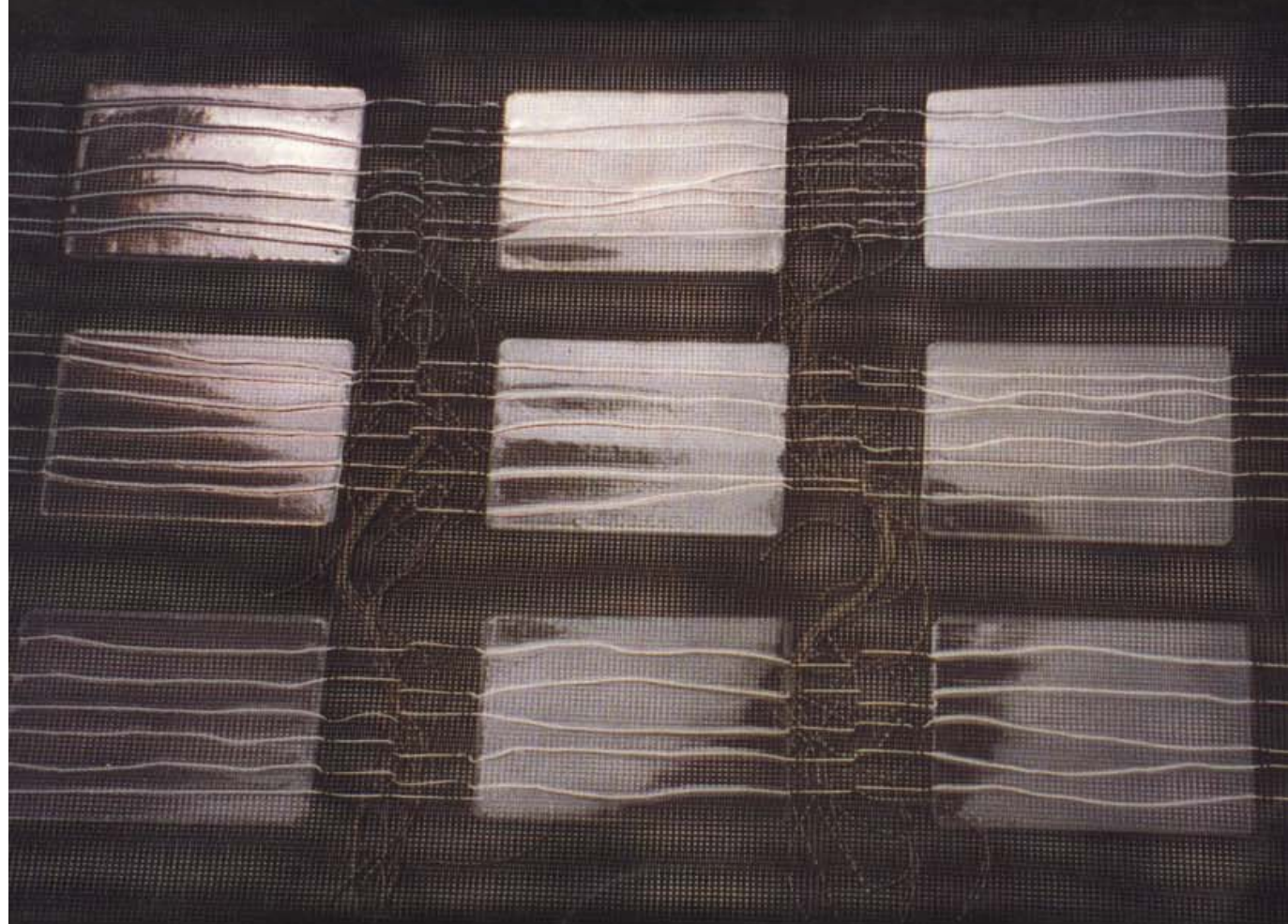


*Enseignement des mathématiques*

# Algèbre linéaire

**Aide-mémoire, exercices  
et applications**

Robert C. Dalang  
Amel Chaabouni



Presses polytechniques et universitaires romandes

# Table des matières

|              |   |
|--------------|---|
| Avant-propos | v |
|--------------|---|

|                           |   |
|---------------------------|---|
| Aide-mémoire et exercices | 1 |
|---------------------------|---|

|                      |   |
|----------------------|---|
| 1 Systèmes linéaires | 3 |
|----------------------|---|

|                                                                                                                                                                                                                         |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| <b>Aide-mémoire</b> : Matrice associée à un système linéaire, solution générale d'un système, opérations élémentaires sur les lignes, méthode de résolution de Gauss, systèmes homogènes, systèmes inhomogènes. . . . . | 3 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

