'_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

2 constantes d'élasticité

2-7-4 Expression des constantes de rigidités d'un composite orthotrope dans les axes

principaux en fonction des paramètres d'ingénieries :

Les constantes de rigidités sont :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1-\nu_2 \nu_3}{E_2 E_3} & C_2 &= \frac{1-\nu_1 \nu_3}{E_1 E_3} & C_3 &= \frac{1-\nu_1 \nu_2}{E_1 E_2} \\ C_4 &= \frac{\nu_1 - \nu_3 \nu_1}{E_1 E_3} & C_5 &= \frac{\nu_1 - \nu_1 \nu_2}{E_1 E_2} & C_6 &= \frac{\nu_2 - \nu_2 \nu_1}{E_1 E_2} \end{aligned} \quad (2-11)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= G_2 & C_5 &= G_1 & C_6 &= G_1 \\ &= \frac{1-\nu_1 \nu_2 - \nu_2 \nu_3 - \nu_1 \nu_3 - 2\nu_2 \nu_3 \nu_1}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned} \quad (2-12)$$

Avec :

E_1, E_2, E_3 : Modules de YOUNG du composite dans les directions 1 ,2 et 3 ;

G_{12}, G_{13}, G_{23} : Module de cisaillement du composite

$\hat{\nu}_{12}, \hat{\nu}_{13}, \hat{\nu}_{23}$: Coefficient de poisson du composite.

Il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson : $\frac{E_i}{\nu_i} = \frac{E_j}{\nu_j}$ (2-13)



2-7-5 Expression des constantes de rigidité d'un composite orthotrope en dehors de ses axes principaux :

La direction des fibres fait un angle θ avec la direction x de référence [5]:

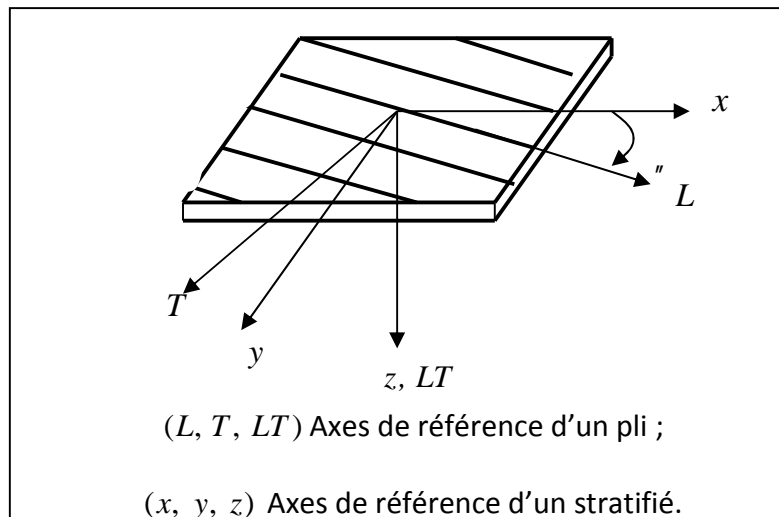


Figure (2.3) : configuration des axes.

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= C_{11} c_1^4 + C_{22} s_1^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s_1^2 c_1^2 \\
 C_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) s_1^2 c_1^2 + C_{12} (c_1^4 + s_1^4) \\
 C_{13} &= C_{13} c_1^2 + C_{23} s_1^2 \\
 C_{14} &= 0 \qquad C_{15} = 0 \\
 C_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s_1 c_1^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s_1^3 c_1 \\
 C_{22} &= C_{11} s_1^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s_1^2 c_1^2 + C_{22} c_1^4 \\
 C_{23} &= C_{23} c_1^2 + C_{13} s_1^2 \\
 C_{24} &= 0 \qquad C_{25} = 0 \\
 C_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s_1^3 c_1 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s_1 c_1^3 \\
 C_{33} &= C_{33} \qquad C_{34} = 0 \qquad C_{35} = 0 \\
 C_{36} &= (C_{11} - C_{22}) s_1 c_1 \\
 C_{44} &= C_{44} c_1^2 + C_{55} s_1^2 \\
 C_{45} &= (C_{55} - C_{44}) s_1 c_1 \\
 C_{46} &= 0 \\
 C_{55} &= C_{44} s_1^2 + C_{55} c_1^2 \\
 C_{56} &= 0 \\
 C_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] s_1^2 c_1^2 + C_{66} (c_1^4 + s_1^4)
 \end{aligned}
 \tag{2-14}$$



L'état de contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x$ et les déformations $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_x)$, correspond à l'état des contraintes planes. Les contraintes dans la couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité Q'_i suivant :

$$\begin{Bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \\ \dagger_{yz} \\ \dagger_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{xx} \\ V_{yy} \\ X_{xy} \\ X_{yz} \\ X_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

Les coefficients Q'_i sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte planes hors axes principaux. Les expressions des coefficients Q'_i de la matrice de rigidité réduite de la couche k sont:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1 c_1^4 \theta + Q_2 s_1^4 \theta + 2(Q_1 + 2Q_6) s_1^2 \theta c_1^2 \theta \\ Q_1 &= (Q_1 + Q_2 - 4Q_6) s_1^2 \theta c_1^2 \theta + Q_1 (c_1^4 \theta + s_1^4 \theta) \\ Q_1 &= (Q_1 - Q_1 - 2Q_6) s_1^3 \theta c_1 + (Q_1 - Q_2 + 2Q_6) s_1^3 \theta c_1 \\ Q_2 &= Q_1 s_1^4 \theta + 2(Q_1 + 2Q_6) s_1^2 \theta c_1^2 \theta + Q_2 c_1^4 \theta \\ Q_2 &= (Q_1 - Q_1 - 2Q_6) s_1^3 \theta c_1 + (Q_1 - Q_2 + 2Q_6) s_1^3 \theta c_1 \\ Q_6 &= [Q_1 + Q_2 - 2(Q_1 + Q_6)] s_1^2 \theta c_1^2 \theta + Q_6 (c_1^4 \theta + s_1^4 \theta) \end{aligned} \quad (2-16)$$

Les coefficients Q_i sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte planes dans les axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\hat{\nu}_{12} E_2}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2-17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} E_{LT} &= E_f V_f + E_m V_m & \hat{\nu}_{LT} &= \hat{\nu}_f V_f + \hat{\nu}_m V_m \\ E_T &= \frac{I}{\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}} & G_{LT} &= \frac{I}{\frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

E_f, E_m : Modules de YOUNG des fibres et de la matrice respectivement ;

V_f, V_m : Fractions en volume des fibres et de la matrice respectivement ;

$\hat{\nu}_f, \hat{\nu}_m$: Coefficients de POISSON des fibres et de la matrice respectivement ;

G_f, G_m : Modules de cisaillement des fibres et de la matrice respectivement ;



La 5^{ème} constante élastique est en fonction des autres constantes et peut être déterminée du fait que la matrice $[Q]$ est symétrique.

$$\hat{E}_{11} = \hat{E}_{22} ; \hat{E}_{21} = \hat{E}_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}} \tag{2-19}$$

2-8 Résultantes et moments :

2-8-1 Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \dagger_k(M) dz \tag{2-20}$$

Ou $\dagger_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane dans la couche k .

Soit dans le stratifié :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \end{bmatrix}_k dz \tag{2-21}$$

2-8-2 Résultante en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \dagger_{xz} \\ \dagger_{yz} \end{bmatrix}_k dz \tag{2-22}$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

2-8-3 Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \end{bmatrix}_k dz \tag{2-23}$$

M_x e M_y Sont les moments de flexion, et M_{xy} les moments de torsion.



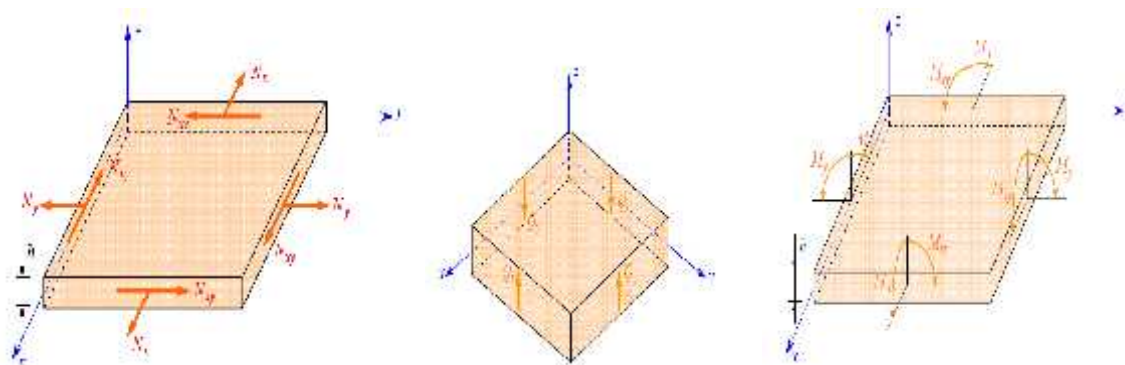


Figure (2-4) : Schématisation des résultantes en membrane et en cisaillement des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion [5].

2-9 Equation constitutive d'un stratifié :

2-9-1 Notation :

Le stratifié constitué de n couches numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne et choisie comme plan de référence (O) et l'axe O_z est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches, chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

Les notations utilisées sont reportées sur la figure (2-6).

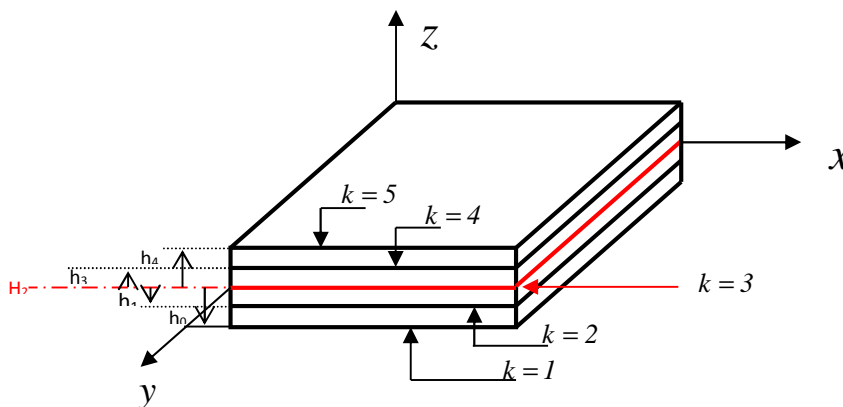


Figure (2-5) : Géométrie du stratifié

2-9-2 L'équation constitutive d'une poutre stratifiée :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée, exprime les résultantes en membrane et en cisaillement et les moments de flexion et de torsion en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (2-21), (2-22) et (2-23), suivant une seule écriture matricielle sous la forme:



$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ 0 \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ 0 \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

Et: $Q_z = 0, \sigma_z = 0$ (2-25)

Les termes des matrices peuvent être exprimés en introduisant; l'épaisseur e_k , et la cote z_k du centre de la couche k , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \quad (2-26)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h^2_k - h^2_{k-1})(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \quad (2-27)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h^3_k - h^3_{k-1})(Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (e_k z^2_k + \frac{e^3_k}{12}) \quad (2-28)$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(C'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (C'_{ij})_k e_k \quad (2-29)$$

Les coefficients A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} ET F_{ij} de l'équation constitutive d'un stratifié, s'expriment donc à partir des constantes de rigidité des couches .

2-10 Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré :

2-10-1 La relation fondamentale de la dynamique [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial t} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial t} \sigma_x + \mathcal{F}_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial t} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial t} \sigma_y + \mathcal{F}_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial t} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial t} \sigma_z + \mathcal{F}_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (2-30)$$

$(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)$ sont les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, champ magnétique...)

(a_x, a_y, a_z) Sont les composantes du vecteur accélération du point M .

ρ Est la masse volumique en un point M .



En introduisant les relations (2-6) et (2-24) dans la relation (2-30). La relation fondamentale pour un stratifié s'écrit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial y} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2-32)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} + F_z + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2-33)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2-34)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_x \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2-35)$$

Les grandeurs ρ_s, R, I_x sont déterminés pour un stratifié de masse volumique ρ_K pour chaque couche par :

$$\rho_s = I_1 = \sum_{K=1}^n \rho_K (h_K - h_{K-1}) \quad (2-36)$$

$$R = I_2 = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n \rho_K (h_K^2 - h_{K-1}^2) \quad (2-37)$$

$$I_x = I_3 = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^n \rho_K (h_K^3 - h_{K-1}^3) \quad (2-38)$$

2-10-2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane :

$$A_1 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x} + A_6 \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 v_c}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 v_c}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x} + B_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_1 + B_6) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x} + B_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2-39)$$

$$A_1 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_6 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 v_c}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_1 + B_6) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x} + B_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x} + B_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2-40)$$

2-10-3 Relations fondamentales relatives aux résultantes de cisaillement :

$$F_5 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_4 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x} \right) + F_4 \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2-41)$$

2-10-4 Relations fondamentales relatives aux moments :

$$B_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x} + B_6 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_1 + B_6) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x} + B_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x} + D_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_1 + D_6) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_5 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_4 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2-42)$$



$$\begin{aligned}
 & B_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_1 + B_6) \frac{\partial^2 u_0}{\partial} + B_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial} + B_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\
 & (D_1 + D_6) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_4 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial} \right) - \\
 & F_4 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_x \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2-43}$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence des forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces.

2-11 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet. Dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche des solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés.

2-11-1 Energie de déformation :

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant l'expression :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_x \gamma_x + \sigma_y \gamma_y + \sigma_x \gamma_x) d d d \tag{2-44}$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements u_0, v_0, w_0 par :

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \iint \left\{ A_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial} \right)^2 + 2A_1 \frac{\partial u_0}{\partial} \frac{\partial v_0}{\partial} + A_2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial} \right)^2 + 2 \left(A_1 \frac{\partial u_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial v_0}{\partial} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial} + \frac{\partial v_0}{\partial} \right) + \right. \\
 A_6 \left(\frac{\partial u_0}{\partial} + \frac{\partial v_0}{\partial} \right)^2 - B_1 \frac{\partial u_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - B_2 \frac{\partial v_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \\
 2B_1 \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial} + \frac{\partial v_0}{\partial} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] - 2B_2 \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial} + \frac{\partial v_0}{\partial} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \right] - \\
 4B_6 \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \left(\frac{\partial u_0}{\partial} + \frac{\partial v_0}{\partial} \right) + D_1 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \right. \\
 \left. D_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial} + 4D_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \right)^2 \left. \right\} d d \tag{2-45}
 \end{aligned}$$

Dans le cas du stratifié symétrique, les termes B_i de couplage membrane-flexion sont nul, la formule d'énergie de déformation se réduit suivant :

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \iint \left[A_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial} \right)^2 + 2A_1 \frac{\partial u_0}{\partial} \frac{\partial v_0}{\partial} + A_2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial} \right)^2 + 2 \left(A_1 \frac{\partial u_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial v_0}{\partial} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\partial v_0}{\partial} \right) \right] \partial \partial + \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. D_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial} + 4D_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial} \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \right)^2 \right] d d \tag{2-46}
 \end{aligned}$$



L'énergie de déformation apparait comme la somme de deux termes :

Fonction uniquement des déplacements u_0, v_0 de membrane, l'autre fonction uniquement de déplacement transverse w_0 . Dans le cas de probleme de flexion pure, le premier terme est réduit a une constante C, donc :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d x d y + C \quad (2-47)$$

Pour un stratifié orthotrope : $D_1 = D_2 = 0$

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d x d y + C \quad (2-48)$$

2-11-2 Travail des forces exercées sur le stratifié :

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inferieure et supérieure du stratifié. la variation du travail de ces actions s'écrit [15], [16]:

$$\delta W_p = \iint \left[\sigma_z \left(\frac{n}{2} \right) - \sigma_z \left(-\frac{n}{2} \right) \right] \delta w_0 d x d y \quad (2-49)$$

En introduisant les contraintes q , donc :

$$W_p = \iint q w_0 d x d y \quad (2-50)$$

2-11-3 L'énergie potentielle :

$$U = U_d - w_f$$

Doc pour un stratifié orthotrope, symétrique :

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - q w_0 \right] d x d y + C \quad (2-51)$$

2-11-4 Energie cinétique d'un stratifié :

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] d x d y d z$$

En négligeant les dérivées par rapport au temps des rotations, puis en intégrant en z suivant l'épaisseur du stratifié, l'énergie se réduit a :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] d x d y \quad (2-52)$$



2-11-5 Fonction de Hamilton ou Hamiltonien :

Pour résoudre des problèmes de mécanique, on utilise des principes variationnels faisant intervenir la fonction de Hamilton, que l'on désigne le plus souvent sous le terme de « Hamiltonien ». Pour arriver à comprendre le sens de cette fonction, considérons un problème dépendre du temps t et qui admet le Lagrangien [12], [13] :

$$\mathcal{L} = E_c - U = E_c - U_d + W_p \tag{2-53}$$

E_c : Energie cinétique

U : L'énergie potentielle

Considérons le mouvement de notre système matériel entre les instants t_0 et t_1 , le point figuratif q de coordonnées q_i décrit un arc de courbe A_1, A_2 de l'espace de configuration.

