



ELEMENTS DE LA THEORIE DES FONCTIONS ET DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE

A. KOLMOGOROV / S. FOMINE

TRADUIT
DU RUSSE

ELLIPSES

Table des matières

Préface à l'édition française	7
CHAPITRE PREMIER. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES.	
§ 1. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles	7
1. Généralités (7). 2. Opérations sur les ensembles (7).	
§ 2. Applications. Partition d'un ensemble	10
1. Application d'un ensemble dans un autre. Notion générale de fonction (10). 2. Partition d'un ensemble. Relation d'équivalence (12).	
§ 3. Ensembles équipotents. Puissance d'un ensemble	15
1. Ensembles finis et infinis (15). 2. Ensembles dénombrables (16). 3. Ensembles équipotents (19). 4. Non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels (20). 5. Théorème de Cantor-Bernstein (22). 6. Notion de puissance d'un ensemble (22).	
§ 4. Ensembles ordonnés. Nombres transfinis	25
1. Ensembles ordonnés (25). 2. Applications conservant l'ordre (26). 3. Types d'ordre. Ensembles totalement ordonnés (26). 4. Somme ordinale d'ensembles totalement ordonnés (27). 5. Ensembles bien ordonnés. Nombres transfinis (28). 6. Comparaison des nombres ordinaux (30). 7. Axiome du choix, théorème de Zermelo et leurs équivalents (32). 8. Récurrence transfinie (34).	
§ 5. Familles d'ensembles	35
1. Anneau d'ensembles (35). 2. Demi-anneau d'ensembles (36). 3. Anneau engendré par un demi-anneau (38). 4. σ -algèbres (39). 5. Familles d'ensembles et applications (40).	
CHAPITRE II. ESPACES MÉTRIQUES ET TOPOLOGIQUES	
§ 1. Notion d'espace métrique	42
1. Définition et exemples (42). 2. Applications continues d'un espace métrique dans un autre. Isométrie (49).	
§ 2. Convergence. Ensembles ouverts et ensembles fermés	51
1. Points d'accumulation. Fermeture (51). 2. Convergence (52). 3. Sous-ensembles denses (53). 4. Ensembles ouverts et ensembles fermés (54). 5. Ensembles ouverts et fermés sur la droite (56).	
§ 3. Espaces métriques complets	60
1. Définition et exemples d'espaces métriques complets (60). 2. Théorème des boules emboîtées (63). 3. Théorème de Baire (64). 4. Complétion d'un espace (65).	
§ 4. Le principe des contractions et ses applications	68
1. Principe des contractions (68). 2. Applications simples du principe des contractions (69). 3. Théorèmes d'existence et d'unicité pour des	

équations différentielles (72). 4. Application du principe des contractions aux équations intégrales (75).	
§ 5. Espaces topologiques	78
1. Définition et exemples d'espaces topologiques (78). 2. Comparaison des topologies (80). 3. Systèmes fondamentaux de voisinages. Base. Axiomes de dénombrabilité (80). 4. Suites convergentes dans T (84). 5. Applications continues. Homéomorphisme (85). 6. Axiomes de séparation (87). 7. Différentes méthodes de définition de la topologie sur un espace. Métrisabilité (91).	
§ 6. Compacité	92
1. Notion de compacité (92). 2. Applications continues des espaces compacts (94). 3. Fonctions continues et semi-continues définies sur un espace compact (95). 4. Compacité dénombrable (97). 5. Ensembles précompacts (99).	
§ 7. Compacité dans les espaces métriques	100
1. Ensembles totalement bornés (100). 2. Espaces totalement bornés et compacité (102). 3. Ensembles précompacts dans un espace métrique (103). 4. Théorème d'Arzelà (104). 5. Théorème de Péano (107). 6. Continuité uniforme. Applications continues des compacts métriques (108). 7. Théorème généralisé d'Arzelà (109).	
§ 8. Courbes continues dans les espaces métriques	110
CHAPITRE III. ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET TOPOLOGIQUES . .	115
§ 1. Espaces vectoriels	115
1. Définition et exemples d'espaces vectoriels (115). 2. Dépendance linéaire (117). 3. Sous-espaces vectoriels (118). 4. Espaces quotients (119). 5. Fonctionnelles linéaires (120). 6. Interprétation géométrique des fonctionnelles linéaires (122).	
§ 2. Ensembles convexes et fonctionnelles convexes. Théorème de Hahn-Banach	124
1. Ensembles convexes et corps convexes (124). 2. Fonctionnelles convexes (127). 3. Fonctionnelle de Minkowski (127). 4. Théorème de Hahn-Banach (129). 5. Séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel (132).	
§ 3. Espaces normés	133
1. Définition et exemples d'espaces normés (134). 2. Sous-espaces d'un espace normé (135).	
§ 4. Espaces euclidiens	137
1. Définition d'un espace euclidien (137). 2. Exemples (139). 3. Existence de bases orthogonales, orthogonalisation (140). 4. Inégalité de Bessel. Systèmes orthogonaux fermés (143). 5. Espaces euclidiens complets. Théorème de Riesz-Fischer (147). 6. Espace de Hilbert. Théorème de l'isomorphisme (149). 7. Sous-espaces, orthogonalité, somme directe (152). 8. Propriété caractéristique des espaces euclidiens (156). 9. Espaces euclidiens complexes (159).	
§ 5. Espaces vectoriels topologiques	161
1. Définition et exemples (161). 2. Convexité locale (164). 3. Espaces dénombrablement normés (165).	
CHAPITRE IV. FONCTIONNELLES LINÉAIRES ET OPÉRATEURS LINÉAIRES	169
§ 1. Fonctionnelles linéaires continues	169