|                            |   |
|----------------------------|---|
| <b>Exercices</b> . . . . . | 5 |
|----------------------------|---|

|                    |    |
|--------------------|----|
| 2 Calcul matriciel | 11 |
|--------------------|----|

|                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Aide-mémoire</b> : Somme et produit de matrices, transposée d'une matrice, matrices inversibles, opérations matricielles par blocs, matrices diagonales, triangulaires et symétriques, relations avec les systèmes linéaires. . . . . | 11 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|                            |    |
|----------------------------|----|
| <b>Exercices</b> . . . . . | 14 |
|----------------------------|----|

|                |    |
|----------------|----|
| 3 Déterminants | 23 |
|----------------|----|

|                                                                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Aide-mémoire</b> : Définition, propriétés, développements suivant une ligne ou une colonne, règle de Cramer, calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode des cofacteurs. . . . . | 23 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|                            |    |
|----------------------------|----|
| <b>Exercices</b> . . . . . | 25 |
|----------------------------|----|

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 4 Transformations de l'espace | 31 |
|-------------------------------|----|

|                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Aide-mémoire</b> : L'espace de dimension $n$ , interprétations géométriques, équations paramétriques de droites et de plans, transformations affines et matricielles, translations, homothéties et similitudes, ensemble image, composition de transformations. . | 31 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|                            |    |
|----------------------------|----|
| <b>Exercices</b> . . . . . | 33 |
|----------------------------|----|

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b>  | <b>Produit scalaire euclidien dans <math>\mathbb{R}^n</math></b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>37</b>  |
|           | <b>Aide-mémoire</b> : Produit scalaire euclidien, norme et distance euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwartz, théorème de Pythagore, projections orthogonales sur une droite ou un plan. . . . .                                                                                                                                                                                                         | 37         |
|           | <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 39         |
| <b>6</b>  | <b>Espaces vectoriels</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>43</b>  |
|           | <b>Aide-mémoire</b> : Espaces et sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires, familles libres ou liées, bases, notion de dimension, applications aux systèmes linéaires, théorème du rang. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 43         |
|           | <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 48         |
| <b>7</b>  | <b>Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>61</b>  |
|           | <b>Aide-mémoire</b> : Produits scalaires dans les espaces de dimension finie et infinie, bases orthonormales, théorème de Pythagore généralisé, projection orthogonale, inégalité de Cauchy-Schwartz, procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmid, problème de la meilleure approximation, solution d'un système linéaire au sens des moindres carrés, matrices orthogonales, changements de base. . . . . | 61         |
|           | <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 66         |
| <b>8</b>  | <b>Valeurs et vecteurs propres</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>79</b>  |
|           | <b>Aide-mémoire</b> : Définitions et premières propriétés, polynôme caractéristique d'une matrice, diagonalisation d'une matrice, sous-espaces propres, diagonalisation orthogonale des matrices symétriques, diagonalisation en nombres complexes. . . . .                                                                                                                                               | 79         |
|           | <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 82         |
| <b>9</b>  | <b>Transformations linéaires</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>89</b>  |
|           | <b>Aide-mémoire</b> : Applications linéaires, noyau, image et rang d'une application linéaire, transformation de la matrice d'une application linéaire dans un changement de base, composition de transformations linéaires. . . . .                                                                                                                                                                      | 89         |
|           | <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 92         |
| <b>10</b> | <b>Résolution de systèmes différentiels</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>103</b> |
|           | <b>Aide-mémoire</b> : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre, cas où la matrice du système est diagonalisable, recherche d'une solution particulière, exponentielle d'une matrice, solution générale, résolution à l'aide des nombres complexes. . . . .                                                                                                                                       | 103        |
|           | <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 106        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Applications de l'algèbre linéaire</b>                                                                                                                                                                                                                      | <b>111</b> |
| <b>11 Utilisation des transformations affines en infographie</b>                                                                                                                                                                                               | <b>113</b> |
| Les objets fractals, similitudes simples, ensembles auto-semblables, dimension de Hausdorff, un algorithme pour dessiner les ensembles auto-semblables, exemples du tamis de Sierpinski et du tapis de Sierpinski. . . . .                                     | 113        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 121        |
| <b>12 Cryptographie conventionnelle</b>                                                                                                                                                                                                                        | <b>125</b> |
| Chiffrement de César, chiffrement de Hill, calcul matriciel modulo 26, déchiffrement de Hill, décryptage par attaque à texte clair connu. . . . .                                                                                                              | 125        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 135        |
| <b>13 Les codes correcteurs d'erreurs</b>                                                                                                                                                                                                                      | <b>139</b> |
| Opérations sur $\mathcal{K} = \{0, 1\}$ , $\mathcal{K}$ -espaces vectoriels, codes linéaires, rendement d'un code linéaire, matrice génératrice du code, matrice de contrôle, correction d'un mot reçu comportant une erreur simple, codes de Hamming. . . . . | 139        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 148        |
| <b>14 Chaînes de Markov</b>                                                                                                                                                                                                                                    | <b>151</b> |
| Matrice de transition, vecteur d'état, vecteur stationnaire, vecteur des visites, chaînes de Markov en infographie. . . . .                                                                                                                                    | 151        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 157        |
| <b>15 Stéréogrammes</b>                                                                                                                                                                                                                                        | <b>161</b> |
| La perspective naturelle, paires stéréoscopiques, dessin d'une paire stéréographique correspondant à une surface, dessin d'un stéréogramme pour une surface d'équation $z = h(x, y)$ . . . . .                                                                 | 161        |
| <b>Exercices</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 178        |
| <b>Révision</b>                                                                                                                                                                                                                                                | <b>181</b> |
| <b>16 Exercices de révision</b>                                                                                                                                                                                                                                | <b>183</b> |
| <b>Solutions des exercices</b>                                                                                                                                                                                                                                 | <b>193</b> |
| <b>1 Systèmes linéaires</b>                                                                                                                                                                                                                                    | <b>195</b> |
| <b>2 Calcul matriciel</b>                                                                                                                                                                                                                                      | <b>201</b> |