Considérons maintenant l'intégrale d'action, $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$, que l'on nome action Hamiltonienne.

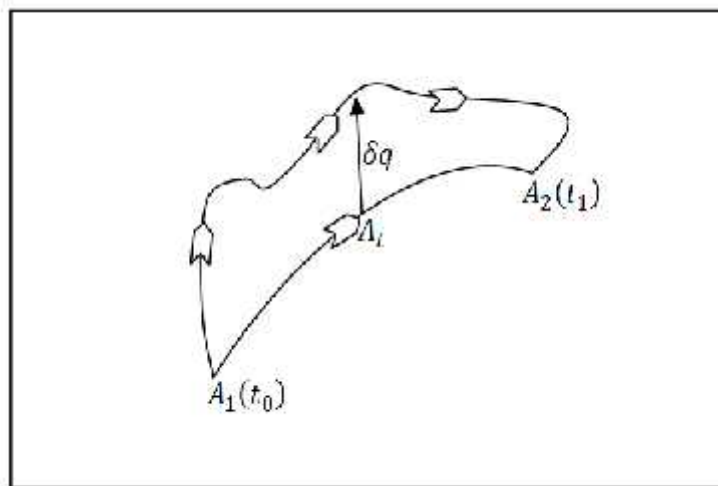


Figure (2-6) : Trajectoire réel et virtuel [12].

Imaginons un autre parcours pour q entre A_1 et A_2 voisin du parcours vrai, et définie par la variation virtuelles δq .

Le principe de Hamilton : un système se meut d'une configuration a une autre de telle façon que la première variation d'action entre trajectoire virtuelle infiniment voisine ayant les même extrémités dans l'espace et dans le temps soit nulle.

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = 0 \tag{2-54}$$



2-11-6 Principe de Ritz :2-11-6-1 Généralité :

Les méthodes d'approximations sont utilisées lorsque les solutions exactes du problème de la mécanique des solides déformables ne peuvent être trouvées. Le principe générale de l'approximation d'une solution $u(M)$ consiste à rechercher la meilleure approximation, que nous noterons $\tilde{u}(M)$. Satisfaisant au mieux les conditions physiques auxquelles obéit la solution $u(M)$ sur son domaine d'étude [5].

Parmi les méthodes d'approximation, la méthode de Ritz, basée sur une approche variationnelle, fournit une méthode efficace pour obtenir des solutions approchées au problème de la mécanique des solides déformables. La méthode de Ritz consiste à rechercher une approximation appartenant au sous-espace de fonction de base $X_i(M)$ sous la forme :

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n A_i X_i(M)$$

Les fonctions X_i sont des fonctions connues, choisies a priori et dont l'ensemble constitue la base fonctionnelle. Les coefficients A_i , à déterminer, sont appelés les coordonnées généralisées. Les fonctions de base X_i doivent satisfaire les conditions de continuité, les déplacements imposés aux frontières, et forment une base fonctionnelle complète pour assurer les conditions de convergence de l'approximation. Les fonctions de base doivent également être dérivable à un ordre au moins égal à celui correspondant aux équations différentielles. L'approximation recherchée est alors celle qui rend extrémale l'énergie approchée :

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}} dt \right] = 0$$

Cette approximation est caractérisée par un extrémum relatif. L'énergie approchée apparaît donc sous forme d'une fonction des coefficients A_i et l'approximation recherchée est caractérisée par les n conditions de stationnarité de $\tilde{\mathcal{L}}$ par rapport aux coefficients A_i , suivant :

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_i} = 0 \quad (2-55)$$

Remarque : $\tilde{\mathcal{L}} = 0$ Pour le cas statique.

L'énergie s'écrit sous une forme quadratique des coefficients A_i , et il en résulte que les conditions de stationnarité conduisent à un système de n équations linéaires, permettant de déterminer les n coefficients de A_i .



2-11-6-2 Convergence :

Pour assurer une convergence des solutions approchées lorsque n augmente, la base fonctionnelle X_i doit être complète. Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction $u(M)$ dans le domaine de définition, en augmentant le nombre de coordonnées généralisées. Soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u(M) - \sum_{i=1}^n A_i X_i(M)] = 0 \quad (2-56)$$

2-11-6-3 Expression des fonctions de base X_i :

Il existe deux solutions approchées, la solution par des fonctions polynomiales, et la solution par des fonctions trigonométriques et hyperboliques.

➤ La solution approchée par des fonctions polynomiales :

Nous choisissons des fonctions polynomiales de la forme :

$$X_i(M) = (x^2 - ax)^2 x^{i-1} \quad (2-57)$$

Dans le cas où $i = 1$, l'approximation (2-67) réduit à :

$$X_1(M) = (x^2 - ax)^2$$

➤ La solution approchée par des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

Cette approximation développée par D.Young, pour obtenir les fréquences propres d'une poutre isotrope et adaptée par J.M. Whitney à l'étude de la flexion des stratifiés, consiste à exprimer les solutions approchées sous la forme [5]:

$$X_i(M) = \cos \frac{\lambda_i x}{a} - c_i h \frac{\lambda_i x}{a} - \gamma_i \left(s \frac{\lambda_i x}{a} - s_i h \frac{\lambda_i x}{a} \right) \quad (2-58)$$

Conclusion :

Les éléments développés dans ce chapitre sont applicables à la résolution d'un problème quelconque d'élasticité d'un matériaux composite. Dans le cas où le problème d'élasticité peut être ramené à un problème d'élasticité à deux dimensions, les relations établies précédemment dans le cas générale se simplifient.

Nous étudions dans le chapitre suivant, les deux théories utiles pour étudier le comportement mécanique d'un stratifié.



Modélisation du comportement mécanique des stratifiés

Introduction :

La théorie de stratification porte sur le comportement mécanique des stratifiés constitués de plis à fibres longues unidirectionnelles ; on associe à chaque pli les constantes mécaniques nécessaires aux calculs (module d'élasticité, coefficient de poisson et module de cisaillement), et les paramètres géométriques tels que l'épaisseur et l'orientation du repère orthonormé lié à la couche par rapport à la direction principale du matériau stratifié.

Notre objectif est de schématiser le comportement mécanique des stratifié pour simplifier au mieux l'analyse de la structure .nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement a trois dimensions (x, y, z) a un problème de deux dimension (x, y) de moindre difficulté.

3-1 Théorie classique des stratifiés :

3-1-1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déplacements, appelé schéma de Kirchhoff du premier degré, qui est développé à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ (équation 2-4), elle utilise également un schéma du premier degré pour les déformations (équation 3-1), et fait ensuite une hypothèse supplémentaire, qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont nulles (équations 3-1):

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \chi_{xy} = 2\nu_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \chi_{xz} = 2\nu_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x = 0 \\ \chi_{yz} = 2\nu_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y = 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

Cette hypothèse implique d'après (l'équation 3-1) :

$$\epsilon_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\epsilon_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3-2)$$

Le champ des déplacements, s'écrit alors, d'après (l'équation 2-4).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) = w_0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

La déformée de la normale au plan moyen (O), est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen, l'ensemble des notations est schématisé sur la figure (3-1) [10].

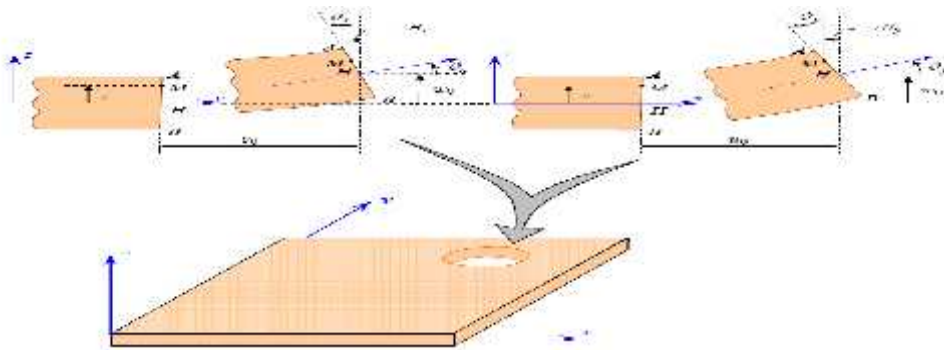


Figure (3-1) : Schématisation des déformations dans la théorie classique des stratifiés.

3-1-2 Expression du champ des déformations :

Le champ des déformations s'écrit d'après (l'équation 3-1), et en tenant compte de (l'équation 3-2) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \epsilon_{zz} &= 0 \\ \epsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_{xz} &= 0 \\ \epsilon_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$v(M) = \begin{bmatrix} v_{xx} & v_{xy} & 0 \\ v_{xy} & v_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

La matrice de déformations, se réduit à trois composantes non nulles :

$$v(M) = \begin{bmatrix} v_{xx} \\ v_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

Finalement le champ des déformations est la superposition :

✓ des déformations en membrane :

$$v_m(M) = \begin{bmatrix} v_{xx}^0 \\ v_{yy}^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

S'exprimant exclusivement, en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (\vec{O}) des points de ce plan.

✓ des déformations en flexion et torsion :

$$v_f(M) = \begin{bmatrix} v_{xx}^f \\ v_{yy}^f \\ \chi_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

S'exprimant, en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen, et de la cote z du point M. Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$v_f(M) = zK(x, y) \quad (3-9)$$

Avec :

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

La matrice $K(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion.



Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point $H(x, y, 0)$, s'expriment en fonction du déplacement transversal $w_0(x, y)$ de ce point (figure 3-1) par :

$$\epsilon_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ Suivant la direction } \vec{i} \quad (3-11)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ Suivant la direction } \vec{j}$$

Le champ des déplacements (équation 3-3), s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\epsilon_y \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\epsilon_x \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3-12)$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$v(M) = v_m(M) + v_f(M) \quad (3-13)$$

$$\text{Où } \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

Avec

$$\epsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \quad \epsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) \quad \epsilon_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (3-15)$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \quad k_{xy} = -2\frac{\partial w_0}{\partial x \partial y}(x, y)$$

Le champ des déformations s'écrit donc :

$$v(M) = v(x, y, z) = v_m(x, y) + zK(x, y) \quad (3-16)$$

Les fonctions $v_m(x, y)$ et $K(x, y)$, ne dépendent que des coordonnées (x, y) du point H du plan moyen du stratifié [10].



3-1-3 Champ des contraintes :

3-1-3-1 Forme du champ des contraintes :

Le champ des contraintes, est obtenu à partir de la relation (2-15). Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned}
 \dagger_{xx} &= Q'_{11}v_{xx} + Q'_{12}v_{yy} + Q'_{16}\chi_{xy} \\
 \dagger_{yy} &= Q'_{12}v_{xx} + Q'_{22}v_{yy} + Q'_{26}\chi_{xy} \\
 \dagger_{xy} &= Q'_{16}v_{xx} + Q'_{26}v_{yy} + Q'_{66}\chi_{xy} \\
 \dagger_{yz} &= 0 \qquad \dagger_{xz} = 0 \qquad \dagger_{zz} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3-17}$$

Le tenseur des contraintes en M , est donc de la forme :

$$(M) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}
 \tag{3-18}$$

Le champ des contraintes, se réduit aux seules contraintes en membrane : $\dagger_{xx}, \dagger_{yy}, \dagger_{xy}$

3-1-3-2 Expression des contraintes :

Les relations (3-17), montrent que les contraintes dans la couche k, s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \end{bmatrix}_K = Q'_K \begin{bmatrix} v_{xx} \\ v_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{3-19}$$

Avec :

$$Q'_K = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_K
 \tag{3-20}$$

$$\begin{bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} v^0_{xx} \\ v^0_{yy} \\ \chi^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{3-21}$$

Soit :

$$\dagger_k(M) = \dagger_K(x, y, z) = Q'_K v_m(x, y) + z Q'_K k(x, y)
 \tag{3-22}$$

$\dagger_k(M)$, représente la matrice des contraintes dans la couche k: $h_{k-1} \leq z \leq h_k$. La matrice de



rigidité réduite Q'_k , varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

3-1-3-3 Expression des constantes de rigidités réduites d'un composite orthotrope dans les axes principaux en fonction des paramètres d'ingénieurs :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} & Q_{12} &= \frac{\hat{\nu}_{12} E_2}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} & Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 E_{LT} &= E_f V_f + E_m V_m & \hat{\nu}_{LT} &= \hat{\nu}_f V_f + \hat{\nu}_m V_m \\
 E_T &= \frac{I}{\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}} & G_{LT} &= \frac{I}{\frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f}}
 \end{aligned}$$

E_f, E_m : Modules de YOUNG des fibres et de la matrice respectivement ;

V_f, V_m : Fractions en volume des fibres et de la matrice respectivement ;

$\hat{\nu}_f, \hat{\nu}_m$: Coefficients de POISSON des fibres et de la matrice respectivement ;

G_f, G_m : Modules de cisaillement des fibres et de la matrice respectivement ;

La 5^{ème} constante élastique est en fonction des autres constantes et peut être déterminée du fait que la matrice $[Q]$ est symétrique.

$$\hat{\nu}_{21} \cdot E_{11} = \hat{\nu}_{12} \cdot E_{22} ; \hat{\nu}_{21} = \hat{\nu}_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}} \tag{3-24}$$

3-1-3-4 Expression des constantes rigidités d'un composite orthotrope en dehors de ses axes principaux [10]:

A partir le système d'équation (2-16) les constantes de rigidités en dehors de ses axes principaux s'écrit :

$$Q^{(k)}_{11} = Q_{11}^K \cos^4 \theta^{(K)} + 2(Q_{12}^K + 2Q_{66}^K) \cos^2 \theta^{(K)} \sin^2 \theta^{(K)} + Q_{22}^K \sin^4 \theta^{(K)} \tag{3-25}$$

$$Q^{(k)}_{55} = G_{13}^K \cos^2 \theta^{(K)} + G_{23}^K \sin^2 \theta^{(K)} \tag{3-26}$$



3-1-4 Expression des résultantes et moments :

3-1-4-1 Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \dagger_k(M) dz \quad (3-27)$$

Soit dans le stratifié :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (3-28)$$

L'expression (3-27) associée à la relation (3-21) ou (3-22), conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k v_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)] dz$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q'_k v_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q'_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (3-29)$$

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] v_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y)$$

Soit en définitive :

$$N(x, y) = A v_m(x, y) + B k(x, y) \quad (3-30)$$

En introduisant les matrices :

$$A = [A_{ij}], \text{ avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (3-31)$$

$$B = [B_{ij}], \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_{ij} \quad (3-32)$$

L'expression développée des résultantes, s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xx}^0 \\ v_{yy}^0 \\ x_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

Ces équations montrent, que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}), ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane, mais sont également fonction des courbures en flexion et en torsion.



3-1-4-2 Moments de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \end{bmatrix}_k dz \tag{3-34}$$

M_x et M_y sont les moments de flexion, et M_x les moments de torsion, ils sont schématisés en figure (3-2). Le champ des moments, s'explique en introduisant l'expression (3-17) des contraintes dans l'expression (3-34), soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [zQ'_k v_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz \tag{3-35}$$

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h^2_k - h^2_{k-1}) Q'_k \right] v_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h^3_k - h^3_{k-1}) Q'_k \right] k(x, y) \tag{3-36}$$

Soit :

$$M_f(x, y) = Bv_m(x, y) + Dk(x, y) \tag{3-37}$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = [D_{ij}] \text{ Avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h^3_k - h^3_{k-1}) (Q'_{ij})_k \tag{3-38}$$

L'expression développée des moments, s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xx}^0 \\ v_{yy}^0 \\ x_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{3-39}$$

Les moments de flexion et de torsion, sont donc des fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

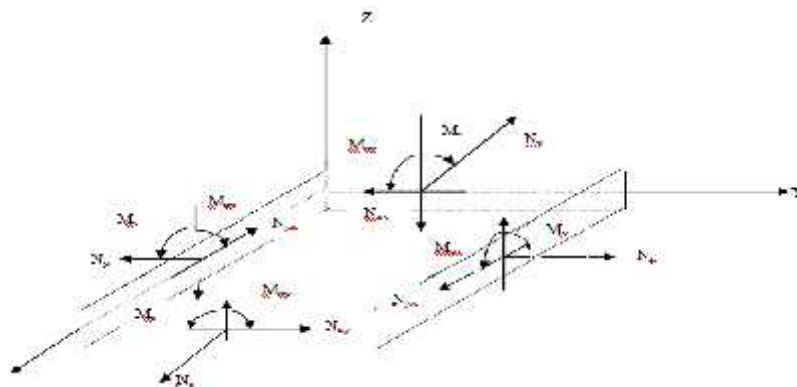


Figure (3-2) : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion [10].

