



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Saad Dahleb-Blida 1

Faculté de technologie

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : installation énergétique et turbo machine

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du Diplôme de Master II

Thème :

**Étude du comportement réel d'un écoulement
après l'onde de choc normal**

Réalisé par :

Zaouismail

Dirigé par :

Dr.SALHI Marouane

Dr.ROUDANE Mohamed

Année universitaire : 2017 /2018.

Dédicace

*Je veux remercier mes parents et ma femme et mes amies
qui sont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce
mémoire Qui ont été toujours dans mon esprit et dans mon cœur.
Merci à tous et à toutes.*

Résumé

Les changements dans les propriétés d'écoulement à travers une onde de choc normale sont calculés pour les gaz réels, et sa donne une meilleure affinité pour le comportement réel des ondes de choc. Le but de ce travail est de développer la théorie des ondes de choc sous les imperfections gazeuses. Les expressions sont développées pour l'analyse de l'écoulement supersonique d'un gaz thermiquement calorifique imparfaite.

Les effets de la taille moléculaire et de forces d'attraction intermoléculaires sont utilisés pour corriger l'équation d'état, en se concentrant sur la détermination de l'impact des paramètres génératrice amont sur une onde de choc normale.

L'écoulement à travers une onde de choc dans l'air est étudié pour trouver une forme générale valable pour n'importe quel modèle. Au nombre de Mach supérieur à 2,0, l'augmentation de la température est nettement inférieur, et par conséquent l'augmentation de densité est bien au-dessus, cette perte supposant que le comportement des gaz est parfait.

Il est montré que les imperfections calorifiques dans l'air donnent un effet sensible sur les paramètres développés dans les processus considérés.

Les Calcul des erreurs entre le modèle actuel basé sur la théorie du gaz réel et le modèle des gaz parfaits montre que l'influence des imperfections thermiques et calorifiques associés ou gaz réel est important.

Mots clés: écoulement super sonique, gaz parfait, gaz réel, imperfection thermique et calorifique, entropie, paramètre génératrice, fonction de condensation, dérivation et intégration, numérique, onde de choc normale erreur relative.

Abstract:

Changes in flow properties across a normal shock wave are calculated for a real gas, thus giving us a better affinity to the real behavior of the waves. The purpose of this work is to develop shock-wave theory under the gaseous imperfections. Expressions are developed for analyzing the supersonic flow of such a thermally and calorically imperfect gas.

The effects of molecular size and intermolecular attraction forces are used to correct a state equation, focusing on determination of the impact of upstream stagnation parameters on a normal shock wave. Flow through a shock wave in air is investigated to find a general form for normal shock waves. At Mach numbers greater than 2.0, the temperature rise is considerably below, and hence the density rise is well above, that predicted assuming ideal gas behavior.

It is shown that caloric imperfections in air have an appreciable effect on the parameters developed in the processes considered. Computation of errors between the present model based on real gas theory and a perfect gas model shows that the influence of the thermal and caloric imperfections associated with a real gas is important.

Key words: supersonic flow, perfect gas, real gas, thermally and calorically imperfect gas, entropy, generator parameter, condensation function, derivation and integration, numerical, normal shockwave, relative error.

نبذة مختصرة:

التغيرات في خصائص التدفق عبر موجة الصدمة العادية تم حسابها بالنسبة للغاز الحقيقي مما يمنحنا نظرة أفضل بالسلوك الحقيقي للأمواج. الغرض من هذا العمل هو تطوير نظرية موجة الصدمة تحت العيوب الغازية.

يتم تطوير الخصائص لتحليل التدفق الأسرع من الصوت مثل خاصية الغاز الناقص حرارياً والسعر الحراري. يتم استخدام تأثيرات الحجم الجزيئي وقوى الجذب بين الجزيئي لتصحيح معادلة الحالة ، مع التركيز على تحديد تأثير بارامترات الركود في المنبع على موجة الصدمة العادية. ويتحقق التدفق من خلال موجة الصدمة في الهواء للعثور على شكل عام لموجات الصدمة العادية عند $Mach$ أكبر من 2 يكون ارتفاع درجة الحرارة أقل بكثير ، وبالتالي ارتفاع الكثافة فوق ذلك بكثير ، وهذا توقع افتراض سلوك الغاز المثالي و هذا يبين أن عيوب السرعات الحرارية في الهواء لها تأثير ملموس على الخصائص ويجب ان يأخذ بعين الاعتبار.

يبين حساب الأخطاء بين النموذج الحالي القائم على نظرية الغاز الحقيقية ونموذج الغاز المثالي أن تأثير العيوب الحرارية والسرعات الحرارية المرتبطة بالغاز الحقيقي مهم جدا

الكلمات المفتاحية: التدفق الصوتي الفائق ، الغاز المثالي ، الغاز الحقيقي ، النقص الحراري والطاقي ، الإنتروبي، الخصائص المولدة ، وظيفة التكتيف ، الاشتقاق والتكامل ، الحسابات العددية ، موجة الصدمة الطبيعية، الخطأ النسبي.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience pour faire ce mémoire. En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Mr Salhimarouane, pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail. Je veux remercier également les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner mon travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Sommaire :

CHAPITRE 1

Chapitre 1:Généralités sur les ondes de choc.....	17
1.1. INTRODUCTION :.....	17
1.2. Description de l'écoulement supersonique:.....	17
1.3. Onde de choc normale :	18
1.4. Les équations d'onde de choc normal:.....	19

CHAPITRE 2

Chapitre 2 : Les gaz réels	
2.1.Introduction :.....	28
2.2. les gaz parfait :	28
a) Loi de Boyle - Mariotte :	28
b) Loi de Gay - Lussac :	28
c) Loi de Charles :	29
d) Loi d'Avogadro :	29
e) Équation d'état pour un gaz parfait :	29
2.3. Les gaz réels :	30
a. Le covolume :.....	30
b. Les forces d'attraction intermoléculaires :	31
c. Equation d'État des gaz réels :.....	32
2.4. Equation générale :	33
2.5. Les équations des gaz réels (par ordre de complexité) :.....	33
2.5.1. Equation de VAN DER WAALS:.....	33
2.5.2. Equation de BERTHELOT:.....	36
2.5.3. Equation de CAUSIUS (1880):.....	36
2.5.4 Equation de REDLICH-KWONG (1949):.....	37
2.5.5. Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN (1928):.....	37

2.5.6. Equation de Dieterici :	38
2.5.7. Equation de Wohl :	38
2.5.8. Equation de Berthelot Modifiée :	38
2.6. Les coordonnées du point critique- équations réduites :	39
a. Application pour l'équation de BERTHELOT:	40
b. Calcul les constants a, b et R:	41
c. Equation réduite :	41
3.7. Equations de VIRIEL:	43
3.7.1. La fonction du volume v du gaz $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$:	43
3.7.2. La fonction de la pression P du gaz $\frac{PV}{rT} = f(P)$:	44
3.8. Facteur de compressibilité:	46
3.9. Choix de l'équation d'état :	46
3.10. Validation du choix de l'équation de Berthelot :	48

CHAPITRE 3

CHAPITRE 3 : Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

3.1. Introduction:	50
3.2. Hypothèses de base :	51
3.3. Configuration des équations :	52
3.3.1. L'équation de la conservation d'énergie :	52
3.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T sera constante :	53
3.3.3. Détermination la différentielle dp/p :	53
3.3.4. Détermination les paramètres thermodynamique pour les gaz réels :	54
3.3.4.1. L'état générateur :	57
3.3.4.2. La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot :	57
3.3.5. Détermination du nombre de Mach :	58
3.3.5.1. Calcul de la vitesse :	58

3.3.5.2. Détermination de la célérité du son :	59
3.3.5.3. Le nombre de Mach :	60
3.3.6. La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \rho)$	61
3.3.7. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$	61
3.3.8. Rapport des chaleurs spécifiques γ	62
3.4. Calcul numérique des rapports thermodynamiques	62
3.4.1. La méthode de Newton	64
3.4.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes	66
3.4.3. Le choix de la solution initial :	66
3.5. Détermination des paramètres critiques :	67
3.6. Détermination la différentielle dp/ρ :	67
3.7. Détermination de rapport des sections d'un écoulement	67
3.8. Détermination de l'expression du débit massique critique	68
3.9. Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT :	69
3.9.1. Erreur du modèle gaz parfait :	71
3.9.2. Erreur du modèle haute température :	72
3.10. Les équations pour les ondes de choc normales :	72
3.11. entropie:	74
3.12. Procédure de calcul :	75
3.12.1. Les paramètres en aval du choc:	75
3.12.2. entropie :	76
3.13. Les paramètres génératrices après le choc :	78
3.14. Les équations de choc normale [1], [17]:	79
3.15. Détermination de l'équation des gaz parfaits a partir le modèle des gaz réel :	79

CHAPITRE 4

Introduction :	82
4.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel :	82
4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col) :	88
4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques :	90
4.4. Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques :	95
4.5. Résultats pour les ondes de choc normales:	100
Conclusion générale :	109

Liste des figures :

Chapitre 1 :

Figure 1.1 : Système d'onde lié à un profil supersonique.....	17
Figure 1.2: Onde de choc normale.....	19
Figure 1.3: Deux exemples d'une onde de choc normale	19
Figure 1.4: les paramètres d'une onde de choc normale.....	20
Figure 1.5 : Courbe de Rankine-Hugoniot d'un gaz parfait et chaleurs spécifiques Constantes ($\gamma = 1,4$).....	22
Figure 1.6 : Variation de P, ρ, T, P_0 et M à travers une onde de choc normal ($\gamma=1,4$)..	25

Chapitre 2 :

Figure 2.1 : Représentation de l'effet de covolume.....	31
Figure 2.2 : Représentation des forces intermoléculaires.....	31
Figure 2.3 : Comparaison entre les courbes $P = f(V)$ obtenues par l'équation de Van der Waals et les données expérimentales au voisinage du point critique.....	34
Figure 2.4: représentation graphique de l'état du fluide pour le cas d'un gaz réel...	39

Chapitre 3 :

Figure 3.1 schéma d'une onde de choc normale	72
Figure 3.2 Variation de la T_{VF} de fonction (T, ρ) dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ par rapport à T	76
Figure 3.3 La variation de la fonction $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ par rapport ρ	77
Figure 3.4 Représentation de condensation de nœud.....	78

Chapitre 4 :

Figure 4.1: Variation de la masse volumique génératrice ρ_0	83
Figure 4.2 : Variation de l'erreur relative de ρ_0 en fonction de T_0	83
Figure 4.3 : Variation de facteur de compressibilité en fonction de T_0 pour quelque valeur de pression P_0	84
Figure 4.4: Variation de la chaleur spécifique C_p en fonction de T_0 pour différentes P_0	85
Figure 4.5 : Variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	86
Figure 4.6 : Variation du coefficient en fonction de T_0 pour quelque valeur de P_0	86

Figure 4.7: La célérité du son en fonction de la température génératrice T_0 pour quelques valeurs de pression P_0	87
Figure 4.8: Rapport des températures critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	88
Figure 4.9: Rapport des masses volumique critiques en fonction de T_0 pour quelques	89
Figure 4.10: Rapport des pressions critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	89
Figure 4.11: Rapport des vitesses du son critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	90
Figure 4.12: Rapport de débit massique critique en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	90
Figure 4.13: Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach	91
Figure 4.14: Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach	92
Figure 4.15 : Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach	92
Figure 4.16: Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach	93
Figure 4.17: Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach	94
Figure 4.18: Correction de nombre de Mach du modèle RG par rapport aux modèle GP	95
Figure 4.19 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach	96
Figure 4.20 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach	97
Figure 4.21: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach	98
Figure 4.22: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach	99
Figure 4.23: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach	100
Figure 4.24 Variation du rapport de température à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont	101
La figure 4.25 Variation du rapport de pression P_2 / P_1 à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach.	102
Figure 4.26 La variation du rapport de pression à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont	103
Figure 4.28 La variation d'entropie à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont	105
Figure 4.32 La variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction du nombre de Mach en amont	108
Figure 4.33 La variation de l'erreur relative donnée par le nombre de Mach en aval en fonction du nombre de Mach en amont	108

Liste des tableaux

CHAPITRE

Tableau 2.1 volumes molaires du dioxyde de carbone, CO_2	35
Tableau 2.2 : comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques pour chaque équation du gaz réel.....	47
Tableau 3.1 : les équations thermodynamiques des modèles GP et HT.....	70
Tableau 3.2 : Les coefficients polynômiaux du C_p	71

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A	: Aire d'une section
C_P	: Chaleur spécifique à pression constante
C_S	: La célérité du son
C_T	: Constante déterminé à température constante
C_V	: Chaleur spécifique à volume constante
H	: Enthalpie
M	: Nombre de Mach
U	: Energie interne
P	: Pression
R	: Constante thermodynamique de l'air
S	: Entropie
T	: Température
V	: Volume
Z	: Facteur de compressibilité
a	: La constante des forces intermoléculaire
b	: Le constante de la taille moléculaire
m	: Masse molaire de l'air
l	: Terme de Clapeyron
\dot{m}	: Débit massique
ρ	: La masse volumique
γ	: Rapport des chaleurs spécifiques
θ	: Température caractéristique de vibration
V	: Vitesse de l'écoulement

Abréviations

GP	: Gaz parfait
HT	: Haute température
GR	: Gaz réel

Indices

0	: Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion)
*	: Condition au niveau du col ,ou critique .
e	: Condition à la sortie

Introduction générale :

Les ondes de choc sont des ondes propagatrices à grande vitesse dans des écoulements de fluide compressibles. Ils présentent des modifications abruptes dans les propriétés physiques (masse volumique, température et pression) à travers le choc, qui peut être causée, par exemple, la sortie d'un réacteur ou une onde expansive générée par une explosion. Les ondes de choc peuvent se propager soit dans la direction normale de l'écoulement, soit de manière oblique, appelées ondes de choc normales ou ondes de choc obliques, respectivement.

Une onde de choc est une zone d'écoulement de très faible épaisseur appelé front d'onde. Dans cette zone, il existe une transition entre l'écoulement de fluide en amont, où la vitesse est un écoulement supersonique, et le fluide en aval, où la vitesse est subsonique. La pression affiche une très forte progression sur ce front d'onde. Ainsi, les particules du fluide traversant l'onde de choc subissent une décélération extrêmement forte. Il est cet impact violent, produisant un véritable choc sur les particules qui est à l'origine du nom donné à cette zone de transition.

Ce travail se concentre sur les ondes de choc normales qui se produisent dans les buses ou sur des corps émoussés. Le problème sera abordé par la modélisation de l'onde de choc comme une discontinuité. Les équations de conservation seront appliquées pour établir des relations entre les propriétés du fluide en amont et en aval. Les résultats sont représentés par des équations non linéaires, qui sont utilisés pour générer un programme de calcul numérique.

L'écoulement restera isentropique en amont et en aval du choc, mais l'entropie ne sera pas forcément la même sur le front d'onde. En effet, le passage d'un écoulement supersonique à subsonique à travers un choc est un phénomène très irréversible, avec une augmentation de l'entropie.

De nombreuses études antérieures sur la dynamique des gaz ont été basées sur l'utilisation de la théorie des gaz parfaits à chaleur spécifique constante (C_P) [1-3]. Cette hypothèse de gaz parfait ignore le comportement réel du gaz lorsque la

température statique augmente de plus de 1000 K. Lorsque cela se produit, le modèle mathématique de calcul change complètement [4].

Les auteurs de la référence [5] ont utilisé l'équation de Van der Waal d'État et présenté des imperfections gazeuses. Malgré sa quelques approximations de solution étaient employé pour réduire le problème, et les effets de Joule Thomson n'étaient pas pris en considération soigneusement.

Dans [6], ont trouvé que les équations différentielles du mouvement pouvaient être intégrées pour produire des équations d'écoulement isentropiques unidimensionnelles, avec la même précision que l'équation de Van der Waals. Une comparaison des résultats obtenus avec ces équations et des équations d'écoulement pour un gaz parfait a indiqué que des erreurs appréciables seraient faites si ces dernières expressions étaient utilisées pour prédire des phénomènes aérodynamiques impliquant des températures élevées ou des pressions élevées.

Dans le présent travail, les écoulements à travers l'onde de choc sont étudiés. Au front d'onde, le fluide n'est pas modifié, mais contre l'écoulement, il est radicalement perturbé par le choc, Alors les paramètres génératrice sont différents en amont et en aval du front d'onde. Les conditions statiques dans les régions amont et aval sont définies.

Dans cette étude, l'écoulement est un gaz réel isentropique. Les équations de débit sont obtenues en utilisant l'équation de Berthelot de l'État [9]. Cette équation est utilisée pour que de meilleures estimations des effets de force intermoléculaires sont obtenus qu'en utilisant l'équation de Van der Waal. On suppose que les imperfections caloriques peuvent être pris en compte en incluant le terme Planck dans les expressions de chaleurs spécifiques. L'analyse porte sur les deux écoulements de choc isentropiques et planes. Dans les limites des hypothèses, des solutions numériques pour les équations d'onde de choc sont trouvées.

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

1.1. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre on va donner une généralité sur l'onde de choc et son défé-
rente modelé et on va donner une définition sur l'écoulement et bien définir le pro-
blème et finalement donnée un exemple sur le problème

1.2. Description de l'écoulement supersonique:

Si une masse d'air animée d'une vitesse supérieure à l'unité du Mach, s'écoule autour d'un corps (profil d'aile par exemple) arrondi, une onde de choc se forme en amont de celui-ci provoquant une région subsonique en aval de ce choc dont son calcul est particulièrement difficile vu l'inexistence d'expressions explicites des pressions locales et des efforts. En revanche, lorsque le profil a un bord d'attaque pointu, une théorie de petites perturbations peut être employée (ACKERET, 1925) et conduit à des expressions très simples, applicables à des profils minces et aux incidences faibles. Cette théorie s'appuie sur les propriétés d'une déviation élémentaire d'un écoulement supersonique de fluide parfait.

Les expressions montrent que le bord d'attaque et le bord de fuite des profils supersonique doivent être aigus de façon à créer un choc oblique et d'éviter un choc détaché- nous verrons plus tard les causes de sa naissance.

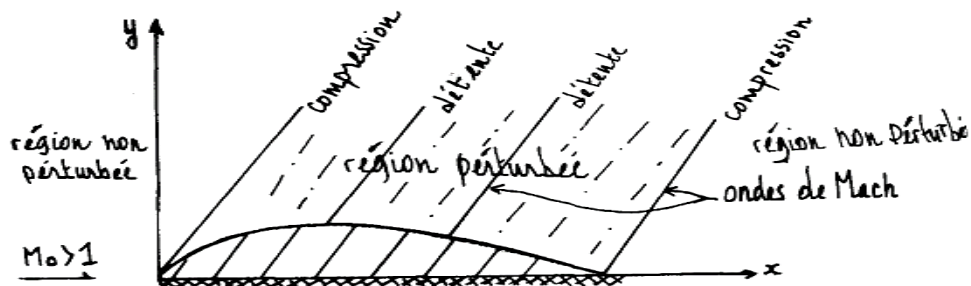


Figure 1.1 : Système d'onde lié à un profil supersonique.

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

Par rapport au cas de l'écoulement supersonique, il se produit donc autour du profil supersonique un écoulement de caractère complètement différent. La formation d'un domaine d'influence délimité par les lignes de Mach en aval du profil explique le parallélisme établi avec un système d'ondes attachées au profil et se déplacent avec lui (voir Figure 1). Dans un "repère fixe" on parle d'un système d'ondes stationnaires.

L'écoulement supersonique peut, donc, engendrer quatre types d'ondes - nous l'étudierons en détail dans ce qui suit à proximité d'un corps mouillé dans cet écoulement de fluide et qui sont les suivants:

- Onde de choc normale.
- Onde de choc oblique (Choc Plan ou Choc Conique)
- Détente de PrandTL-Meyer.
- Onde de choc détachée (Combinaison entre choc normal & chocs obliques aux extrémités de celui-ci).

1.3. Onde de choc normale :

Les vitesses de propagation d'une onde de choc dépend des conditions de pression et de densité de part et d'autre de ce même choc en présence d'un gaz parfait de chaleurs spécifiques constantes, dans le cas où le vecteur vitesse du gaz est normal au front du choc, on parle d'une "onde de choc Normale".

Pour avoir des conditions de saut des variables d'état et d'écoulements de part et d'autre de ce choc, il n'est guère nécessaire de considérer la transition continue des variables à travers celui-ci qui se déroule sur une distance équivalente à quelques libres parcours moyens de molécules (environ 10^{-5} cm). Ce choc est considéré comme une surface de discontinuité des variables d'état en faisant une analyse macroscopique de l'écoulement et en enregistrant, en outre, de très forts gradients

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

de vitesses, de pression et de température d'un côté à l'autre du choc conduisant à un état hors d'équilibre, cette surface est sonique.

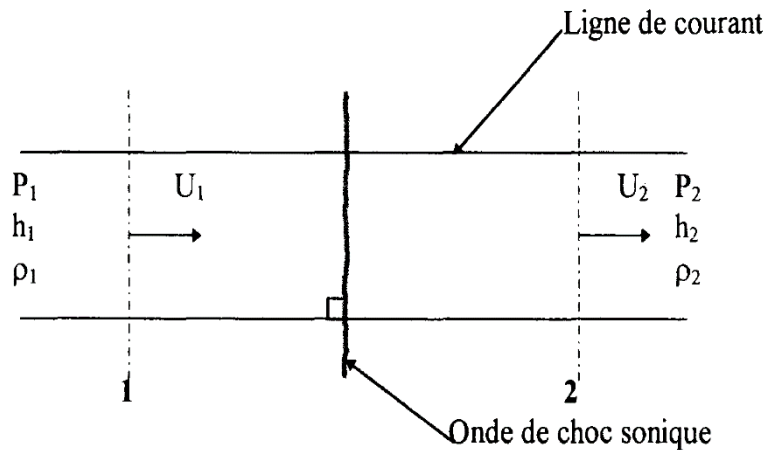


Figure 1.2: Onde de choc normale.

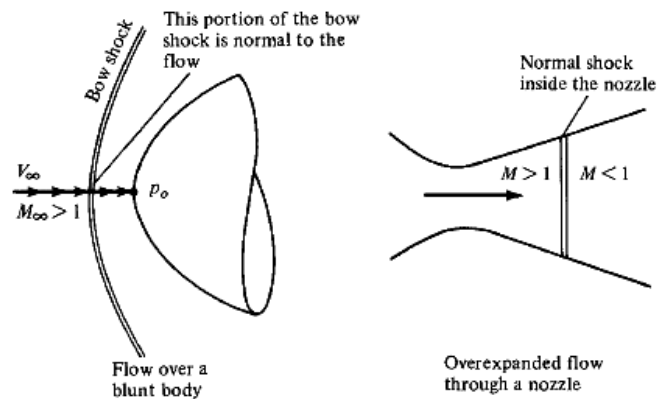


Figure 1.3: Deux exemples d'une onde de choc normale

1.4. Les équations d'onde de choc normal:

Considérer l'onde de choc normale décrite dans la Figure 1.2. La région 1 est un débit uniforme en amont du choc, et la région 2 est un uniforme différent couler en aval du choc. La pression, la densité, la température, le nombre de Mach, vitesse, pression total, température total, et l'entropie dans la région 1 sont P_1 , ρ_1 , T_1 , M_1 , U_1 , P_{01} , T_{01} , et S_1 , respectivement. Les variables correspondantes dans la région 2 sont indiquées par P_2 , ρ_2 , T_2 , M_2 , U_2 , P_{02} , T_{02} , et S_2 .

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

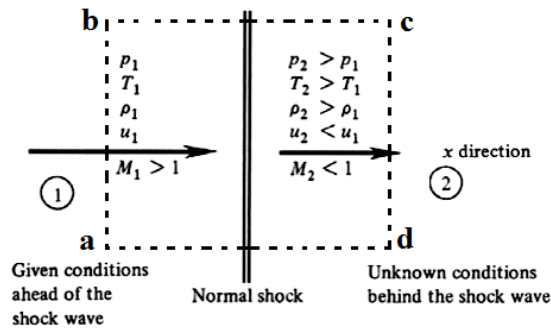


Figure 1.4: les paramètres d'une onde de choc normale

La figure 1.4 présente le volume de contrôle rectangulaire $abcd$ donné par la ligne pointillée sur la figure.1.4. L'onde de choc est à l'intérieur du volume de contrôle, comme illustré. Ab est l'extrémité côté vue sur la face amont de volume de contrôle, Cd est l'extrémité côté vue sur la face aval de volume de contrôle, Nous appliquons la forme intégrale des équations de conservation de ce volume de contrôle, dans le processus ; nous observons trois faits physiques importants à propos de la circulation compte tenu de la Figure 1.4 : le débit est stable, et l'adiabatique il n'y a pas de forces du corps.

Dans un système de coordonnées lié au choc, l'écoulement de section S constante est stationnaire.

Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie s'écrivent respectivement comme suite [Réf.1]:

$$\begin{cases} \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \\ \rho_1 U_1^2 + P_1 = \rho_2 U_2^2 + P_2 \quad (1.1) \\ h_1 + \frac{1}{2} U_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} U_2^2 \end{cases}$$

Connaissant l'état d'écoulement de la région (1), cherchons Celui de la région (2); les deux régions étant très proches de la surface de discontinuité représentant l'onde de choc .

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

La dernière équation du système (1.1) peut s'écrire à l'aide des deux premières comme suite:

$$0 = h_1 - h_2 + \frac{1}{2}(U_1 + U_2)(U_1 - U_2) = h_1 - h_2 + \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 U_1}$$
$$0 = h_1 - h_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (P_2 - P_1) \quad (1.2)$$

Cette équation célèbre dite équation de "RANKINE et HUGONIOT" exprime la relation entre les différences d'enthalpie et de pression au travers du choc par rapport aux densités ρ_1 et ρ_2 .

Pour un gaz parfait:

$$h = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad \text{Par unité de masse} \quad (1.3)$$

en prenant en considération

$$\begin{cases} \frac{C_p}{C_v} = \gamma \\ C_p - C_v = r \end{cases} \quad \text{Formules de MEYER} \quad (1.4)$$

$P = \rho r T$ loi des gaz parfait.

L'équation (1.2) donc, s'exprime par:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right] \left[1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right]^{-1} \quad (1.5)$$

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

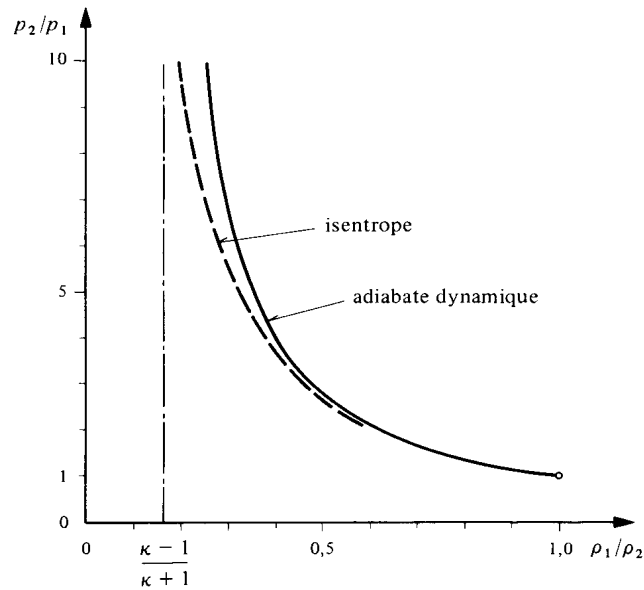


Figure 1.5 : Courbe de Rankine-Hugoniot d'un gaz parfait et chaleurs spécifiques Constantes ($\gamma = 1,4$).