1. Fonctionnelles linéaires continues sur un espace vectoriel topologique (169). 2. Fonctionnelles linéaires sur un espace normé (170). 3. Théorème de Hahn-Banach dans un espace normé (173). 4. Fonctionnelles linéaires sur un espace dénombrablement normé (175).	
§ 2. Espace dual	176
1. Définition de l'espace dual (176). 2. Topologie forte sur l'espace dual (176). 3. Exemples d'espaces duals (179). 4. Espace bidual (184).	
§ 3. Topologie faible et convergence faible	186
1. Topologie faible et convergence faible dans un espace vectoriel topologique (186). 2. Convergence faible dans un espace normé (188). 3. Topologie faible et convergence faible dans l'espace dual (191). 4. Ensembles bornés dans l'espace dual (194).	
§ 4. Distributions	197
1. Extension de la notion de fonction (197). 2. Espace des fonctions de base (198). 3. Distributions (199). 4. Opérations sur les distributions (201). 5. Suffisance de l'ensemble des fonctions de base (204). 6. Détermination d'une distribution connaissant sa dérivée. Equations différentielles dans l'ensemble des distributions (205). 7. Quelques généralisations (208).	
§ 5. Opérateurs linéaires	212
1. Définition et exemples d'opérateurs linéaires (212). 2. Opérateurs linéaires bornés et continuité (215). 3. Somme et produit d'opérateurs (217). 4. Opérateur inverse, inversibilité (218). 5. Opérateurs adjoints (223). 6. Opérateurs adjoints dans un espace euclidien. Opérateurs auto-adjoints (225). 7. Spectre d'un opérateur. Résolvante (226).	
§ 6. Opérateurs compacts	229
1. Définition et exemples d'opérateurs compacts (229). 2. Propriétés fondamentales des opérateurs compacts (234). 3. Valeurs propres d'un opérateur compact (236). 4. Opérateurs compacts dans un espace de Hilbert (237). 5. Opérateurs compacts auto-adjoints dans H (238).	
CHAPITRE V. MESURE, FONCTIONS MESURABLES, INTÉGRALE . . .	243
§ 1. Mesure des ensembles du plan	243
1. Mesure des ensembles élémentaires (243). 2. Mesure de Lebesgue sur le plan (247). 3. Compléments et généralisations (254).	
§ 2. Notion générale de mesure. Prolongement de la mesure d'un demi-anneau à un anneau. Additivité et σ -additivité	257
1. Définition de la mesure (257). 2. Prolongement de la mesure d'un demi-anneau à l'anneau qu'il engendre (257). 3. σ -additivité (260).	
§ 3. Prolongement d'une mesure selon Lebesgue	263
1. Prolongement selon Lebesgue d'une mesure définie sur un demi-anneau avec unité (263). 2. Prolongement d'une mesure donnée sur un demi-anneau sans unité (267). 3. Extension de la notion de mesurabilité dans le cas d'une mesure σ -finie (269). 4. Prolongement d'une mesure selon Jordan (271). 5. Unicité du prolongement d'une mesure (273).	
§ 4. Fonctions mesurables	274
1. Définition et propriétés fondamentales des fonctions mesurables (274). 2. Opérations sur les fonctions mesurables (276). 3. Equivalence (278). 4. Convergence presque partout (279). 5. Théorème d'Egorov (280). 6. Convergence en mesure (281). 7. Théorème de Lusin. Propriété (C) (284).	