3-1-5 Equation du comportement mécanique (la théorie classique des stratifiés) :

3-1-5-1 Equation constitutive (théorie classique) :

L'équation constitutive d'une poutre stratifiée, exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (3-33) et (3-39), suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_{xx} \\ 0 \\ \epsilon_{yy} \\ 0 \\ \epsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

Soit, sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ - \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & - & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ - \\ k \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

Les termes des matrices introduites, sont donnés par les expressions (3-34), (3-35) et (3-41). Ils peuvent être également exprimés en introduisant; l'épaisseur e_k , et la cote z_k du centre de la couche k , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12}) \quad (3-42)$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} de l'équation constitutive (3-41) d'un stratifié, s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues pour chaque couche en fonction des relations (3-25) et (3-26) [5].

3-1-5-2 Matrice de rigidité :

La matrice intervenant dans l'expression (3-44), est la matrice de rigidité du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point

$M_{\mathbb{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$. La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion, et B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Divers couplages peuvent être observés. Le couplage traction-cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage Membrane-flexion résulte des termes B_{11} , B_{12} , et B_{22} , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients D_{16} et D_{26} .



3-1-6 Relations fondamentales :

Les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (3-40) des stratifiés dans les équations (2-31), (2-32) et (2-34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial t} + F_x + v_{1x} - v_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial t} + F_y + v_{1y} - v_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + I_x \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3-43)$$

Les grandeurs ρ_s, I_x et R déterminer par les relations (2-36), (2-37) et (2-38).

Nous obtenons les trois relations fondamentales :

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial} + A_6 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 v_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \\ 3B_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial} - (B_1 + 2B_6) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 u_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_6 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \\ (B_1 + 2B_6) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial} - 3B_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ D_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial} + 2(D_1 + 2D_6) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \\ 3B_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial} - (B_1 + 2B_6) \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_1 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - (B_1 + 2B_6) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial} - \\ 3B_2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2} - B_2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} &= q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3-44)$$

Les équations précédente ne prennent pas en compte les force volumiques, les contraintes de cisaillement sur les faces du stratifié, et négligent les effets d'inertie en rotation .ces équations associées aux conditions imposées sur les frontières de la structure, permettent de trouver en principe les déplacements .solution de problème d'élasticité .la résolution de ces équations est toutefois complexe .et ne peut être menée de manière analytique que dans quelques cas particulières.

Une simplification importante apparait lorsque tous les termes B_i sont nuls (stratifié symétrique), dans ce cas, les équations sont découplées :

- Equation 1et 2 ne contiennent que les déplacements u_0 et v_0 .
- Equation 3 ne fait intervenir que le déplacement w_0 .



Les relations fondamentales s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
 A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + A_6 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
 A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_6 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
 D_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + 2(D_1 + 2D_6) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} &= q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \\
 I_x \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) &
 \end{aligned} \tag{3-45}$$

3-2 Prise en compte du cisaillement transverse dans la théorie des stratifiés :

3-2-1 Limitation de la théorie des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés basé sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformation dans les matériaux composites peu épais.

Par contre, dans le cas de stratifiés épais, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique, une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux module de cisaillement transverse du stratifié. Cette analyse a été initialement développée par J.M. Whitney et N.J. Pagano.

3-2-2 champs de déplacement :

Le schéma utilisé est un schéma du premier degré de la forme générale :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y)
 \end{aligned} \tag{3-46}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= u(x, y, 0) \\
 v_0(x, y) &= v(x, y, 0) \\
 w(x, y) &= w(x, y, 0)
 \end{aligned} \tag{3-47}$$

Nous avons montré que dans un schéma de premier degré, la déformé d'une normale AB du stratifié reste un segment de droite lors de la déformation .toutefois. Contrairement



à la théorie classique. Cette déformée ne reste pas normale a la déformée du plan moyen dans le cas ou l'on tient compte du cisaillement transverse.

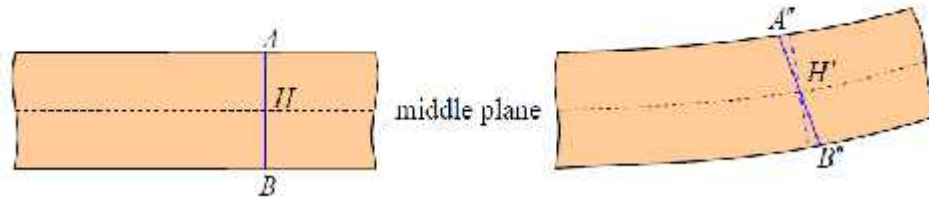


Figure (3-4) : déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré).

3-2-3 Champ de déformation :

Le champ de déformation déduit du champ de déplacement. il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 v_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \\
 v_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \\
 v_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \chi_{xy} &= 2v_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) \\
 \chi_{xz} &= 2v_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \xi_x \\
 \chi_{yz} &= 2v_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \xi_y
 \end{aligned}
 \tag{3 - 48}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$v(M) = \begin{bmatrix} v_{xx} & v_{xy} & v_{xz} \\ v_{xy} & v_{yy} & v_{yz} \\ v_{xz} & v_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

Le champ des déformations est la superposition :

✓ Des déformations en membrane-flexion :

$$v_{mf}(M) = \begin{bmatrix} v_{xx}^0 \\ v_{yy}^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{bmatrix}$$

$$v_{mf}(M) = v_m(M) + v_f(M)
 \tag{3-49}$$



✓ Des déformations en cisaillement transverse :

$$\chi_c(M) = \begin{bmatrix} \chi_{yz} \\ \chi_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \{\chi_y\} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \{\chi_x\} \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

3-2-4 Champ des contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation générale :

$$\begin{Bmatrix} \dagger_{xx} \\ \dagger_{yy} \\ \dagger_{xy} \\ \dagger_{yz} \\ \dagger_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{xx} \\ v_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \chi^0_{yz} \\ \chi^0_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3-51)$$

Les paramètres Q_i e C_i de la couche k sont rapportés aux axes de référence du stratifié. Ils s'expriment en fonction des paramètres exprimés dans les axes principaux des couches. Leurs expressions sont reportées dans les relations (2-14) et (2-16).

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x$ et des contraintes en cisaillement transverse : σ_y, σ_x . l'expression (3-51) montre que ces deux champs sont découplés.

3-2-5 Equation constitutive d'un stratifié :

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ 0 \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ 0 \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

Les coefficients des matrices sont exprimés par les équations (2-26), (2-27), (2-28) et (2-29).



3-2-6 Relation fondamentale du comportement d'un stratifié, tenant compte du cisaillement transverse :

Les relations fondamentales des stratifiés, tenant compte du cisaillement transverse, sont obtenue en introduisant l'équation constitutive (3-52) dans les relations fondamentales des poutres .soit le stratifié symétrique $B_t = 0$ e $R = 0$:

$$\begin{aligned}
 A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial} + A_6 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 v_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
 A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_1 + A_6) \frac{\partial^2 u_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_6 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial} + A_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
 F_5 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_4 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial} \right) + F_4 \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial} + D_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_1 + D_6) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - & \\
 F_5 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial} \right) - F_4 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial} \right) &= I_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \tag{3-53} \\
 D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_1 + D_6) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - & \\
 F_4 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial} \right) - F_4 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial} \right) &= I_x \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

3-2-7 Théorie modifiée des stratifié avec cisaillement transverse :

Une amélioration de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, consiste à adapter le schéma suivant :

1-la partie de l'équation constitutive relative aux résultantes en membrane et au moment n'est pas modifiée.

2-la partie relative aux résultantes en cisaillement les coefficients F_t remplacer par de nouveaux coefficients de cisaillement H_t du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & H_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ yz \\ 0 \\ xz \end{bmatrix} \tag{3-56}$$

$$H_t = k'_t F_t$$

Les paramètres k'_t sont des facteurs de correction en cisaillement, à déterminer.

La relation inverse exprimant les déformations moyennes en fonctions des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ yz \\ 0 \\ xz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_4 & K_4 \\ K_4 & K_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} \tag{3-57}$$



La matrice H_i et K_i sont inverses l'une de l'autre par exemple :

$$H_4 = \frac{K_4}{\Delta K}, H_4 = H_5 = -\frac{K_4}{\Delta K}, H_5 = \frac{K_5}{\Delta K}, \Delta K = K_4 K_5 - K_4^2 \quad (3-58)$$

L'équation constitutive s'écrit donc sous forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

Le facteur de correction en cisaillement K'_i dans le cas d'une poutre homogène isotrope égale $\frac{2}{3}p \quad i,j = 4,5$ [5].

Le facteur de correction en cisaillement K'_i dans le cas d'une poutre orthotrope égale $5/6p \quad i,j = 4,5$.

Conclusion :

La théorie classique des stratifiés, basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations dans les matériaux composites stratifiés peu épais, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. La validité de la théorie des stratifiés a pu être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations d'élasticité, solutions qui peuvent être explicitées dans certaines configurations particulières.

Par contre dans le cas de stratifié épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie classique devient assez mal adaptée à décrire le comportement mécanique (flèche de stratifié, répartition des contraintes, etc.). Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse, avec une théorie des stratifiés de premier degré. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de corrections aux modules de cisaillement transverse du stratifié.



Analyse numérique du comportement dynamique de la poutre composite

Introduction

Le modèle analytique peut être réalisé par l'étude modale de la structure. L'analyse modale consiste en la détermination des valeurs et vecteurs propres du système. Cette analyse permet, dans un premier temps, de déterminer les fréquences naturelles du système structural pour chaque cas d'étude. Dans un deuxième temps, et suite à la prise en compte des forces de pression, la détermination de l'ensemble des valeurs propres permet de déterminer l'évolution de la stabilité du système en fonction des paramètres étudiés.

Une fois les équations de vibration de la poutre établies, le problème est de caractériser le phénomène de flottement, autrement dit de déterminer :

- l'évolution des fréquences en fonction de la vitesse de vol.
- la vitesse à laquelle se produisent des oscillations auto-excitées qu'on appelle également : vitesse critique de flottement.

La vitesse de flottement la plus basse marque la frontière entre les vitesses sûres et les vitesses dangereuses.

5-1 Présentation de l'outil Maple :

Maple a été initialement développé à l'Université de Waterloo en Ontario (Canada) à partir de 1981. La première version publique date de 1985 (version 3.3).

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, fonctions, séries. Maple réalise des dérivations, intégrations, résolutions de systèmes d'équations linéaires, inversions de matrices, développements asymptotiques et résolutions d'équations différentielles. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en arithmétique des nombres et en combinatoire.

Il est possible de :

- Copier et coller les formules mathématiques correspondantes dans un traitement de texte ;
- Tracer des courbes ou des surfaces (en aspect 3D) ;
- Générer les programmes de calculs numériques (par exemple en C)

5-2 Description du programme :

Dans cette partie, nous nous proposons de mettre en œuvre les outils informatiques nécessaires à l'exploitation numérique de la théorie (FSDBT).

Nous allons d'abord calculer ν_2 et les constantes de rigidités réduites, Puis nous allons construire les matrices élémentaires masse et rigidité d'une poutre développées au paragraphe (4-1-1), en passant par le calcul des fonctions poutres et les intégrales constantes.

Enfin, dans un but de validation des algorithmes et matrices développés, nous faisons quelques applications numériques et nous les comparons avec les résultats de la référence [11] pour une variation de température nulle.

Afin de concevoir notre programme de calcul, nous passons par les étapes suivantes :

🚦 La spécification des paramètres d'entrées suivants :

1. *les caractéristiques mécaniques de la poutre :*

E_1, E_2 : Les modules YOUNG.

ν_1 : Coefficients de Poisson.

G_1, G_2 : Les modules de cisaillement.

ρe : La masse volumique et L'épaisseur.

k' : coefficient de correction.

2. *Les caractéristiques de l'écoulement d'air :*

ρ_a : La masse volumique d'air.

M_a : Le nombre de Mach $\sqrt{2} < M_a < 2$.

3. *Les caractéristiques géométriques de la poutre :*

b_p : largeur de la poutre.

l : longueur de la poutre .

h/l : Le rapport d'épaisseur.

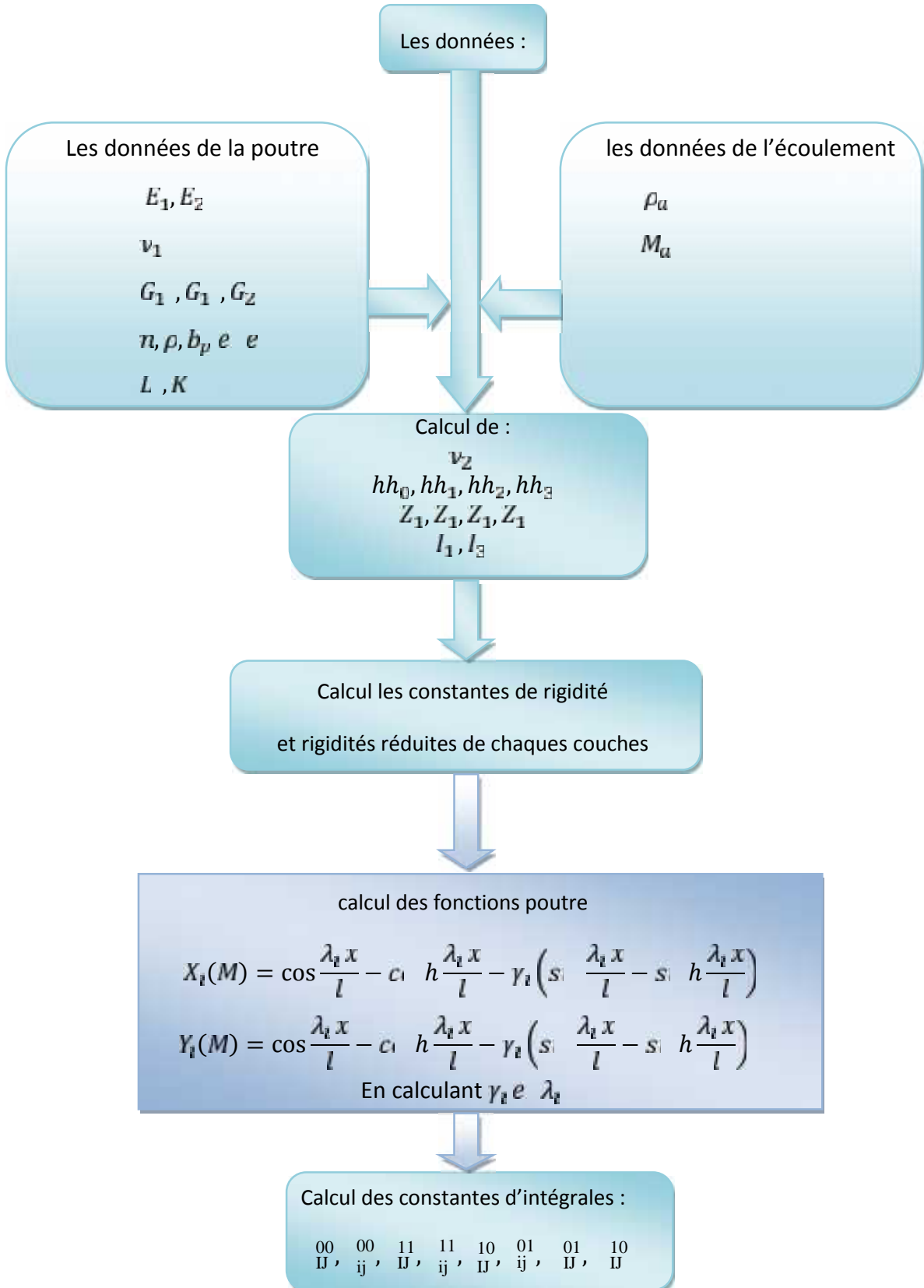
θ : Les angles d'orientation du stratifiées.

n : Nombre de couches.

🚦 L'analyse modale par la résolution du problème aux valeurs propres : après la formation de la matrice rigidité \mathbb{K} et matrice masse \mathbb{M} on résout le problème aux valeurs propres.

Les résultats (output) : les sorties du programmes sont les valeurs propres correspondant à une vitesse d'écoulement d'air donnée.

