

Moussedeck BOUSSEBOUA

**FONCTIONS
DE LA
VARIABLE COMPLEXE**

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

Table des Matières

1 Fonctions Analytiques	9
1.1 Topologie de \mathbb{C}	10
1.1.1 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes	10
1.1.2 Topologie de \mathbb{C} et sphère de Riemann	14
1.2 Fonctions à variable complexe	20
1.2.1 Définitions - Limite et continuité	20
1.2.2 Fonctions analytiques	27
1.3 Exemples de fonctions analytiques	37
1.3.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	37
1.3.2 Fonction exponentielle	37
1.3.3 Fonctions trigonométriques et fonction hyperboliques	39
1.3.4 Fonction Logarithme	40
1.3.5 Fonctions puissances	43
2 Le Théorème de Cauchy	51
2.1 Chemins différentiables	52
2.2 Le théorème de CAUCHY	63
2.2.1 Intégrale de Stieltjes-Riemann	63
2.2.2 Intégrale curviligne	64
2.2.3 Le théorème de Cauchy	67
2.2.4 Primitive globale	74
3 Applications du théorème de Cauchy	81
3.1 Indice d'un chemin fermé et Version Homologique	82
3.1.1 Indice d'un chemin fermé	82
3.1.2 Version homologique du théorème de Cauchy	85
3.2 Applications du théorème de Cauchy	94
3.2.1 La formule intégrale de Cauchy	94

TABLE DES MATIERES

3.2.2 Applications de la formule intégrale de CAUCHY	95
4 Développements en séries	107
4.1 Séries de Taylor	108
4.1.1 Développements en série de Taylor	109
4.1.2 Le principe du prolongement analytique	113
4.2 Séries de Laurent	119
4.2.1 Séries de Laurent	119
4.2.2 Points singuliers	124
5 Le théorème des résidus	133
5.1 Le théorème des résidus	134
5.1.1 Définition des résidus	135
5.1.2 Le théorème des résidus	139
5.1.3 Principe de l'argument	141
5.1.4 Le théorème de l'application ouverte	145
5.2 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus	150
6 Les transformations conformes	171
6.1 Transformations conformes	172
6.2 Le Théorème de l'application de Riemann	178
6.2.1 Exemples de représentations conformes	178
6.2.2 Le théorème de l'application de Riemann	182
7 Fonctions harmoniques	191
7.1 Les fonctions harmoniques	192
7.2 Formule intégrale de Poisson et ses applications	199
7.2.1 Formule intégrale de Poisson	200
7.2.2 Le problème de Dirichlet pour un disque	203
8 L'espace des fonctions analytiques	211
8.1 L'espace des fonctions analytiques	212
8.1.1 L'espace des fonctions analytiques	212
8.1.2 Le théorème de Runge	218
8.2 Prolongement analytique	225
8.2.1 Le principe du prolongement analytique	225

TABLE DES MATIERES

8.2.2 Prolongement analytique le long d'un chemin	230
8.2.3 Le théorème de Monodromie	232
9 Théorème de factorisation de Weierstrass	235
9.1 Produits infinis	236
9.1.1 Produits infinis de nombres complexes	236
9.1.2 Fonctions définies par un produit infini	238
9.2 Théorème de Factorisation de Weierstrass	244
9.2.1 Théorème de factorisation de Weierstrass	246
9.2.2 Les fonctions d'ordre fini	248
9.3 Séries de fonctions méromorphes	256
9.3.1 Définition et propriétés	256
9.3.2 Le théorème de Mittag-Leffler	257
9.3.3 Exemples de séries de fonctions méromorphes	259
10 Quelques fonctions spéciales	267
10.1 Les fonctions Eulériennes	268
10.1.1 La fonction gamma	268
10.1.2 La fonction Béta	279
10.2 Les fonctions de Bessel	284
10.2.1 Définitions et propriétés	284
10.2.2 Représentation intégrale des fonctions de Bessel	293
10.3 Fonctions Elliptiques	301
10.3.1 Fonctions elliptiques	301
10.3.2 Exemples de fonctions elliptiques	304