Les équations qu'on venait d'établir sont uniquement valables pour les hypothèses suivantes :

- Ecoulement permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

- Fluide parfait.

- Ecoulement adiabatique (pas d'apport ou échange de chaleur du volume de contrôle).

Pour un régime sonique ($M = 1$), nous aurons une température T^* et une célérité du son a^* .

Cependant, si on divise l'équation de quantité de mouvement par celle de continuité, on aura:

$$\frac{a_1^2}{\gamma U_1} - \frac{a_2^2}{\gamma U_2} = U_2 - U_1 \quad (1.6)$$

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

d'autre part: pour $M=1, U= a^*$.

$$h + \frac{U^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 \quad (1.7)$$

Où : $h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$ trouvé par les équations de MEYER et La définition de la

Célérité du son.

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{U^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 \quad (1.8)$$

d'où :

$$a_1^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{2} U_1^2 \quad (1.9)$$

$$a_2^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{2} U_2^2 \quad (1.10)$$

Finalement

en combinant (1.6),(1.9) & (1.10) on aura :

$$\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma U_1 U_2} a_*^2 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1 \text{ d'où : } a_*^2 = U_1 U_2 \quad (1.11)$$

Nous remarquons que la vitesse U_2 est toujours plus petite que U_1 qui est supersonique, donc U_2 sera automatiquement subsonique, d'où vérification de la propriété de l'onde de choc normale.

Nous allons maintenant introduire le nombre de Mach défini par:

$$M = \frac{U}{a} \quad M < 1 \text{ Ecoulement subsonique} \quad M > 1 \text{ Ecoulement su-}$$

personique

En combinant $a_*^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$ et l'équation (1.11), on aura ainsi :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1^2}{a_*^2} \quad (1.12)$$

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \quad (\text{par l'équation de conservation de masse}). \quad (1.13)$$

En utilisant les équations (1.11), (1.12) et (1.13), nous pouvons calculer le rapport de pression

$\frac{P_2}{P_1}$ Comme suite :

$$\frac{P_2}{P_1} - 1 = (a_*^2) \frac{\rho_1}{P_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) = \gamma \frac{(a_*^2)}{U_1^2} M_1^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (1.14)$$

$$\text{D'où : } \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (1.15)$$

L'équation des gaz parfaits nous permettra, donc, de calculer le rapport des températures

$\frac{T_2}{T_1}$ au travers de l'onde de choc comme suite:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \quad (1.16)$$

selon les équations (1.13) et (1.15) nous aurons :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{M_1^2} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \quad (1.17)$$

Le nombre de Mach en aval du choc est obtenu de la manière suivante:

$$M_2^2 = \left(\frac{U_2}{a_2} \right)^2 = \left(\frac{U_2}{a_*} \right)^2 \left(\frac{a_*}{U_2} \right)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) \quad (1.18)$$

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (1.19)$$

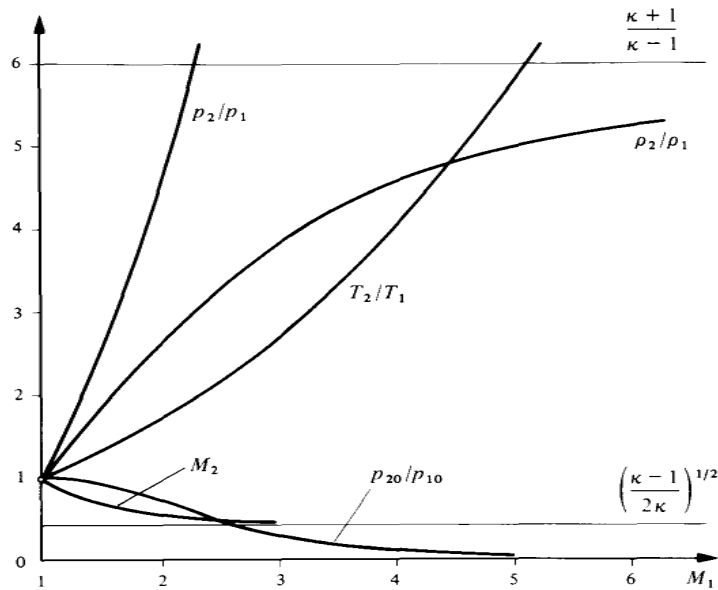


Figure 1.6 : Variation de P, ρ , T, P_0 , et M à travers une onde de choc normal ($\gamma=1,4$)

Nous allons maintenant exprimer la variation d'entropie à travers l'onde choc.

$$ds = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \quad (1.20)$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{\rho T} \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T} \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_T - \frac{1}{\rho} \right] \quad (1.23)$$

Des équations (1.22) et (1.23) on déduit que:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T}$$

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_T = -\frac{1}{\rho T} = -\frac{r}{P} \quad (1.24)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\rho = \frac{C_V}{T} \quad (1.25)$$

par conséquent :

$$S = \int C_V \frac{dT}{T} - r \ln \rho + C^{ste} \quad (1.26)$$

Si $C_V = C^{ste}$, l'entropie S pourra prendre une forme simplifiée comme suite:

$$S = C_V \cdot \ln T - r \cdot \ln \rho + C^{ste} \quad (1.27)$$

à l'aide de l'équation (1.16), l'équation (1.27) devient :

$$S_2 - S_1 = C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - r \cdot \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = C_V \cdot \ln \left[\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (1.28)$$

En introduisant les expressions de $\frac{P_2}{P_1}$ et $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, on obtient :

$$S_2 - S_1 = C_V \cdot \ln \left[\left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[1 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \right]^\gamma \right] \quad (1.29)$$

La conservation d'énergie nous informe que la température totale ne change pas à travers le choc, d'après SAINT- VENANT [Réf. 2].

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.30)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.31)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \right) \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.32)$$

La conservation d'énergie à travers le choc se traduit par :

Chapitre 1: Généralités sur les ondes de choc

$$Ln \frac{P_{02}}{P_{01}} = - \frac{S_2 - S_1}{C_P - C_V} = Ln \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \quad (1.33)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \quad (1.34)$$

Le rapport $\frac{P_{02}}{P_{01}}$ s'agit d'une perte de pression totale due au choc, ou d'une perte de charge.

Chapitre 1:Généralités sur les ondes de choc

Contenu

Chapitre 1:Généralités sur les ondes de choc.....	17
1.1. INTRODUCTION :.....	17
Dans ce chapitre en va donner une généralité sur l'onde de choc et son déférente modelé et on va donner une définition sur l'écoulement et bien définir le problème et finalement donnée un exemple sur le problème.....	17
1.2. Description de l'écoulement supersonique:.....	17
1.3. Onde de choc normale :	18
1.4. Les équations d'onde de choc normal:.....	19

Chapitre 2 : Les gaz réels

2.1. Introduction :

Dans ce chapitre on va définir les problèmes des gaz parfait et bien défini les gaz réels et son caractéristiques et donne la manière d'étudié les écoulement et les ondes de choc dans cette mémoire.

2.2. les gaz parfait :

On appelle gaz parfait un gaz dans lequel sont absentes les forces d'interaction intermoléculaire. Avec une précision suffisante, les gaz sont admis parfaits si leurs états sont considérés loin des domaines de transformations de phase.

Les gaz parfaits obéissent aux lois suivantes :

a) Loi de Boyle - Mariotte :

À température et masse constantes, le produit de la pression par le volume du gaz est constant :

$$PV = \text{const.} \quad (2.1)$$

b) Loi de Gay - Lussac :

Sous pression constante, le volume d'une masse de gaz donnée est proportionnelle à sa température absolue :

$$V = KV_0T = V_0(T/T_0) \quad (2.2)$$

où V_0 est le volume du gaz à $T_0 = 273,15\text{K}$, $k = 1/T_0$ est le coefficient de dilatation volumétrique à pression constante (souvent représenté par le symbole α , qu'on évite ici pour ne pas le confondre avec le symbole consacré en sciences de l'atmosphère pour le volume spécifique).

c) Loi de Charles :

À volume constant, la pression d'une masse de gaz donnée est proportionnelle à sa température absolue:

$$P = (P_0/T_0)T \quad (2.3)$$

où P_0 est la pression du gaz à $T_0 = 273,15\text{K}$

d) Loi d'Avogadro :

Les volumes égaux de tous les gaz parfaits pris dans les mêmes conditions de pression et de température renferment un même nombre de molécules ou, à mêmes pressions et températures, les molécules grammes de différents gaz parfaits occupent un même volume.

Ainsi, dans des conditions normales

($T = 0^\circ\text{C}$ et $P = 101325 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$), les molécules grammes de tous les gaz parfaits occupent le volume $V_M = 22,414 \text{ l}$.

e) Équation d'état pour un gaz parfait :

L'équation d'état d'un gaz parfait est de la forme:

$$PV = nRT \quad (2.4)$$

où p , V , T et n , sont respectivement la pression, le volume, la température absolue et le nombre de moles.

R est la constante universelle des gaz, numériquement égale au travail effectué par une mole de gaz parfait lorsqu'on le réchauffe, à pression constante, de 1 degré:

$$R = 8.31 \times 10^3 \text{ J / kmole} \cdot \text{degré} \quad (2.5)$$

La masse de n molécules d'un gaz est $m = n.M$

où M est la masse molaire du gaz. L'équation d'état des gaz parfaits peut alors s'écrire:

$$P\alpha = RT \quad (2.6)$$

où R est la constante spécifique du gaz dépendant du poids moléculaire du gaz et $\alpha = 1/\rho$ est le volume spécifique ou massique du gaz. L'équation $p\alpha = RT$ est appelée Mendéléev - Clapeyron.[38]

2.3. Les gaz réels :

Le modèle du gaz parfait décrit les gaz réels lorsque leur pression est faible, c'est-à-dire lorsque leur densité, m/v , est petite. Dans de telles conditions, les molécules constitutives du gaz interagissent peu entre elles. En fait, le modèle du gaz parfait suppose qu'il n'y a *aucune interaction* entre les molécules.

Dans ce cas, la différence entre un gaz réel et un gaz parfait c'est l'aptitude du gaz réel à se comprimer, ce phénomène de compressibilité est dû à l'effet des forces d'attraction intermoléculaire et à l'effet de covolume [3], alors, on peut tenir compte de ces interactions afin d'obtenir une meilleure équation d'état.

Des molécules proches l'une de l'autre ne peuvent s'interpénétrer et exercent donc l'une sur l'autre une action répulsive. Au contraire, des molécules éloignées exercent l'une sur l'autre une faible force d'attraction.

Cette interaction peut être décrite par le potentiel de van der Waals.

Pour des molécules prises au sein du gaz, les interactions avec les autres molécules ont une moyenne nulle. Pour celles proches des parois, en revanche, l'attraction exercée par les molécules du gaz n'est pas compensée. Il en résulte une force tendant à ramener ces molécules vers l'intérieur du gaz, équivalente à une pression supplémentaire, p_i , dite *pression interne*.

Le volume accessible aux molécules est celui du récipient, diminué de celui occupé par les autres molécules. Le volume qu'occupent les autres molécules est appelé *covolume* et noté b .

a. Le covolume :

Si on se réfère à l'équation des gaz parfaits on remarquera que pour une température constante le volume tend vers zéro si la pression tend vers l'infinie.

$$T = cte \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} v = 0 \quad (2.7)$$

Mais la répulsion entre les molécules d'un gaz impose un volume minimal appelé le covolume. Rendant compte ainsi de l'impossibilité de réduire à zéro le volume réellement occupé par la matière.

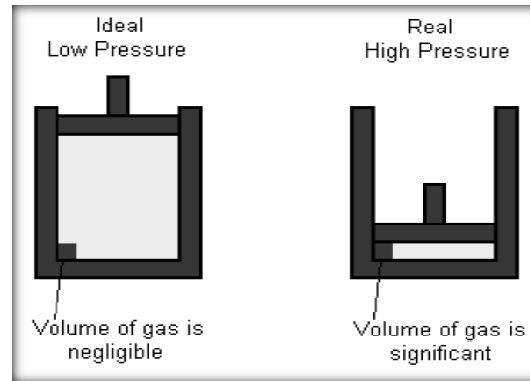


Figure 2.1 : Représentation de l'effet de covolume

b. Les forces d'attraction intermoléculaires :

Dans un fluide non parfait les interactions entre molécules ne sont pas nulles. Au sein du fluide, une molécule est soumise à une force résultante nulle puisqu'elle est entourée de façon isotrope par les molécules voisines; ceci n'est plus vrai quand la molécule s'approche de la paroi car les molécules voisines n'occupent plus que le demi-espace interne et la molécule est freinée. La pression résultante, conséquence des chocs contre la paroi, en est diminuée[1].

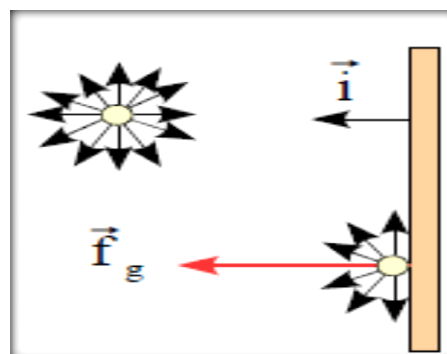


Figure 2.2 : Représentation des forces intermoléculaires

Chapitre 2: Les gaz réels

Si une molécule est loin de la paroi, la distribution de ces forces d'attraction est isotrope et leur résultante est nulle. Si une molécule est contre la paroi, la résultante, \vec{f}_g de ces forces est orientée vers l'intérieur du gaz pour maintenir les molécules. Ce qui cause une diminution de la pression au voisinage des parois.

c. Equation d'État des gaz réels :

Les fluides réels regroupent les liquides ainsi que les gaz aux pressions suffisamment élevées pour que leur comportement s'écarte notablement de celui du gaz parfait. La différence essentielle entre les fluides réels et le gaz parfait est que *l'on ne peut plus négliger les interactions entre les particules du fluide.*

Concernant ces interactions, on retiendra seulement :

- qu'elles sont généralement attractives à grande distance.
- qu'elles sont répulsives à courte distance (les particules ne s'interpénètrent pas).

L'équation introduit deux corrections dans la loi des gaz parfaits :

1. Les molécules ont un volume non nul et incompressible (volume exclu).
2. Il existe des forces d'attraction entre les molécules.

Introduisant les valeurs corrigées du volume et de la pression dans l'équation des gaz parfaits, van der Waals aboutit à l'équation :

$$(p + p_i)(v - b) = nRT \quad (2.8)$$

La pression interne est fonction croissante de la densité du gaz. Une analyse détaillée montre que :

$$p_i = \frac{an^2}{v^2} \quad (2.9)$$

Les valeurs de a et b varient selon la nature du gaz étudié.

2.4. Equation générale :

La théorie cinétique des gaz amène à remplacer l'équation caractéristique des gaz parfaits $P v = RT$

Par une équation générale.

$$(P + \pi)(v - b) = RT \quad (2.10)$$

Avec :

π : Excès de pression due à l'attraction mutuelle des particules (pression intérieure). La pression au sein de fluide est supérieure à la pression au voisinage de la paroi (tient compte des forces intermoléculaires).

b : le covolume, c'est le volume minimum que peut occuper l'unité de masse du gaz considéré (tient compte du volume propre des molécules environ 4 fois)

2.5. Les équations des gaz réels (par ordre de complexité) :

2.5.1. Equation de VAN DER WAALS:

A la suite des considérations théoriques, en 1873 Johannes Van Der Waals démontre que la pression interne P est inversement proportionnelle au carré du volume molaire :

$$\pi = \frac{a}{v^2} \quad (2.11)$$

Cette pression π est proportionnelle à la masse spécifique (a) des molécules attirantes et celles des molécules attirées. Elle est inversement proportionnelle au carré du volume.

L'équation de **VAN DER WAALS** devient donc :

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad (2.12)$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{v^2} \quad (2.13)$$

Connaissons :

$$v=1/\rho \quad (2.14)$$

$$\text{Avec: } a = \frac{27 R^2 T_c^2}{64 P_c}, b = \frac{R T_c}{8 P_c} \text{ et } R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c}$$

P_c , T_c et v_c sont respectivement pression critique, température critique et volume critique.

a : Est le paramètre d'attraction est une mesure de l'intensité d'attraction entre les molécules. On l'appelle également pression de liaison.

b : Est le covolume définit auparavant.

$(v-b)$: est appelé volume effectif dans la contribution de répulsion[1].

Et a , b sont des constantes empiriques, on parle en détail sur le calcul de ces constantes.

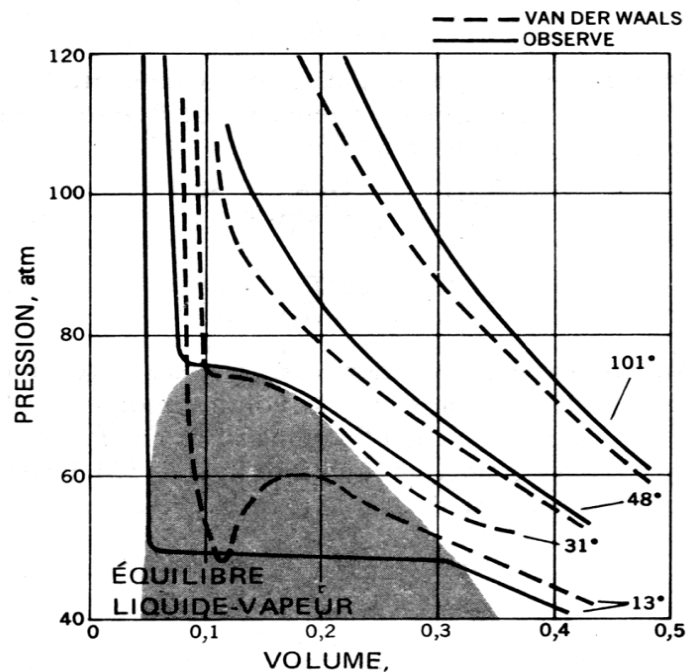


Figure 2.3 : Comparaison entre les courbes $P = f(V)$ obtenues par l'équation de Van der Waals et les données expérimentales au voisinage du point critique.

La validité de cette équation bien adaptée au comportement des variables P , V et T d'un gaz réel, se mesure en choisissant les valeurs a et b , différentes pour chaque gaz et pour chaque température, de façon à avoir une corrélation aussi bonne que possible avec les mesures. Bien que nous obtenions rarement une coïncidence parfaite entre les volumes calculés et observés pour un grand domaine de pression, l'amélioration par rapport à l'expression de la loi des gaz parfaits $PV = nRT$ est considérable. La Figure 2.3 et le Tableau 2.1 montrent de façon quantitative l'amélioration pour les domaines où le comportement non idéal est très apparent. Le succès de l'équation de Van der Waals pour traduire les relations entre P , V et T , est bien meilleur que ce qui pourrait être escompté pour toute expression purement empirique avec seulement deux paramètres ajustables. Cependant, le comportement du gaz dans le domaine à deux phases, apparent sur la Figure 2.3, ne peut se représenter par l'équation de Van der Waals, le maximum et le minimum doivent être obligatoirement écartés.

Comme le montre la Figure 2.3, l'équation de Van der Waals permet de traduire assez correctement le comportement d'un gaz dans le domaine proche de celui correspondant à l'équilibre liquide- vapeur. Bien plus, il y aura une température pour laquelle l'équation de Van der Waals avec les valeurs choisies pour a et b , présentera le point d'inflexion à tangente horizontale qui est mis en évidence sur l'isotherme critique. Cette coïncidence fournit une méthode convenable, mais qui n'est pas toujours satisfaisante, pour obtenir les valeurs de a et b .

Tableau 2.1 volumes molaires du dioxyde de carbone, CO_2 à 320 K. Comparaison de l'équation de Van der Waals et de la loi des gaz parfaits près de la température critique.

P(atm)	V (litres)		
	Observé	Van der Waals	Gaz Parfait
1	26,2	26,2	26,3
10	2,52	2,53	2,63
40	0,54	0,55	0,66
100	0,098	0,10	0,26

2.5.2. Equation de BERTHELOT:

Elle s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{T v^2} \right) (v - b) = RT \quad (2.15)$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2} \quad (2.16)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T} \quad (2.17)$$

Avec: $a = 3 P_c V_c^2$, $b = \frac{V_c}{3}$ et $R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c}$

2.5.3. Equation de CAUSIUS (1880):

S'exprime par:

$$\left(P + \frac{a}{T(v+c)^2} \right) (v-b) = RT \quad (2.18)$$

Ou bien:

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{T(v+c)^2} \quad (2.19)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T(1 + c \rho)^2} \quad (2.20)$$

$$a = \frac{27 R^2 T_c^3}{64 P_c}, \quad b = V_c - \frac{R T_c}{4 P_c}, \quad c = \frac{3 R T_c}{8 P_c} - V_c$$

Cette équation constitue une amélioration de l'équation de VAN DER WAALS. Elle donne une approximation assez bonne dans le domaine correspondant à : $v > 1 v_c$, $P < 4P_c$, $T < 2T_c$.

Mauvaise approximation dans le domaine des gaz à pression et température élevées et dans le domaine des liquides.

2.5.4 Equation de REDLICH-KWONG (1949):

S'exprime par:

$$(v-b) \left[P + \frac{a}{\sqrt{T} v(v-b)} \right] = R T \quad (2.21)$$

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{\sqrt{T} v(v-b)} \quad (2.22)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a \rho^2}{\sqrt{T} (1+\rho b)} \quad (2.23)$$

$$a = \frac{0.42748 R^2 T_c^{2.5}}{P_c} \text{ et } b = \frac{0.08662 R T_c}{P_c}$$

Basée sur des considérations théoriques et pratiques. Fournit une bonne approximation pour les températures $T > T_c$

Dans les domaines des liquides et du gaz à masse volumique élevée, les résultats quoique moins bons sont satisfaisants.

2.5.5. Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN (1928):

S'exprime par:

$$P(T, v) = \frac{RT}{v^2} \left(1 - \frac{c}{v T^3} \right) \left(v + B_0 - \frac{b B_0}{v} \right) - \frac{A_0}{v^2} \left(1 - \frac{a}{v} \right) \quad (2.24)$$

$$P(T, \rho) = RT \rho + \left(B_0 RT - A_0 - \frac{Rc}{T^2} \right) \rho^2 - \left(-B_0 b RT + A_0 a - \frac{R B_0 c}{T^2} \right) \rho^3 + \frac{R B_0 b c}{T^2} \rho^4 \quad (2.25)$$

Les constantes a, b, c, a0, et B0 sont déterminées empiriquement à partir des données expérimentales P, v, T

- En général, elle peut être appliquée pour $v > 2v_c$ et $T > 1.5 T_c$

- Elle est meilleure que les équations de VAN DER WAALS et CLAUSIUS.
- Inapplicable dans la région située au voisinage des points critiques.

2.5.6. Equation de Dieterici :

S'exprime par:

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} e^{\frac{-a}{RTv}} \quad (2.26)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} e^{\frac{-a\rho}{RT}} \quad (2.27)$$

$$a = P_c V_c^2 e^2, \quad b = \frac{V_c}{2} \quad \text{et} \quad R = \frac{P_c e^2 V_c}{2T_c}$$

2.5.7. Equation de Wohl :

S'exprime par:

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv(v-b)} + \frac{c}{T^2 v^3} \quad (2.28)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T(1-\rho b)} + \frac{c\rho^3}{T^2} \quad (2.29)$$

$$a = 6P_c T_c V_c^2, \quad b = \frac{V_c}{4}, \quad \text{et} \quad c = 4P_c V_c^3 T_c^2$$

2.5.8. Equation de Berthelot Modifiée :

L'équation finale de la pression en fonction de la température et de la masse volumique sous la forme :

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{\left[1 - \left[\left(\frac{9\rho RT_c}{128P_c} \right) \left(1 - \frac{6T_c^2}{T^2} \right) \right] \right]} \quad (2.30)$$

2.6. Les coordonnées du point critique- équations réduites :

Pour $T > T_C$, P diminue quand V augmente. Pour une valeur de P , correspond une seule valeur de V qui est le volume réellement occupé par le gaz à cette température et à cette pression.

Pour $T < T_C$, les isothermes présentent un minimum E et un maximum F .

A une valeur de P , peuvent correspondre 3 valeurs de volumes (3 racines). A mesure de l'accroissement de la température, les 3 racines se confondent fournissant un point d'inflexion sur l'isotherme correspondante où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ce point est caractérisé par une pression critique P_C , une température critique T_C et un volume critique V_C .

Physiquement seules les branches BG et AH représentent des états stables du fluide.

BG c'est l'état gazeux et AH c'est l'état liquide.

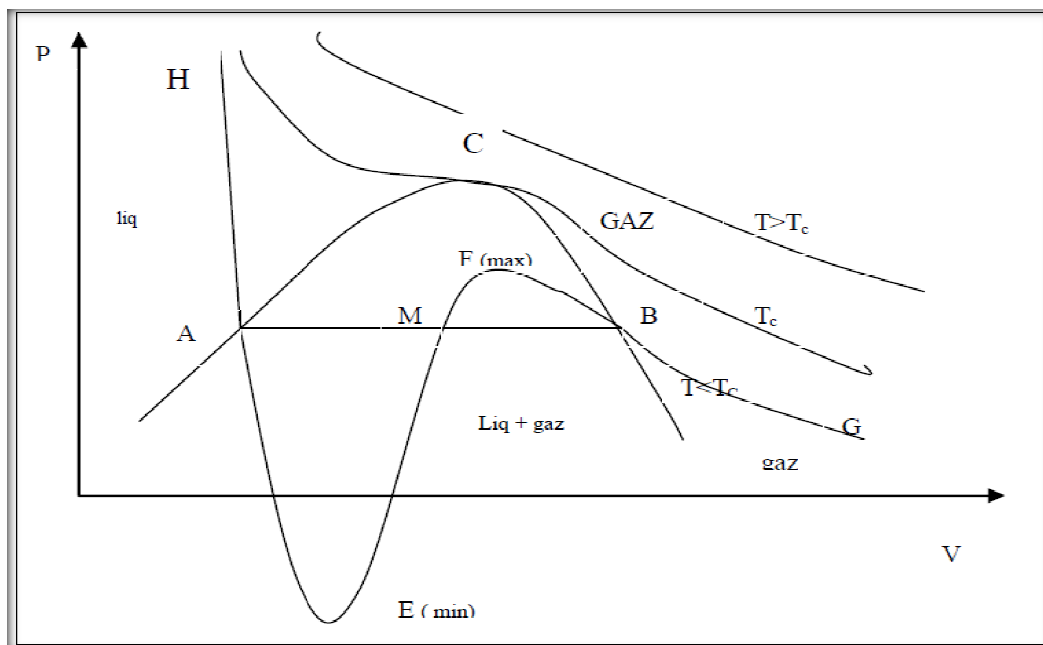


Figure 2.4: représentation graphique de l'état du fluide pour le cas d'un gaz réel

Les états d'équilibres du fluide représentés par des portions AE et BF de l'isotherme sont des états d'équilibre métastables.

AE : correspond au retard de la vaporisation.

BF : correspond au retard de la condensation.

La portion d'isotherme EMF n'est pas observable car elle est relative à des états instables. P et V évoluent dans le même sens.

a. Application pour l'équation de BERTHELOT:

Elle s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{T v^2} \right) (v - b) = RT$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2}$$

Calculons les coordonnées du point critique C (PC, VC, TC) en fonction de (a, b et r).