5-3 Organigramme :



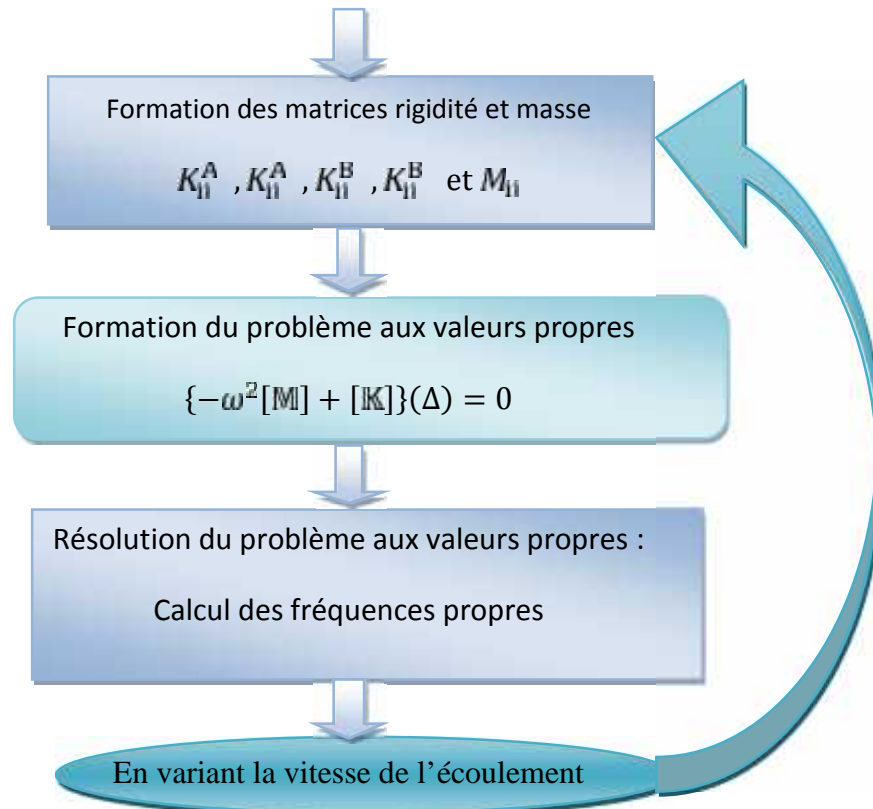


Figure (5-1) : Organigramme du programme

5-4 Validation du programme :

L'idéal pour la validation d'un programme numérique serait de confronter les résultats avec ceux de testes expérimentaux, ce qui à notre niveau, n'est pas possible (manque de moyens expérimentaux). Nous optons donc pour une comparaison avec les résultats de la référence [11]. Pour ce faire, nous annulons le travail des forces aérodynamiques (système libre) et nous calculons les cinq premières fréquences naturelles. Les fréquences naturelles obtenues par notre programme sont très proches de celles obtenues dans la référence [11] à $\Delta T = 0$ avec un léger décalage, ce qui est tout à fait normal puisque, contrairement à la réf[11] qui utilise une méthode analytique, donc exacte, notre programme utilise une méthode approximative qui est la méthode de Ritz basée sur les fonctions poutre.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre :

Nombre des couches: $n = 4$

Les modules YOUNG : $E_1 = 144,7899 G$, $E_2 = 9,653 G$

Les modules de cisaillement: $G_2 = 3,447 G$, $G_1 = G_1 = 4,136 G$

Les Coefficients de POISSON: $\nu_1 = 0,3$

L'épaisseur du stratifié: $0,25 * b$

La masse volumique d'une couche: $\rho = 1389,23 \text{ k} / \text{m}^3$

Largueur de la poutre: $b = 0,0254 \text{ m}$

fréquences exactes [11]	0,9241	4,8925	11,44	18,6972	26,2118
Fréquences approximatives	0,95496	5,03236	11,73726	19,15194	26,96575

Tableau 5.1 : Les valeurs exactes et approximatives des fréquences naturelles.

5-5 Résultats et interprétations :

5-5-1 Calcul de la vitesse critique du flottement :

Tableau 5.2 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], l/h= 120, $\omega_0 = 1/ [l^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,546	3,549	59,049	3,57	3,585	3,602	3,62	3,64	3,66	3,681	3,705
Mode 2	8,694	8,697	0	0	0	0	0	0	0	0	8,859
Mode 3	0	0	8,705	8,717	8,732	8,749	8,768	8,789	8,811	8,833	0
Mode 4	21,251	21,253	21,256	21,261	21,267	21,274	21,282	21,29	21,299	21,309	21,319
Mode 5	59,048	59,049	59,052	59,056	59,061	59,066	59,072	59,079	59,086	59,094	59,102

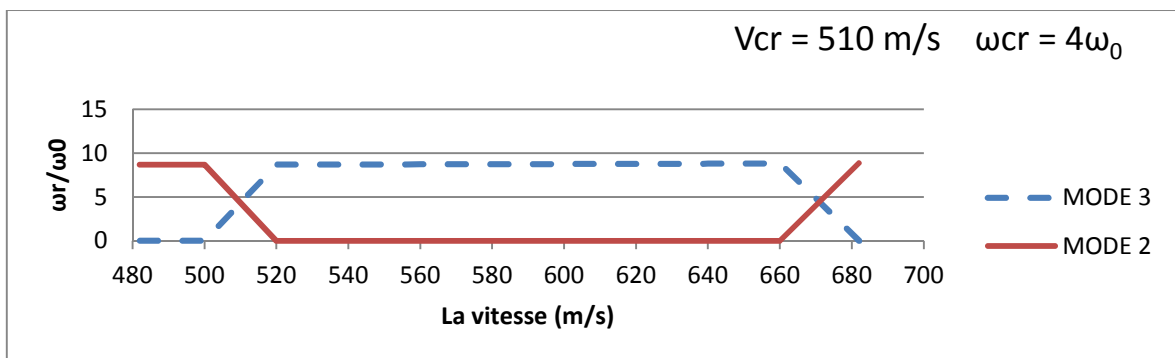


Figure (5-2) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

Lorsque nous augmentons la vitesse de l'écoulement d'air lentement, nous remarquons que deux modes coïncident à une vitesse de 508m/s. C'est la vitesse critique du flottement.

5-5-2 Influence de la configuration de l'orientation des couches sur la vitesse critique du flottement :

En variant la vitesse de l'écoulement d'air dans un intervalle de 482m/s à 682m/s, les cinq premières fréquences adimensionnelles pour les différentes orientations des couches (0/90/90/0), (90/0/0/90), (0/45/45/0), (45/0/0/45), (0/0/0/0) et (-45/45/45/-45) et un rapport d'épaisseur(l/h = 120) sont définies dans les tableaux (5-3, 5-4, 5-5, 5-6, et 5-8) :

1- La configuration : 0/90/90/0

Tableau 5.3 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,546	3,549	59,049	3,57	3,585	3,602	3,62	3,64	3,66	3,681	3,705
Mode 2	8,694	8,697	0	0	0	0	0	0	0	0	8,859
Mode 3	0	0	8,705	8,717	8,732	8,749	8,768	8,789	8,811	8,833	0
Mode 4	21,251	21,253	21,256	21,261	21,267	21,274	21,282	21,29	21,299	21,309	21,319
Mode 5	59,048	59,049	59,052	59,056	59,061	59,066	59,072	59,079	59,086	59,094	59,102

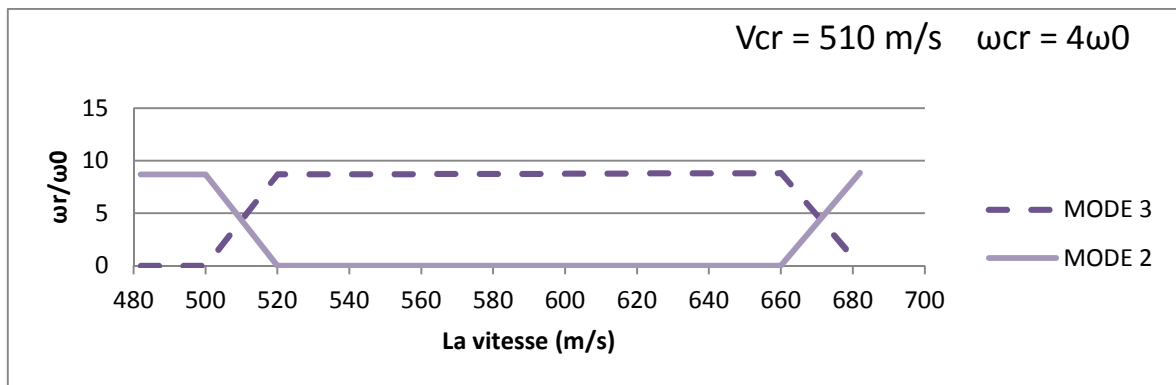


Figure (5-3) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

2- La configuration : 90/0/0/90

Tableau 5.4 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	1,978	1,978	1,979	1,981	1,984	1,986	1,989	1,992	1,995	1,998	2
Mode 2	10,147	10,15	5,166	5,18	5,198	10,211	10,233	5,264	5,288	5,313	5,338
Mode 3	5,152	5,156	10,16	10,174	10,191	5,219	5,241	10,256	10,281	10,307	10,334
Mode 4	26,819	26,821	26,828	26,839	26,852	26,867	26,883	26,901	26,919	26,939	26,959
Mode 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

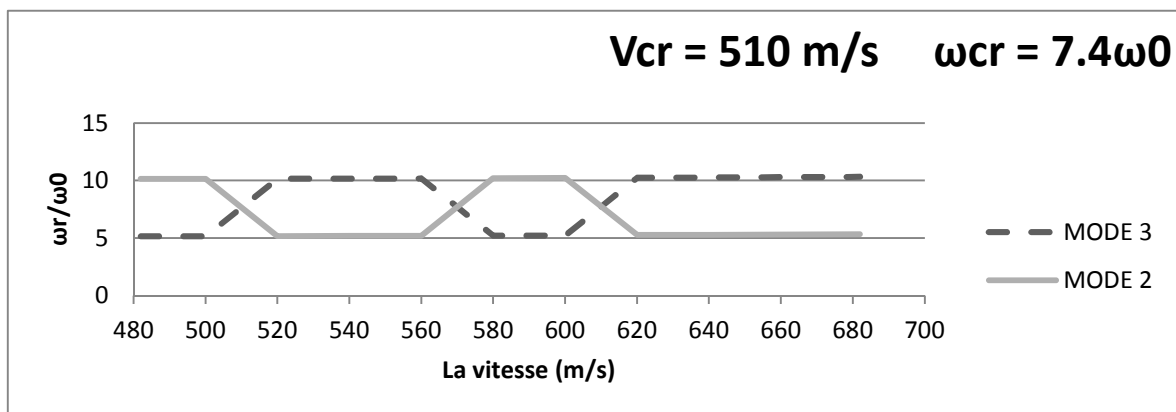


Figure (5-4) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

3- La configuration : 0/45/45/0

Tableau 5.5 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	5,595	5,599	5,609	5,625	5,644	5,665	5,689	5,714	11,711	11,721	11,734
Mode 2	2,085	2,086	2,089	2,094	2,1	2,106	2,113	2,12	5,741	5,768	5,799
Mode 3	11,656	11,657	11,661	11,667	11,674	11,682	11,691	11,7	2,127	2,135	2,143
Mode 4	21,913	21,914	21,917	21,921	21,926	21,932	21,938	21,945	21,953	21,96	21,969
Mode 5	56,619	56,62	56,623	56,627	56,632	56,638	56,645	56,652	56,659	56,667	56,675

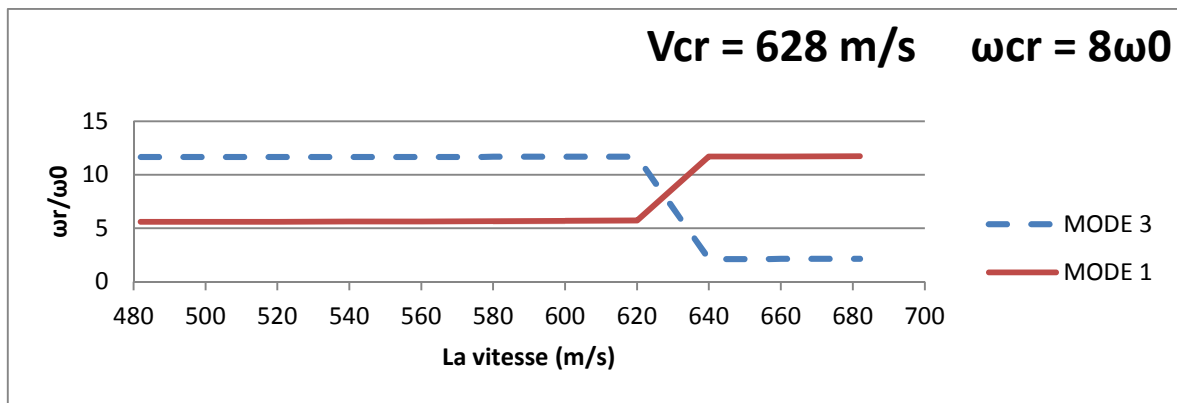


Figure (5-5) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

4- La configuration : 45/0/0/45

Tableau 5.6 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	2,608	2,609	2,613	2,617	6,184	2,63	2,637	2,645	2,653	2,661	2,669
Mode 2	13,261	13,263	13,269	13,277	2,623	6,207	6,233	6,261	6,289	6,319	6,353
Mode 3	6,131	6,135	6,146	6,163	13,288	13,3	13,313	13,328	13,343	13,359	13,377
Mode 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mode 5	35,656	35,658	35,663	35,67	35,679	35,69	35,701	35,713	35,726	35,74	35,755

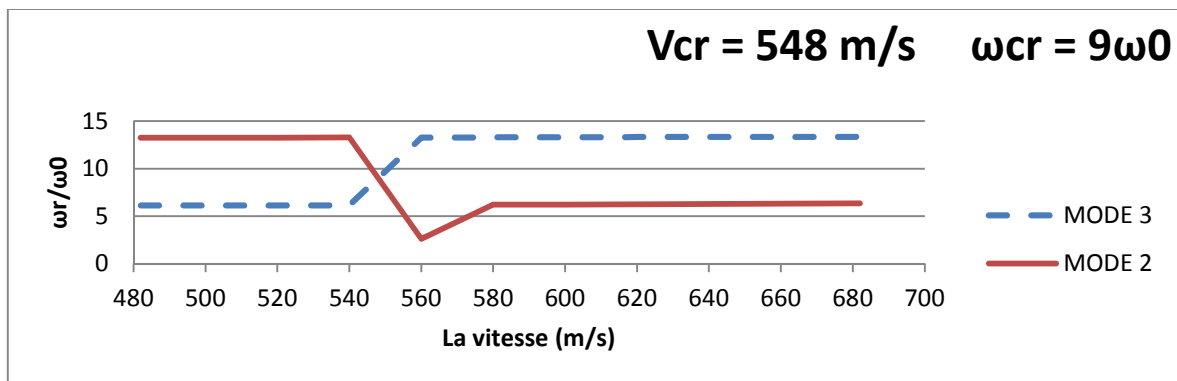


Figure (5-6) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

5- La configuration : 45/-45/-45/45

Tableau 5.7 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	1,794	1,807	1,795	1,796	1,798	1,8	1,802	1,804	1,806	1,808	1,811
Mode 2	4,777	4,895	4,788	4,801	4,815	4,832	4,851	4,87	4,889	4,91	4,932
Mode 3	8,778	8,922	8,791	8,806	8,823	8,843	8,866	8,889	8,915	8,941	8,971
Mode 4	19,623	19,739	19,633	19,645	19,659	19,675	19,693	19,712	19,733	19,755	19,779
Mode 5	80,437	80,473	80,445	80,447	80,453	80,46	80,469	80,463	80,474	80,479	80,493

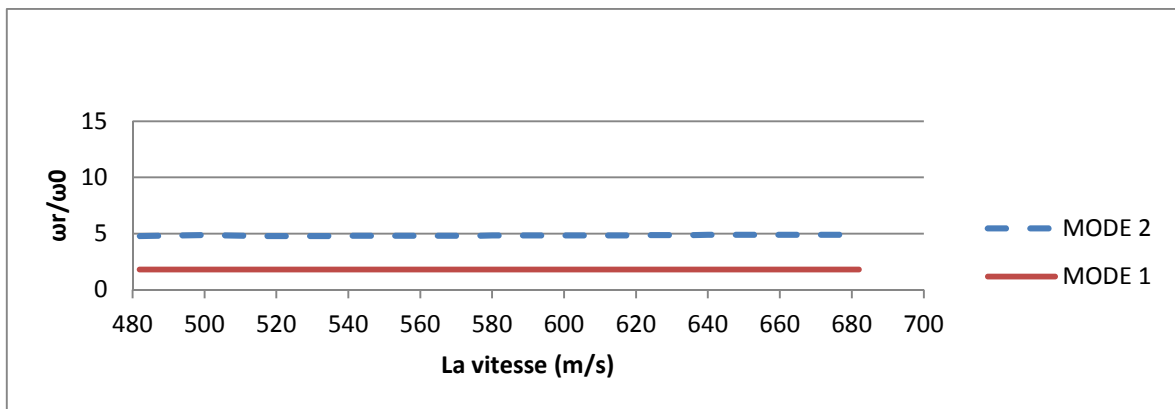


Figure (5-7) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

6- La configuration : 0/0/0/0 :

Tableau 5.8 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	2,32	2,321	2,323	2,327	2,331	2,335	2,34	2,345	2,351	2,356	2,362
Mode 2	5,626	5,63	5,642	5,658	5,678	5,701	5,726	5,752	5,78	5,809	5,841
Mode 3	11,42	11,423	11,429	11,439	11,451	11,465	11,481	11,497	11,515	11,533	11,555
Mode 4	24,35	24,351	24,355	24,361	24,368	24,376	24,385	24,395	24,405	24,416	24,428
Mode 5	47,86	47,861	47,863	47,866	47,871	47,876	47,881	47,887	47,893	47,9	70,604

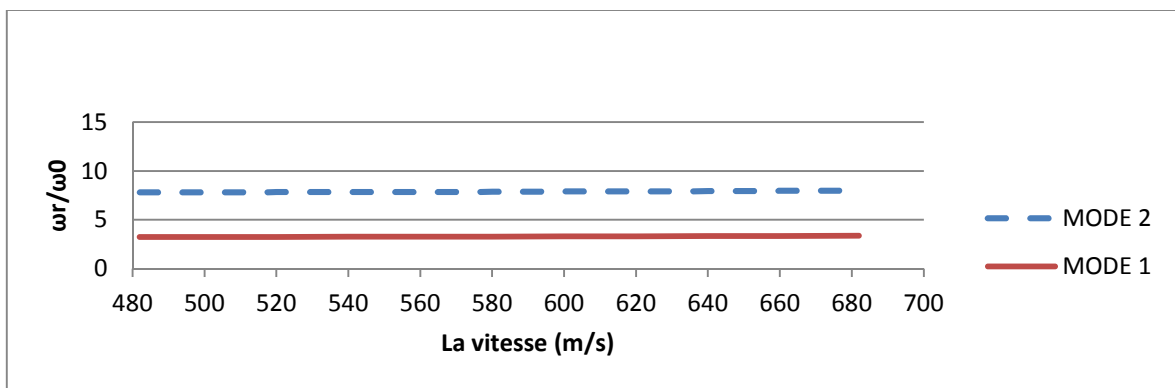


Figure (5-8) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

Influence de la configuration de l'orientation des couches :

Tableau 5.9 : Variation de la vitesse critique de flottement en fonction de la configuration de l'orientation des couches.