§ 5. Intégrale de Lebesgue	284
1. Fonctions simples (285). 2. Intégrale de Lebesgue pour les fonctions simples (285). 3. Définition générale de l'intégrale de Lebesgue sur un ensemble de mesure finie (288). 4. σ -additivité et continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue (290). 5. Passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Lebesgue (295). 6. Intégrale de Lebesgue sur un ensemble de mesure infinie (299). 7. Comparaison de l'intégrale de Lebesgue à l'intégrale de Riemann (300).	
§ 6. Produits directs des familles d'ensembles et des mesures. Théorème de Fubini	303
1. Produits des familles d'ensembles (303). 2. Produits des mesures (305). 3. Expression de la mesure d'un ensemble du plan par l'intégrale de la mesure linéaire de ses coupes. Définition géométrique de l'intégrale de Lebesgue (307). 4. Théorème de Fubini (310).	
CHAPITRE VI. INTÉGRALE INDÉFINIE DE LEBESGUE. THÉORIE DE LA DÉRIVATION	314
§ 1. Fonctions monotones. Dérivabilité de l'intégrale par rapport à la borne supérieure	315
1. Propriétés fondamentales des fonctions monotones (315). 2. Dérivabilité d'une fonction monotone (319). 3. Dérivée d'une intégrale par rapport à sa borne supérieure (326).	
§ 2. Fonctions à variation bornée	326
§ 3. Dérivée de l'intégrale indéfinie de Lebesgue	331
§ 4. Recherche d'une fonction connaissant sa dérivée. Fonctions absolument continues	334
§ 5. L'intégrale de Lebesgue comme fonction d'ensemble. Le théorème de Radon-Nikodym	344
1. Charges. Décompositions de Hahn et de Jordan (344). 2. Les principaux types de charges (347). 3. Charges absolument continues. Théorème de Radon-Nikodym (347).	
§ 6. Intégrale de Stieltjes	351
1. Mesures de Stieltjes (351). 2. Intégrale de Lebesgue-Stieltjes (353). 3. Quelques applications de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes en théorie des probabilités (355). 4. Intégrale de Riemann-Stieltjes (357). 5. Passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Stieltjes (361). 6. Forme générale des fonctionnelles linéaires continues sur l'espace de fonctions continues (365).	
CHAPITRE VII. ESPACES DE FONCTIONS SOMMABLES	369
§ 1. L'espace L_1	369
1. Définition et propriétés fondamentales de l'espace L_1 (369). 2. Ensembles partout denses dans L_1 (371).	
§ 2. L'espace L_2	375
1. Définition et propriétés fondamentales (375). 2. Cas d'un espace de mesure infinie (378). 3. Ensembles partout denses dans L_2 . Théorème de l'isomorphisme (380). 4. Espace L_2 complexe (381). 5. La convergence en moyenne quadratique et sa liaison avec d'autres types de convergence des suites de fonctions (381).	
§ 3. Systèmes orthogonaux de fonctions dans L_2 . Séries par rapport à un système orthogonal	383
1. Système trigonométrique. Série trigonométrique de Fourier (384). 2. Systèmes trigonométriques sur le segment $[0, \pi]$ (387). 3. Série de Fourier sous forme complexe (388). 4. Polynômes de Legendre (389).	

5. Systèmes orthogonaux dans un produit d'espaces. Séries de Fourier multiples (391). 6. Polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné (394). 7. Base orthogonale dans l'espace $L_2(-\infty, \infty)$. Fonctions d'Hermite (395). 8. Polynômes orthogonaux par rapport à un poids discret (397). 9. Systèmes de Haar, de Rademacher et de Walsh (399).