L'équation caractéristique: $P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2}$

En point critique C : $P_c = \frac{RT_c}{(V_c - b)} - \frac{a}{T_c V_c^2}$ (2.31)

Tangente horizontale en C : $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{T_c V_c^3}$ (2.32)

Point inflexion en C : $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{T_c V_c^4}$ (2.33)

Divisons l'équation (2.32) par l'équation (2.33), on obtient:

$$(V_c - b) = \frac{2}{3} V_c \Rightarrow V_c = 3b$$
 (2.34)

Remplaçons l'équation (2.34) dans l'équation (2.33), on obtient:

$$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}$$
 (2.35)

Chapitre 2: Les gaz réels

Remplaçons les équations (2.34) et (2.35) dans l'équation (2.16), on obtient:

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \quad (2.36)$$

b. Calcul des constants a, b et R:

En C, on a :

$$\begin{cases} V_c = 3b \\ T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \\ P_c = \frac{a}{27b^2} \end{cases}$$

Ici nous avons trois équations à trois inconnues, la solution de ce système donne :

$$\begin{cases} a = 3 P_c V_c^2 T_c \\ b = \frac{V_c}{3} \\ R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c} \end{cases} \quad (2.37)$$

Les caractéristiques critiques de l'air sont : $T_c=132,6$ K, $P_c=37,7 \cdot 10^5$ Pa, $V_c=0.1173$ L.

c. Equation réduite :

En remplaçant les constantes a, b et R dans l'équation de BERTHLOT :
On obtient :

$$\left(P + \frac{3P_c V_c^2 T_c}{T V^2} \right) \left(v - \frac{V_c}{3} \right) = \frac{8}{3} P_c V_c \frac{T}{T_c} \quad (2.38)$$

Divisons par P_c et V_c , ça donne :

$$\left(\frac{P}{P_c} + 3\frac{V_c^2}{V^2} \frac{T_c}{T}\right) \left(\frac{V}{V_c} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{T}{T_c} \quad (2.39)$$

L'équation réduite de BERTHELOT sous la forme:

$$\left(\omega + 3\frac{1}{\theta\varphi^2}\right) \left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta \quad (2.40)$$

Cependant, à la suite d'expériences, BERTHELOT a trouvé une meilleure représentation des résultats expérimentaux pour les gaz réels en dehors du point critique, par l'équation modifiée suivante :

$$\left(\omega + \frac{16}{3} \frac{1}{\theta\varphi^2}\right) \left(\varphi - \frac{1}{4}\right) = \frac{32}{9}\theta \quad (2.41)$$

L'équation (2.41) s'appelle Équation réduite modifiée de BERTHELOT, Avec cette équation, les constantes a , b et R , auront pour valeurs dans l'équation de BERTHELOT :

$$\begin{cases} a = \frac{16}{3} P_c V_c^2 T_c \\ b = \frac{V_c}{4} \\ R = \frac{32}{9} \frac{P_c V_c}{T_c} \end{cases}$$

Il est à rappeler que l'équation réduite modifiée de BERTHELOT, à l'encontre de celle de VAN DER WAALS, n'est pas applicable au point critique et en son voisinage. Par ailleurs, l'équation réduite de BERTHELOT est plus précise que celle de VAN DER WAALS. Elles servira en particulier pour les calculs des correction à apporter aux grandeurs thermodynamiques des gaz parfaits.

3.7. Equations de VIRIEL:

L'équation d'état relative à une mole de gaz réel peut être représentée par un développement du produit $P.V/RT$:

- Soit en fonction du volume v du gaz : $\frac{PV}{rT} = 1 + \frac{A}{V} + \frac{B}{V^2} + \frac{C}{V^3} + \dots$ (2.42)

- Soit en fonction de la pression P du gaz : $\frac{PV}{rT} = 1 + \bar{A}P + \bar{B}P^2 + \bar{C}P^3 + \dots$ (2.43)

Ces deux équations $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$ et $\frac{PV}{rT} = f(P)$ portent le nom *d'équations de VIRIEL*.

Généralement s'en limitera aux trois premiers termes du développement. Il est à noter que les coefficients $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}$ sont fonction de la température.

3.7.1. La fonction du volume v du gaz $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$:

L'équation de Berthelot: $P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$

Ou bien :

$$P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$$

Le développement de l'équation de Berthelot donne :

$$PV = RT + Pb - \frac{a}{TV} + \frac{ab}{TV^2} \quad (2.44)$$

Remplaçons l'équation (2.16) dans (2.44), on trouve :

$$PV = RT - \frac{a}{TV} + \left(\frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \right) b + \frac{ab}{TV^2} \quad (2.45)$$

$$PV = RT - \frac{a}{TV} + \frac{RTb}{(v-b)} = RT \left(1 + \frac{b}{(v-b)} - \frac{a}{RT^2V} \right) \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{b}{V-b} \right) = \frac{b}{V \left(1 - \frac{b}{V} \right)} \quad \text{D'après la relation approchée } \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$$

$$\left(\frac{b}{V-b}\right) \approx \frac{b}{V} \left(1 + \frac{b}{V}\right) \approx \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2} \quad (2.47)$$

Remplaçons (2.47) dans (2.46):

$$PV = RT \left[1 + \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2} - \frac{a}{RT^2V} \right] = RT \left[1 + \left(b - \frac{a}{RT^2} \right) \frac{1}{V} + b^2 \frac{1}{V^2} \right] \quad (2.48)$$

$$PV = RT \left[1 + A \frac{1}{V} + B \frac{1}{V^2} \right] \quad (2.49)$$

Les coefficients de VIRIEL sont donc : $A = \left(b - \frac{a}{RT^2} \right)$, $B = b^2$

3.7.2. La fonction de la pression P du gaz $\frac{PV}{rT} = f(P)$:

L'équation de Berthelot:

$$P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \Rightarrow v = \frac{rT}{P + \frac{a}{Tv^2}} + b = \frac{rT}{P} \frac{1}{\left(1 + \underbrace{\frac{a}{PTv^2}}_{\varepsilon} \right)} + b \quad (2.50)$$

Or, d'après la relation approchée : $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$

$$\text{D'où : } v = \frac{rT}{P} \left(1 - \frac{aP}{P^2Tv^2} \right) + b = \frac{rT}{P} \left(1 - \frac{aP}{P^2Tv^2} + \frac{bP}{rT} \right) \quad (2.51)$$

En première approximation, $P^2v^2 \approx r^2T^2$

$$V = \frac{RT}{P} \left(1 - \frac{aP}{R^2T^3} + \frac{bP}{RT} \right) \Rightarrow \frac{1}{V} = \frac{P}{RT} \frac{1}{\left(1 - \underbrace{\frac{aP}{R^2T^3} + \frac{bP}{RT}}_{\varepsilon} \right)} = \frac{P}{RT} \left[1 + \frac{aP}{R^2T^3} - \frac{bP}{RT} \right] \quad (2.52)$$

Soit:

$$\frac{1}{V} = \frac{P}{RT} \left[1 + \frac{a}{R^2 T^3} P - \frac{b}{RT} P \right] \quad (2.53)$$

En remplaçant (2.53) dans (2.44), on obtient :

$$PV = RT - \frac{aP}{RT^2} \left(1 + \frac{a}{R^2 T^3} P - \frac{b}{RT} P \right) + Pb + \frac{abP^2}{R^2 T^3} \left(1 + \frac{a}{R^2 T^3} P - \frac{b}{RT} P \right)^2 \quad (2.54)$$

En se limitant aux termes du second degré en P, on obtient :

$$PV = RT - \frac{aP}{RT^2} - \frac{a^2 P^2}{R^3 T^5} + \frac{abP^2}{R^2 T^3} + bP + \frac{abP^2}{R^2 T^3} \quad (2.55)$$

$$PV = RT + \left(b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2ab}{R^2 T^3} P^2 - \frac{a^2 P^2}{R^3 T^5} = RT + \left(b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2a}{R^2 T^3} \left(b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \quad (2.56)$$

$$PV = RT \left[1 + \frac{1}{RT} \left(b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2a}{R^3 T^4} \left(b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \right] \quad (2.57)$$

Ou :

$$\frac{PV}{RT} = \left[1 + \left(\frac{b - \frac{a}{RT^2}}{RT} \right) P + \frac{2a}{R^3 T^4} \left(b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \right] \quad (2.58)$$

$$\frac{PV}{RT} = [1 + \bar{A}P + \bar{B}P^2] \quad (2.59)$$

Les coefficients de VIRIEL sont donc :

$$\bar{A} = \left(\frac{b - \frac{a}{RT^2}}{RT} \right), \quad \bar{B} = \frac{2a}{R^3 T^4} \left(b - \frac{a}{2RT^2} \right)$$

3.8. Facteur de compressibilité:

L'équation d'état des gaz réels peut également être utilisée sous la forme très générale $P \cdot V = Z \cdot R \cdot T$, Z est appelé coefficient ou facteur de compressibilité.

L'équation de Berthelot : $\left(P + \frac{a}{T v^2}\right)(v - b) = RT$

$$\left(P + \frac{a}{T V^2}\right)(V - b) = RT \Rightarrow PV - Pb + \frac{a}{TV} - \frac{ab}{TV^2} = RT \quad (2.60)$$

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2 V} + \frac{ab}{RT^2 V^2} \quad (2.61)$$

Finalement :

$$Z = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2 V} + \frac{ab}{RT^2 V^2} \quad (2.62)$$

3.9. Choix de l'équation d'état :

Les différentes lois d'état ont été exposées. Il convient maintenant de choisir laquelle nous allons utiliser dans notre modèle.

Le tableau 2.2 représente une comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques obtenu par des séries de testes pour chaque équation du gaz réel. Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les d'un gaz réels, si la température T et la pression P bien déterminées. Les conditions nécessaires pour obtenir une erreur inférieure à 5 % présentées dans le tableau suivant :

Tableau 2.2 : comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques pour chaque équation du gaz réel.

	1 Bar	10 Bar	100 Bar
Van der Waals	✓	T > 132,5 K	T > 300 K
Berthelot	✓	✓	✓
Dieterici	T > 170 K	T > 230 K	T > 440 K
Redlich Kwong	✓	T > 170 K	T > 270 K
Beattie-Bridgeman	✓	T > 170 K	T > 298 K
Clausius	T > 201 K	T > 489 K	Toujours > 5%
Wohl	✓	T > 186 K	T > 300 K
Berthelot modifiée	✓	T > 166 K	T > 274 K

L'équation du Viriel, tronquée au deuxième ou troisième coefficient, ne traduit pas suffisamment les effets observés à haute pression, elle n'est donc pas adaptée à notre étude [1].

Les équations empiriques et semi-empiriques dites non analytiques sont généralement plus précises mais nécessitent de connaître un grand nombre de constantes qui peuvent être difficiles à obtenir dans la littérature.

Ainsi, notre choix se porte sur l'équation d'état analytique de Berthelot requière un nombre de paramètres limité et peuvent être résolue de manière

analytique tout en conduisant à une bonne estimation du comportement des gaz. L'équation d'état de Berthelot ne nécessite que deux coefficients, a et b , disponibles dans la littérature. [34].

3.10. Validation du choix de l'équation de Berthelot :

Nous venons de choisir la loi d'état de Berthelot pour son faible nombre de coefficient et sa simplicité. Il convient donc de s'assurer de la validité des résultats que donne cette loi, et aussi de vérifier les différences par rapport à la loi des gaz parfaits pour le gaz retenu pour cette validation qui est dans notre étude l'air. On compare, sur le Tableau , la masse volumique de l'air calculée avec la loi des gaz parfaits et la loi de Berthelot, aux valeurs expérimentales d'une base de données [17], sur le Tableau . On remarque que pour ces températures et ces pressions, les gaz ne se comportent pas du tout comme des gaz parfait, et que la loi de Berthelot donne des valeurs plus correctes de la masse volumique, l'analyse de ces résultats sera bien détailler dans le quatrième chapitre. La loi de Berthelot est donc utilisable et justifiée

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (cas de l'air) en utilisant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire. Cette équation, plutôt que les autres équations d'états, est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. Cette dernière sera utilisé pour développer un nouveau modèle mathématique pour déterminer les relations thermodynamiques dans le chapitre suivant.

Contenu

Chapitre 2 : Les gaz réels	28
2.1.Introduction :	28
2.2. les gaz parfait :	28
a) Loi de Boyle - Mariotte :	28
b) Loi de Gay - Lussac :	28
c) Loi de Charles :	29
d) Loi d'Avogadro :	29
e) Équation d'état pour un gaz parfait :	29
2.3. Les gaz réels :	30
a. Le covolume :	30
b. Les forces d'attraction intermoléculaires :	31
c. Equation d'État des gaz réels :	32
2.4. Equation générale :	33
2.5. Les équations des gaz réels (par ordre de complexité) :	33
2.5.1. Equation de VAN DER WAALS:.....	33
2.5.2. Equation de BERTHELOT:	36
2.5.3. Equation de CAUSIUS (1880):.....	36
2.5.4 Equation de REDLICH-KWONG (1949):	37
2.5.5. Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN (1928):	37
2.5.6. Equation de Dieterici :	38
2.5.7. Equation de Wohl :	38
2.5.8. Equation de Berthelot Modifiée :	38
2.6. Les coordonnées du point critique- équations réduites :	39
a. Application pour l'équation de BERTHELOT:	40
b. Calcul les constants a, b et R:.....	41
c. Equation réduite :	41
3.7. Equations de VIRIEL:	43
3.7.1. La fonction du volume v du gaz $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$:	43

Chapitre 2: Les gaz réels

3.7.2. La fonction de la pression P du gaz $\frac{PV}{rT} = f(P)$:.....	44
3.8. Facteur de compressibilité:	46
3.9. Choix de l'équation d'état :	46
3.10. Validation du choix de l'équation de Berthelot :	48

CHAPITRE 3 : Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

3.1. Introduction:

Une large variété de problèmes dans l'écoulement compressible a été résolue sur l'hypothèse que l'air se comporte comme gaz parfait. Cette hypothèse est justifiée, fourni la pression et la température ambiante d'intérêt est petit et proche atmosphérique. Cependant, que quand de l'air est soumis aux changements de l'état aux pressions et aux températures loin enlevé d'atmosphérique, il cesse de se conformer à la loi simple de gaz et présente d'autres propriétés non caractéristiques d'un gaz parfait. En conséquence, des procédés d'écoulement dans lequel aèrent sous réserve de ces conditions extrêmes peut être prévu s'écarter du comportement de gaz parfait. il est connu que qu'un tel écoulement sera produit dans des souffleries hypersoniques et par le vol d'avions aux vitesses anémométriques supersoniques élevées, par conséquent, la nature et l'ampleur de ce lièvre de départ deviennent des considérations importantes en aérodynamique.

Les théories et les expériences classiques ont prouvé que des trois propriétés de gaz réel, d'abord il pour montrer des caractéristiques à la différence de ceux d'un gaz parfait. Ces propriétés peuvent être classifiées en tant qu'imperfections thermiques et caloriques. Les imperfections thermiques sous forme de forces intermoléculaires et de taille moléculaire sont sensiblement manifestes à de basses températures et à pressions. Les changements des capacités de chaleur deviennent une imperfection calorique importante relativement à températures élevées. Des circonstances dans lesquelles les effets de la dissociation moléculaire ou de l'excitation électronique deviennent importants (les températures sensiblement au-dessus de 3550 K) peuvent être négligées pour le présent. Pour autant que des gaz en équilibre soient concernés, il est habituellement suffisant d'expliquer la force intermoléculaire et les effets de taille moléculaires avec des limites additionnelles dans l'équation d'état. De même, des changements des capacités de chaleur des

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

molécules peuvent être expliqués avec une fonction de la température dans les expressions des chaleurs spécifiques.

Dans ce chapitre, des équations d'écoulement sont obtenues à l'aide de l'équation d'état de Berthelot. Cette équation, plutôt que Van der Waals', est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. On suppose que des imperfections calorifiques peuvent être expliquées dans les expressions des chaleurs spécifiques. et donne les équations de l'onde de choc

3.2. Hypothèses de base :

- l'air se comporte comme un gaz diatomique qui a :
 - une constante universelle du gaz $R=8.3145 \text{ J/(mol.K)}$.
 - une température caractéristique de vibration $\theta=3056 \text{ K}$.
 - une masse molaire $m=28.96 \text{ g/mol}$.
- Les paramètres générateurs (pression et température génératrices) obéissent à la loi des gaz réels, en exploitant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire (covolume) et de la force intermoléculaire.
- L'écoulement des gaz dans les différentes stations sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de chaleur due à l'environnement.
- Les conditions d'un état stable existent au cours des opérations thermiques. Ceci veut dire que les conditions ou procédés qui surviennent ne changent pas avec le temps (pour des conditions géométriques données) durant la combustion (régime stationnaire).
- La force de frottement dû à l'écoulement est négligeable mais la force d'attraction intermoléculaire de Berthelot existe.
- Les effets de transfert thermique par conduction, convection ou rayonnement sont négligeables.
- Le fluide (air) est thermiquement et calorifiquement imparfait.
- L'effet de joule Thomson est présent dans ce travail.

Toute hypothèse supplémentaire sera dictée -si c'est nécessaire- durant les prochaines analyses. Bien qu'il semble avoir eu beaucoup de suppositions

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

simplificatrices, celles-ci sont toutes raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent le véritable comportement de notre domaine d'étude assez précisément.

3.3. Configuration des équations :

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (cas de l'air) en utilisant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire.

L'équation de Berthelot elle s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT \quad (3.1)$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \quad (3.2)$$

Connaissons: $v = \frac{1}{\rho}$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T} \quad (3.3)$$

Avec: $a = 3 P_c V_c^2$ et $b = \frac{V_c}{3}$

Avec : b est la constante de taille moléculaire.

a est la constante des forces intermoléculaire.

P_c, V_c : sont la pression et le volume critique.

3.3.1. L'équation de la conservation d'énergie :

L'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique est [16] :

$$dH + VdV = 0 \quad (3.4)$$

D'autre part: $dH = C_p dT + (h + v)dP$ (3.5)

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP \quad (3.6)$$

Avec:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = h + V \quad (3.7)$$

3.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T sera constante :

La relation (3.6) s'écrit : $dH = C_p dT + C dP$ (3.8)

Avec: $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, et $C = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$

$$P = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T}$$

La différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T est constante donne :

$$dP = \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) d\rho \quad (3.9)$$

Remplaçons l'équation (3.9) dans l'équation (3.8), on obtient:

$$dH = C_p dT + C dP = C_p dT + \underbrace{\left(C \cdot \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) \right)}_{C_T} d\rho$$

Alors:

$$C_T(T, \rho) = \left(\frac{3ab^2\rho^2 - 6ab\rho - RT^2b + 3a}{2T\rho b - Tb^2\rho^2 - T} \right)$$

Donc:

$$dH = C_p(T, \rho) dT + C_T(T, \rho) d\rho \quad (3.10)$$

L'identification entre les relations (3.4) et (3.10) donne:

$$VdV = -dH = -C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho \quad (3.11)$$

3.3.3. Détermination la différentielle dp/ρ :

L'équation de Bernoulli donne :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (3.12)$$

Par la multiplication et la division par dp, on trouve :

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$VdV + \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cte} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.13)$$

Connaissons que la célérité du son : $C_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cte}$ (3.14)

La relation (3.13) devient :

$$VdV + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.15)$$

Remplaçons l'équation (3.11) dans l'équation (3.15), on obtient:

$$[-C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho] + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.16)$$

Alors:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2} d\rho \quad (3.17)$$

3.3.4. Détermination les paramètres thermodynamique pour les gaz réels :

L'écoulement isentropique d'un gaz caractérisé par l'équation de Berthelot peut être étudié à l'aide de la différentielle de l'équation d'expansion isentropique :

$$du + dw = 0 \quad (3.18)$$

Sachant que: $du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT$ (3.19)

On a: $v = \frac{1}{\rho} \Rightarrow dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$ (3.20)

Remplaçons l'équation (3.20) dans l'équation (3.19), on obtient:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T d\left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (3.21)$$

$$dw = PdV = p d\left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (3.22)$$

Remplaçons les équations (3.21) et (3.22) dans l'équation (3.18), on obtient:

$$du + dw = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \cdot d\left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + p d\left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (3.23)$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$\text{Avec: } \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = C_v \quad (3.24)$$

L'effet de Joule-Thomson est donné par :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho - P = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho - \frac{\rho RT}{1-b\rho} + \frac{a\rho^2}{T} \quad (3.25)$$

La différentielle de la pression est calculée à partir de l'équation (3.3) :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \frac{R\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho^2}{T^2} \quad (3.26)$$

$$\text{L'équation devient: } \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \frac{2a\rho^2}{T} \quad (3.27)$$

Combinant les équations (3.24), (3.20) et (3.27) et substituant la valeur de p de l'équation de Berthelot dans l'équation (3.23), on trouve :

$$c_v dT - \frac{a}{T} d\rho - \frac{RT}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (3.28)$$

Maintenant l'expression de la différentielle de c_v est donnée par :

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p^2}{\partial T^2} \right)_\rho \quad (3.29)$$

La deuxième dérivée de la pression par rapport à la température à masse volumique constante est calculée en exploitant l'équation de Berthelot, donc :

$$\left(\frac{\partial p^2}{\partial T^2} \right)_\rho = -2 \frac{a\rho^2}{T^3}, \text{ donc : } T \left(\frac{\partial p^2}{\partial T^2} \right)_\rho = -2 \frac{a\rho^2}{T^2} \quad (3.30)$$

Alors l'équation (3.29) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_T = -2 \frac{a\rho^2}{T^2} \quad (3.31)$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

L'intégration de l'équation (3.31) en utilisant la pression de l'équation d'état de Berthelot nous donne :

$$\int \left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = \int -\frac{2a}{T^2 v^2} \quad (3.32)$$

Donc :

$$c_v = \int \left(-\frac{2a}{T^2 v^2} \right) \partial v \quad (3.33)$$

Avec $v^2 = \frac{1}{\rho^2}$

$$c_v = c_v^0 + \frac{2a\rho^2}{T} \quad (3.34)$$

Où c_v^0 est la fonction qui décrit la variation de c_v en fonction de la température, et le deuxième terme représente l'effet de l'imperfection du gaz sur c_v .

La fonction choisie pour c_v^0 est déterminée sous la considération de la structure moléculaire et la gamme de température où l'effet sur c_v existe.

Pour un gaz diatomique la gamme de température est important à partir de la température de liquéfaction jusqu'à quelque milles de degré Kelvin, dans ce cas (gaz diatomique) le nombre de degré de liberté transrationnel et rotationnel est constant alors que c_v^0 est varie en fonction de la température vibrationnelle. Pour ce fait la fonction de c_v^0 peut-être s'écrit comme suite :

$$c_v^0 = c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} \right\} \quad (3.35)$$

Le deuxième terme dans les parenthèses, essentiellement le terme de Planck, explique la contribution vibratoire de la chaleur spécifique à volume constant.

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

La supposition est que les molécules du gaz se comportent comme les oscillateurs harmoniques linéaires pour autant que les degrés de liberté vibrationnels soient concernés.

3.3.4.1. L'état générateur :

Ça représente l'état dans la chambre de combustion où la vitesse de l'écoulement est considérée comme étant nulle [13] et [14] ($V_0 = 0 \Rightarrow M = 0$), et les propriétés de génératrice (T_0, ρ_0, P_0) sont des paramètres générateurs. En d'autres mots, T_0 est la température de combustion, P_0 est la pression de la chambre et ρ_0 est la densité de combustion sous les conditions de la chambre.

T_0 et P_0 sont des paramètres liés à la conception de la chambre de combustion. la détermination de ρ_0 sera obtenue par l'application de la méthode de dichotomie [9] sur l'équation de Berthelot.

3.3.4.2. La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot :

Une expression qui gouverne l'expansion isentropique d'un gaz réel diatomique peut s'obtenir maintenant par la substitution des équations (3.34) et (3.35) dans l'équation (3.28) et on intègre de l'état génératrice à un état statique donné on trouve:

$$c_v dT - \frac{a}{T} d\rho - \frac{RT}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (3.36)$$

Devisant cette équation par "T" on obtient :

$$c_v \frac{dT}{T} - \frac{a}{T^2} d\rho - \frac{R}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (3.37)$$

On intègre l'équation (3.37) de l'état génératrice à un état statique donné on trouve:

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$C_{v_i} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln \frac{\rho_0(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_0)} - 2a\left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2}\right) + R \ln \left(\frac{e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)} - 1}{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} - 1} \right) + R \left(\frac{\theta}{T} \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} - 1\right)} - \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)} - 1\right)} \right) = 0 \quad (3.38)$$

La relation (3.38) représente la forme intégrale de l'équation d'énergie d'une détente isentropique caractérisé par l'équation de Berthelot on prend en considération le comportement vibratoire des molécules.

3.3.5. Détermination du nombre de Mach :

Dans le but de déterminer la fonction du nombre de Mach il est nécessaire de trouver la vitesse de l'écoulement ainsi la célérité du son. Ces deux quantités peuvent être trouvées en utilisant l'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique [16] :

$$du + d(pv) + VdV = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V dT + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + VdV = 0 \quad (3.39)$$

3.3.5.1. Calcul de la vitesse :

Substituant les équations de Berthelot, (3.27), (3.34) et (3.35) dans l'équation (3.39) et on intègre de l'état génératrice à un état statique (température et la masse volumique donné on trouve:

Finalement la fonction de vitesse sera :

$$V^2(T, \rho) = 2 \left\{ c_{v_{sp}} (T_0 - T) + R \theta \left(\frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)} - \frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}\right)} \right) + 4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right\} \quad (3.40)$$

Ou bien :

D'après l'équation (3.11), on a :

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$VdV = -dH = -C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho$$

Substituant l'équation (3.11) entre l'état génératrice (0) à un état statique quelconque (1) donné par $(T_1, P_1, \rho_1$ et $V_1)$, on trouve:

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho) \Big|_{\rho=\rho_1} dT - 2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (3.41)$$

Alors, on peut calculer la vitesse par deux méthodes, la première méthode est une méthode explicite et simple présentée par l'équation (3.40), ou bien par la méthode intégrale présentée par l'équation (3.41), le test numérique montre que les deux méthodes donnent exactement les mêmes résultats.

3.3.5.2. Détermination de la célérité du son :

La célérité du son correspondante est déterminée par la substitution des équations de Berthelot, (3.34), (3.35) et (3.36) dans l'équation générale est donne :

$$a^2(T, \rho) = \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2}{c_{v_{gp}} \cdot \left[1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \right]} \quad (3.42)$$

3.3.5.3. Le nombre de Mach :

Combinant (3.40) et (3.42) on trouve l'équation du nombre du Mach suivante :

$$M^2(T, \rho) = 2 \left(\frac{\frac{1}{(\gamma_i - 1)} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left(\frac{\theta}{T} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}} - \frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0} \right)}} \right) + \frac{1}{RT} \left(4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right)}{\frac{(\gamma_i - 1) \left(\frac{1}{1 - b\rho} + \frac{a\rho}{RT^2} \right)^2}{\left(1 + (\gamma_i - 1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right) \right)} + \frac{1}{(1 - b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2}} \right)$$

(3.43)

Si on considère que θ , b , et a sont nuls ; on obtient l'équation suivante :

$$M^2 = 2 \left(\left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \left(\frac{1}{\gamma_{gp} - 1} \right) \right) \quad (3.44)$$

Dans ce cas, le rapport des températures devient :

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (3.45)$$

Ces relations (3.44) et (3.45) sont les équations qui caractérisent exactement le nombre de mach (cas de détente), et le rapport des températures pour un gaz parfait [13] et [15].

Donc l'équation (3.43) pour un gaz réel, représente la forme générale du nombre de Mach (caloriquement et thermiquement imparfait).