Configuration	0-90-90-0	90-0-0-90	0-45-45-0	45-0-0-45
V _{crit} (m/s)	502	510	628	510

5-5-3 Influence du rapport d'épaisseur sur la vitesse critique du flottement :

En variant toujours la vitesse de l'écoulement d'air dans le même intervalle, les cinq premières fréquences adimensionnelles pour les différents rapports d'épaisseurs (40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 e 200) sont définies dans les tableaux (5-10, 5-11, 5-12, 5-13, 5-14, 5-15, 5-16, 5-17 et 5-18) :

1- Rapport d'épaisseur l/h=40 :

Tableau 5.10 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol. (Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\sigma_0 = 1 / [I^2 (/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	4,158	4,158	4,158	4,163	4,165	4,167	4,171	4,187	4,188	4,195	4,195
Mode 2	10,812	10,817	10,83	10,863	10,894	10,929	10,968	11,04	11,076	11,129	11,169
Mode 3	20,415	20,414	20,412	20,447	20,467	20,487	20,513	20,633	20,647	20,707	20,721
Mode 4	42,537	42,505	42,405	42,459	42,405	42,309	42,262	42,669	42,514	42,583	42,389
Mode 5	89,053	88,926	88,544	88,684	88,438	87,999	87,824	89,133	88,505	88,653	87,902

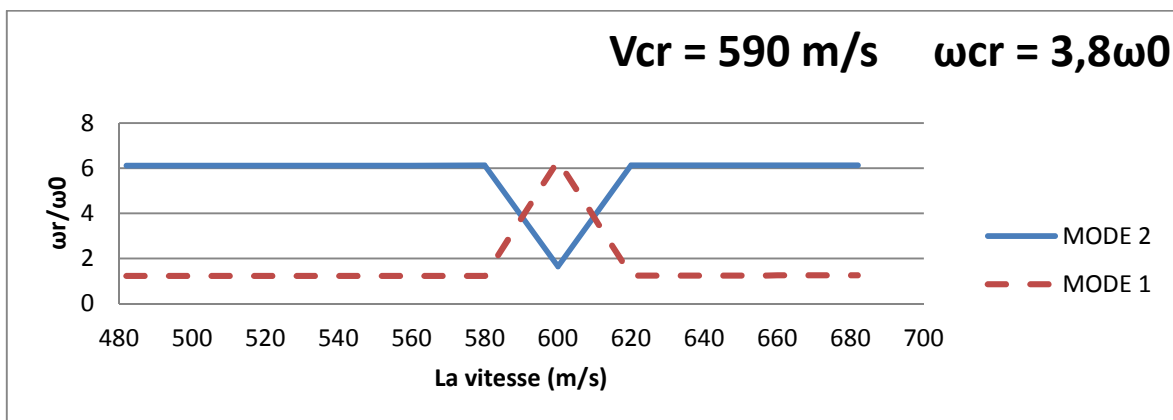


Figure (5-9) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

2- Rapport d'épaisseur $l/h = 60$:

Tableau 5.11 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\rho_0 = 1 / [l^2 (/E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	6,333	6,333	6,334	6,336	6,338	6,34	6,343	6,345	6,348	6,351	6,355
Mode 2	1,612	1,613	1,617	1,622	1,629	1,637	1,645	1,654	1,663	1,673	1,683
Mode 3	16,956	16,956	16,957	16,957	16,958	16,959	16,959	16,96	16,961	16,962	16,963
Mode 4	31,802	31,802	31,802	31,802	31,803	31,803	31,803	31,804	31,804	31,805	31,806
Mode 5	66,394	66,394	66,394	66,394	66,395	66,395	66,396	66,397	66,398	66,398	66,399

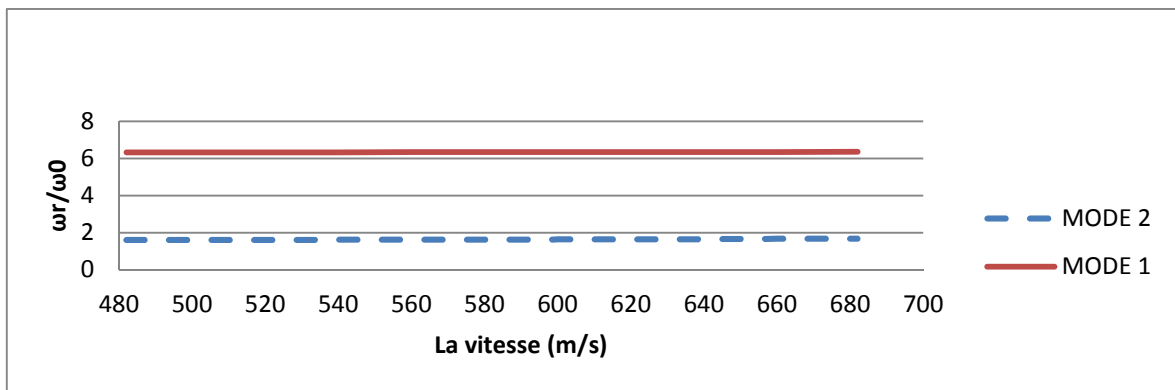


Figure (5-10) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

3- Rapport d'épaisseur $l/h = 80$:

Tableau 5.12 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\rho_0 = 1 / [l^2 (/E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	2,128	2,13	2,136	2,144	6,585	6,591	2,178	2,192	2,205	2,22	2,235
Mode 2	6,572	6,573	6,576	6,58	2,154	2,166	6,597	6,604	6,611	6,619	6,627
Mode 3	17,274	17,275	17,276	17,277	17,279	17,281	32,459	17,285	17,287	17,29	17,292
Mode 4	32,455	32,455	32,455	32,456	32,457	32,458	17,283	32,46	32,462	32,463	32,464
Mode 5	69,091	69,091	69,092	69,093	69,094	69,095	69,096	69,098	69,099	69,101	69,103

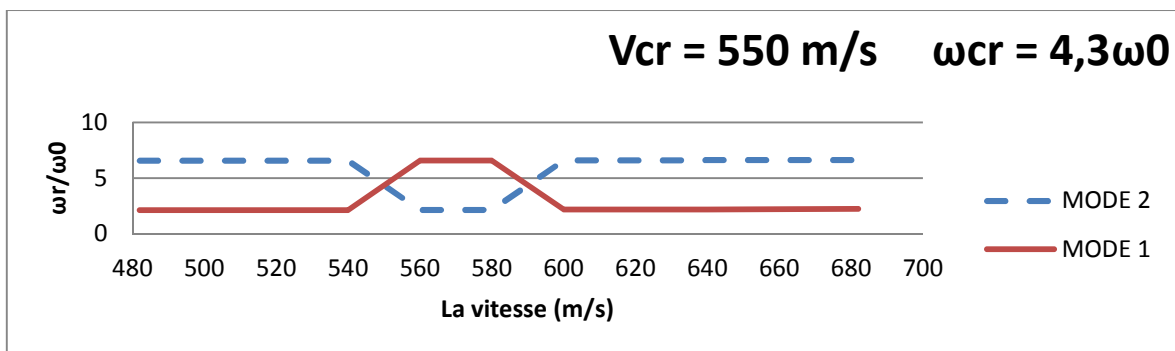


Figure (5-11) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

4- Rapport d'épaisseur $l/h = 100$:

Tableau 5.13 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\omega_0 = 1/ [l^2 (\rho/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	7	7,002	2,691	2,701	2,713	2,726	2,741	2,757	2,774	2,79	7,109
Mode 2	2,682	2,684	7,008	7,016	7,026	7,037	7,05	7,064	7,078	7,094	2,808
Mode 3	17,851	17,852	17,853	17,856	17,86	17,864	17,868	17,873	17,877	17,883	17,888
Mode 4	36,433	36,433	36,434	36,436	36,438	36,44	36,442	36,445	36,448	36,451	36,454
Mode 5	76,91	76,91	76,911	76,913	76,915	76,917	76,92	76,923	76,926	76,929	76,932

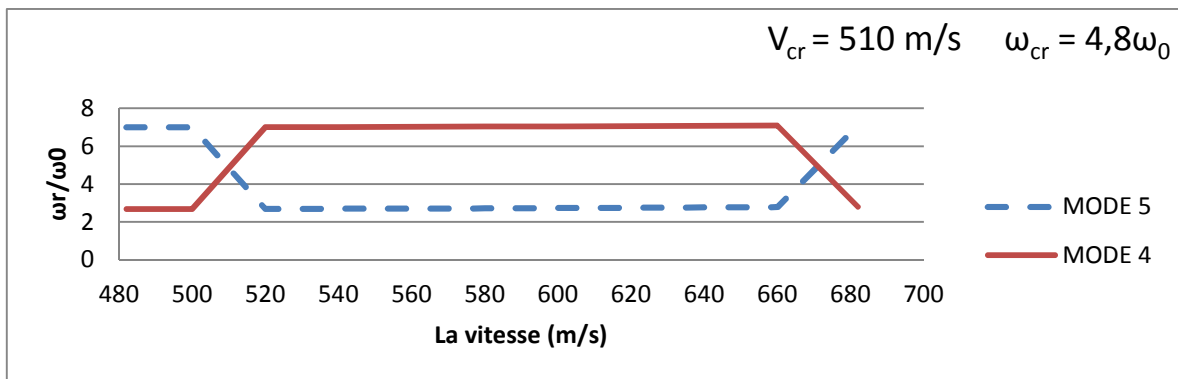


Figure (5-12) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

5- Rapport d'épaisseur $l/h = 120$:

Tableau 5.14 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\omega_0 = 1/ [l^2 (\rho/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,546	3,549	3,557	3,57	3,585	3,602	3,62	3,64	3,66	3,681	3,705
Mode 2	8,694	8,697	0	0	0	0	0	0	0	0	8,859
Mode 3	0	0	8,705	8,717	8,732	8,749	8,768	8,789	8,811	8,833	0
Mode 4	21,251	21,253	21,256	21,261	21,267	21,274	21,282	21,29	21,299	21,309	21,319
Mode 5	59,048	59,049	59,052	59,056	59,061	59,066	59,072	59,079	59,086	59,094	59,102

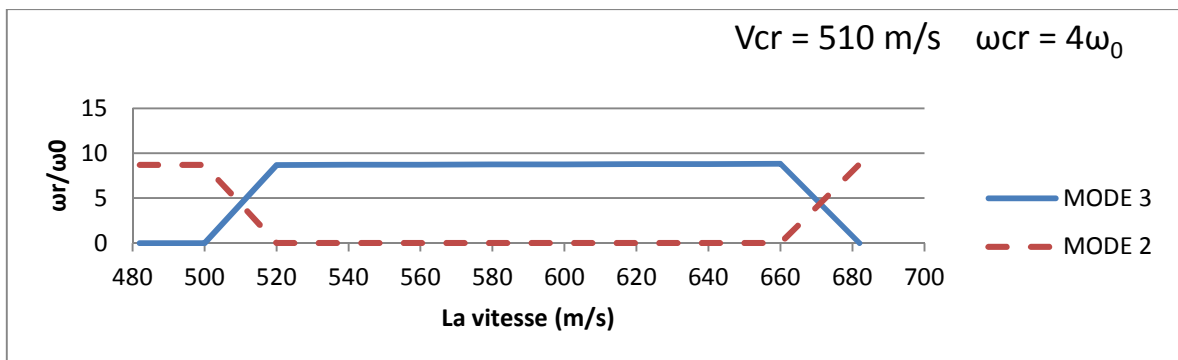


Figure (5-13) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

6- Rapport d'épaisseur $l/h = 140$:

Tableau 5.15 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\rho_0 = 1 / [l^2 (\rho / E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	2,902	2,899	2,888	2,898	2,894	2,902	2,882	2,941	7,067	2,937	7,099
Mode 2	6,927	6,925	6,916	6,942	6,951	6,977	6,968	7,071	2,924	7,107	2,914
Mode 3	12,748	12,736	12,698	12,721	12,703	12,716	12,656	12,815	12,759	12,79	12,723
Mode 4	24,21	24,202	24,178	24,195	24,184	24,194	24,158	24,266	24,231	24,255	24,213
Mode 5	67,812	67,799	67,759	67,78	67,757	67,763	67,701	67,859	67,796	67,822	67,745

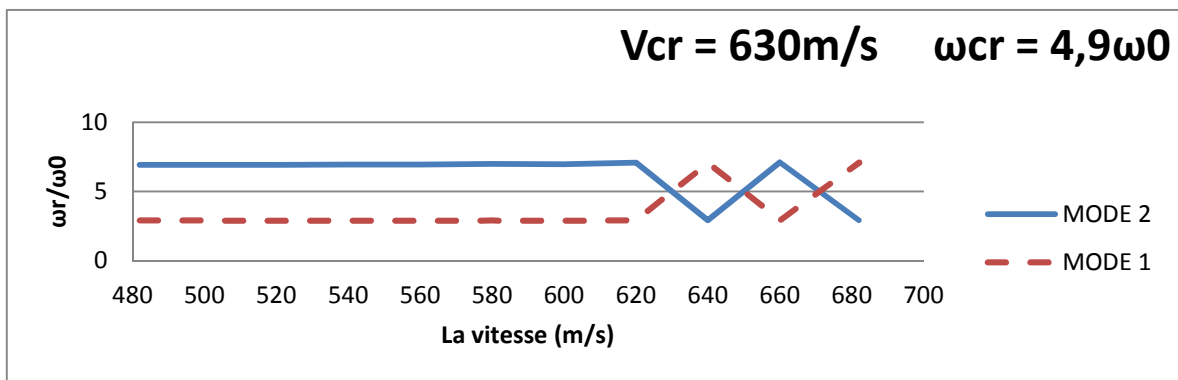


Figure (5-14) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

7- Rapport d'épaisseur $l/h = 160$:

Tableau 5.16 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\rho_0 = 1 / [l^2 (\rho / E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,867	3,868	3,873	3,88	3,888	3,897	3,907	3,917	3,928	3,938	3,95
Mode 2	9,151	9,158	9,175	9,201	9,232	9,269	9,308	9,35	9,394	9,439	9,491
Mode 3	19,341	19,344	19,353	19,367	19,384	19,403	19,424	19,447	19,471	19,497	19,526
Mode 4	48,646	48,648	48,655	48,667	48,68	48,697	48,713	48,737	48,755	48,778	48,8
Mode 5	140,09	140,076	140,034	140,048	140,02	140,005	139,95	140,092	140,022	140,037	139,953