CHAPITRE VIII. SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES. TRANSFORMATION DE FOURIER 401

- § 1. Conditions de convergence de la série de Fourier 401
 - 1. Conditions suffisantes de convergence de la série de Fourier en un point (401). 2. Conditions de convergence uniforme de la série de Fourier (407).
- § 2. Théorème de Fejér 410
 - 1. Théorème de Fejér (410). 2. Complétude du système trigonométrique. Théorème de Weierstrass (413). 3. Théorème de Fejér dans l'espace L_1 (414).
- § 3. Intégrale de Fourier 414
 - 1. Théorème fondamental (414). 2. L'intégrale de Fourier sous forme complexe (417).
- § 4. Transformation de Fourier, propriétés et applications 418
 - 1. Transformation de Fourier et formule d'inversion (418). 2. Propriétés fondamentales de la transformation de Fourier (423). 3. Complétude des systèmes des fonctions d'Hermite et de Laguerre (426). 4. Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide (427). 5. Transformation de Fourier et convolution (428). 6. Application de la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur (429). 7. Transformation de Fourier des fonctions de plusieurs variables (430).
- § 5. Transformation de Fourier dans l'espace $L_2(-\infty, \infty)$ 433
 - 1. Théorème de Plancherel (433). 2. Fonctions d'Hermite (437).
- § 6. Transformation de Laplace 440
 - 1. Définition et propriétés fondamentales de la transformation de Laplace (440). 2. Application de la transformation de Laplace à la résolution des équations différentielles (méthode opératorielle) (441).
- § 7. Transformation de Fourier-Stieltjes 443
 - 1. Définition de la transformation de Fourier-Stieltjes (443). 2. Applications de la transformation de Fourier-Stieltjes en théorie des probabilités (445).
- § 8. Transformation de Fourier des distributions 447

CHAPITRE IX. ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES 451

- § 1. Principales définitions. Quelques problèmes conduisant à des équations intégrales 451
 - 1. Types d'équations intégrales (451). 2. Exemples de problèmes conduisant à des équations intégrales (452).
- § 2. Equations intégrales de Fredholm 455
 - 1. Opérateur intégral de Fredholm (455). 2. Equations à noyau symétrique (459). 3. Théorèmes de Fredholm. Cas des noyaux dégénérés (460). 4. Théorèmes de Fredholm pour les équations à noyaux non dégénérés (463). 5. Equations de Volterra (467). 6. Equations intégrales de première espèce (468).

§ 3. Equations intégrales dépendant d'un paramètre. Méthode de Fredholm	469
1. Spectre d'un opérateur compact dans H (469). 2. Recherche de la solution sous forme d'une série de puissances de λ . Déterminants de Fredholm (470).	
CHAPITRE X. ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS UN ESPACE VECTORIEL	476
§ 1. Différentiation dans un espace vectoriel	476
1. Différentielle forte (différentielle de Fréchet) (476). 2. Différentielle faible (différentielle de Gâteaux) (478). 3. Formule des accroissements finis (479). 4. Relation entre les notions de différentiabilité faible et forte (480). 5. Fonctionnelles différentiables (481). 6. Fonctions abstraites (482). 7. Intégrale (482). 8. Dérivées d'ordre supérieur (484). 9. Différentielles d'ordre supérieur (487). 10. Formule de Taylor (487).	
§ 2. Problèmes d'extremum	489
1. Condition nécessaire pour l'existence d'un extremum (489). 2. Différentielle seconde. Conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum (492).	
§ 3. Méthode de Newton	495
COMPLÉMENT. ALGÈBRE DE BANACH	500
§ 1. Définitions. Exemples d'algèbres de Banach	500
1. Algèbres de Banach. Isomorphisme des algèbres de Banach (500). 2. Exemples d'algèbres de Banach (501). 3. Idéaux maximaux (503).	
§ 2. Spectre et résolvante	504
1. Définitions et exemples (505). 2. Propriétés du spectre (505). 3. Théorème du rayon spectral (508).	
§ 3. Quelques résultats auxiliaires	509
1. Théorème de l'algèbre quotient (509). 2. Trois lemmes (511).	
§ 4. Théorèmes fondamentaux	511
1. Fonctionnelles linéaires continues multiplicatives et idéaux maximaux (511). Topologie sur l'ensemble $\mathcal{H}$. Théorèmes fondamentaux (513). 3. Théorème de Wiener; exercices (517).	
Bibliographie	521
Répartition de la bibliographie par chapitres	523
Index	524

Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle

Dans cet ouvrage qui traite des questions générales de la théorie des ensembles, de la théorie de la mesure et de l'intégration, ainsi que des idées et des méthodes générales de l'analyse fonctionnelle, les auteurs ont eu le souci d'accorder assez d'attention aux problèmes moins abstraits de l'analyse classique et même des mathématiques appliquées.



9 782729 894641

ISBN 2-7298-9464-0