3.3.6. La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \rho)$

La chaleur spécifique à volume constante est obtenue en substituant les équations (3.35) dans l'équation (3.34), pour qu'on trouve la relation suivante :

$$c_v(T, \rho) = c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right) \right\} \quad (3.46)$$

On remarque clairement que la chaleur spécifique à volume constante est indépendante de l'effet de covolume b , et que les paramètres qui l'influent sont seulement les forces d'attraction intermoléculaires et le comportement vibratoire.

Si c'est deux paramètres sont nulles il est aussi clair qu'en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait c'est-à-dire

$$c_v(T, \rho) = c_{v(gp)}$$

Si les forces d'attraction intermoléculaires sont nulles ($a=0$) ça va nous revenir au cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait où la chaleur spécifique à volume constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire θ [36] et [37] (ce qu'on appelle le modèle HT ou bien gaz parfait à haute température) :

$$c_v(T, \rho) = c_{v(gp)} \left\{ 1 + (\gamma_{(gp)} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} \right\} \quad (3.47)$$

3.3.7. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$

La chaleur spécifique à pression constante est par définition donnée par la relation suivante [8]:

$$c_p(T, \rho) = c_v(T, \rho) - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T} \quad (3.48)$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

On rappelle l'équation de Berthelot en termes de volume :

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{Tv^2}$$

Donc :

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)} \left[1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \left[1 + \frac{\left(\frac{2-b\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{2RT^2} \right)}{\frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2}} \right] \right\} \right] \quad (3.49)$$

Si on considère que θ , b , et a sont nuls ; en revenant à l'état d'un gaz parfait :

3.3.8. Rapport des chaleurs spécifiques γ

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach $M \in [1.0, 6.0]$. Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$\gamma(T, \rho) = \frac{c_p(T, \rho)}{c_v(T, \rho)} \quad (3.50)$$

Ce rapport des chaleurs spécifique est obtenu en divisant l'équation (2.71) par l'équation (2.67) :

$$\gamma(T, \rho) = \gamma_{(gp)} \frac{\left[1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \left[1 + \frac{\left(\frac{2-b\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{2RT^2} \right)}{\frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2}} \right] \right\} \right]}{1 + (\gamma_{(gp)} - 1) \left(\frac{\theta}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2}} \quad (3.51)$$

Cas de l'air : $\gamma_i = 1.402$, $R = 287.0 [J/Kg K]$, $C_{v_i} = \frac{R}{\gamma_i - 1}$, $a = 117.2666 [Pas. m^6]$

$b = 1.07334 \cdot 10^{-3} [m^3]$, $\theta = 3056 K$

3.4. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

Pour calculer les rapports il faut d'abord trouver les paramètres thermodynamiques d'état dans une section donnée (T, P, ρ) , et les diviser par les paramètres

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

générateurs (T_0, ρ_0, P_0) respectivement. La détermination des paramètres (T, P, ρ) sera possible en résolvant le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (3.3), (3.38) et (3.43) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{V_i} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln \frac{\rho_0(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_0)} - 2\dot{a}\left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2}\right) + R \ln \frac{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}\right)}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1}\right)} + R \left(\frac{\theta}{T} \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} - \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1} \right) = 0 \\ \\ M^2 - 2 \frac{\left(\frac{1}{(\gamma_{sp} - 1)} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left(\frac{\theta}{T} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T_0}}} \right) + \frac{1}{RT} \left(4\dot{a} \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right) \right)}{\left(\gamma_{sp} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - b\rho} + \frac{\dot{a}\rho}{RT^2} \right)^2} + \frac{1}{(1 - b\rho)^2} - \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \\ \left(1 + (\gamma_{sp} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \right) = 0 \\ \\ p - \frac{\rho RT}{(1 - b\rho)} - \frac{\dot{a}\rho^2}{T} = 0 \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Ces trois équations composent un système d'équation fortement non linéaire où la solution analytique est impossible à trouver. Les phénomènes non linéaires sont extrêmement courants en pratique. Ils sont sans doute plus fréquents que les phénomènes linéaires. Dans ce cas, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problèmes linéaires, auxquels on peut appliquer diverses techniques.

Le problème consiste à trouver le vecteur $[T, \rho, P]$ vérifiant les 3 équations non linéaires suivantes:

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$\begin{cases} f_E(T, \rho, P) = 0 \\ f_M(T, \rho, P) = 0 \\ f_B(T, \rho, P) = 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Où f_E , f_M et f_B sont des fonctions de trois variables que nous supposons différentiables et réfèrent respectivement aux équations (3.3) et (3.38), (3.43).

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'y a pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Le plus souvent, il existe plusieurs solutions possibles et seul le contexte indique laquelle est la bonne [9].

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses. Notamment, nous ne présentons que la méthode la plus importante et la plus utilisée en pratique, soit la méthode de Newton [9] et [35].

3.4.1. La méthode de Newton

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général [35].

Considérons donc le système:

$$\begin{cases} f_E(T, \rho) = 0 \\ f_M(T, \rho) = 0 \end{cases}$$

Soit $[T_i, \rho_i]$, une approximation initiale de la solution de ce système.

Cette approximation initiale, est cruciale et doit toujours être choisie avec soin. Le but de ce qui suit est de déterminer les pas $[dT, d\rho]$ à $[T_i, \rho_i]$ de telle sorte que:

$$\begin{cases} f_E(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \\ f_M(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Pour déterminer $[dT, d\rho]$ il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions [35]:

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$\begin{cases} 0 = f_E(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \\ 0 = f_M(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \end{cases} \quad (3.55)$$

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant. Pour déterminer $[dT, d\rho]$ il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_E(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_M(T_i, \rho_i) \end{cases} \quad (3.56)$$

Où encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i) & \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i) & \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d\rho \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_E(T_i, \rho_i) \\ f_M(T_i, \rho_i) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Ce système linéaire s'écrit, également sous une forme plus compacte[9] et [35]:

$$J(T_i, \rho_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}(T_i, \rho_i) \quad (3.58)$$

Où $J(T_i, \rho_i)$ désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice jacobienne évaluée au point (T_i, ρ_i) , où $\Delta\vec{k}$ est le vecteur des corrections relatives à chaque variable ($\Delta\vec{k} = [\Delta T, \Delta\rho]$) et où $-\vec{R}(T_i, \rho_i)$ est le vecteur résidu évalué en (T_i, ρ_i) . Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien.

Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit

inversible. On pose ensuite:
$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta\rho \end{cases} \quad (3.59)$$

Qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger (T_{i+1}, ρ_{i+1}) d'une nouvelle quantité $\Delta\vec{k}$, et ce jusqu'à la convergence. Pour en arriver à l'algorithme général suivant :

3.4.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes

1. Étant donné ε , un critère d'arrêt.
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations.
3. Étant donné $\vec{k} = [T_i, \rho_i]$ une approximation initiale de la solution du

système

4. Résoudre le système linéaire: $J(T_i, \rho_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}[T_i, \rho_i]$ et poser:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases}$$

5. Si $\|T_i - T_{i+1}\| + \|\rho_i - \rho_{i+1}\| < \varepsilon$ et $\|\vec{R}[T_i, \rho_i]\| \leq \varepsilon$

- convergence atteinte
- écrire la solution
- arrêt

6. i reçois $i+1$ et retour à l'étape 4

7. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint:

- convergence non atteinte en N itérations.
- arrêt.

3.4.3. Le choix de la solution initial :

La convergence de la méthode de Newton dépend directement de l'approximation initial (T_i, ρ_i) de la solution [35], un mauvais choix de (T_i, ρ_i) causera une divergence, pour cela on va initialiser la solution en utilisant les paramètres thermodynamiques d'un gaz parfait par la suite on verra si ce choix est justifié.

Notre étude est focalisé sur la détente isentropique unidimensionnelle, l'écoulement dans ce cas est considéré comme supersonique ($1 < M < 6$). On va varier le nombre de mach définie dans l'équation f_M dans ce domaine est pour chaque valeur de M on calcule les paramètres initiaux (celles du gaz parfait) on appliquant les lois suivantes [13] et [25]:

$$\frac{T_i}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{-1}, \frac{\rho_i}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma_{gp} - 1}}, \frac{P_i}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-\gamma_{gp}}{\gamma_{gp} - 1}}$$

(3.60)

3.5. Détermination des paramètres critiques :

Les paramètres critiques $[T_*, \rho_*, P_*]$ représentent les propriétés thermodynamiques au niveau du col ($M=1$). Pour les déterminer il suffit de résoudre le système (I) par la méthode de Newton prenant en compte le nombre de mach critique ($M=1$).

3.6. Détermination la différentielle dp/ρ :

L'équation de d'énergie :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (3.61)$$

La multiplication et la division par $d\rho$ donne :

$$VdV + \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cte} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.62)$$

Connaissons que la célérité du son : $C_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cte}$ (3.63)

La relation (3.62) devient :

$$VdV + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.64)$$

Remplaçons l'équation (3.11) dans l'équation (3.64) on obtient:

$$[-C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho] + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.65)$$

Alors:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2} d\rho \quad (3.66)$$

3.7. Détermination de rapport des sections d'un écoulement

D'après l'équation de conservation de la masse on a :

$$\rho V A = cte \quad (3.67)$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$\log(\rho V A) = \log(cte)$$

La différentielle de la relation (3.67) donne:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.68)$$

Dans ce cas :

$$\frac{dA}{A} = -\left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V}\right) \quad (3.69)$$

D'après la relation (3.64), on peut écrire :

$$VdV = -C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.70)$$

Divisons la relation (3.70) par V^2 on obtient :

$$\frac{VdV}{V^2} = -\frac{C_s^2}{V^2} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.71)$$

Remplaçons l'équation (3.71) dans l'équation (3.69) on obtient:

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1-M^2}{M^2}\right) \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.72)$$

Donc :

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left(\int_{T^*}^T \left(\frac{1-M^2(T,\rho)}{V^2(T,\rho)} \cdot C_p(T,\rho) \right) dT + \int_{\rho^*}^{\rho} \left(\frac{1-M^2(T,\rho)}{V^2(T,\rho)} \cdot C_T(T,\rho) \right) d\rho \right)$$

Alors:

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left(\int_T^{T^*} FA_T(T,\rho) dT + \int_{\rho}^{\rho^*} FA_{\rho}(T,\rho) d\rho \right) \quad (3.73)$$

Avec :

$$FA_T(T,\rho) = \frac{M^2(T,\rho)-1}{V^2(T,\rho)} \cdot C_p(T,\rho) \text{ et } FA_{\rho}(T,\rho) = \frac{M^2(T,\rho)-1}{V^2(T,\rho)} \cdot C_T(T,\rho)$$

3.8. Détermination de l'expression du débit massique critique

Le débit massique traversant une section A est donné par [25]:

$$\dot{m} = \int_A \rho V \cos \alpha dA \quad (3.74)$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

α : Est l'angle que fait le vecteur de vitesse avec la normale à la section A . Si nous divisons la relation (3.29) par la quantité $A_* \rho_0 a_0$, pour rendre le calcul non dimensionnel, nous aurons :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \int_A \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \cos \alpha \frac{dA}{A_*} \quad (3.75)$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère. A cette section on $\rho = \rho_*$, $A = A_*$, $a = a_*$, $M = 1$ et $\alpha = 0$ (écoulement horizontal). Donc, notre relation se réduit à une relation plus simple:

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \times \frac{a_*}{a_0} \quad (3.76)$$

Finalement :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \left(\frac{\frac{RT_* \rho_*}{(1-b\rho_*)^2} - \frac{2\dot{a}\rho_*^2}{T_*} + \frac{\rho_*^3 T_* \left(\frac{\dot{a}}{T_*^2} + \frac{R}{(1-b\rho_*)} \right)^2}{c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\frac{\theta}{T_*^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T_*}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T_*}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho_*}{RT_*^2} \right\}}}{\frac{RT_0 \rho_0}{(1-b\rho_0)^2} - \frac{2\dot{a}\rho_0^2}{T_0} + \frac{\rho_0^3 T_0 \left(\frac{\dot{a}}{T_0^2} + \frac{R}{(1-b\rho_0)} \right)^2}{c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\frac{\theta}{T_0^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T_0}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho_0}{RT_0^2} \right\}}} \right) \quad (3.77)$$

3.9. Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT :

Pour faire une comparaison entre ce modèle et les modèles du gaz parfait ou haute température, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait ou bien les relations thermodynamiques correspond le modèle haute température, le tableau 3.1 illustre ces relations.

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

Tableau 3.1 : les équations thermodynamiques des modèles GP et HT.

Rapports	Gaz thermiquement et calorifiquement Parfait GP $\gamma = 1.402$ M : variable Principale	Gaz thermiquement parfait et calorifiquement Imparfait HT $\gamma = \text{variable}$ T : variable Principale
Température $\frac{T}{T_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{-1}$	Résolution de l'équation / T : $M^2(T) \cdot a^2(T) - 2H(T) = 0$
Masse Volumique $\frac{\rho}{\rho_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{\frac{-1}{\gamma - 1}}$	$e^{\int_{T_0}^T \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T} \right\} dT}$
Pression $\frac{P}{P_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0}$
Section $\frac{A}{A_*}$	$\frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$	$e^{\int_{T_*}^T \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T - 2H(T)} \right\} dT}$
Débit $\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0}$	$\left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{a}{a_0} \cdot M \cdot \frac{A}{A_*}$
Vitesse du son a	$\sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$	$\sqrt{\gamma(T) \cdot r \cdot T}$
Enthalpie H	$C_p(T - T_0)$	$\int_{T_0}^T C_p(T - T_0)$
Nombre de Mach M	Variable principale	$\frac{\sqrt{2 \cdot H(T)}}{a(T)}$
Vitesse $\frac{V}{a_0}$	$M \sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$M \sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}}$

Pour les gaz parfaits GP:

$$\gamma = 1.402$$

$$C_p = 1001.28932 \text{ J/(Kg K)}$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

Pour les gaz a haute température HT:

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (3.78)$$

Les coefficients a_i ($i=1, 2 \dots 10$) sont présentées dans le tableau suivant:

Tableau 3.2 : Les coefficients polynômiaux du Cp.

i	a_i	i	a_i
1	1001.1058	6	$3.067736 \cdot 10^{-12}$
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$
3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$
4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (3.79)$$

3.9.1. Erreur du modèle gaz parfait :

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé sur la base de CP la chaleur spécifique et le rapport γ constantes, ce qui donne des résultats acceptables pour des faibles températures et pressions. Selon cette étude, nous pouvons remarquer une différence sur les résultats donnés entre le modèle du gaz parfait et notre modèle. L'erreur donnée par le modèle PG par rapport à notre modèle RG (gaz réel) peut être calculé pour chaque paramètre. Donc, pour chaque valeur (P_0 , T_0 , M), l'erreur de ε peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{PG}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{RG}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100 \quad (3.80)$$

pour l'application aérodynamique, l'erreur doit être inférieure à 5%.

3.9.2. Erreur du modèle haute température :

Les résultats obtenus par le modèle a haute température HT, sont valables à sous l'hypothèse de l'imperfection calorique du gaz, c.-à-d., les chaleurs spécifiques C_p et C_v varient avec la température, et qui donne une erreur considérable à haute pression, par contre, notre modèle RG basé sur les hypothèses de un gaz thermiquement et caloriquement imparfait, donc, des nouvelles expressions d'un gaz réel sont développées, variée avec la température et la masse volumique, corrigent le modèle HT, surtout à haute pression et donne une erreur considérable à haute pression. Alors, pour chaque valeur (P_0, T_0, M), l'erreur de ε peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{HT}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{RG}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100 \quad (3.81)$$

3.10. Les équations pour les ondes de choc normales :

Pour l'écoulement à travers une onde de choc, les équations générales prennent la forme de cette section, avec "1" désignant la face amont de l'onde de choc et "2" désignant la face aval, duquel la surface S_2 peut être estimée égale à celle de la face amont S_1 . La pression, la masse volumique, la température, le nombre de Mach, la vitesse, la pression totale et la température totale sur la face 1 sont respectivement $P_1, \rho_1, T_1, M_1, U_1, P_{01}$ et T_{01} . Les variables correspondantes dans la région 2 sont notées $P_2, \rho_2, T_2, M_2, U_2, P_{02}$ et T_{02} .

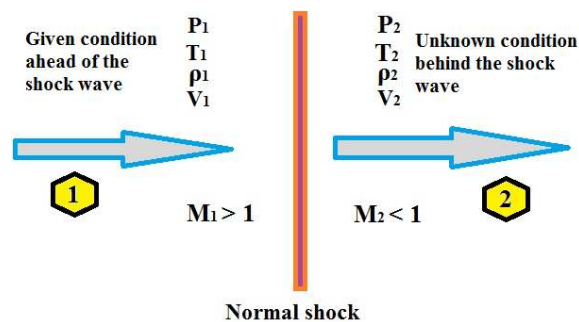


Figure 3.1 schéma d'une onde de choc normale

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

Appliquer la forme intégrale des équations de conservation à ce volume de contrôle, On peut observer trois faits physiques importants sur l'écoulement à partir de la figure 1: l'écoulement est stable et adiabatique, et il n'y a pas de forces du corps. Pour relier les propriétés du fluide sur les deux côtés d'une onde de choc normale, il est pratique, l'équation d'énergie, à travers les deux coter d'onde de choc. L'expression résultante est:

$$\frac{V_2^2(T, \rho)}{2} - \frac{V_1^2(T, \rho)}{2} + c_{v,sp} (T_2 - T_1) + R\theta \left(\frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_1}\right)}\right)} - \frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_2}\right)}\right)} \right) - 4a \left(\frac{\rho_2}{T_2} - \frac{\rho_1}{T_1} \right) - \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) = 0 \quad (3.82)$$

Les équations de continuité et la conservation de quantité de mouvement doit être également satisfaites à travers l'onde. Ces exigences peuvent être exprimées analytiquement sous les formes suivantes [1], [2]:

$$\int_A \rho V \cdot dA \Rightarrow \rho_1 V_1 - \rho_2 V_2 = 0 \quad (3.83)$$

et [3], [11]

$$\int_A \rho V \vec{V} dA = - \int_A P dA \Rightarrow \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 + P_1 - P_2 = 0 \quad (3.84)$$

Les équations (3.82) à (3.84) fourni les informations supplémentaires nécessaires pour déterminer le débit à travers une onde de choc normale

3.11. entropie:

L'équation de la chaleur pour un gaz réel est donné par [10], [14]:

$$\partial Q = C_v dT + l dv \quad (3.85)$$

où le coefficient de Clapeyron est donnée par [17]:

$$l = T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \quad (3.86)$$

De l'équation d'état de Berthelot (1):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 v^2} \quad (3.87)$$

L'équation d'entropie est donné par [11/10]:

$$dS = \frac{\partial Q}{T} \quad (3.88)$$

En combinant les équations (3.85) et (3.88) donne l'équation suivante pour l'entropie:

$$S = \int C_v \frac{dT}{T} + \int \left(\frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 v^2} \right) dv \quad (3.89)$$

La relation entre le volume V et la masse volumique ρ est la suivante:

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (3.90)$$

En substituant l'équation (17) pour l'état en amont (1) donnée par (T_1, P_1, ρ_1, M_1) et l'état d'aval (2) par (T_2, P_2, ρ_2, M_2) :

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{S_2 - S_1}{R} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v(T, \rho)}{RT} \right) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho(\rho b - 1)} - \frac{a}{RT^2} \right) d\rho \quad (3.91)$$

Ou

$$\frac{\Delta S}{R} = \int_{T_1}^{T_2} F_{ST} dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} F_{S\rho} d\rho \quad (3.92)$$

$$F_{ST}(T, \rho) = \frac{C_v(T, \rho)}{RT} \quad \text{et} \quad F_{S\rho}(T, \rho) = \frac{1}{\rho(\rho b - 1)} - \frac{a}{RT^2}$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

D'après l'équation (3.91) $S_2 - S_1 > 0$ pour une onde de choc normale. Par conséquent cette équation (3.91) indique que $P_{02} < P_{01}$ La pression totale diminue à travers l'onde de choc.

3.12. Procédure de calcul :

3.12.1. Les paramètres en aval du choc:

Après avoir fixé les valeurs (P_0, T_0) de la pression génératrice et de la température, on peut calculer la masse volumique génératrice ρ_0 en utilisant la méthode de dichotomie [15] à partir de l'équation d'état de Berthelot. Ensuite, les rapports thermodynamiques peuvent être calculés numériquement en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires. Le calcul est effectué en utilisant l'algorithme de Newton [16] avec une dérivation numérique à partir des équations précédentes. Une fois ces paramètres statiques sont déterminés, les rapports thermodynamiques peuvent être calculés en divisant ces paramètres statiques par les paramètres génératrices.

Les paramètres en aval du choc peuvent être déterminés en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires formés par l'équation d'énergie (3.82), l'équation de continuité (3.83) et l'équation de quantité de mouvement (3.84). Le calcul est effectué en utilisant l'algorithme de Newton [16] avec une dérivation numérique des équations (3.82), (3.83) et (3.84). Cela se fait d'abord avec la température, et deuxièmement avec la masse volumique, en plaçant les paramètres aval d'un gaz parfait en tant que vecteur initial pour le démarrage du calcul. Pour cet algorithme, la dérivation se fait avec un pas de calcul égale à 10^{-6} . Une fois que ces paramètres statiques sont déterminés, le calcul des rapports thermodynamique avec une précision de $\varepsilon = 10^{-6}$ peut être réalisée en divisant ces paramètres par les paramètres statiques amont du choc pour trouver les rapports de température T_2 / T_1 , la pression P_2 / P_1 .

3.12.2. entropie :

La détermination de l'entropie est donné par l'équation (3.92), ce qui nécessite l'intégration numérique des fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$. Notez que les fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ dépendent des paramètres T_0 et ρ_0 .

Pour avoir une idée générale sur les variations de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la méthode d'intégration, ((les courbes de variation sont tracées Figure 2 et 3)) On peut conclure que l'intégration avec une étape constante nécessite une très forte discrétisation. On peut conclure que l'intégration avec une étape constante nécessite une très forte discrétisation pour obtenir une bonne précision pour des variations très rapides aux extrémités gauches de chaque intervalle ($T = T_1$) et ($\rho = \rho_1$). Le Traçage de ces fonctions sont choisi pour $T_0 = 3000K$ et $M_S = 6.00$ (extrêmement supersonique). Et notez que les fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ donner un Inclinaison très forte au voisinage de la température T_1 et la masse volumique ρ_1 , respectivement. La condensation des nœuds est nécessaire adjacente à T_1 et ρ_1 pour ces fonctions. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une très grande précision en peu de temps, par minimiser le nombre de nœuds de la méthode d'intégration.

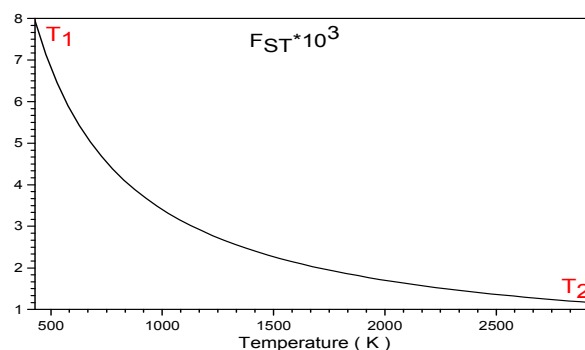


Figure 3.2 Variation de la F_{ST} de fonction (T, ρ) dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ par rapport à T

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

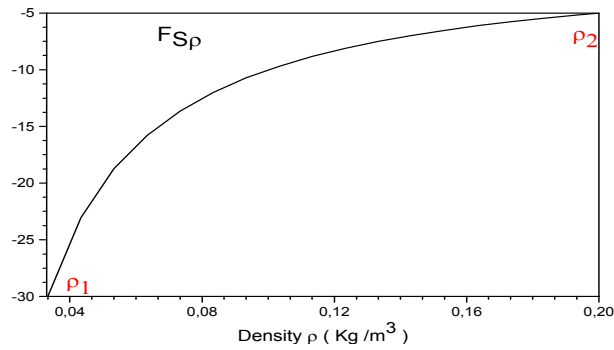


Figure 3.3 La variation de la fonction $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ par rapport ρ

La méthode d'intégration retenue est celle de Simpson [4], [15], pour le calcul numérique des intégrales de fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'équation (3.92). La fonction de condensation est donnée par [2], [10]:

$$S_i = b_1 \cdot z_i + (1 - b_1) \cdot \left[1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (3.93)$$

Où:

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.94)$$

Après détermination de la fonction de condensation, les distributions de température et de densité peuvent être déterminées à partir de:

$$T_i = S_i \cdot (T_D - T_G) + T_G \quad (3.95)$$

$$\rho_i = S_i \cdot (\rho_D - \rho_G) + \rho_G \quad (3.96)$$

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

Le T_D de température correspond à T_2 en fonction du F_{ST} de fonction (T, ρ) et T_G correspond à T_1 . La p_d densité correspond à p_2 de la fonction $F_{Sp}(T, \rho)$, et la densité ρ_G correspond à p_1 . Si une valeur de b_1 est adopté proche de zéro ($b_1 = 0,1$) et $b_2 = 2,0$, les noeuds peuvent être condensés à l'extrémité gauche de l'intervalle T_1 . Et lorsque les valeurs de b_1 sont prises près de 2,0 (par exemple $b_1 = 1,9$), les noeuds peuvent être condensés par l'extrémité droite. Pour deux sous-intervalles de la même longueur, $b_1 = 1,0$.

La figure 4 montre la répartition des noeuds en fonction des valeurs de b_1 . On notera que l'intérêt est ici de condenser les noeuds sur le côté gauche (T_1, ρ_1) pour la variation dans les fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$.

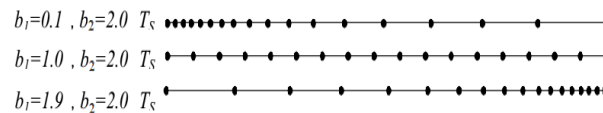


Figure3.4 Représentation de condensation de noeud

3.13. Les paramètres génératrices après le choc :

Lorsque l'entropie a été calculée, les conditions de génératrice en aval peut être trouvée en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires formés par, l'équation du nombre de Mach et l'équation d'entropie. Le calcul est effectué en utilisant l'algorithme de Newton [16] avec une dérivation numérique de ces équations, d'abord avec la température, et la seconde avec la masse volumique. En réglant les paramètres de l'espèce de génératrice en aval de celle d'un gaz parfait en tant que vecteur initial, la dérivation est effectuée par une étape de calcul égal à 06/10. Une fois que ces paramètres sont déterminés de stagnation, le calcul des rapport thermodynamique peut être réalisée avec une précision de $\epsilon = 10^{-8}$. Ces paramètres génératrice peuvent être divisés par les paramètres génératrice en amont pour trouver les rapports génératrice.