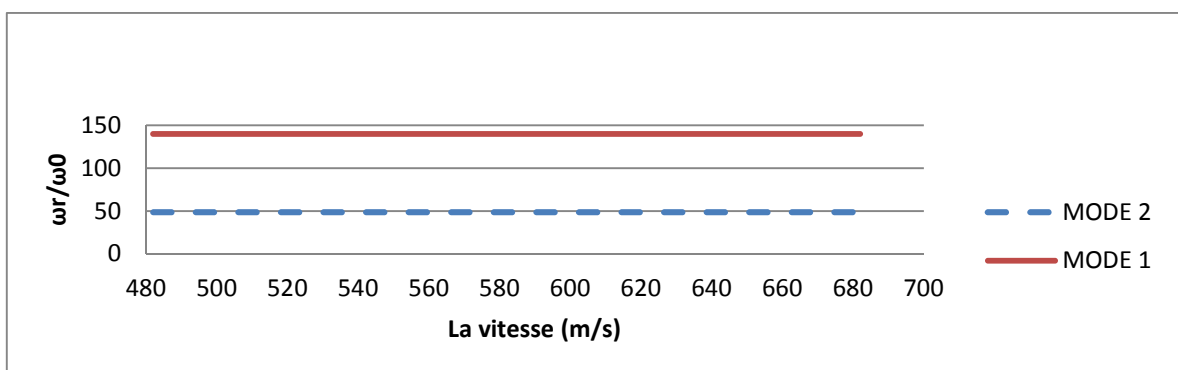


Figure (5-15) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

8- Rapport d'épaisseur $l/h = 180$:

Tableau 5.17 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\omega_0 = 1 / [I^2 (/E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	4,013	4,014	4,016	4,022	4,027	4,032	4,039	4,05	4,056	4,064	4,072
Mode 2	9,942	9,948	9,966	9,996	10,03	10,068	10,111	10,164	10,21	10,26	10,31
Mode 3	19,591	19,593	19,6	19,622	19,642	19,661	19,69	19,745	19,769	19,809	19,845
Mode 4	40,014	39,999	39,953	39,982	39,96	39,912	39,905	40,103	40,034	40,073	40,077
Mode 5	97,085	96,915	96,408	96,589	96,263	95,701	95,466	97,17	96,333	96,522	96,374

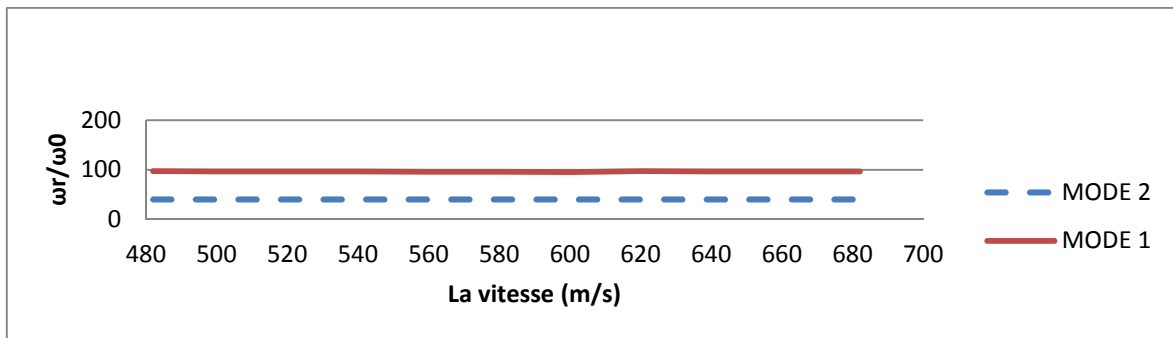


Figure (5-16) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

9- Rapport d'épaisseur $l/h = 200$:

Tableau 5.18 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol .

(Poutre composite, Graphite Epoxy - [0/90/90/0], $\omega_0 = 1 / [I^2 (/E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	4,158	4,158	4,158	4,163	4,165	4,167	4,171	4,187	4,188	4,195	4,195
Mode 2	10,812	10,817	10,83	10,863	10,894	10,929	10,968	11,04	11,076	11,129	11,169
Mode 3	20,415	20,414	20,412	20,447	20,467	20,487	20,513	20,633	20,647	20,707	20,721
Mode 4	42,537	42,505	42,405	42,459	42,405	42,309	42,262	42,669	42,514	42,583	42,389
Mode 5	89,053	88,926	88,544	88,684	88,438	87,999	87,824	89,133	88,505	88,653	87,902

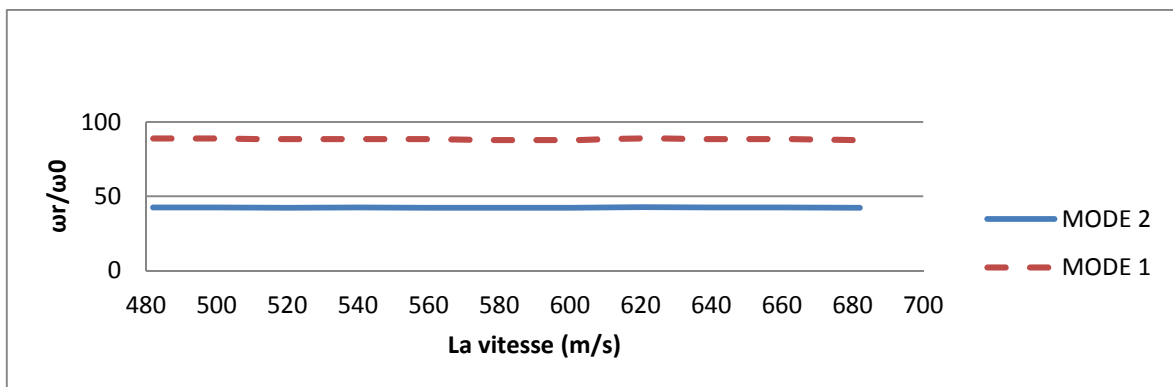


Figure (5-17) : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

La variation de la vitesse critique du flottement en fonction du rapport d'épaisseur :

Tableau 5.19 : Variation de la vitesse critique du flottement en fonction de rapport d'épaisseur.

l/h	40	80	100	120
V_{cr} (m/s)	590	550	510	510

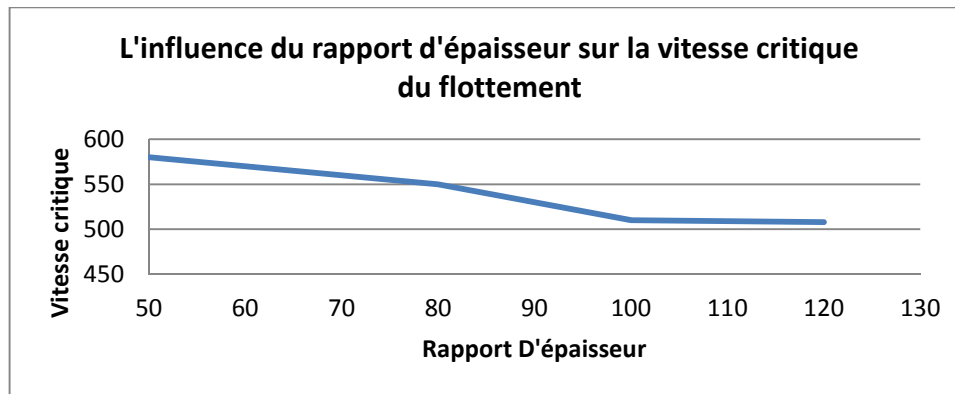


Figure (5-18) : Variation de la vitesse critique du flottement en fonction de rapport d'épaisseur.

La variation de la fréquence critique adimensionnelle en fonction de rapport d'épaisseur :

Tableau 5.20 : Variation de la fréquence critique adimensionnelle en fonction de rapport d'épaisseur.

l/h	40	80	100	140
ω_{cr} / ω_0	3,8	4,3	4,8	4,9

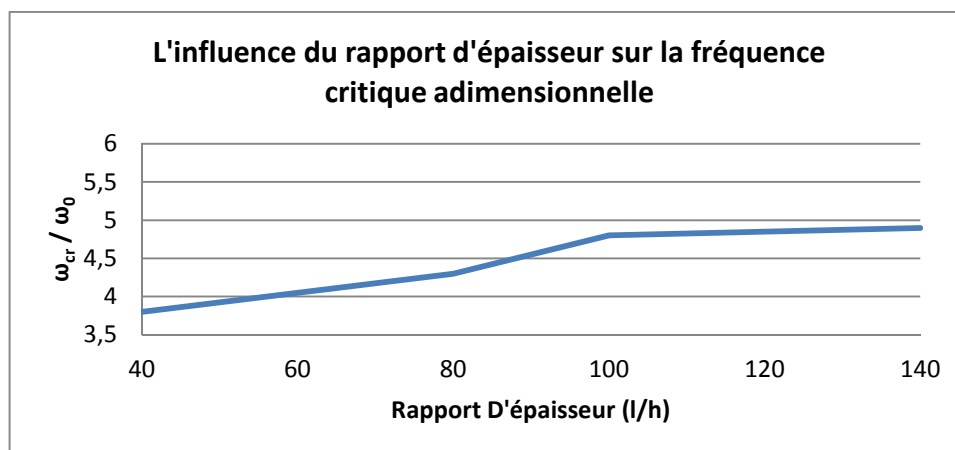


Figure (5-19) : Variation de la fréquence critique adimensionnelle en fonction de rapport d'épaisseur.

5-5-4 Influence d'orientations des fibres sur les fréquences adimensionnelles :

En variant la vitesse d'écoulement d'air, Les cinq premières fréquences adimensionnelles pour les différentes orientations des couches $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$; sont définies dans les tableaux (5-21, 5-22, 5-23, 5-24, 5-25, 5-26 et 5-27) :

Les angle d'orientations θ sont : $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} e \pi$.

1- L'orientation : 0

Tableau 5.21 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol. (Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120, \rho_0 = 1/ [l^2(/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	2,32	2,321	2,323	2,327	2,331	2,335	2,34	2,345	2,351	2,356	2,362
Mode 2	5,626	5,63	5,642	5,658	5,678	5,701	5,726	5,752	5,78	5,809	5,841
Mode 3	11,42	11,423	11,429	11,439	11,451	11,465	11,481	11,497	11,515	11,533	11,555
Mode 4	24,35	24,351	24,355	24,361	24,368	24,376	24,385	24,395	24,405	24,416	24,428
Mode 5	47,86	47,861	47,863	47,866	47,871	47,876	47,881	47,887	47,893	47,9	70,604

2- L'orientation : $\frac{\pi}{8}$

Tableau 5.22 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol. (Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120, \rho_0 = 1/ [l^2(/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,033	3,035	3,041	3,049	3,06	3,072	3,084	3,097	3,111	3,125	3,141
Mode 2	7,105	7,108	7,118	7,133	7,151	7,172	7,195	7,22	7,246	7,273	7,304
Mode 3	16,592	16,594	16,597	16,603	16,609	16,617	16,626	16,635	16,645	16,655	16,666
Mode 4	32,431	32,431	32,433	32,436	32,44	32,444	32,448	32,453	32,458	32,464	32,47
Mode 5	65,097	65,097	65,099	65,102	65,106	65,111	65,115	65,121	65,126	65,132	65,138

3- L'orientation : $\frac{\pi}{6}$

Tableau 5.23 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol. (Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120, \rho_0 = 1/ [l^2(/E_1h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,045	3,047	3,053	3,061	3,071	3,083	3,095	3,107	3,121	3,134	3,149
Mode 2	7,096	7,1	7,11	7,126	7,145	7,166	7,19	7,216	7,243	7,271	7,303
Mode 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mode 4	16,456	16,458	16,462	16,468	16,476	16,485	16,495	16,506	16,518	16,53	16,544
Mode 5	45,034	45,035	45,039	45,044	45,051	45,059	45,068	45,077	45,087	45,097	45,109

4- L'orientation : $\frac{\pi}{4}$

Tableau 5.24 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [l^2 (\rho/E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	3,241	3,243	3,251	3,261	3,274	3,288	3,304	3,32	3,338	3,355	3,374
Mode 2	7,821	7,824	7,833	7,847	7,863	7,882	7,902	7,924	7,948	7,972	8
Mode 3	18,923	18,924	18,927	18,931	18,937	18,943	18,951	18,958	18,966	18,975	18,984
Mode 4	35,37	35,37	35,372	35,374	35,377	35,38	35,383	35,387	35,391	35,395	35,4
Mode 5	70,565	70,566	70,568	70,571	70,574	70,578	70,583	70,588	70,593	70,598	70,604

5- L'orientation : $\frac{\pi}{2}$

Tableau 5.25 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction de la vitesse du vol.

(Poutre composite, Graphite Epoxy, $l/h = 120$, $\omega_0 = 1/ [l^2 (\rho/E_1 h^2)^{0.5}]$).

V (m/s)	482	500	520	540	560	580	600	620	640	660	682
Mode 1	1,209	1,209	1,21	1,21	1,21	1,211	1,212	1,212	1,213	1,213	1,214
Mode 2	3,609	3,611	3,614	3,619	3,624	3,631	3,638	3,645	3,652	3,659	3,668
Mode 3	6,733	6,737	6,749	6,765	6,785	6,808	6,833	6,859	6,887	6,916	6,948
Mode 4	13,856	13,86	13,874	13,893	13,917	13,945	13,976	14,008	14,043	14,08	14,122
Mode 5	44,643	44,645	44,649	44,654	44,661	44,668	44,677	44,684	44,694	44,704	44,716

5-5-5 Interprétations :

- ❖ Les résultats représentés dans le tableau (5-1) et qui consistent en la résolution du problème aux valeurs propres naturelles de la poutre composite montrent que notre méthode de résolution est correcte puisque ces résultats sont comparés à ceux de la référence [11] qui sont quant à eux déterminés par une méthode analytique.
- ❖ La vitesse critique du flottement apparaît lorsque les fréquences de deux modes de vibration convergent puis coïncident en un seul point. D'après nos résultats, une ou plusieurs vitesses de flottement existent, celle prise en considération est la plus petite car elle marque la frontière entre le domaine des vitesses sûres et celui des vitesses pouvant entraîner l'apparition des instabilités dues au flottement.
- ❖ D'après le tableau (5-9), nous constatons que la configuration de l'orientation des couches n'a pas une grande influence sur la vitesse critique du flottement pour les configurations (0/90/90/0) et (90/0/0/90). Mais pour les configurations (0/45/45/0) et (45/0/0/45), nous remarquons une importante influence sur la vitesse avec un écart de 80m/s entre les deux configurations. Pour la configuration (45/-45/-45/45) et pour le stratifié unidirectionnel (0/0/0/0), nous n'avons détecté aucune vitesse critique de flottement dans l'intervalle des vitesses considérées.

- ❖ D'après la figure (5-18), nous remarquons que la vitesse critique de flottement diminue lorsque le rapport d'épaisseur augmente. Donc il faut augmenter l'épaisseur de la poutre ou bien diminuer sa longueur pour faire sortir la vitesse critique de flottement du domaine de vol considéré.
- ❖ D'après la figure (5-19), la valeur de la fréquence adimensionnelle critique augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur ce qui est conforme avec la constatation précédente.
- ❖ Pour la variation des angles d'orientation des fibres de chaque couche du stratifié $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$, nous montrons dans les tableaux (5-21), (5-22), (5-23), (5-24) et (5-25) l'évolution des fréquences adimensionnelles des cinq premiers modes de vibration en fonction de θ sans pour autant obtenir de vitesses critiques de flottement.

Conclusion :

Dans ce chapitre consacré aux résultats, nous avons validé notre programme par une comparaison avec la référence [11], nous avons déterminé les fréquences de vibration des cinq premiers modes pour différentes configurations. Nous avons par la suite déterminé des vitesses critiques de flottement pour différents rapports d'épaisseur et pour différents angles d'orientation des fibres

Analyse du comportement dynamique de la poutre composite

Introduction :

L'importance de développer une analyse des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base des structures, et d'autre part à la caractéristique mécanique des stratifiés à partir d'essais de flexion sur des éprouvettes en forme de poutres. La théorie des poutres considère que la longueur l de la poutre est très supérieure à sa largeur $l \gg b$ (figure 4-1). Dans ce chapitre, nous étudions la flexion des poutres constituée de stratifié orthotrope [5].

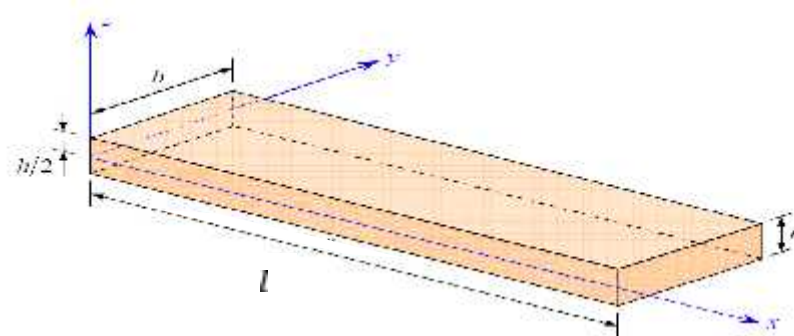


Figure (4-1) : configuration de l'élément poutre.

