



Roger Mansuy
& Rached Mneimné

LICENCE
MATHÉMATIQUES
CLASSES PRÉPARATOIRES
SCIENTIFIQUES

2^e édition

Algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

- Cours complet
- Commentaires et développements
- Plus de 120 exercices corrigés

Vuibert

Table des matières

Avant-propos

I. Polynômes d'endomorphismes

1. Un morphisme d'algèbre	1
2. Idéal des polynômes annulateurs	2
3. Polynôme minimal	4
4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur	5
5. Commentaires et développements	7
6. Exercices	9

II. Sous-espaces stables

1. Restriction d'un endomorphisme	15
2. Sous-espace stable	17
3. Endomorphisme induit sur un sous-espace stable	18
4. Exemples de sous-espaces stables	18
5. Sous-espaces cycliques	19
6. Commentaires et développements	20
7. Exercices	22

III. Commutation

1. Définitions	27
2. Calculs de commutants	29
3. Endomorphisme ad_f	30
4. Commentaires et développements	31
5. Exercices	32

IV. Lemme des noyaux

1. Étude de $\ker P(f)$	39
2. Lemme des noyaux	40
3. Décomposition de l'espace en sous-espaces stables	42
4. Commentaires et développements	43
5. Exercices	45

Table des matières

Avant-propos

I. Polynômes d'endomorphismes

1. Un morphisme d'algèbre	1
2. Idéal des polynômes annulateurs	2
3. Polynôme minimal	4
4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur	5
5. Commentaires et développements	7
6. Exercices	9

II. Sous-espaces stables

1. Restriction d'un endomorphisme	15
2. Sous-espace stable	17
3. Endomorphisme induit sur un sous-espace stable	18
4. Exemples de sous-espaces stables	18
5. Sous-espaces cycliques	19
6. Commentaires et développements	20
7. Exercices	22

III. Commutation

1. Définitions	27
2. Calculs de commutants	29
3. Endomorphisme ad_f	30
4. Commentaires et développements	31
5. Exercices	32

IV. Lemme des noyaux

1. Étude de $\ker P(f)$	39
2. Lemme des noyaux	40
3. Décomposition de l'espace en sous-espaces stables	42
4. Commentaires et développements	43
5. Exercices	45

V. Éléments propres, caractéristiques	
1. Définitions	47
2. Polynôme caractéristique	50
3. Commentaires et développements	53
4. Exercices	54
VI. Endomorphismes cycliques	
1. Définitions	63
2. Caractérisation avec le polynôme minimal	64
3. Caractérisation avec le commutant	65
4. Matrice compagnon	66
5. Polynôme caractéristique	68
6. Commentaires et développements	70
7. Exercices	72
VII. Théorème de Cayley & Hamilton	
1. Énoncé et conséquences	75
2. Preuve par les sous-espaces cycliques	76
3. Preuve par la formule de la comatrice	76
4. Sous-espaces caractéristiques	77
5. Multiplicités	77
6. Commentaires et développements	78
7. Exercices	79
VIII. Diagonalisation	
1. Critères de diagonalisation	83
2. Critère de co-diagonalisation	88
3. Commentaires et développements	89
4. Exercices	90
IX. Trigonalisation	
1. Critères de trigonalisation	97
2. Fonctions symétriques des valeurs propres	99
3. Commentaires et développements	103
4. Exercices	104
X. Réduction de Jordan	
1. Décomposition de Jordan & Dunford	111
2. Réduction de Jordan : cas nilpotent	113
3. Interlude : lire un tableau de Young	119
4. Réduction de Jordan : cas général	120
5. Commentaires et développements	121
6. Exercices	123

XI. Réduction de Frobenius	
1. Réduction de Frobenius	131
2. Retour sur la réduction de Jordan	135
3. Commutants et bicommutants	138
4. Commentaires et développements	141
5. Exercices	142
XII. Topologie des classes de similitude	
1. Rappels sur la relation de similitude	147
2. Classes de similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	148
3. Adhérence d'une classe de similitude	152
4. Connexité d'une classe de similitude	154
5. Commentaires et développements	155
6. Exercices	156
XIII. Localisation des valeurs propres	
1. Théorème de Hadamard	161
2. Disques de Gerschgorin	162
3. Rayon spectral	164
4. Théorème de Perron	165
5. Théorème de Perron & Frobenius	167
6. Commentaires et développements	169
7. Exercices	171
XIV. Application aux chaînes de Markov finies	
1. Chaînes de Markov	179
2. Matrice de transition	180
3. Probabilité invariante	183
4. Théorème ergodique	184
5. Commentaires et développements	186
6. Exercices	188
Annexe : Parallèle avec les groupes abéliens finis	
1. A -modules	191
2. Lexique	192
2.1. Cadre d'étude	192
2.2. Polynôme minimal	193
2.3. Polynôme caractéristique	193
2.4. Endomorphisme cyclique	194
2.5. Réduction de Frobenius	194
Notations	195
Index	197

Roger Mansuy & Rached Mneimné

Algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

Rédigé à l'attention des étudiants en Licence de mathématiques et des classes préparatoires scientifiques, l'ouvrage est constitué d'un **cours complet**, de **commentaires et développements** et de **120 exercices corrigés**.

Afin d'aborder les différents aspects de la théorie de la réduction, les premiers chapitres détaillent avec soin les objets et concepts de l'algèbre linéaire.

Les chapitres suivants présentent aussi bien les critères pratiques que leurs utilisations théoriques, à l'appui de nombreux exemples.

Cette approche pédagogique offre également une base solide de révision pour tous les candidats qui se préparent aux concours de l'enseignement.

Cette deuxième édition complétée accueille de nouveaux exercices, des exemples plus éclairants et une annexe décrivant efficacement le parallèle entre la réduction des endomorphismes en dimension finie et l'étude des groupes abéliens finis.

Sommaire

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. Polynômes d'endomorphismes | 10. Réduction de Jordan |
| 2. Sous-espaces stables | 11. Réduction de Frobenius |
| 3. Commutation | 12. Topologie des classes de similitude |
| 4. Lemme des noyaux | 13. Localisation des valeurs propres |
| 5. Éléments propres, caractéristiques | 14. Application aux chaînes de Markov finies |
| 6. Endomorphismes cycliques | Annexe : Parallèle avec les groupes abéliens finis |
| 7. Théorème de Caley & Hamilton | Notations |
| 8. Diagonalisation | Index |
| 9. Trigonalisation | |

Ancien élève de l'ENS Cachan, agrégé de mathématiques, Roger Mansuy est professeur de mathématiques en MPSI, et d'informatique en MP* au lycée Louis le Grand. Membre du jury de l'Agrégation externe de 2012 à 2015, il est l'auteur de plusieurs ouvrages de référence dédiés à l'enseignement supérieur.

Ancien élève de l'ENS Saint-Cloud, agrégé de mathématiques, Rached Mneimné est maître de conférences à l'université Paris-7 Denis Diderot. Plusieurs fois membre du jury de l'Agrégation externe, il est également l'auteur de nombreux ouvrages universitaires.

ISBN 978-2-311-40405-0



9 782311 404050

www.VUIBERT.fr

