

Roger Godement

Introduction à la théorie des groupes de Lie



Springer

Table des matières

§1	Groupes topologiques	1
1.1	Groupes topologiques : exemples	1
1.2	Espaces homogènes	6
1.3	Groupes commutatifs élémentaires	11
1.4	Groupes opérant proprement	17
1.5	Groupes discrets à quotient compact : exemples arithmétiques	22
1.6	Applications aux corps de nombres algébriques	29
§2	Espaces et groupes simplement connexes	37
2.1	Le point de vue tchéquiste	37
2.2	Prolongement des homomorphismes locaux d'un groupe simplement connexe	42
2.3	Revêtements et groupe fondamental	45
2.4	Le revêtement simplement connexe d'un espace	48
2.5	Classification des revêtements	51
2.6	Le revêtement simplement connexe d'un groupe topologique	54
2.7	Le revêtement universel du groupe $SL_2(\mathbb{R})$	57
§3	Propriétés analytiques des groupes linéaires	69
3.1	Exponentielle et logarithme	69
3.2	Sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$	77
3.3	Limites de produits et de commutateurs	79
3.4	Le théorème de von Neumann pour un sous-groupe fermé	81
3.5	Extension du théorème de von Neumann aux groupes localement linéaires	86
3.6	L'algèbre de Lie et la représentation adjointe d'un groupe localement linéaire	95
3.7	La structure analytique sur un groupe localement linéaire	100
3.8	Analyticité des homomorphismes continus	106
3.9	La dérivée de l'application exponentielle	110

3.10	La formule de Campbell-Hausdorff	114
3.11	Exemples d'algèbres de Lie	116
3.12	La décomposition de Cartan dans un groupe algébrique autoadjoint	121
§4	Variétés et groupes de Lie	125
4.1	Variétés et morphismes	125
4.2	Le rang d'un morphisme en un point	128
4.3	Immersion et submersions	130
4.4	Recollement de sous-variétés ouvertes	132
4.5	Produits cartésiens et groupes de Lie	135
4.6	Définition d'une variété à l'aide d'une immersion	137
4.7	Sous-variétés	140
4.8	Sous-groupes de Lie	142
4.9	Submersions et variétés quotient	145
§5	L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie	155
5.1	Contacts d'ordre n , distributions ponctuelles	155
5.2	Vecteurs tangents en un point d'une variété	160
5.3	Application linéaire tangente à un morphisme	164
5.4	Vecteurs tangents à un produit cartésien	167
5.5	La variété des vecteurs tangents	170
5.6	La représentation adjointe d'un groupe de Lie	173
5.7	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	178
5.8	Effet d'un homomorphisme sur l'algèbre de Lie	184
5.9	Opérateurs différentiels sur une variété	189
5.10	Opérateurs différentiels invariants sur un groupe de Lie	193
5.11	Quelques exemples concrets	203
5.12	Opérateurs différentiels à coefficients complexes. Cas de $SL_2(\mathbb{R})$	209
5.13	Représentations de G et représentations de $U(\mathfrak{g})$	217
5.14	Sous-espaces invariants. Lemme de Schur et Théorème de Burnside	221
5.15	Distributions centrales et invariants de la représentation co-adjointe	229
5.16	La propriété universelle de $U(\mathfrak{g})$	242
§6	L'application exponentielle dans un groupe de Lie	247
6.1	Sous-groupes à un paramètre	247
6.2	Propriétés élémentaires de l'application exponentielle	249
6.3	Régularité de l'application exponentielle	252
6.4	Dérivée de l'application exponentielle	256

6.5	Formule de Campbell-Hausdorff (forme intégrale).....	258
6.6	Formule de Campbell-Hausdorff (développement en série de polynômes homogènes).....	260
6.7	Formule de Campbell-Hausdorff (analyticité de la fonction H)	265
6.8	Analyticité des groupes de Lie.....	268
6.9	Limites de produits et de commutateurs.....	271
6.10	Analyticité des homomorphismes continus.....	274
6.11	Homomorphismes d'un groupe simplement connexe.....	276
6.12	Le théorème de Cartan et Von Neumann.....	279
6.13	Sous-algèbres de Lie et sous-groupes.....	286
6.14	La structure analytique naturelle sur un sous-groupe.....	292
6.15	Commutateurs dans un groupe de Lie.....	296
6.16	Remords tardifs sur les groupes quotients	302

Roger Godement

Introduction à la théorie des groupes de Lie

Ces notes de cours donnés il y a une trentaine d'années à Paris mais restées d'actualité couvrent la théorie générale des groupes de Lie, ainsi que quelques points de la théorie des groupes topologiques, groupes discontinus notamment. Le cas des groupes linéaires, exposé avant la théorie générale par la méthode de von Neumann, permet d'expliquer plus naturellement le formalisme de celle-ci. Ce livre pourra aussi compléter les volumes III et IV de l'*Analyse Mathématique* du même auteur, parus également chez Springer.

ISBN 3-540-20034-7



➤ springeronline.com