4-1 Etude d'une poutre en composite stratifié de TIMOSHENKO :

4-1-1 Présentation de la poutre :

Nous considérons une poutre plane constituée des couches de matériau composite unidirectionnel. Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope. Les caractéristiques géométriques de la poutre sont la longueur l , la largeur b et l'épaisseur h . La poutre est constituée d'un stratifié symétrique comportant quatre couches identiques. Les caractéristiques mécaniques ($Q_1, Q_2, Q_3, Q_6, E_1, E_2, G_1, G_2, \nu_1, \nu_2, e, \rho$) sont les mêmes pour chaque couche.

Q_1, Q_2, Q_3, Q_6	Constantes de rigidités réduites d'un composite dans les axes principaux
E_1, E_2	Les modules YOUNG
G_1, G_2	Les modules de cisaillement
ν_1, ν_2	Les Coefficients de POISSON
e	L'épaisseur d'une couche
h	L'épaisseur du stratifié

ρ	La masse volumique d'une couche
l	Longueur de la poutre
b_p	Largeur de la poutre

4-1-2 Déplacement :

Le schéma de déplacement est un schéma du premier degré, qui est développé à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ (3-46), et fait ensuite une hypothèse supplémentaire, qui consiste à négliger le déplacement suivant la direction O (le déplacement est considéré comme indépendant de la coordonnée suivant la largeur de la poutre).

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) + z \quad (4-1)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0)$$

4-1-3 Déformation :

Le champ des déformations s'écrit d'après (l'équation 3-48), et en tenant compte de l'hypothèse, qui consiste à négliger $v_{yy}, v_{zz}, \chi_{xy}$ et χ_{yz} , sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z K(x) = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial x} \quad (4-2)$$

$$\gamma_x = \psi + \frac{\partial}{\partial x}$$

Avec :

$$K(x) = \frac{\partial}{\partial x} \quad (4-3)$$

$K(x)$: est appelée la courbure de la poutre sollicitée en flexion.

4-1-4 Contraintes :

Pour une couche k la contrainte est :

$$\sigma_x = (Q_{11})^k \varepsilon_x$$

$$\sigma_x = (Q_{55})^k \gamma_x \quad (4-4)$$

$(Q_{11})^k$ $(Q_{55})^k$: sont les constantes de rigidités réduites de la couche k .

k : Nombre de couche.

Les autres éléments de la matrice de contrainte sont nuls. Le tenseur des contraintes en M , est donc de la forme :

$$(M) = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

4-1-5 expression des résultantes et moments:

Le champ des résultantes en membrane :

$$N_x = b_p \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_x dz \quad (4-6)$$

A partir de la relation (4-4), les résultantes s'écrivent sous la forme suivante :

$$N_x = b_p \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} \epsilon_x)^k dz \quad (4-7)$$

A partir de l'expression (2-16) et (2-17) les constantes de rigidités réduites s'écrivent sous la forme :

$$Q_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta^{(k)} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta^{(k)} \sin^2 \theta^{(k)} + Q_{22} \sin^4 \theta^{(k)} \quad (4-8)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\hat{\nu}_{12} E_2}{1 - \hat{\nu}_{12} \hat{\nu}_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (4-9)$$

Le champ des résultantes en cisaillement : il est défini à partir de la relation (2-22) :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$Q_x = A_5 \gamma_x \quad (4-10)$$

Avec :

$$A_5 = b_p k' \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{55})^k dz \quad (4-11)$$

k' : est le facteur de correction du cisaillement ($k' = 5/6$).

$$Q_{55} = G_1 \gamma_x^2 \theta^{(k)} + G_2 \gamma_x^2 \theta^{(k)} \quad (4-12)$$

Le champ des moments :

$$M_x = b_p \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_x z dz \quad (4-13)$$

A partir de la relation (4-4) :

$$M_x = b_p \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} \epsilon_x)^k z dz \quad (4-14)$$

4-1-6 Equation constitutive :

L'équation constitutive exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient de l'expression (3-52).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ B_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_x \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \quad (4-15)$$

Les éléments A_1, B_1, D_1 sont déterminés à partir des expressions (2-26), (2-27) et (2-28) :

$$A_1 = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} b_p (Q_1)^K dz \quad (4-16)$$

$$B_1 = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} b_p (Q_1)^K z dz \quad (4-17)$$

$$D_1 = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} b_p (Q_1)^K z^2 dz \quad (4-18)$$

4-2 Equations de vibration de la poutre :

Dans le cas de l'étude des poutres en flexion, l'analyse la plus complexe est celle des stratifiés constitués d'un empilement quelconque, présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion. Une première simplification de l'analyse de la flexion des poutres en stratifiés consiste en l'étude de stratifiés symétriques, pour lesquels il n'existe pas de couplage membrane-flexion/torsion : les termes B_1 sont nuls ($B_1 = 0$) et ($I_2 = 0$). Une simplification supplémentaire est apportée dans le cas où il n'existe pas de couplage flexion-torsion : les termes (D_1) et (D_2) sont nuls (D_1 e $D_2 = 0$).

Les stratifiés symétriques ($B_1 = 0$), pour lesquels il n'existe pas de couplage flexion-torsion ($D_1 = D_2 = 0$) sont appelés stratifiés orthotropes. Ce type de stratifié est obtenu soit à partir d'une seule couche de matériau orthotrope, soit à partir d'un stratifié symétrique constitué de couches orthotropes dont les axes principaux coïncident avec les axes de références du stratifié croisés.

Les hypothèses :

- 1- Le déplacement suivant la direction y est négligeable devant la direction x , le terme de rotation $R = 0$.
- 2- N_y e M_y sont négligeable.
- 3- Stratifié symétrique $B_1 = 0$ pas de couplage membrane-flexion/torsion.
- 4- Stratifié orthotrope D_1 e $D_2 = 0$ pas de couplage flexion-torsion.

Nous considérons une poutre orthotrope soumise à une charge transverse W_p , et en introduisant la formulation variationnelle (principe de Hamilton); l'équation de flexion est donnée à partir des relations fondamentales (2-39), (2-41) et (2-42) :

$$-I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (4-19)$$

$$-I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_5 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + b_p p = 0 \quad (4-20)$$

$$-I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - A_5 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (4-21)$$

Le déplacement longitudinal u_0 n'intéresse pas le calcul de flottement d'où on ne s'intéresse pas à la résolution de l'équation différentielle (4-19), le système se réduit aux deux équations :

$$\begin{aligned} -I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_5 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + b_p p &= 0 \\ -I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - A_5 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-22)$$

Le système des équations différentielles admet comme solutions :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= W(x) e^{j \omega t} \\ \psi(x, t) &= \Psi(x) e^{j \omega t} \end{aligned} \quad (4-23)$$

Le système d'équations différentielles devient :

$$\begin{aligned} I_1 \omega^2 W(x) e^{j \omega t} + A_5 \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} e^{j \omega t} + \frac{d^2 W(x)}{dx^2} e^{j \omega t} \right) - b_p \left[A \frac{d}{dx} (x) e^{j \omega t} + B (x) e^{j \omega t} \right] &= 0 \\ I_3 \omega^2 \Psi(x) e^{j \omega t} + D_1 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} e^{j \omega t} - A_5 \left(\Psi(x) e^{j \omega t} + \frac{d}{dx} (x) e^{j \omega t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-24)$$

Nous éliminons $e^{j \omega t}$:

$$\begin{aligned} I_1 \omega^2 W(x) + A_5 \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} + \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right) - b_p \left[A \frac{d}{dx} (x) + B j c W(x) \right] &= 0 \\ I_3 \omega^2 \Psi(x) + D_1 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - A_5 \left(\Psi(x) + \frac{d}{dx} (x) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-25)$$

Nous obtenons deux équations couplées :

$$(I_1 \omega^2 - j b_p B \omega) W(x) + A_5 \frac{d\Psi(x)}{dx} + A_5 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - A b_p \frac{d}{dx} (x) = 0 \quad (4-26)$$

$$(I_3 \omega^2 - A_5) \Psi(x) + D_1 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - A_5 \frac{d}{dx} (x) = 0 \quad (4-27)$$

D'après l'équation (4-26) :

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = -\frac{c}{A_5} W(x) - \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \frac{A b_p d}{A_5} \frac{d}{dx} (x) \quad (4-28)$$

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = -\frac{c}{A_5} \frac{d}{dx} (x) - \frac{d^3 W(x)}{dx^3} + \frac{A b_p d^2 W(x)}{A_5 dx^2} \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{c}{A_5} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + \frac{A b_p d^3 W(x)}{A_5 dx^3} \quad (4-30)$$

En posant :

$$c = I_1 \omega^2 - j b_p B \omega$$

$$g = I_3 \omega^2 - A_5$$

$$I_1 = \rho_s \cdot$$

$$I_2 = R \cdot$$

$$I_3 = I_x \cdot$$

La dérivation de l'équation (4-26) par rapport à x , nous donne :

$$g \frac{d^3 \Psi(x)}{dx^3} + D_1 \frac{d^3 \Psi(x)}{dx^3} - A_5 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0 \quad (4-31)$$

En remplaçons $\frac{d^3 \Psi(x)}{dx^3}$ et $\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2}$ par les expressions (4-28) et (4-30) dans l'équation (4-31) :

$$g \left[-\frac{c}{A_5} W(x) - \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \frac{A b_p}{A_5} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} W(x) \right) \right] + D_1 \left[-\frac{c}{A_5} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + \frac{A b_p}{A_5} \frac{d^3 W(x)}{dx^3} \right] - A_5 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{c g}{A_5} W(x) + \frac{g A b_p}{A_5} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} W(x) \right) - \left(A_5 + g + \frac{D_1 c}{A_5} \right) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \frac{D_1 A b_p}{A_5} \frac{d^3 W(x)}{dx^3} - D_1 \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = 0$$

Si le nombre de Mach M est compris entre $\sqrt{2}$ et 2 alors :

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} W(x) \right) \quad [15] \quad (4-33)$$

D'où :

$$p = -A \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} W(x) \right) - B \frac{d}{dx} W(x) \approx \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} W(x) \right) \quad [16] \quad (4-34)$$

Donc :

$$B = 0 \text{ et } A = -\frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} = -\lambda \quad [16] \quad (4-35)$$

A : Paramètre de pression.

$$\lambda = \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (4-36)$$

$$c = I_1 \omega^2 \quad (4-37)$$

$$g = I_3 \omega^2 - A_5 \quad (4-38)$$

L'équation différentielle en $W(x)$ devient :

$$\frac{g I_1 \omega^2}{A_5} W(x) - \frac{g b_p \rho v^2}{A_5 \sqrt{M^2 - 1}} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} W(x) \right) + \left(I_3 \omega^2 + \frac{D_1 I_1 \omega^2}{A_5} \right) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - \frac{D_1 b_p}{A_5} \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{d^3 W(x)}{dx^3} + D_1 \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = 0 \quad (4-39)$$

Soit le changement de variable suivant :

$$\xi = \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{l} dx \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{1}{l^2} dx^2$$

L'équation de vibration de la poutre s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{D_1}{I} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \frac{D_1 b_p}{I^2 A_5} \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \left(I_3 \omega^2 + \frac{D_1 I_1 \omega^2}{A_5} \right) \frac{1}{I^2} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - \frac{g b_p \rho v^2}{I^2 A_5 \sqrt{M^2 - 1}} \frac{d W(x)}{dx} + \frac{g I_1 \omega^2}{A_5} W(x) = 0 \quad (4-40)$$

4-3 la résolution de l'équation de vibration:

Nous considérons le cas d'une poutre encastree sur un coté l'autre étant libre et soumise à une charge w_p . Dans la pratique le problème ne peut être résolu en explicitant les solutions exactes, et des méthodes d'approximation doivent être utilisées. Dans notre cas, nous optons pour des solutions approchées en utilisant la méthode énergétique de Ritz.

4-3-1 Formulation énergétique :

Nous appliquons le théorème des travaux virtuels qui dans le cas d'un problème dynamique se traduit par :

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = 0 \quad (4-41)$$

Où \mathcal{L} est la lagrangien

$$\mathcal{L} = E_c - U = E_c - U_d + W_p \quad (4-42)$$

E_c : Energie cinétique.

W_p : Travail des forces extérieures.

U_d : Energie de déformation.

4-3-1-2 Energie de déformation :

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant l'expression :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_i \varepsilon_i) d d d \quad (4-43)$$

Donc :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \gamma_x) d d d \quad (4-44)$$

Puisque les coordonnées forme un système libre, l'expression (4-44) s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\iint_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \gamma_x) d d \right] dx \quad (4-45)$$

Nous avons aussi :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial x} \quad (4-46)$$

$$K(x) = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\gamma_x = \psi + \frac{\partial}{\partial x}$$

A partir des relations (4-46) et (2-21), (2-22), (2-23) :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^l [N_x \varepsilon_x^0 + M_x K(x) + Q_x \gamma_x] dx \quad (4-47)$$

D'après l'équation constitutive :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^l \left[A_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + 2 B_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + D_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + A_5 \left(\psi + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (4-48)$$

Comme u est faible devant w et que la poutre est symétrique et orthotrope, alors (4-48) s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^l \left[D_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + A_5 \left(\psi + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (4-49)$$

4-3-1-3 Energie cinétique:

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (4-50)$$

Puisque $v = 0$, alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (4-51)$$

En introduisant les expressions de déplacement (schéma de premier degré) :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2I_2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4-52)$$

u_0 est faible devant w :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^l \left[I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (4-53)$$

4-3-1-4 Travail des forces de pression W_p :

$$W_p = b_p \int_0^L p w dx \quad [15] \quad (4-54)$$

Soit :

$$p \simeq -A \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \quad [16] \quad (4-55)$$

Donc :

$$W_p = b \int_0^L \lambda w \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad (4-56)$$

4-3-2 La séparations des variables :

Nous considérons un mouvement harmonique de la forme :

$$w(x, t) = W(x) e^{j\omega t} \quad (4-57)$$

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{j\omega t} \quad (4-58)$$

L'expression d'énergie de déformation :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + A_5 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + A_5 \left(\psi^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\psi \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx \quad (4-59)$$

D'après l'équation de séparation des variables :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_1 \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} e^{j\omega t} \right)^2 + A_5 \Psi(x)^2 e^{2j\omega t} + A_5 \left(\frac{dW(x)}{dx} e^{j\omega t} \right)^2 \right] dx$$

$$+ 2 A_5 \Psi(x) \frac{dW(x)}{dx} e^{2j\omega t} dx \quad (4-60)$$

L'énergie de déformation devient donc :

$$U_d = \frac{1}{2} e^{2j\omega t} \int_0^L \left[D_1 \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} \right)^2 + A_5 \Psi(x)^2 + A_5 \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 + 2 A_5 \Psi(x) \frac{dW(x)}{dx} \right] dx$$

L'expression d'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (4-61)$$

En introduisant les expressions de séparation des variables :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_3 \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dW(x)}{dx} e^{j\omega t} \right) \right)^2 + I_1 \left(j\omega W(x) e^{j\omega t} \right)^2 \right] dx$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_3 \left(j\omega \frac{dW(x)}{dx} e^{j\omega t} \right)^2 + I_1 \left(j\omega W(x) e^{j\omega t} \right)^2 \right] dx$$

$$E_c = \frac{1}{2} e^{2j\omega t} \int_0^L \left[-\omega^2 I_3 \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 - \omega^2 I_1 (W(x))^2 \right] dx$$

L'énergie cinétique devient donc :

$$E_c = \frac{1}{2} e^{2j\omega t} \int_0^L \left[I_3 \omega^2 \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 + I_1 \omega^2 (W(x))^2 \right] dx \quad (4-62)$$



L'expression de travail des forces de pression:

$$W_p = b \int_0^L \left[\lambda W \frac{\partial W}{\partial t} \right] d$$

En introduisant une autre fois les expressions de séparation des variables :

$$W_p = b e^{2jt} \int_0^L \left[\lambda W(x) \frac{dW(x)}{d} \right] d \quad (4-63)$$

Pour exprimer les intégrales, il est pratique d'introduire les variables réduites :

$$\xi = \frac{x}{l} \Rightarrow d = l d\xi \quad : \quad (4-64)$$

En introduisant (4-64) dans les équations (4-60), (4-62) et (4-63) :