3.14. Les équations de choc normale [1], [17]:

$$M_2^2 = \frac{1 + [\gamma - 1/2]M_1^2}{\gamma M_1^2 - [\gamma - 1/2]} \quad (3.9\text{è})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (3.98)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \quad (3.99)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right] \quad (3.100)$$

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{S_2 - S_1}{R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (3.101)$$

$$\frac{P_{0_2}}{P_{0_1}} = e^{-(S_2 - S_1)/R} \quad (3.102)$$

3.15. Détermination de l'équation des gaz parfaits a partir le modèle des gaz réel :

Nos équations et théorie basée sur le gaz réel représente la forme générale du calcul de débit supersonique et valable pour n'importe quel domaine de champ (haute ou basse pression ou température) et tous les modèles précédents ou des œuvres est devenu un cas spécial dans notre modèle, bien sûr, notre modèle basé sur la théorie des gaz réel, mais conduit à corriger toutes les pièces précédentes, c'est notre objectif, nous allons prendre l'entropie comme exemple:

A partir de l'équation de la chaleur: $\delta Q = C_v dT + l dv = C_v dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv$; on trouve :

Modèle RG : l'équation (3.92)
$$\frac{\Delta S}{R} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v(T, \rho)}{RT} \right) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho(\rho b - 1)} - \frac{a}{RT^2} \right) d\rho$$

À partir de références le modèle PG donnée par l'équation (3.101) :

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{S_2 - S_1}{R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \ln \frac{P_2}{P_1}$$

À partir de l'équation (20) :

$$\frac{\Delta S}{R} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v(T, \rho)}{RT} \right) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho(\rho b - 1)} - \frac{a}{RT^2} \right) d\rho$$

Pour extraire l'équation (3.101) à partir de l'équation (3.92), nous avons d'autres de cette façon:

Gaz parfait pour: a = constante de forces intermoléculaires = 0 et b = constante de taille moléculaire = 0 et CV = constante

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{R} &= \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v(T, \rho)}{RT} \right) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho(\rho b - 1)} - \frac{a}{RT^2} \right) d\rho = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v}{RT} \right) dT - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\rho \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v}{R} \right) \frac{dT}{T} - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_v}{R} \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} - \ln \rho \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = \frac{C_v}{R} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{aligned}$$

d'après l'équation des gaz parfait : $P = \rho RT \Rightarrow \rho = \frac{P}{RT}$ and $\frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{R} &= \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{P_2/T_2}{P_1/T_1} = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - \left[\ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta S}{R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \ln \frac{P_2}{P_1} \text{ comme l'équation (3.101)}$$

De tous nos équations nous pouvons trouver des équations du modèle du gaz parfait, pour que nous avons dit avant ce modèle perpresnte la forme générale de l'écoulement supersonique calcul.

Dans ce chapitre, on présente d'une manière détaillée les relations thermodynamiques et géométriques lorsque l'on tient compte de les paramètres génératrices et l'imperfection thermique et calorique, nous présentons aussi la technique numérique de newton pour résoudre un système d'équation non linéaire

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

formé par trois équations. Ces paramètres thermodynamiques et géométriques sera employées pour élaborer et développer une nouvelle modèle numérique pour calculer les ondes de chocs.

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

Contenu

CHAPITRE 3 : Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique	49
3.1. Introduction:.....	49
3.2. Hypothèses de base :	50
3.3. Configuration des équations :	51
3.3.1. L'équation de la conservation d'énergie :	51
3.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T sera constante :	52
3.3.3. Détermination la différentielle dp/p :	52
3.3.4. Détermination les paramètres thermodynamique pour les gaz réels :	53
3.3.4.1. L'état générateur :	56
3.3.4.2. La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot :	56
3.3.5. Détermination du nombre de Mach :	57
3.3.5.1. Calcul de la vitesse :	57
3.3.5.2. Détermination de la célérité du son :	58
3.3.5.3. Le nombre de Mach :	59
3.3.6. La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \rho)$	60
3.3.7. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$	60
3.3.8. Rapport des chaleurs spécifiques γ	61
3.4. Calcul numérique des rapports thermodynamiques	61

Chapitre 3 Le modèle Mathématique pour un Ecoulement Supersonique

3.4.1. La méthode de Newton	63
3.4.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes.....	65
3.4.3. Le choix de la solution initial :.....	65
3.5. Détermination des paramètres critiques :	66
3.6. Détermination la différentielle dp/ρ :	66
3.7. Détermination de rapport des sections d'un écoulement.....	66
3.8. Détermination de l'expression du débit massique critique.....	67
3.9. Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT :	68
3.9.1. Erreur du modèle gaz parfait :	70
3.9.2. Erreur du modèle haute température :	71
3.10. Les équations pour les ondes de choc normales :	71
3.11. entropie:	73
3.12. Procédure de calcul :	74
3.12.1. Les paramètres en aval du choc:	74
3.12.2. entropie :	75
3.13. Les paramètres génératrices après le choc :	77
3.14. Les équations de choc normale [1], [17]:	78
3.15. Détermination de l'équation des gaz parfaits a partir le modèle des gaz réel :....	78

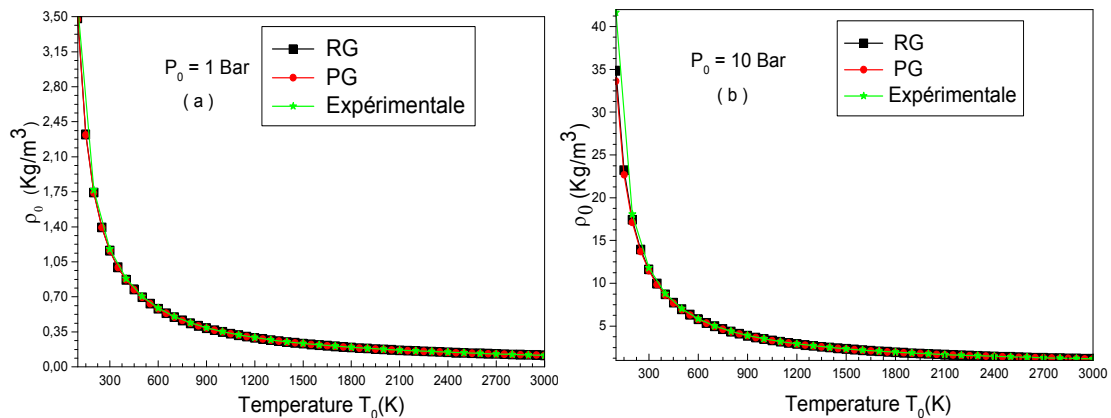
Chapitre 4 : Résultats et Commentaire

Introduction :

Dans ce chapitre on va discuter sur les résultats des simulations des équations de troisième chapitre et donner une conclusion générale sur les résultats obtenus [11].

4.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel :

La figure 4.1 représente la variation de la masse volumique génératrice ρ_0 en fonction de la température génératrice T_0 calculée pour différentes pressions génératrices par la méthode de dichotomie. On remarque que la masse volumique diminue si T_0 augmente, et augmente si P_0 augmente. Et on remarque que les résultats des GR s'éloignent par rapport aux GP et l'expérimentale pour de faibles valeurs de T_0 , et s'approche pour de grandes valeurs de T_0 , et pour les grandes pressions cette différence augmente. Cette différence montre que l'effet de taille moléculaire et la force intermoléculaire liée par l'équation de Berthelot.



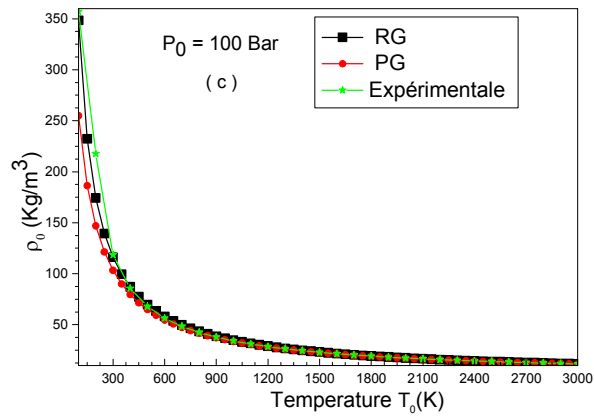


Figure 4.1: Variation de la masse volumique génératrice ρ_0

La figure 4.2 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée par la masse volumique génératrice ρ_0 et pour quelques valeurs de la pression génératrice P_0 du modèle GR au modèle GP en fonction de la température génératrice T_0 . On remarque que l'erreur dépend des valeurs de T_0 et P_0 et elle augmente si P_0 augmente ce qui monte les effets de taille moléculaire a et de la force intermoléculaire c dans l'équation de Berthelot. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de P_0 et T_0 modéré.

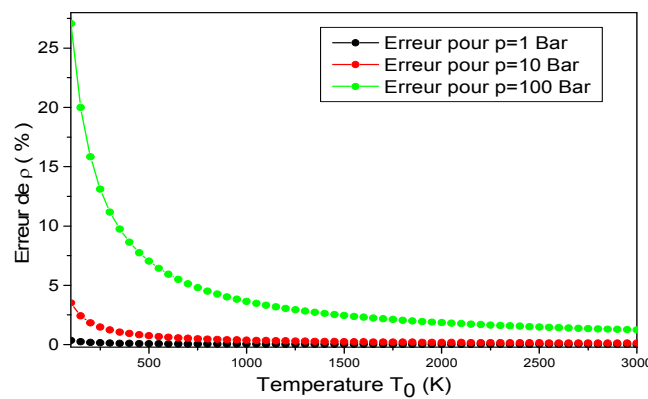


Figure 4.2 : Variation de l'erreur relative de ρ_0 en fonction de T_0

La figure 4.3 représentation la variation du facteur de compressibilité Z du modèle gaz réel (modèle de Berthelot) en fonction de la température génératrice T_0 , et quelques valeurs de la pression génératrice P_0 . On remarque que si la température augmente le facteur de la compressibilité diminue et si la pression

P_0 augmente le facteur de compressibilité augmente, et on conclure que notre modèle (modèle de Berthelot), soit proche au modèle du gaz parfait ($Z=1$) lorsque la pression est très faible, ou bien à haute température même si la pression est élevée. Le facteur de compressibilité ne peut jamais être égale à un ($Z=1$) ce qui implique les limites de l'équation d'état des gaz parfaits.

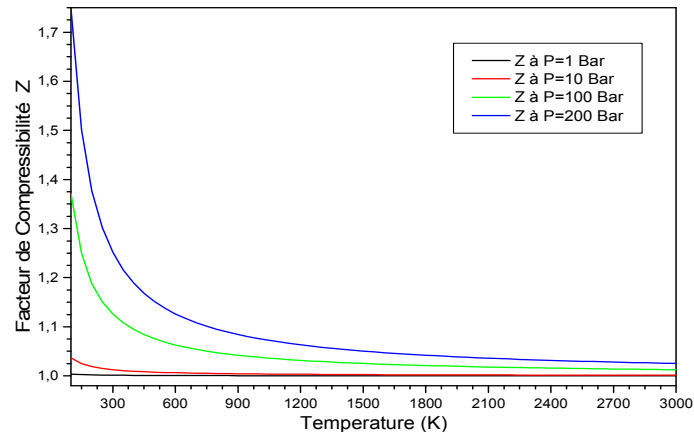


Figure 4.3 : Variation de facteur de compressibilité en fonction de T_0 pour quelque valeur de pression P_0

La figure 4.4 représente la variation des chaleurs spécifiques C_p en fonction de T_0 et P_0 , pour les modèles HT , GP et RG . On remarque lorsque la température T_0 augmente les deux modèles HT et RG augmentent et prennent la même allure jusqu'à 1300 K, et notre modèle RG varie dépend à la pression P_0 , dans ce cas on peut dire que les deux modèles HT et RG sont calorifiquement imparfaits. Mais si la température T_0 augmente, on peut voir la différence entre les deux modèles HT et RG , ce qui montre les effets de taille moléculaire a , de la force intermoléculaire b , et la température caractéristique de vibration θ , cette variation va influencer sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, et dans ce cas on peut dire que notre modèle est thermiquement et calorifiquement imparfait.

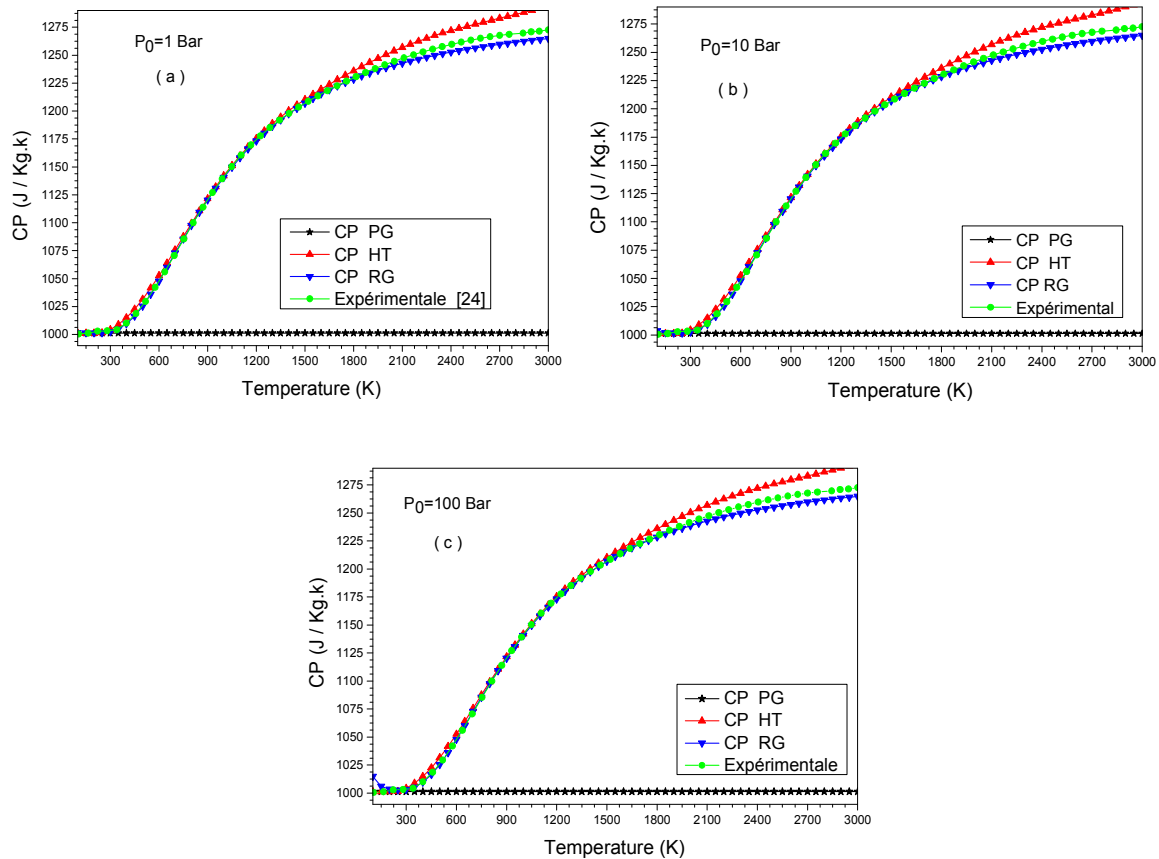


Figure 4.4: Variation de la chaleur spécifique C_p en fonction de T_0 pour différentes P_0

La figure 4.5 représente la variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de la température jusqu'à 3000 K , pour quelques valeurs de la pression P_0 , et pour les modèles HT , GP et RG . On remarque que le rapport γ reste constant pour le modèle PG pour n'importe quelle valeur de la pression P_0 et la température T_0 , on remarque que les deux modèles HT et GP suivent la même allure, sauf que le modèle RG varie avec la pression P_0 , on remarque lorsque la température T_0 augmente, les deux modèles HT et RG diminuent et prennent la même allure jusqu'à 1300 K , ce qui montre les effets de la taille moléculaire a , de la force intermoléculaire b , et de la température caractéristique de vibration θ , cette variation va influencer sur le comportement thermodynamique de l'écoulement.

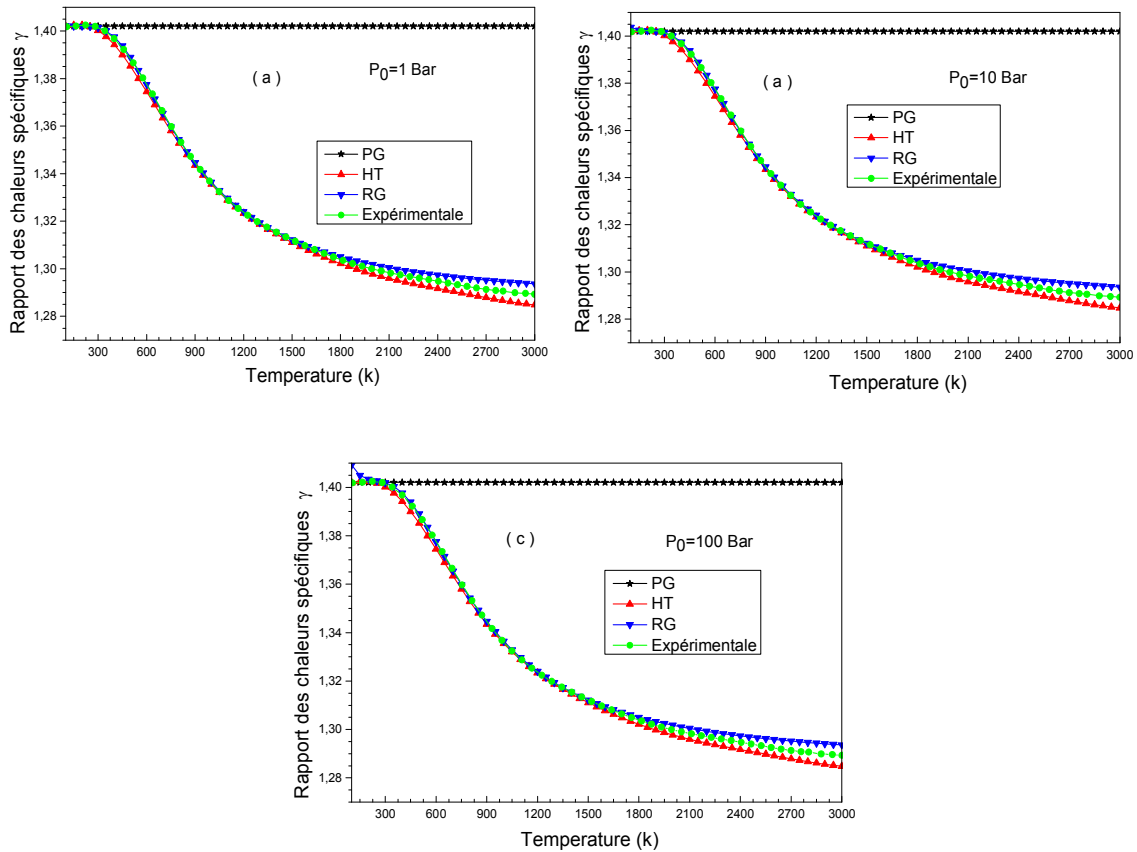


Figure 4.5 : Variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.6 représente la variation du coefficient C_T en fonction de la température T_0 , et P_0 . On remarque que le coefficient C_T croit linéairement avec la température T_0 dans tous les modèles. On remarque aussi que l'augmentation de la pression génératrice P_0 entraîne une augmentation du coefficient C_T .

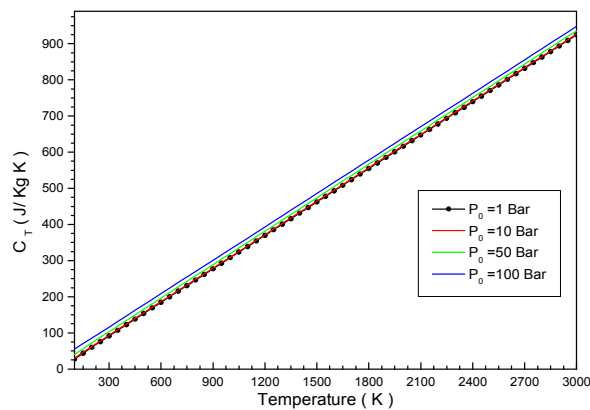


Figure 4.6 : Variation du coefficient en fonction de T_0 pour quelque valeur de P_0

La figure 4.7 représente la variation de la vitesse du son a en fonction de T_0 et P_0 , pour les modèles HT , GP et RG . On remarque que si la température T_0 augmente toutes les modèles entraîne une augmentation de la vitesse du son a . Et on remarque que A basse température les deux modèles HT et GP prennent presque la même allure, sauf notre modèle RG , il dépend à la pression P_0 , mais lorsque la température T_0 augmente, on peut voir la différence entre les deux modèles GP , HT et RG , cette variation va influent sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, et ce qui montre les effets de taille moléculaire a , de la force intermoléculaire b , et la température caractéristique de vibration θ cette.

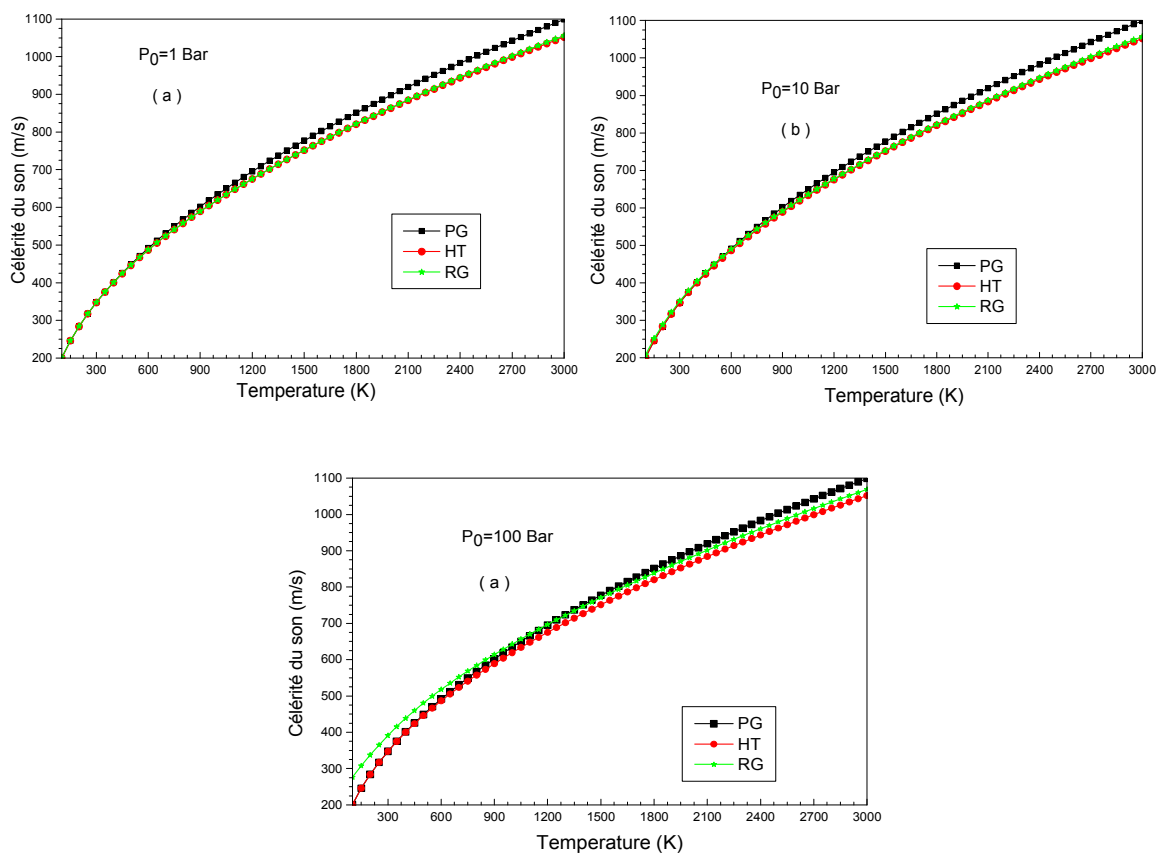


Figure 4.7: La célérité du son en fonction de la température génératrice T_0 pour quelques valeurs de pression P_0

4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col) :

La figure 4.8 représente la variation des rapports de température critiques T^*/T_0 en fonction de T_0 , et P_0 pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, on remarque que l'augmentation de la température génératrice T_0 pour le modèle *HT* et *RG* entraîne une augmentation des rapports de température critiques T^*/T_0 , et une valeur constante pour le modèle *GP* on remarque que l'augmentation de la pression génératrice P_0 entraîne une diminution des rapports de température critiques T^*/T_0 , on remarque aussi que les courbes des *RG* s'approchent si $T_0 > 2000$ K. on remarque aussi que les rapports de température critiques obtenus par notre modèle *RG* est inférieure de ceux obtenus par le modèle *HT*

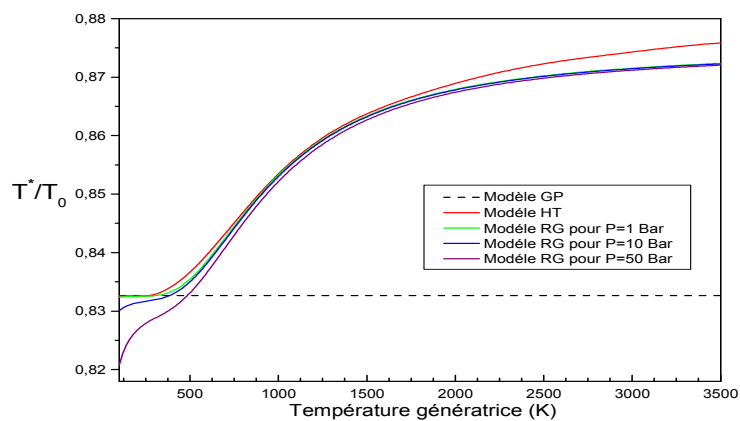


Figure 4.8: Rapport des températures critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.9 représente la variation des rapports de la masse volumique critiques ρ^*/ρ_0 en fonction de T_0 et P_0 , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. on remarque que l'augmentation de la température génératrice T_0 pour les *RG* et *HT* entraîne une diminution des rapports de la masse volumique critiques ρ^*/ρ_0 , et l'augmentation de la pression génératrice P_0 entraîne une augmentation des rapports de la masse volumique critiques ρ^*/ρ_0 , et les gaz parfait reste constant. on remarque aussi que les rapports de la masse volumique critiques ρ^*/ρ_0 obtenus par notre modèle *RG* sont toujours supérieures de ceux obtenus par le modèle *HT* mais si la température génératrice T_0 supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *RG* s'approchent, et s'éloignent après.