|    |                                                        |     |
|----|--------------------------------------------------------|-----|
| 3  | Déterminants                                           | 211 |
| 4  | Transformations de l'espace                            | 217 |
| 5  | Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$         | 221 |
| 6  | Espaces vectoriels                                     | 225 |
| 7  | Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire         | 237 |
| 8  | Valeurs et vecteurs propres                            | 251 |
| 9  | Transformations linéaires                              | 261 |
| 10 | Résolution de systèmes différentiels                   | 275 |
| 11 | Utilisation des transformations affines en infographie | 281 |
| 12 | Cryptographie conventionnelle                          | 285 |
| 13 | Les codes correcteurs d'erreurs                        | 291 |
| 14 | Chaînes de Markov                                      | 295 |
| 15 | Séréogrammes                                           | 301 |
| 16 | Exercices de révision                                  | 305 |
|    | Bibliographie                                          | 321 |

*Enseignement des mathématiques*

# Algèbre linéaire

## Aide-mémoire, exercices et applications

Ce volume présente d'abord les notions d'algèbre linéaire indispensables aux étudiants ingénieurs et généralement abordées au cours de la première année du cycle universitaire. Pour faciliter l'assimilation progressive de la matière, chaque chapitre est accompagné d'une grande variété d'exercices. Pour la majorité de ceux-ci, un corrigé est donné à la fin du livre. Cette matière est ensuite illustrée par cinq applications de l'algèbre linéaire à des thèmes qui sont de nature à montrer à l'étudiant l'utilité de la théorie. Comment dessiner une fractale ou réaliser un stéréogramme ? Que sont les codes correcteurs d'erreurs, ou les premières techniques de cryptographie ? Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov ? Ces sujets, qui utilisent de près les notions d'algèbre linéaire, sont abordés de manière accessible et sont également accompagnés d'exercices.



Après des études de mathématiques, puis un doctorat à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, **Robert C. Dalang** fait carrière aux Etats-Unis: il est nommé professeur assistant à l'Université de Californie, Berkeley, puis professeur associé à Tufts University, Boston. Depuis 1995, il est professeur à l'EPFL. Il y enseigne, au premier cycle, l'algèbre linéaire à différentes sections d'ingénieurs et, aux deuxième et troisième cycles, les probabilités et les processus stochastiques. Ses travaux de recherche concernent la théorie des probabilités et des processus stochastiques ainsi que les applications de ces théories.

**Amel Chaabouni** obtient un DEA en mathématiques à l'Université de Tunis et y soutient, après des travaux de recherche effectués à l'Université de Genève, une thèse de troisième cycle en analyse harmonique. Elle travaille ensuite comme maître assistante à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis. Depuis 1996, elle est assistante au Département de mathématiques de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, où elle s'occupe principalement de l'enseignement de l'algèbre linéaire.

ISBN 2-88074-483-0



9 782880 744830 >

Presses polytechniques et universitaires romandes