➤ L'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{1}{2} e^{2jt} \int_0^1 \left[\frac{I_2}{l^2} \left(\frac{d\Psi(x)}{d} \right)^2 + A_5 \Psi(x)^2 + \frac{A_5}{l^2} \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 + \frac{2 A_5}{l} \Psi(x) \frac{dW(x)}{d} \right] l d \\ U_d &= \frac{1}{2} e^{2jt} \int_0^1 \left[\frac{I_2}{l} \left(\frac{d\Psi(x)}{d} \right)^2 + l A_5 \Psi(x)^2 + \frac{A_5}{l} \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 + 2 A_5 \Psi(x) \frac{dW(x)}{d} \right] d \\ U_d(\bar{m}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{I_2}{l} \left(\frac{d\Psi(x)}{d} \right)^2 + l A_5 \Psi(x)^2 + \frac{A_5}{l} \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 + 2 A_5 \Psi(x) \frac{dW(x)}{d} \right] d \quad (4-65) \end{aligned}$$

➤ L'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} e^{2jt} \int_0^1 \left[\frac{I_3 \omega^2}{l^2} \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 + I_1 \omega^2 (W(x))^2 \right] l d \\ E_c &= \frac{1}{2} e^{2jt} \int_0^1 \left[\frac{I_3 \omega^2}{l} \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 + l I_1 \omega^2 (W(x))^2 \right] d \\ E_c(\bar{m}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{I_3 \omega^2}{l} \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 + l I_1 \omega^2 (W(x))^2 \right] d \quad (4-66) \\ E_c(\bar{m}) &\geq 0 \end{aligned}$$

➤ Le travail des forces externes s'écrit :

$$\begin{aligned} W_p &= b_p e^{2jt} \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{l} W(x) \frac{dW(x)}{d} \right] l d \\ W_p &= b_p e^{2jt} \int_0^1 \left[\lambda W(x) \frac{dW(x)}{d} \right] d \\ W_p(\bar{m}) &= b_p \int_0^1 \left[\lambda W(x) \frac{dW(x)}{d} \right] d \quad (4-67) \end{aligned}$$

En intégrant les énergies termes par termes (les énergies adimensionnelles) :

$$U_d(\bar{m}) = \left[\frac{I_2}{2l} \int_0^1 \left(\frac{d\Psi(x)}{d} \right)^2 d + l \frac{A_5}{2} \int_0^1 \Psi(x)^2 d + \frac{A_5}{2l} \int_0^1 \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 d + A_5 \int_0^1 \Psi \frac{dW(x)}{d} d \right] \quad (4-68)$$

$$E_c(\bar{m}) = \left[\frac{I_3 \omega^2}{2l} \int_0^1 \left(\frac{dW(x)}{d} \right)^2 d + \frac{l I_1 \omega^2}{2} \int_0^1 (W(x))^2 d \right] \quad (4-69)$$

$$W_p(\bar{m}) = b_p \lambda \int_0^1 \left[W(x) \frac{dW(x)}{d} \right] d \quad (4-70)$$

L'expression du Lagrangien :

$$\mathcal{L} = E_c(\dot{m}) - U_d(\dot{m}) + w_p(\dot{m})$$

En introduisant les relations (4-67), (4-68) et (4-69) dans le Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{I_1}{2l} \int_0^1 \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{I_1 l}{2} \int_0^1 W(x)^2 dx + b_F \int_0^1 \left[W(x) \frac{dW(x)}{dx} \right] dx - \\ & \frac{U_1}{2l} \int_0^1 \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} \right)^2 dx - \frac{A_5}{2} \int_0^1 \Psi(x)^2 dx - \frac{A_5}{2l} \int_0^1 \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 dx - A_5 \int_0^1 \Psi(x) \frac{dW(x)}{dx} dx \\ \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} &= \left(\frac{I_1}{2l} - \frac{A_5}{2l} \right) \int_0^1 \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{I_1 l}{2} \int_0^1 W(x)^2 dx - \frac{U_1}{2l} \int_0^1 \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} \right)^2 dx - \\ & l \frac{A_5}{2} \int_0^1 \Psi(x)^2 dx - A_5 \int_0^1 \Psi(x) \frac{dW(x)}{dx} dx + b_F \int_0^1 \left[W(x) \frac{dW(x)}{dx} \right] dx \end{aligned} \quad (4-71)$$

4-4 Application de la méthode de Ritz :

Dans le cas d'une poutre en appuis simple, en explicitant les solutions exactes des équations fondamentales de problème de vibration vérifiant les conditions aux limites. Dans la pratique la plupart des problèmes ne peuvent être résolus en explicitant les solutions exactes, et des méthodes d'approximation doivent être utilisées. Dans notre étude (poutre encastree-libre), nous recherchons des solutions approchées en utilisant la méthode de Ritz (paragraphe (9-7) chapitre 2).

4-4-1 Les conditions aux limites:

Dans le cas d'une poutre encastree à l'extrémité $x = 0$ et libre à l'autre extrémité $x = l$, les conditions aux frontières sont :

Extrémité $x = 0$:

$$w(x = 0) = 0$$

$$\frac{dw}{dx}(x = 0) = 0$$

Extrémité $x = l$:

$$M_x(x = l) = 0$$

$$Q_x(x = l) = 0$$

Ou bien :

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x = l) = 0$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = l) = 0$$

4-4-2 les solutions approchées :

Les solutions approchées sont recherchées sous la forme des séries à variables séparées :

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum_{i=1}^n A_i X_i(x) \\ \bar{x} &= \sum_{i=1}^n B_i Y_i(x) \end{aligned} \quad (4-72)$$

$\bar{\mathcal{L}}$ est le Lagrangien obtenu en reportant les expressions approchées (4-72) dans l'expression (4-70). Le calcul du Lagrangien approché nécessite d'explicitier les termes :

$$\left(\frac{d\bar{W}}{dt}\right)^2, \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2, \bar{W}^2, -2 \bar{W} \frac{d\bar{W}}{dt}, \bar{W} \frac{d\bar{W}}{dt}; \text{ et ces dérivées par rapport à } A_i \text{ et } B_i.$$

4-4-3 Les conditions de stationnarité :

D'après l'équation (2-64) (condition de stationnarité) :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial A_i} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial B_i} = 0; \quad i = 1..n \quad (4-73)$$

On obtient donc un système de $(2n) \times (2n)$ équations :

➤ Le premier sous système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial A_i} &= \left(\frac{I_3}{2l} - \frac{A_{55}}{2l}\right) \int_0^1 2 \sum A_j \left(\frac{dX_i}{dt} \frac{dX_j}{dt}\right) dt - \frac{I_1 l^2}{2} \int_0^1 2 \sum A_j (X_i X_j) dt \\ &- A_{55} \int_0^1 \sum B \left(\frac{dX_i}{dt} Y_j\right) dt + b_P \int_0^1 \sum A_j \left(X_i \frac{dX_j}{dt}\right) dt + b_P \int_0^1 \sum A_j \left(\frac{dX_i}{dt} X_j\right) dt = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_3}{l} - \frac{A_{55}}{l}\right) \sum A_j \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{dt} \frac{dX_j}{dt}\right) dt - I_1 l^2 \sum A_j \int_0^1 (X_i X_j) dt - A_{55} \sum B_j \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{dt} Y_j\right) dt + \\ b_P \sum A_j \int_0^1 \left(X_i \frac{dX_j}{dt}\right) dt + b_P \sum A_j \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{dt} X_j\right) dt = 0 \end{aligned} \quad (4-74)$$

L'expression (4-74) peut se mettre sous la forme pratique, en introduisant les constantes d'intégration :

$$\left(\frac{I_3}{l} - \frac{A_{55}}{l}\right) \sum A_j \alpha_{ij}^{11} - I_1 l^2 \sum A_j \alpha_{ij}^{00} - A_{55} \sum B_j \alpha_{ij}^{10} + b_P \lambda \sum A_j \alpha_{ij}^{01} + b_P \lambda \sum A_j \alpha_{ij}^{11} = 0 \quad (4-75)$$

➤ Le deuxième sous système :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial B_i} = -\frac{D_{11}}{2l} \int_0^1 2 \sum B_j \left(\frac{dY_i}{dt} \frac{dY_j}{dt}\right) dt - \frac{l A_{55}}{2} \int_0^1 2 \sum B_j (Y_i Y_j) dt - A_{55} \int_0^1 \sum A_j \left(Y_i \frac{dX_j}{dt}\right) dt = 0$$

Donc :

$$-\frac{D_{11}}{l} \sum B_j \int_0^1 \left(\frac{dY_i}{dt} \frac{dY_j}{dt}\right) dt - l A_{55} \sum B_j \int_0^1 (Y_i Y_j) dt - A_{55} \sum A_j \int_0^1 \left(Y_i \frac{dX_j}{dt}\right) dt = 0 \quad (4-76)$$

En introduisant les constantes d'intégration :

$$-\frac{D_{11}}{l} \sum B_j \beta_{11}^1 - l A_{55} \sum B_j \beta_{11}^0 - A_{55} \sum A_j \theta_{11}^0 = 0, \quad i, j = 1..n \quad (4-77)$$

Sous forme matriciel (problème aux valeurs propres) :

$$\left\{ - \frac{2}{l} \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{11}^A \\ K_{11}^B & K_{11}^B \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-78)$$

Avec :

$$K_{11}^A = \frac{-A_{55}}{l} \frac{11}{11} + E_P \frac{01}{11} + E_F \frac{10}{11}$$

$$K_{11}^A = -A_{55} \frac{10}{11}$$

$$K_{11}^B = -A_{55} \frac{01}{ij}$$

$$K_{11}^B = -\frac{D_{11}}{l} \frac{11}{ij} - A_{55} \frac{00}{ij}$$

$$M_{11} = \frac{I_3}{l} \frac{11}{11} + I_1 l \frac{00}{11}$$

Et :

$$\frac{00}{11} = \int_0^1 (X_i X_j) d$$

$$\frac{00}{ij} = \int_0^1 (Y_i Y_j) d$$

$$\frac{11}{11} = \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{d} \frac{dX_j}{d} \right) d$$

$$\frac{11}{ij} = \int_0^1 \left(\frac{dY_i}{d} \frac{dY_j}{d} \right) d$$

$$\frac{10}{11} = \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{d} Y_j \right) d$$

$$\frac{01}{ij} = \int_0^1 \left(Y_i \frac{dX_j}{d} \right) d$$

$$\frac{01}{11} = \int_0^1 \left(X_i \frac{dX_j}{d} \right) d$$

$$\frac{10}{11} = \int_0^1 \left(\frac{dX_i}{d} X_j \right) d$$

En développant les matrices :

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_1^A & \dots & K_1^A & K_1^A & \dots & K_1^A \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_n^A & \dots & K_n^A & K_n^A & \dots & K_n^A \\ K_1^B & \dots & K_1^B & K_1^B & \dots & K_1^B \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_n^B & \dots & K_n^B & K_n^B & \dots & K_n^B \end{bmatrix} - \frac{2}{l} \begin{bmatrix} M_1 & \dots & M_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_n & \dots & M_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

4-4-3 Solution approchée par des fonctions poutres :

Pour obtenir les fréquences propres de la poutre orthotrope symétrique, en exprimant les fonctions $X_i(M)$, $Y_i(M)$ de la solution approchée par :

$$X_i(M) = \cos \frac{\lambda_i x}{l} - c_i h \frac{\lambda_i x}{l} - \gamma_i \left(s_i \frac{\lambda_i x}{l} - s_i h \frac{\lambda_i x}{l} \right) \quad (4-79)$$

$$Y_i(M) = \cos \frac{\lambda_i x}{l} - c_i h \frac{\lambda_i x}{l} - \gamma_i \left(s_i \frac{\lambda_i x}{l} - s_i h \frac{\lambda_i x}{l} \right) \quad (4-80)$$

Vérification des conditions aux limites :

Pour une poutre encastree à une extrémité $x=0$ et libre à l'autre extrémité $x=l$, les conditions aux limites sont :

Coté encastree $\xi = 0$:

$$X_i(\xi = 0) = \cos \frac{\lambda_i 0}{l} - c_i h \frac{\lambda_i 0}{l} - \gamma_i \left(s_i \frac{\lambda_i 0}{l} - s_i h \frac{\lambda_i 0}{l} \right) = 0$$

$$Y_i(\xi = 0) = \cos \frac{\lambda_i 0}{l} - c_i h \frac{\lambda_i 0}{l} - \gamma_i \left(s_i \frac{\lambda_i 0}{l} - s_i h \frac{\lambda_i 0}{l} \right) = 0$$

Et

$$\frac{\partial X_i}{\partial \xi} (\xi = 0) = 0$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \xi} (\xi = 0) = 0$$

Coté libre $\xi = 1$:

$$X_i(\xi = 1) = \cos \lambda_i - c_i h \lambda_i - \gamma_i (s_i \lambda_i - s_i h \lambda_i) = 0$$

$$Y_i(\xi = 1) = \cos \lambda_i - c_i h \lambda_i - \gamma_i (s_i \lambda_i - s_i h \lambda_i) = 0 \quad (4-81)$$

Et

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} (\xi = 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} (\xi = 1) = 0$$

$$\frac{\partial^3 X_i}{\partial x^3} (\xi = 1) = 0$$

$$\frac{\partial^3 Y_i}{\partial x^3} (\xi = 1) = 0 \quad (4-82)$$

D'après les conditions (4-81) et (4-82) :

$$\cos \lambda_i + c_i h \lambda_i - \gamma_i (s_i \lambda_i + s_i h \lambda_i) = 0$$

$$\sin \lambda_i - s_i h \lambda_i + \gamma_i (c_i \lambda_i + c_i h \lambda_i) = 0$$

Une solution différente de $\gamma_i = 0$ est obtenue lorsque :

$$\frac{c_i \lambda_i + c_i h \lambda_i}{s_i \lambda_i + s_i h \lambda_i} = - \frac{s_i \lambda_i - s_i h \lambda_i}{c_i \lambda_i + c_i h \lambda_i} \quad (4-83)$$

En tenant compte des égalités :

$$\begin{aligned}\cos^2 \lambda_i + \sin^2 \lambda_i &= 1 \\ \cosh^2 \lambda_i - \sinh^2 \lambda_i &= 1\end{aligned}\tag{4-84}$$

Nous obtenons :

$$\cos \lambda_i * c_i * h \lambda_i = -1\tag{4-85}$$

Les coefficients γ_i sont exprimés par la relation :

$$\gamma_i = \frac{c_i \lambda_i + c_i h \lambda_i}{s_i \lambda_i + s_i h \lambda_i}\tag{4-86}$$

Les valeurs de λ_i ont été déterminées :

$$\lambda_1 = 1,875$$

$$\lambda_2 = 4,694$$

$$\lambda_i = (i - 0,5)\pi \text{ pour } i \geq 3,$$

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons développé les équations dynamiques du mouvement vibratoire de la poutre composite soumise à une force transversale de pression. La résolution de ces équations différentielles par une méthode analytique étant très difficile, voire impossible, nous avons opté pour une résolution basée sur la méthode énergétique de Ritz qui approche les solutions par des fonctions poutres.

Le chapitre suivant sera consacré à la résolution proprement dite du problème de flottement de la poutre stratifiée.

Conclusion

Les technologies les plus prometteuses pour une efficacité à vie et une fiabilité améliorée impliquent aujourd'hui l'utilisation de structures et de matériaux composites. Les objectifs ultimes de la recherche dans ce domaine sont de comprendre et de contrôler le comportement dynamique de tout nouveau matériau composite.

L'objectif de notre travail consiste en l'étude du comportement vibratoire des poutres composites soumises à des forces aérodynamiques, par la méthode variationnelle de Ritz.

Nous avons essayé de regrouper plusieurs éléments qui sont respectivement : les matériaux composites (spécialement les stratifiés orthotropes), les différentes théories étudiant leur comportement dynamique et les projections sur le domaine aéronautique (flottement).

Nous avons effectué en premier lieu une étude générale sur l'aéroélasticité et la théorie des stratifiés (théorie classique et FSDBT), puis une modélisation dynamique qui nous a permis de réduire le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, y) de moindre difficulté. Nous avons résolu le problème aux valeurs propres et nous avons étudié l'influence des différents paramètres du stratifié sur l'évolution des fréquences adimensionnelles et sur la vitesse critique du flottement. L'ensemble des résultats obtenus montre l'influence des charges aérodynamiques sur le comportement dynamique des structures élancées assimilables à des poutres.

Comme perspectives :

Les efforts d'écoulement d'air appliqués sur l'aile peuvent être intégrés sous la forme d'un chargement aérodynamique instationnaire. Il est envisageable de les calculer en fonction de la vitesse et des caractéristiques d'écoulement afin de pouvoir les intégrer directement dans les équations de vibration.

L'étude peut être étendue aux autres conditions aux limites afin de montrer leur influence sur le comportement dynamique de la structure.

Il sera également intéressant d'introduire le paramètre température couplé à la théorie des grands déplacements (relations de Von-Karman) et de noter son influence sur le comportement aéroélastique de la poutre composite.

Pour avoir une meilleure précision, les théories d'ordre supérieur peuvent être utilisées afin de mieux prédire les frontières du domaine de l'instabilité aéroélastique.