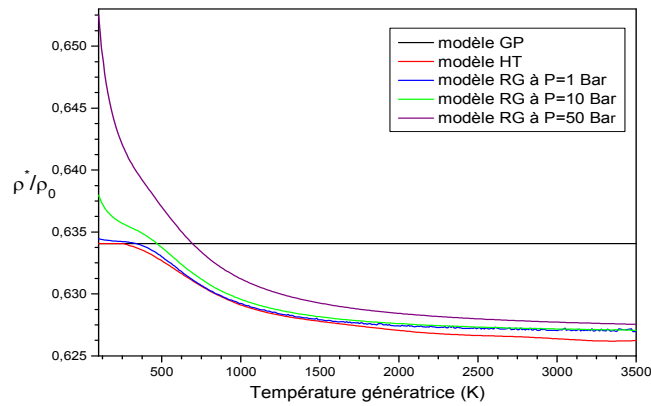


Figure 4.9: Rapport des masses volumique critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.10, 4.11, et 4.12 représente la variation des rapports de la pression critiques P^*/P_0 , rapports de la vitesse du son critiques a^*/a_0 et la variation du débit massique critique $m / A^*.r_0.a$ respectivement en fonction de la T_0 et P_0 , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, on remarque que l'augmentation de la température T_0 pour différents modèles entraîne une augmentation des P^*/P_0 , a^*/a_0 , et $m / A^*.r_0.a$, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque que l'augmentation de P_0 entraîne une diminution des P^*/P_0 , a^*/a_0 , et $m / A^*.r_0.a$ on remarque aussi que tous les résultats des GR et inférieure de ceux obtenus par le modèle HT, et on remarque dans tous les figure les courbe s'approche dans les températures élevait

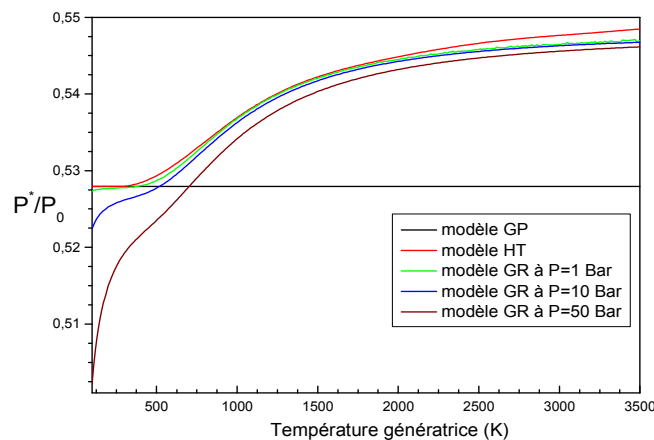


Figure 4.10: Rapport des pressions critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

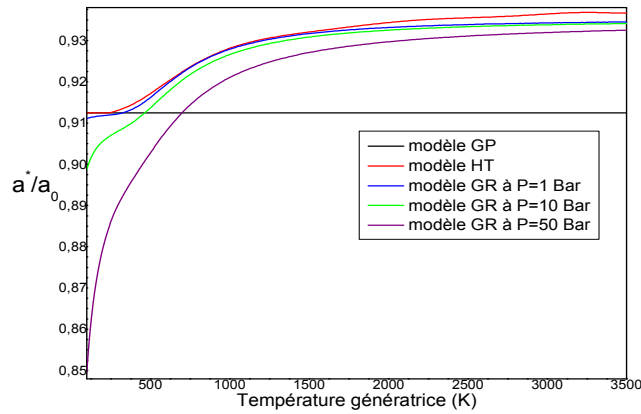


Figure 4.11: Rapport des vitesses du son critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

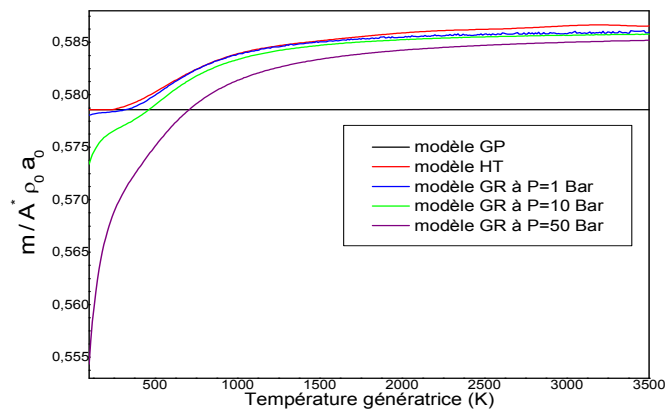


Figure 4.12: Rapport de débit massique critique en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques :

Les figures 4.13, 4.14 et 4.15 représentent la variation du rapport de température T/T_0 , la variation du rapport de la masse volumique ρ/ρ_0 et la variation du rapport de la pression P/P_0 respectivement en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression $P_0 = 1 \text{ Bar}$, 10 Bar et 50 Bar , on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de température et une diminution des rapports de la masse volumique et une diminution du rapport de la pression, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K ,

3000K, influe sur le rapport de température, et le rapports de la masse volumique et le rapport de la pression qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait.

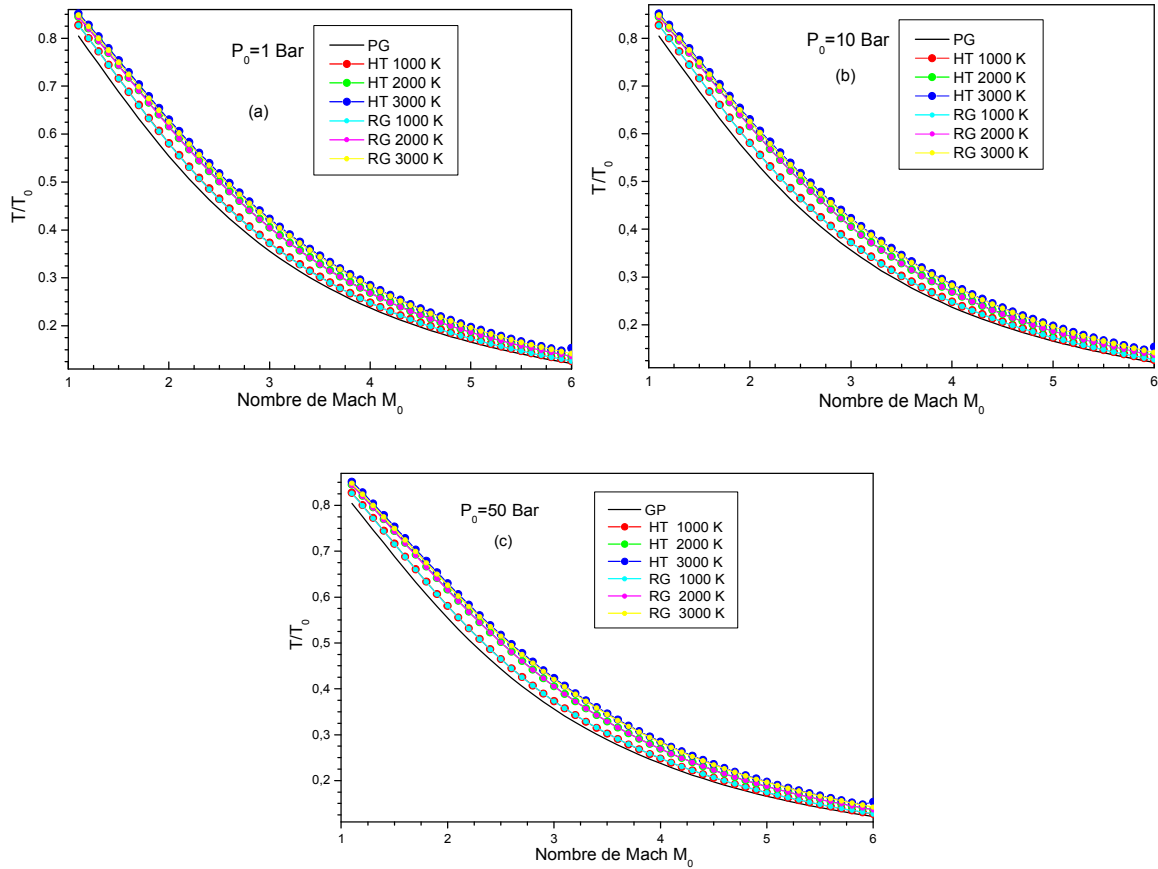
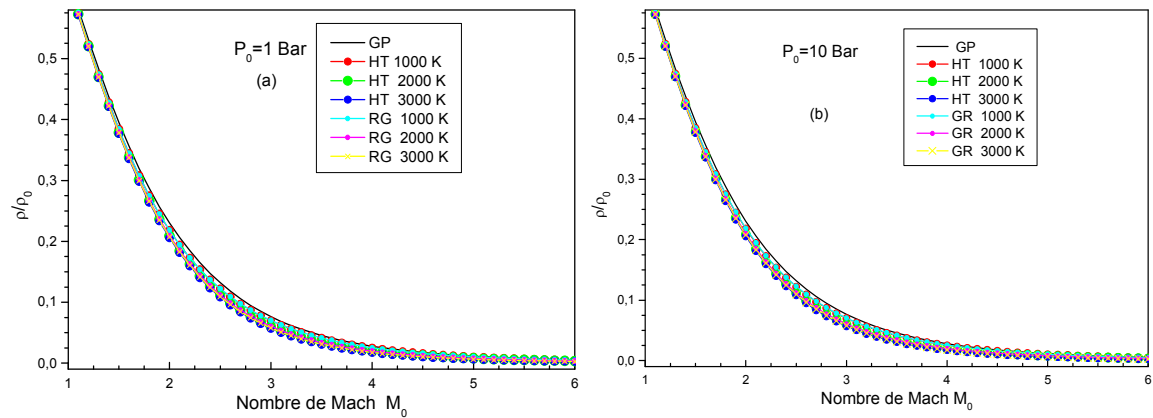


Figure 4.13: Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach



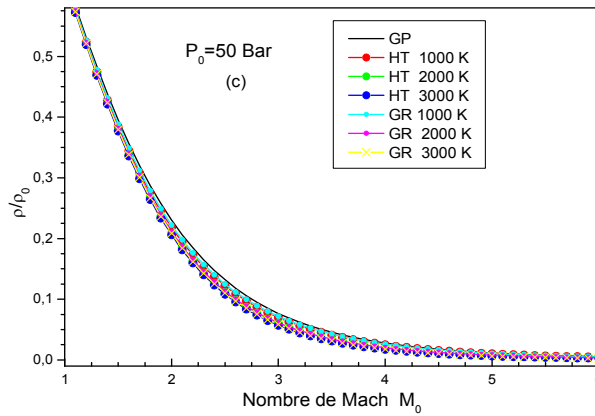


Figure 4.14: Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach

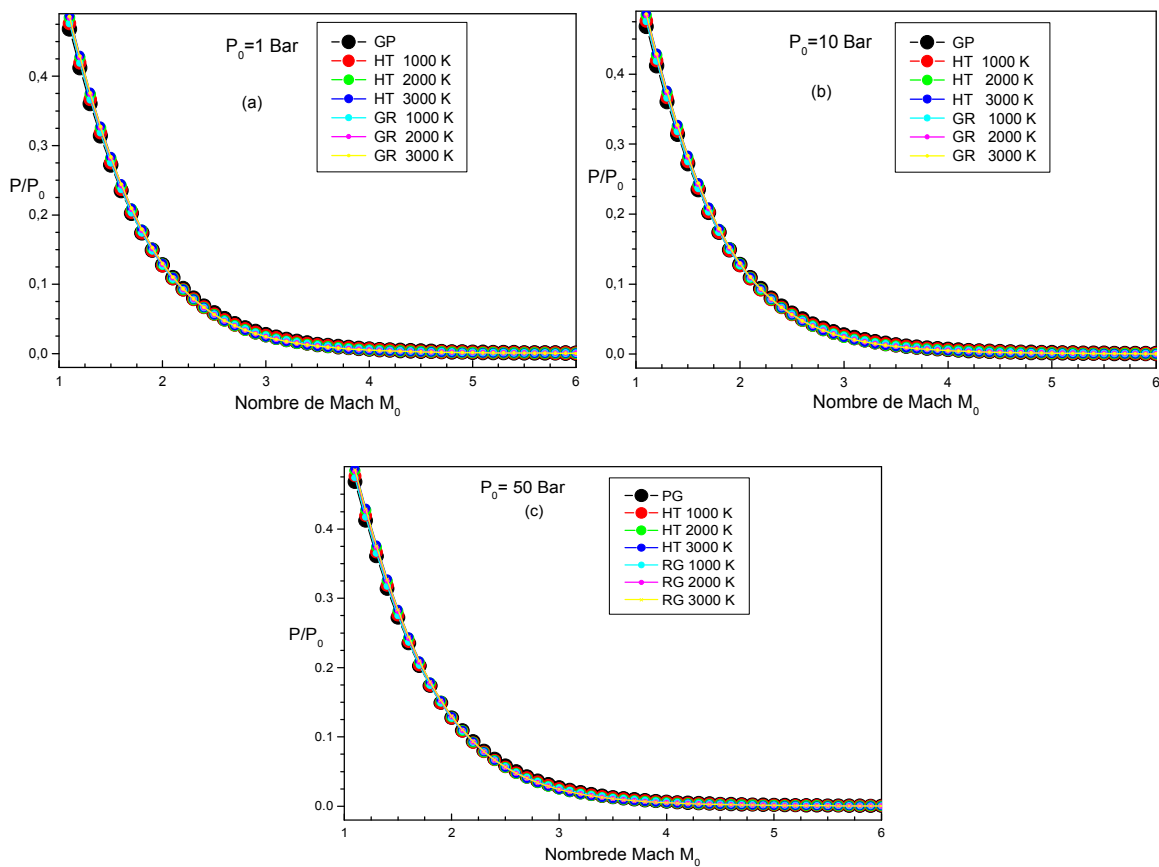


Figure 4.15 : Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach

La figure 4.16 représente la variation du rapport de la vitesse du son a/a_0 en fonction du nombre de Mach et P_0 , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la vitesse du son, On remarque que lorsque la pression génératrice P_0 augmente les a/a_0 obtenus par le modèle *RG* s'éloignent de ceux obtenus par le modèle *HT*,

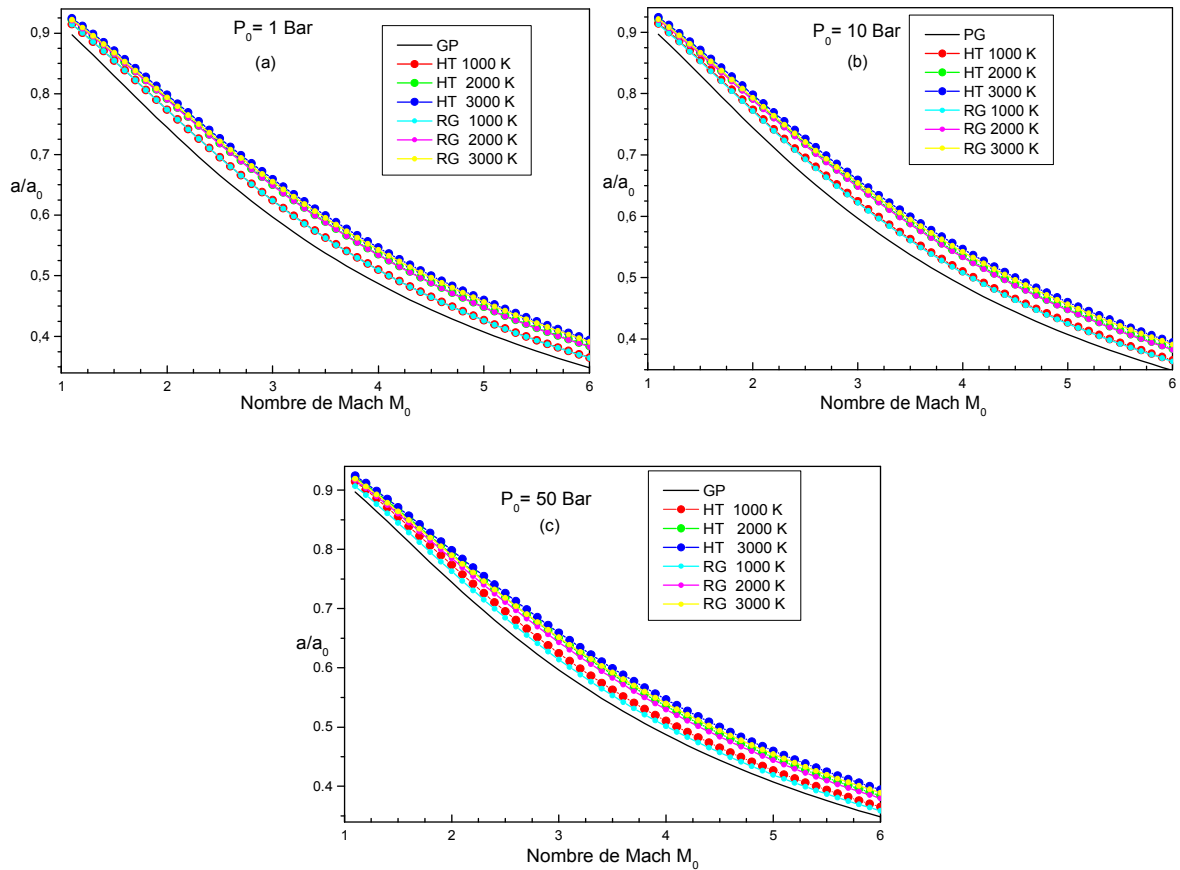
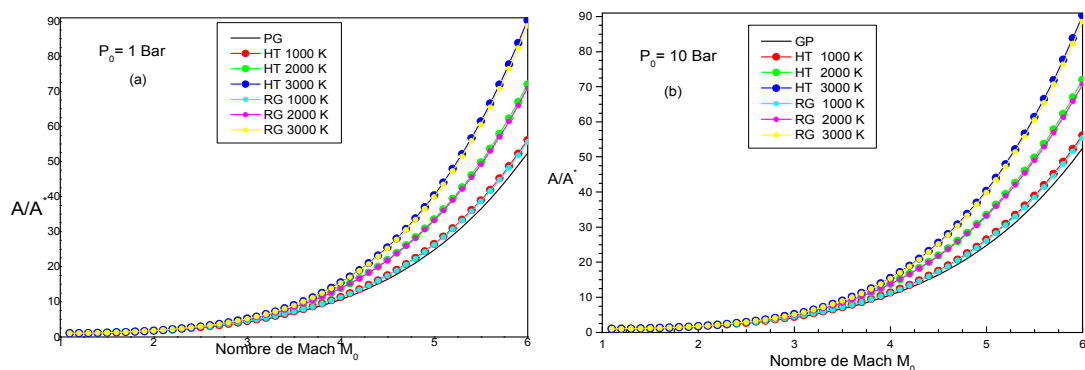


Figure 4.16: Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach

La figure 4.17 représente la variation des rapports critiques des sections A/A^* en fonction du nombre de Mach, et P_0 pour les modèles HT, GP et RG , on remarque que si nombre de Mach ou T_0 augmente on a une augmentation des A/A^* , ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, On remarque que lorsque la pression génératrice P_0 augmente les A/A^* obtenues par le modèle RG s'éloignent de ceux obtenus par le modèle HT , Et on remarque que si le nombre de Mach inférieur a $M_0=2.0$, les trois modèles GP, HT , et RG sont confondues.



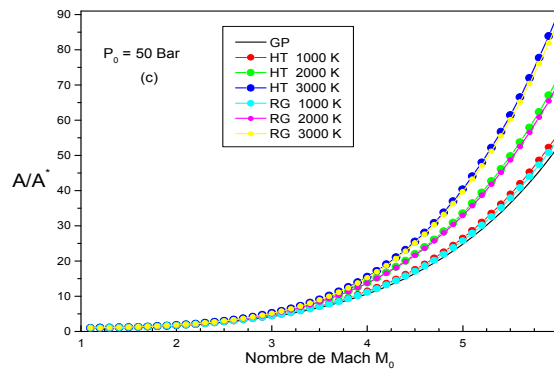
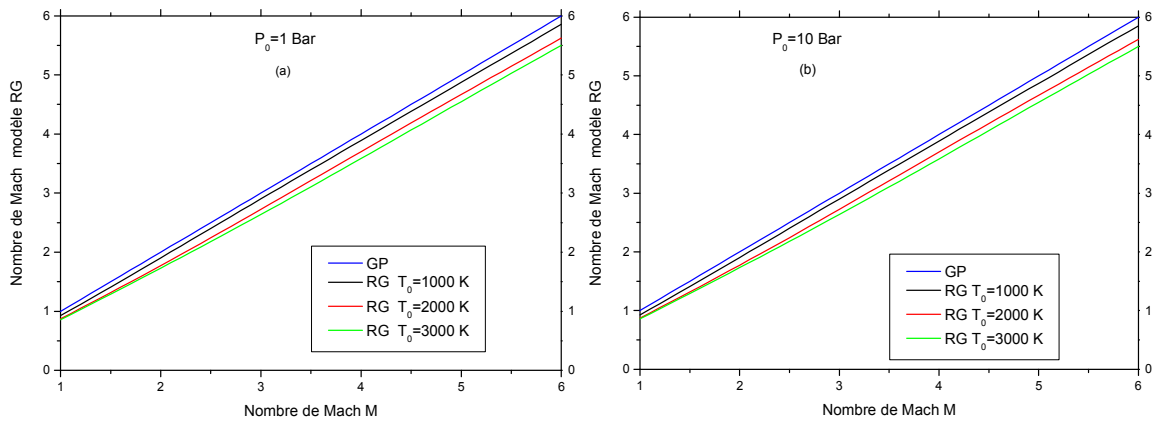


Figure 4.17: Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach

La figure 4.18 représente la correction du nombre de Mach du modèle du gaz parfait GP par le nombre de Mach du modèle des gaz réels, données respectivement par les pressions génératrices $P_0 = 1 \text{ Bar}$, 10 Bar , 100 Bar et 500 Bar , et les températures génératrices $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K , et 3000 K en fonction du nombre de Mach de sortie, du modèle GP comparé au modèle RG. On remarque clairement que la variation du nombre de Mach dépend de P_0 , T_0 . Si T_0 et P_0 augmentent, le nombre de Mach du modèle des gaz réels diminue. D'après ces résultats on tire que le nombre de Mach pour un gaz réel ne peut jamais atteindre le nombre de Mach du gaz parfait sous n'importe quels conditions.



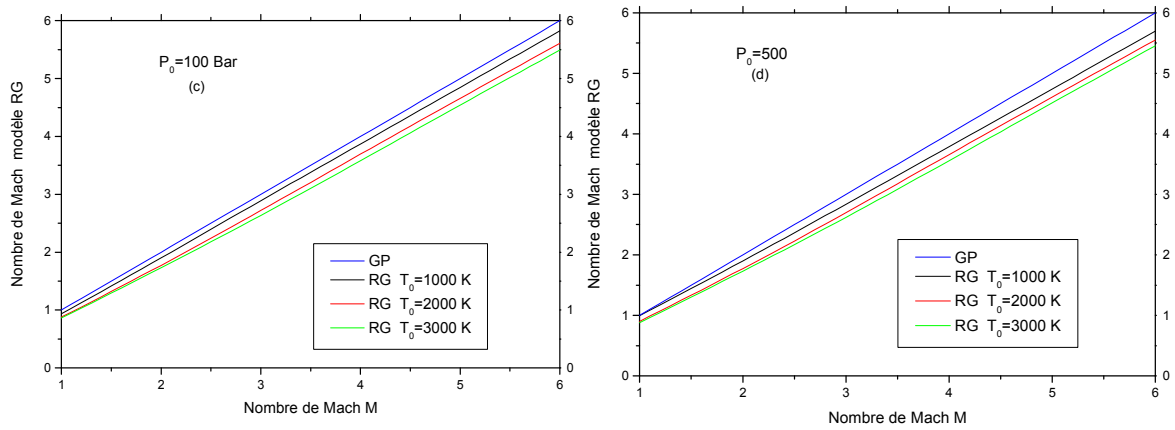
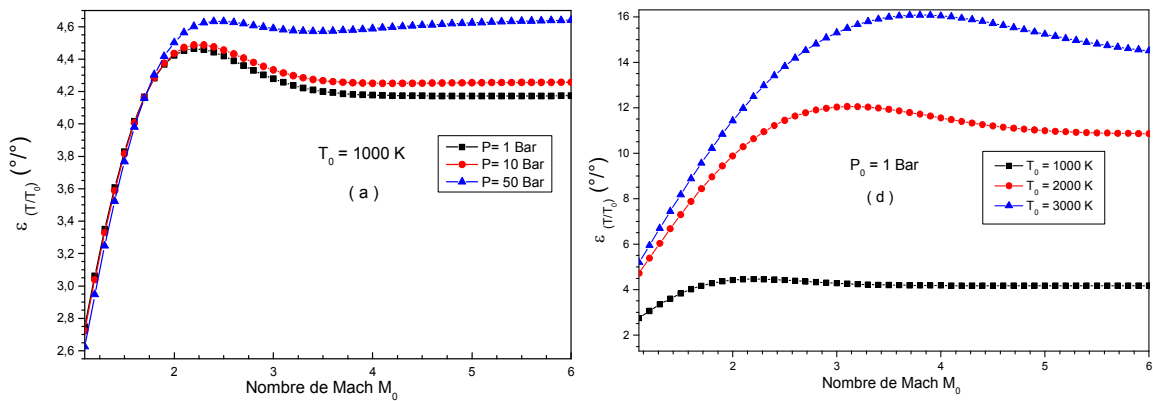


Figure 4.18: Correction de nombre de Mach du modèle RG par rapport au modèle GP

4.4. Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques :

La figure 4.19 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de température T/T_0 en fonction du nombre de Mach, et T_0, P_0 , du modèle GP comparé au modèle RG. On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0, T_0 et M_s et elle augmente si T_0 et P_0 augmentent. On peut remarquer qu'à faible valeur de M, T_0 et P_0 , l'erreur ϵ est faible



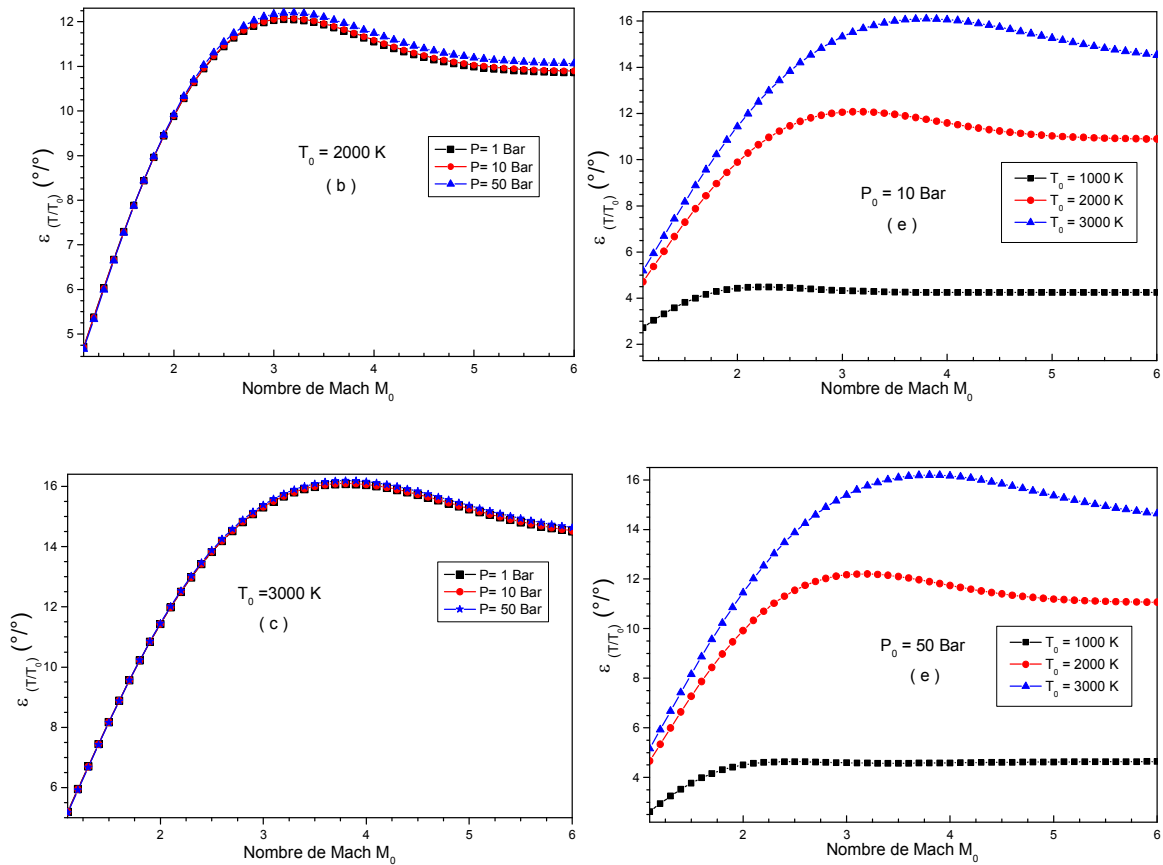
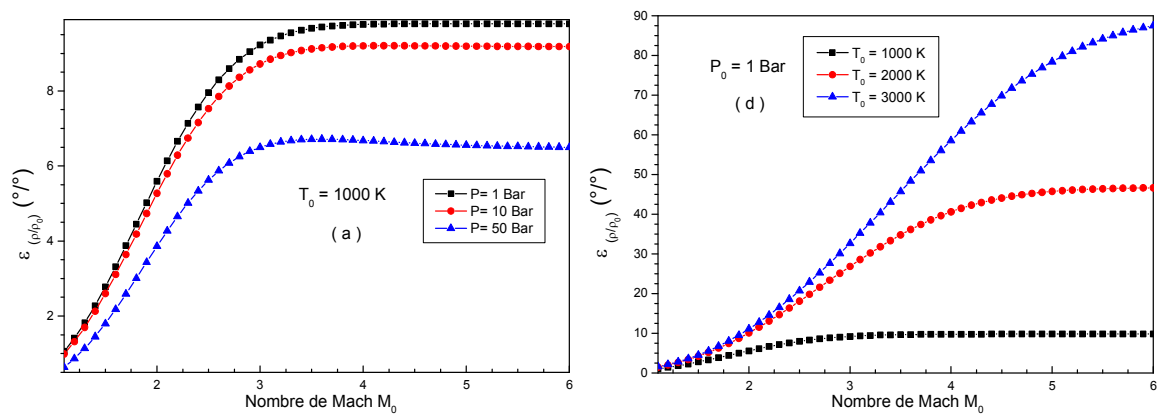


Figure 4.19 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach

La figure 4.20 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de masse volumique ρ/ρ_0 en fonction du nombre de Mach, T_0 , P_0 du modèle GP comparé au modèle RG. On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 augmente. Mais elle diminue lorsque P_0 augmente, On peut conclure qu'à faible valeur de M, T_0 , l'erreur ε est faible.



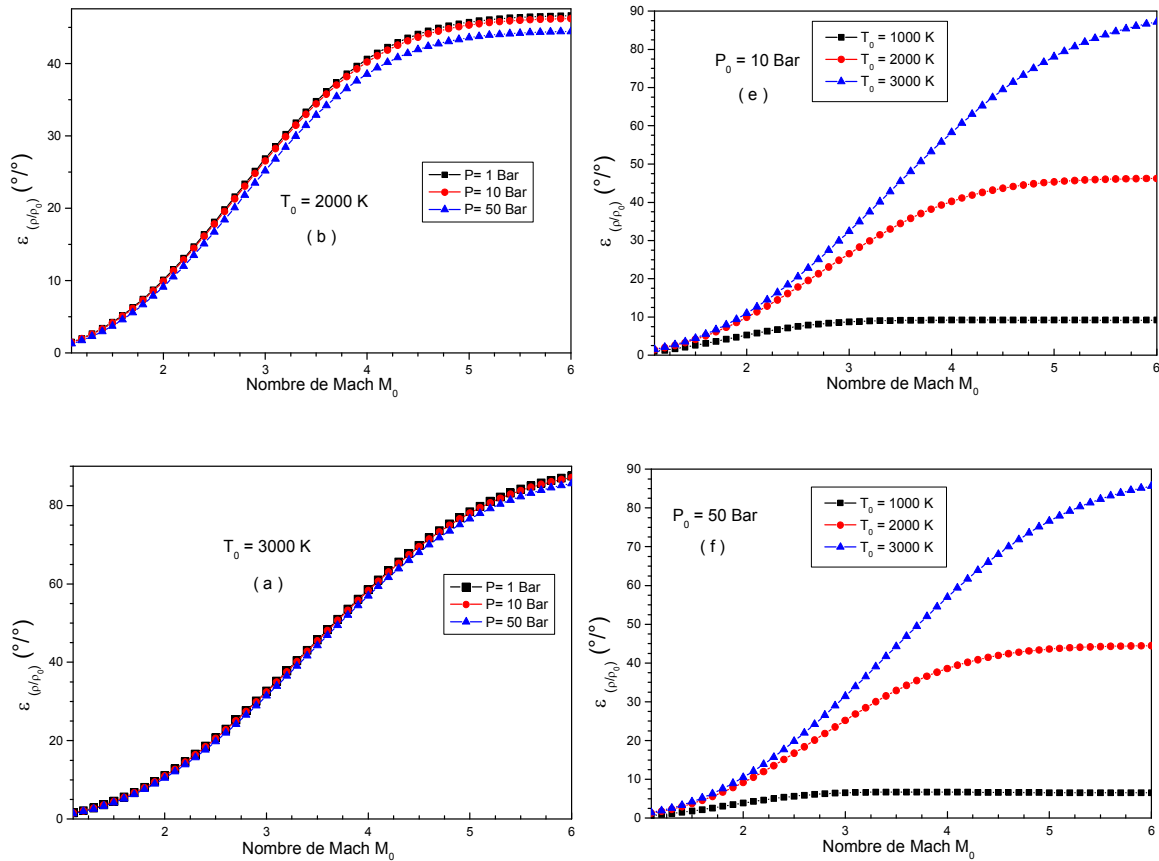
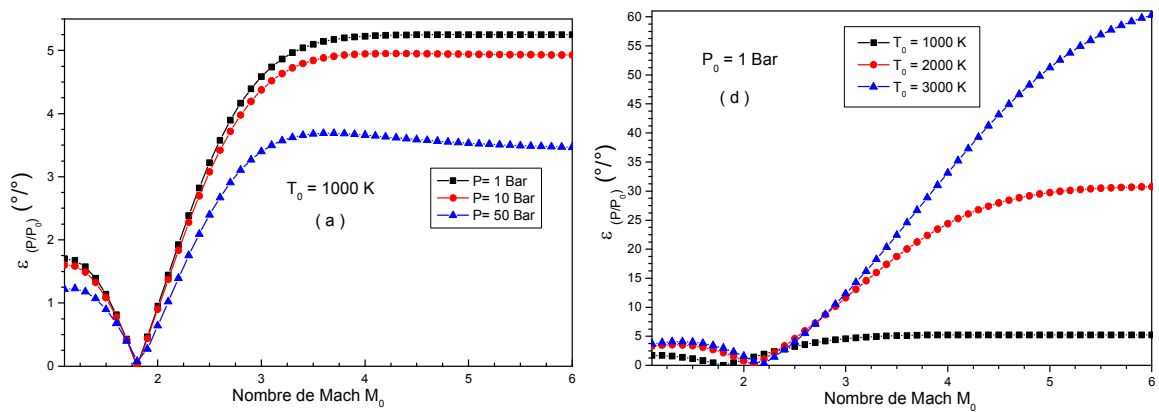


Figure 4.20 : Variation de l’erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach

La figure 4.21 représente la variation de l’erreur relative en pourcentage des rapports de pression P/P_0 en fonction du nombre de Mach, et T_0 , P_0 du modèle GP comparé au modèle RG. On remarque clairement que l’erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 et P_0 augmentent. On peut remarquer qu’à faible valeur de M inférieure à 2.6, l’erreur ϵ est faible.



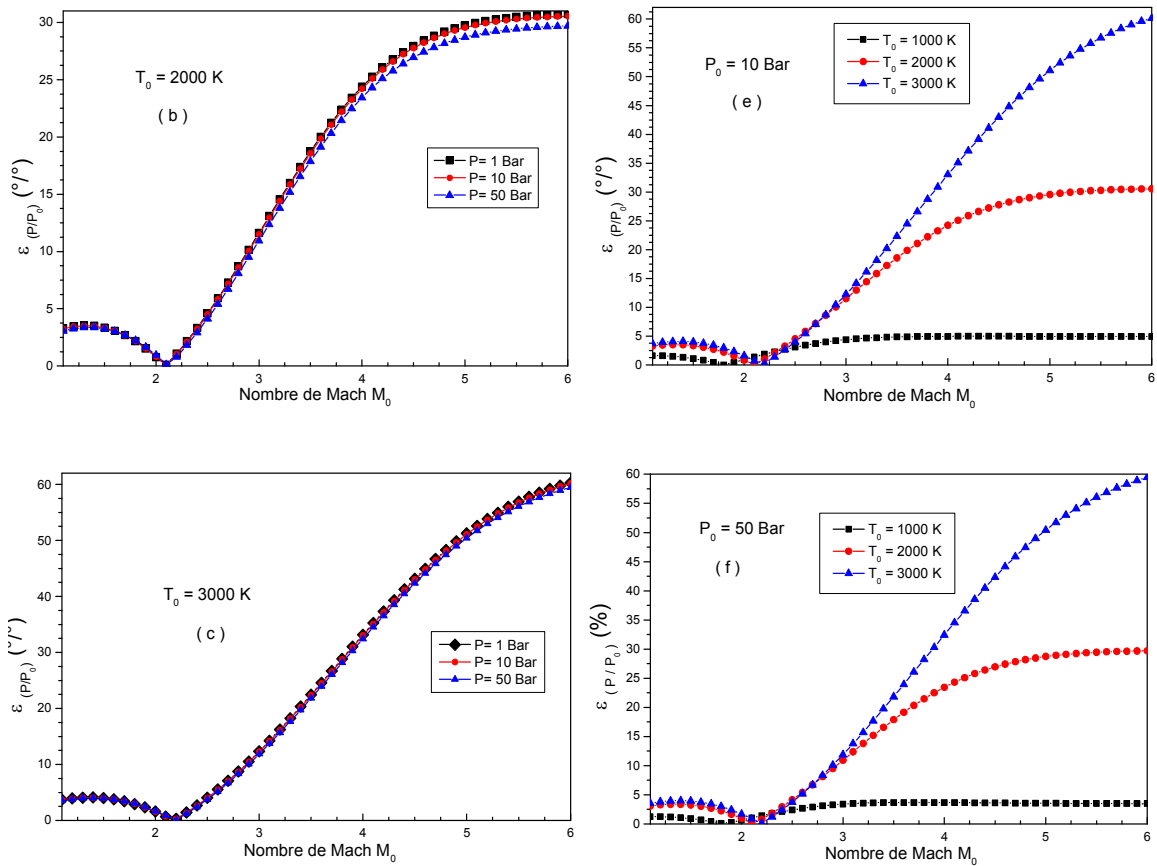
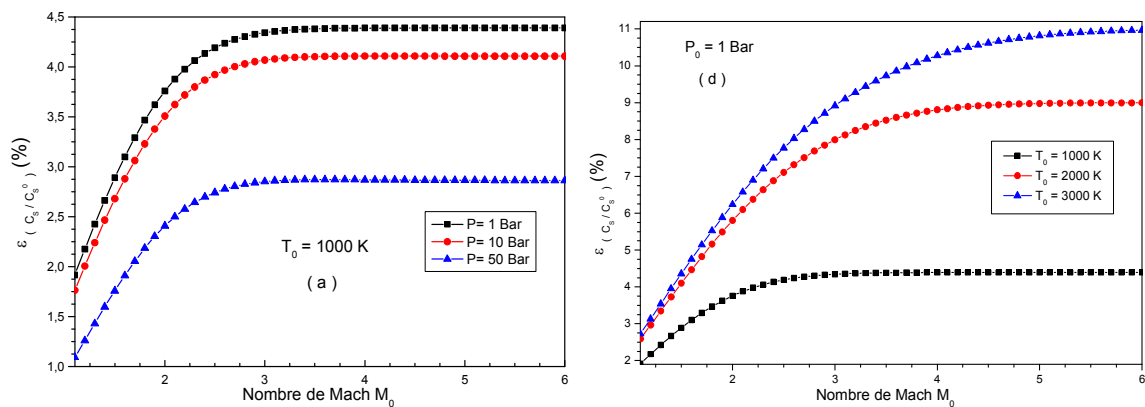


Figure 4.21: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach

Les figures 4.22 et 4.23 représentent la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de vitesse du son a/a_0 et rapports critiques des sections A/A^* respectivement en fonction du nombre de Mach, et T_0, P_0 du modèle GP comparé au modèle RG. On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0, T_0 et M_{sd} dans les deux figures et elle augmente si T_0 augmente. Mais elle diminue lorsque P_0 augmente,



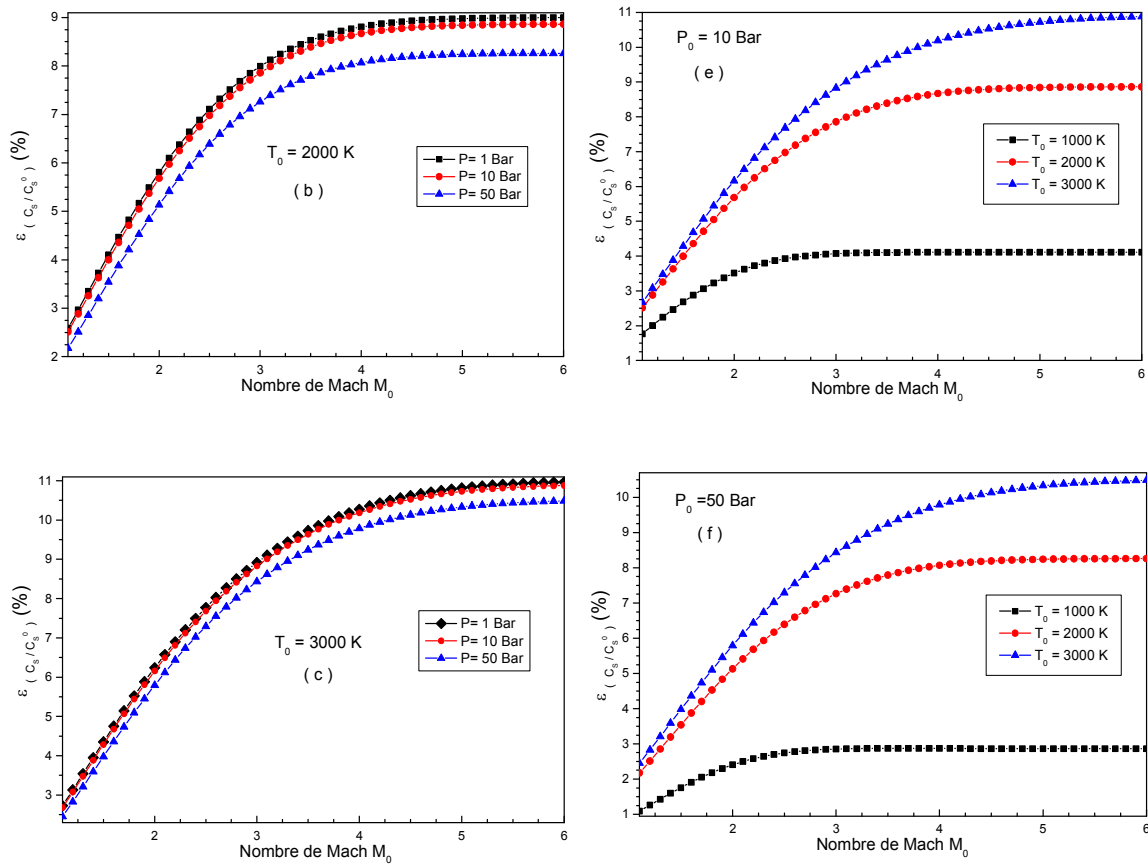
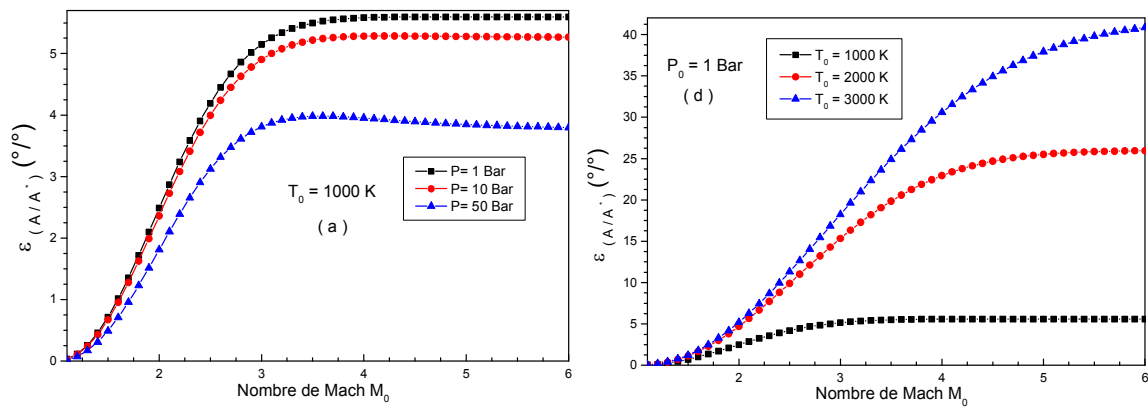


Figure 4.22: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach



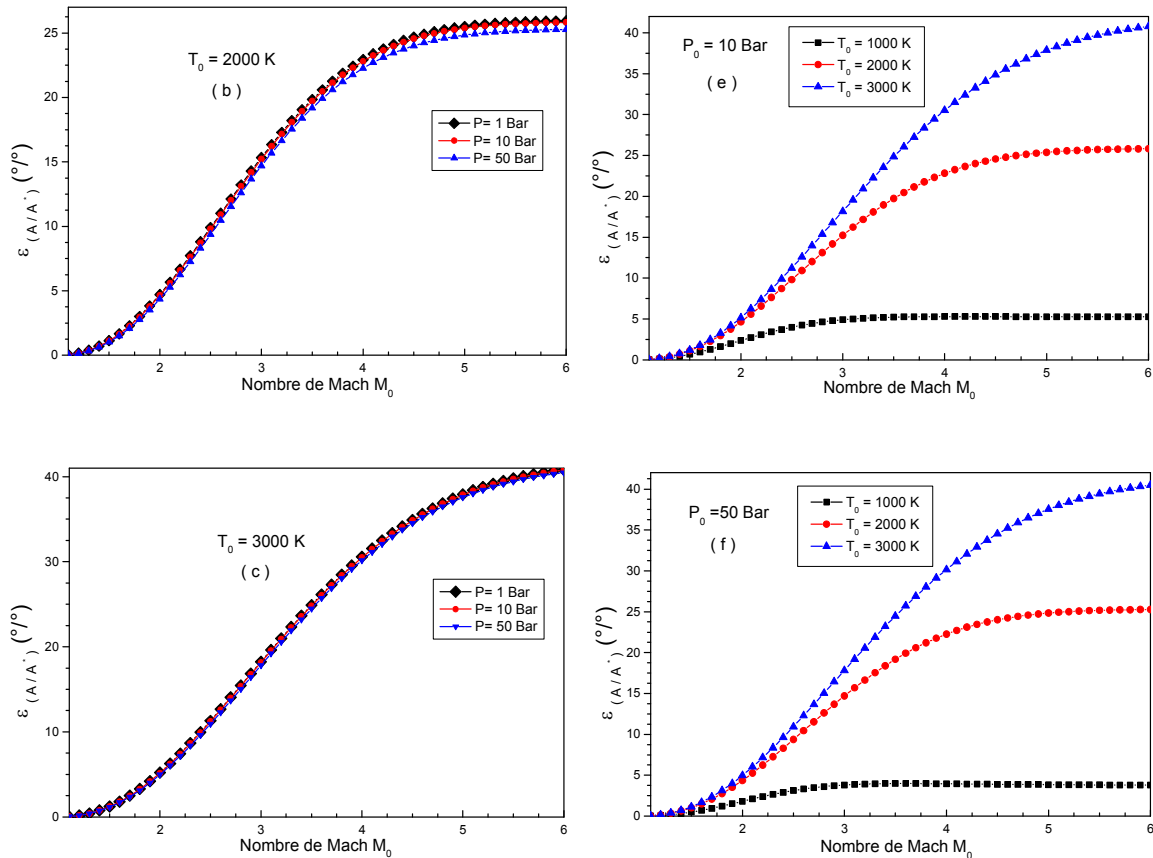


Figure 4.23: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach

4.5. Résultats pour les ondes de choc normales:

La figure 4.24 montre la variation du rapport de température T_2 / T_1 à travers une onde de choc normale en fonction de nombre de Mach en amont, et $P_0 T_0$ pour le GP et GR. On remarque l'augmentation de nombre de Mach en amont pour les deux modèles entraîne une augmentation de rapport de température dans l'onde de choc normal. Et la variation de la température statique en amont influence sur le rapport de température, ce qui n'est pas le cas pour le modèle de gaz parfait. Et on constate également que les rapports de température T_2 / T_1 obtenus par le modèle de gaz réels sont toujours inférieurs à ceux obtenus par le modèle de gaz parfait, Et on remarque que le rapport diminue lorsque la température statique augmente.

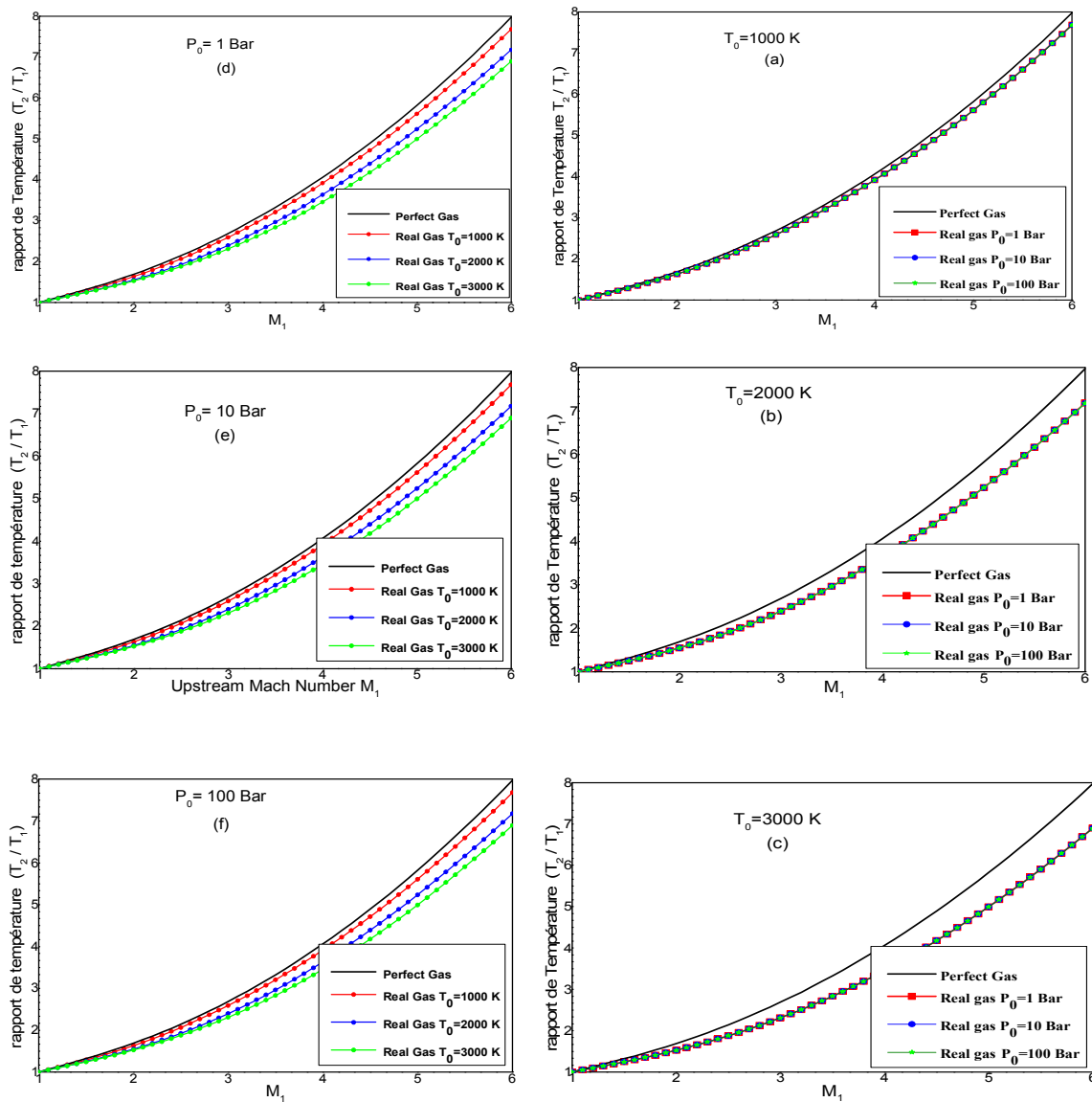


Figure 4.24 La variation du rapport de température à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.25 montre la variation du rapport de densité de masse ρ_2 / ρ_1 à travers une onde de choc normale en fonction de nombre de Mach en amont et P_0 T_0 pour le GP et GR, On remarque que l'augmentation de nombre de Mach et T_0 donnée une augmentation du rapport de densité de masse ρ_2 / ρ_1 . et les graphe de pression s'éloigne apre la valeur $M_1=2.5$

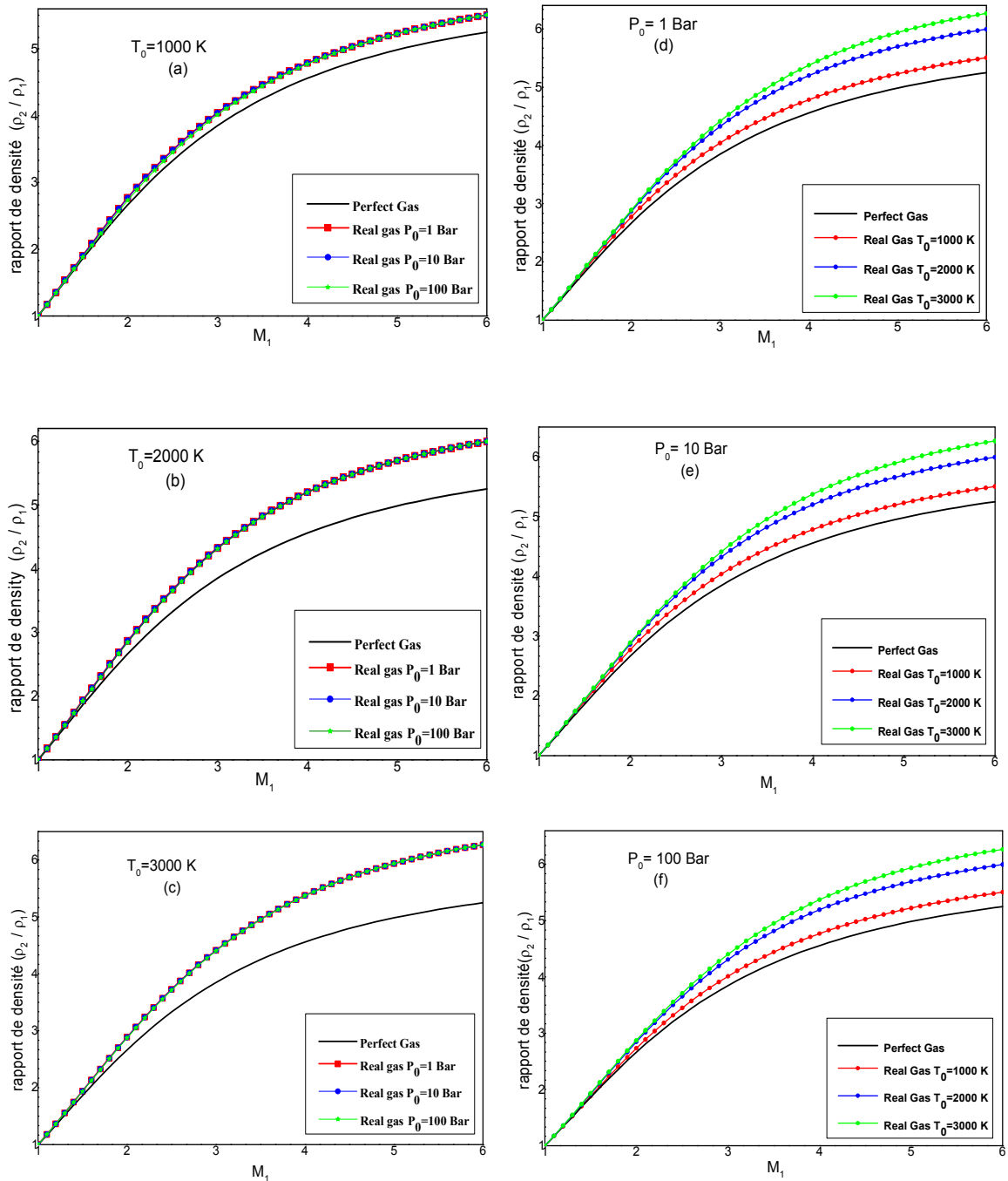


Figure 4.25 La variation du rapport de densité de masse à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.24 montre la variation du rapport de pression P_2 / P_1 à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont et en fonction de T_0 et P_0 pour le *gaz parfait* et *gaz réel*, on remarque si le nombre de Mach en amont augmente le rapport de pression augment , et on remarque que les courbe va s'éloigne mais en manière tirée faible.

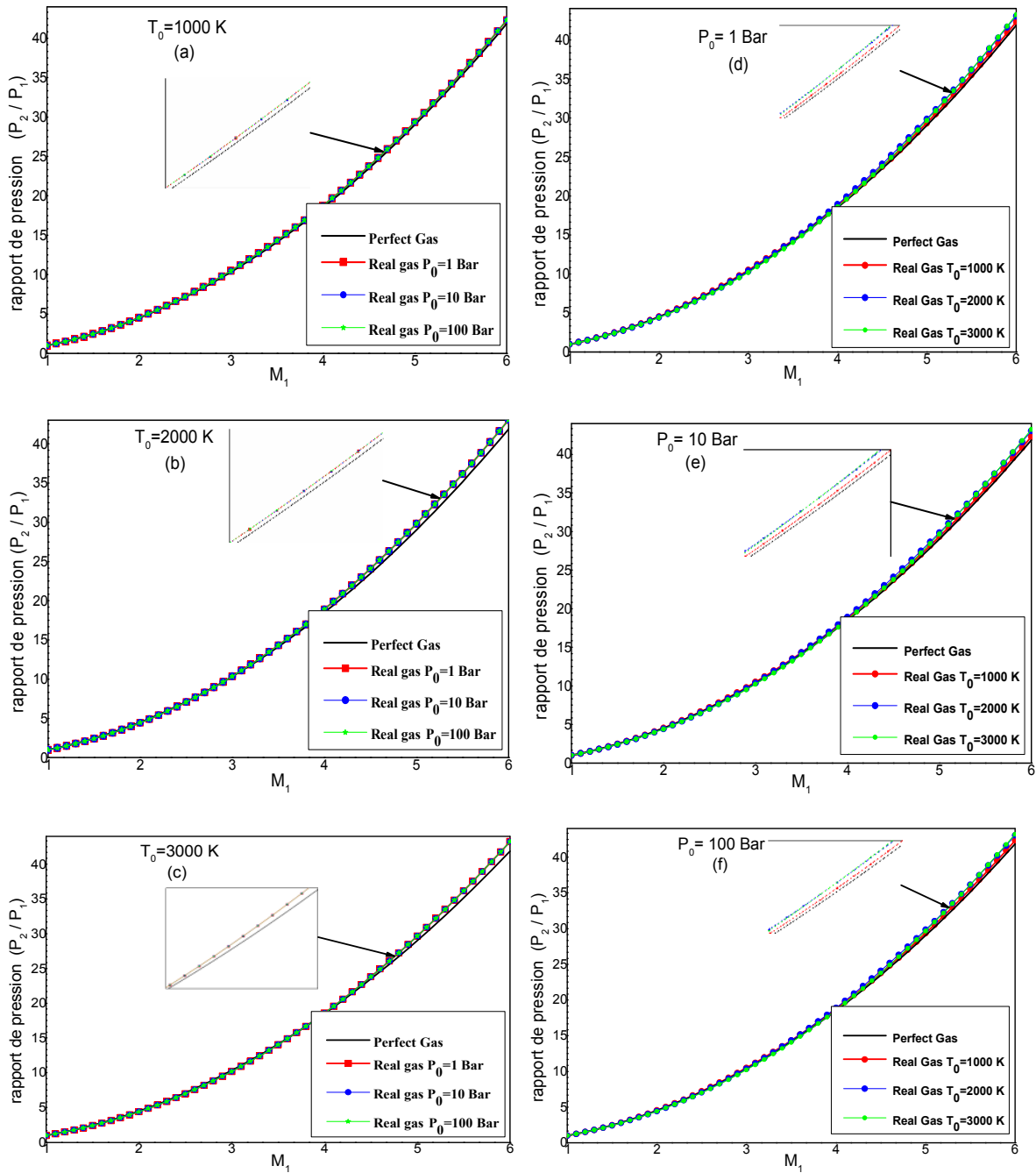


Figure 4.25 La variation du rapport de pression à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.27 montre la variation du nombre de Mach en aval M_2 à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont M_1 pour le gaz parfait et gaz réel. Et en de T_0 et P_0 en remarque que l'augmentation de nombre de

Mach en amont donnée une diminution de nombre de Mach en aval dans tous les modelé, et on remarque que si le nombre de Mach en amont et grand les courbe s'éloigne d'une manière faible.

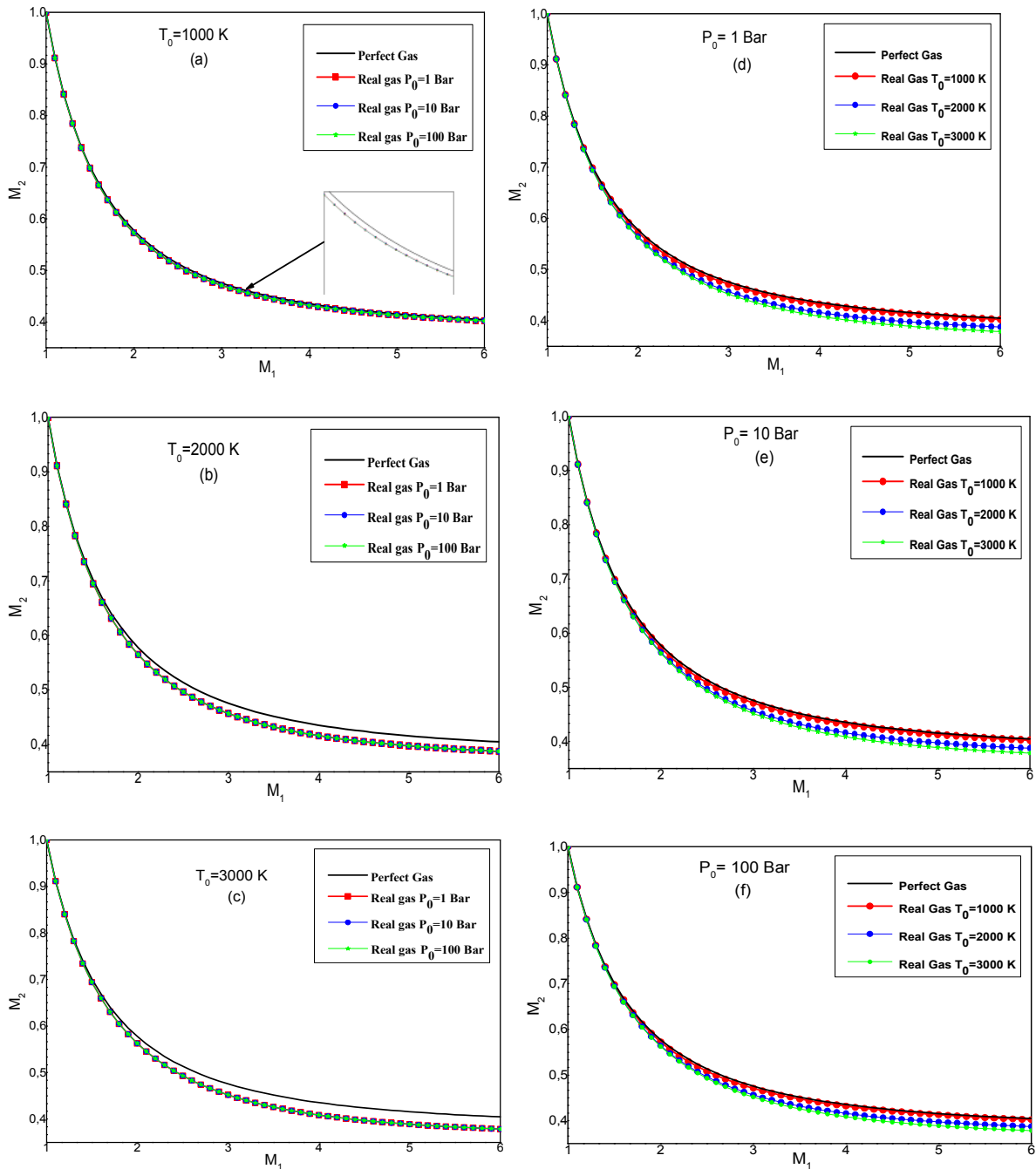


Figure 4.27 Variation du nombre de Mach en aval à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.28montre la variation d'entropie $\Delta S_{1,2} / R$ à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont et T_0 pour le gaz

parfait et *gaz réel*. on remarque que l'augmentation de nombre de Mach en amont attende une augmentation de d'entropie dans tous les modelé et on remarque que la résultat des GR s'éloignent par apport des GP après un nombre de Mach égala $M=2.5$ et s'approche avent sa et d'outre remarque si la température augmente on a une augmentation d'entropie.

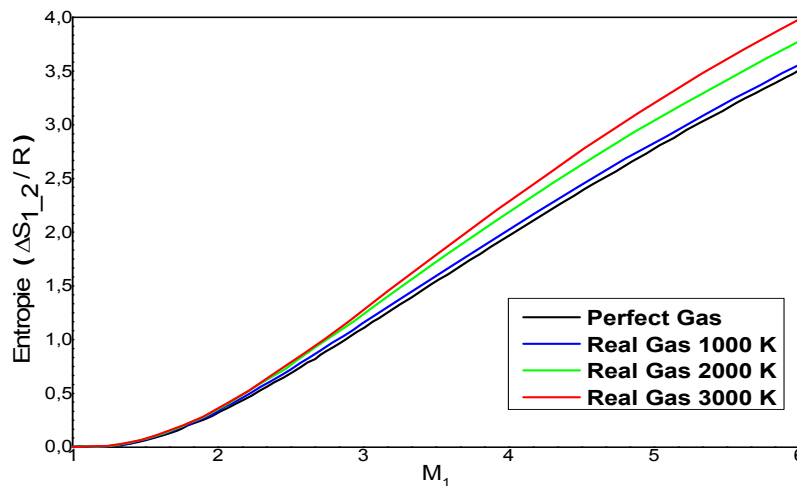


Figure 4.26 La variation d'entropie à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont

la figure 4.29 montre la variation du rapport de pression de statique P_2 / P_1 à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach amont M_1 et T_0 pour les modelés de *gaz parfait* et *réel*. On remarque que l'augmentation de nombre de Mach M_1 attende une diminution de rapport de pression statique dans tous les modèles, on remarque aussi que les résultats obtenues par le modèle GR s'éloignent de ceux obtenues par le modèle GP, et devient remarquable si le nombre de Mach égale $M=2.0$. Concernant l'influence de la température génératrice on peut constater que l'augmentation de la température entraine une augmentation de rapport de pressionsstatiques.

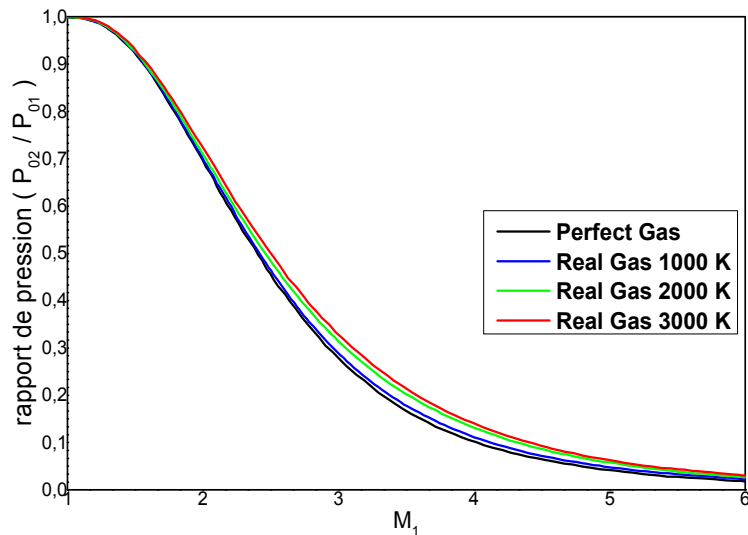


Figure 4.29 La variation du rapport de pression de stagnation à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont

Les figures 4.30, 4.31, 4.32, et 4.33 représentent les variations de l'erreur relative en pourcentage, pour les rapports, de température T_2/T_1 , de densité de masse ρ_2/ρ_1 , et le rapport de pression P_2/P_1 et le nombre de Mach M_2 , respectivement en fonction de T_0 et nombre de Mach M_1 en amont, pour les modèles *GP* et *GR*. On remarque que les erreurs augmentent lorsque, T_0 et M_1 augmentent dans les figures 4.30 et 4.31, et augmente aussi dans la figure 4.32 mais elle diminue après une valeur ou dépend par exemple dans le graphe de $T=3000\text{K}$ la valeur est $M_1=2$, et après sa elle va augmenter, et dans la figure 4.33 l'erreur augmente jusqu'à une valeur limite et diminue après cette valeur mais d'une manière faible.

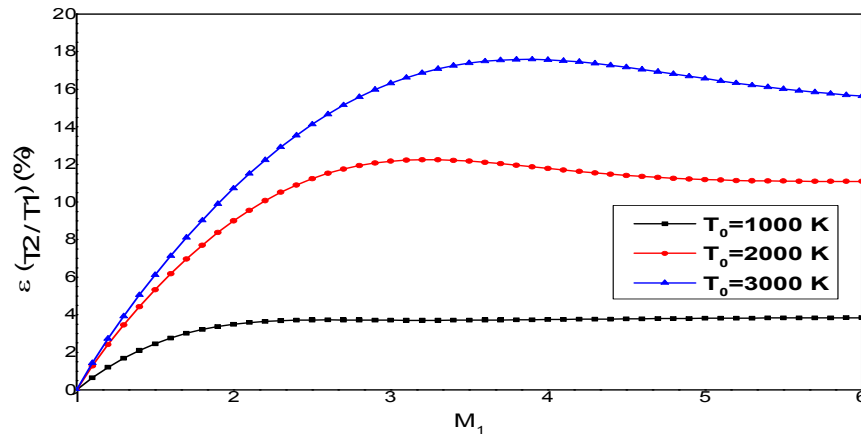


Figure 4.30 La variation de l'erreur relative donnée par le rapport de la température en fonction du nombre de Mach en amont

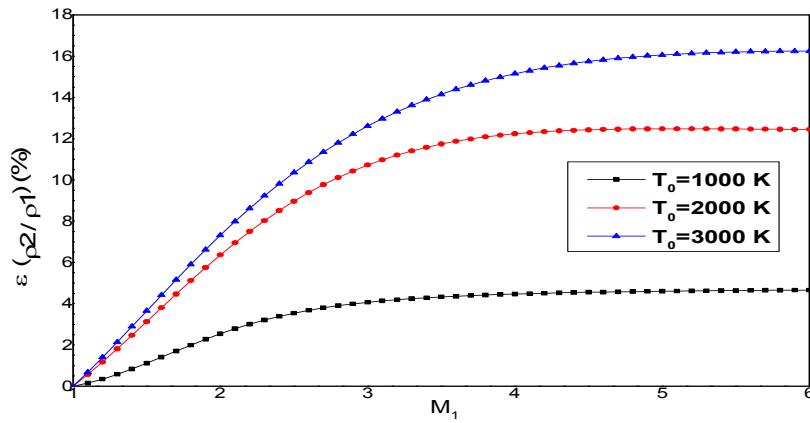


Figure 4.31 La variation de l'erreur relative donnée par le rapport de la masse volumique en fonction du nombre de Mach en amont

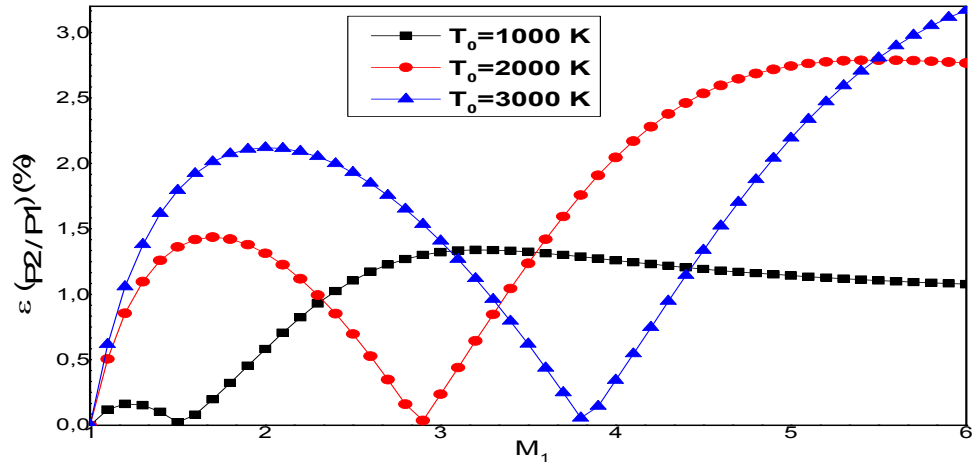


Figure 4.27 La variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction du nombre de Mach en amont

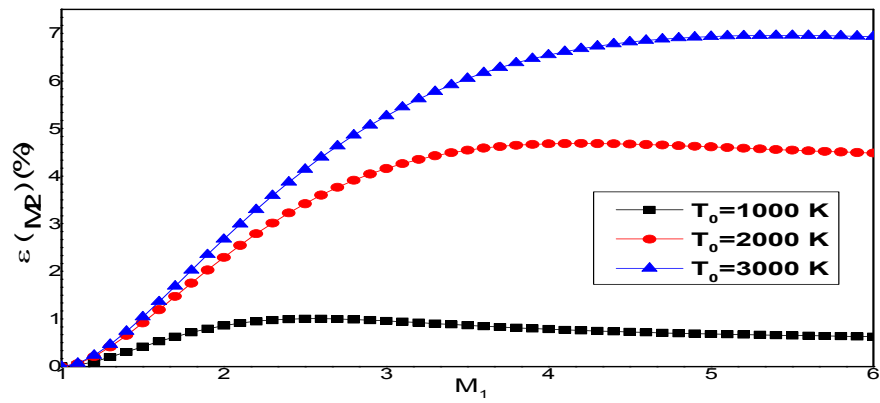


Figure 4.28 La variation de l'erreur relative donnée par le nombre de Mach en aval en fonction du nombre de Mach en amont

Conclusion générale :

Si une erreur inférieure à 5% est acceptée, ce qui est généralement le cas pour les applications aérodynamiques, une onde de choc normale peut être étudiée en utilisant les équations pour un gaz parfait. C'est à dire que T_0 est inférieur à 1000 K pour toute valeur du nombre de Mach en amont, ou lorsque le nombre de Mach est inférieur à 2,0 pour toute valeur de T_0 jusqu'à environ 3000 K.

Le modèle gaz parfait est représenté par des équations explicites et simples et ne nécessite pas beaucoup de temps de calcul. Ce n'est pas le cas du modèle gaz réel, qui nécessite la résolution d'un système d'équations algébriques non linéaires. De plus, la dérivation ou l'intégration de fonctions analytiques complexes nécessite un temps de calcul, une programmation numérique et un traitement des données plus importants.

Les principales variables du modèle gaz réel sont la température et la densité. Pour le modèle gaz parfait, la variable principale est le nombre de Mach. Ceci parce que dans le modèle gaz réel, il existe des équations implicites non linéaires reliant T , ρ et M .

L'air a été utilisé comme fluide dans cette étude, mais un autre fluide pourrait être choisi à la place et les équations resteraient valides. Cependant, il serait également nécessaire de déterminer la force intermoléculaire a , la taille moléculaire b et la constante d'énergie vibrationnelle moléculaire Θ .

Les équations du modèle gaz parfait peuvent être obtenues à partir du modèle gaz réel, en annulant la force intermoléculaire a , la taille moléculaire b et la constante d'énergie vibrationnelle moléculaire Θ . Dans ce cas, le modèle PERFECT GAS devient un cas particulier du modèle gaz réel.

À basse température et nombre de Mach, les différences de résultats entre les deux modèles sont faibles. Ceci fournit l'opportunité d'étudier le flux du modèle gaz réel en utilisant les équations du modèle gaz parfait. Cependant, lorsque T_0 et M_1

augmentent, les résultats gaz parfait divergent du cas réel, il est donc nécessaire d'utiliser le modèle gaz réel.

L'effet de la température génératrice sur les ondes de choc normales est important et exerce une forte influence. D'autre part, l'effet de la pression génératrice est négligeable.

Ce travail a présenté une forme générale de calcul d'onde de choc normale en utilisant une méthode basée sur un modèle de gaz réel avec des imperfections thermiques et caloriques. Un certain nombre d'équations ont été développées et sont déterminantes dans l'analyse des ondes de choc et dans l'étude des écoulements compressibles. Les résultats du présent travail suggèrent qu'une extension à d'autres fluides est nécessaire à l'avenir pour étudier davantage la robustesse de la méthode. Par la suite, une extension aux ondes de choc obliques sera également intéressante.

A la fin de ce modeste travail, on suggère quelques axes de recherches qui seront considérés comme une continuité de notre travail.

On peut étudier l'effet du gaz de propulsion en choisissant l'une des gaz suivants: N_2 , O_2 , H_2 , CO , CO_2 , NH_3 , CH_4 et H_2O au lieu de l'air. Les relations restent valables, Il faut déterminer les constante des forces intermoléculaire (a) et de taille moléculaire (b), ainsi que la température caractéristique de vibration Θ .

Développer un modèle RG qui prend en compte le phénomène d'onde de choc oblique et déterminer les conditions après le choc.

Faire les simulations numériques des écoulements compressibles internes et extrêmes et les comparer avec notre modèle.

Contenu

Introduction :	81
4.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel :	81
4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col) :	87
4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques :	89
4.4. Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques :	94
4.5. Résultats pour les ondes de choc normales:	99
Conclusion générale :	108
Figure 4.1: Variation de la masse volumique génératrice ρ_0	82
Figure 4.2 : Variation de l'erreur relative de ρ_0 en fonction de T_0	82
Figure 4.3 : Variation de facteur de compressibilité en fonction de T_0 pour quelque valeur de pression P_0	83
Figure 4.4: Variation de la chaleur spécifique C_p en fonction de T_0 pour différentes P_0	84
Figure 4.5 : Variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	85
Figure 4.6 : Variation du coefficient β en fonction de T_0 pour quelque valeur de P_0	85
Figure 4.7: La célérité du son en fonction de la température génératrice T_0 pour quelques valeurs de pression P_0	86
Figure 4.8: Rapport des températures critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	87
Figure 4.9: Rapport des masses volumique critiques en fonction de T_0 pour quelques	88
Figure 4.10: Rapport des pressions critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	88
Figure 4.11: Rapport des vitesses du son critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	89
Figure 4.12: Rapport de débit massique critique en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	89
Figure 4.13: Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach	90
Figure 4.14: Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach.....	91
Figure 4.15 : Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach.....	91
Figure 4.16: Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach.....	92
Figure 4.17: Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach.....	93
Figure 4.18: Correction de nombre de Mach du modèle RG par rapport aux modèle GP.....	94
Figure 4.19 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach	95
Figure 4.20 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach	96

Figure 4.21: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach	97
Figure 4.22: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach	98
Figure 4.23: Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach	99
La figure 4.25 montre la variation du rapport de pression P_2/P_1 à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont et en fonction de T_0 et P_0 pour le <i>gaz parfait</i> et <i>gaz réel</i> , on remarque si le nombre de Mach en amont augmente le rapport de pression augment , et on remarque que les courbe va s'éloigne mais en manière tirée faible.	101
Figure 4.26 La variation du rapport de pression à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont.....	102
Figure 4.28 La variation d'entropie à travers une onde de choc normale en fonction du nombre de Mach en amont	104
Figure 4.32 La variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction du nombre de Mach en amont	107
Figure 4.33 La variation de l'erreur relative donnée par le nombre de Mach en aval en fonction du nombre de Mach en amont.....	107

Références :

- [1] A. Wohl., "l'enquête de l'état", Zeitschrift für Physikalische Chemie (Leipzig) 87 pp. 1-39 (1914).
- [2] Adcock, L.H., "l'oeuf dans la bouteille Revisited : Pression d'air et d'Amontons' Law (loi de Charles)," Journal of Chemical Education, 75 (12) : 156, (1998).
- [3] J. D. Anderson Jr., "fondamentaux" de l'aérodynamique, McGraw-Hill Book Company, New York, (1988).
- [4] Anderson, J. D. Écoulement compressible moderne avec une perspective historique. Deuxième édition, (1992), McGraw-Hill Book Company, New York, USA.
- [5] Annamalai K. Ishwar K. P. et Milind A. J., "Advanced Engineering Thermodynamics, 2e édition, CRC Press, Taylor and Francis Group, USA, (2011).
- [6] Argrow B. M. et Emanuel G., "analyse computationnelle de l'écoulement transsonique domaine de longueur minimale bidimensionnelles, AIAA-1989-1822 Buses", 20e de la dynamique des fluides, dynamique du plasma et laser Conférence, Buffalo, NY, (du 12 au 14 juin 1989).
- [8] Birkhoff G., de l'Interpolation de données "Limite en triangles," J. de math. Anal. Et Appl., 42, (1973), 474-484.
- [9] C. Dieterici, Ann. Phys. Chem. Wiedemanns Ann. 69, 685 (1899).
- [10] Comolet R., "Mécanique expérimentale des fluides. Statique et dynamique des fluides non visqueux", tome 1, 3ème édition, Masson, (1979).
- [11] CRC., "handbook of chemistry and physics", 75e un livre de référence facile à consulter des données chimiques et physiques, l'Université d'Oxford, (1995).
- [13] Emanuel G., "dynamique du gaz : Théorie et application", New York, série éducative de l'AIAA, (1986).
- [14] Ferri, A. Éléments d'aérodynamique de l'écoulement supersonique. Phoenix éd., Dover Publication, (2005).
- [15] Fletcher C. A. J. "Techniques de calcul pour la dynamique des fluides : techniques spécifiques pour différentes catégories de flux", Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1988).

- [16] Geoin M., "la conception de la buse par l'optimisation de la méthode de caractéristiques," AIAA-1 990 2024, 26111 AIAA/ASME/SAE/ASEE propulsion mixte, conférence (du 16 au 18 juillet 1990), Orlando, Floride.
- [17] Gordan J. Van Wylen et Richard E. Sonntag fondamentaux, de thermodynamique classique, 3e éd., New York, John Wiley& Sons, (1986).
- [25] NEVILLE, R. G., "La découverte de la loi de Boyle, J. Chem. Educ., 39-356 (1962).
- [34] Raltson A., "une famille de formules de Quadrature qui obtenir une exactitude dans les règles composite", J. Ass. Comput. Mach., tome 6, PP. 384-394, (1984).
- [35] Rao, G.V.R, tuyère d'échappement "Contour pour poussée optimale", avions Marquadt Co, présenté à la réunion semestrielle d'ARC, (10 juin 1957- 13), San Francisco.
- [36] P. A. Raviart et Thomas J. M., "Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées, the Chief Electoral Officer of" Masson, (1983).
- [37] Rhymin I. L., "Dynamique des fluides", appuyez sur polytechnique romandes, (1984), Lausanne, Suisse.
- [38] http://web.sca.uqam.ca/~eva/SCA3641/documents/doc_pdf/vieux-docs/thermodynamique_classique_2.pdf