

Moussedek BOUSSEBOUA

**FONCTIONS  
DE LA  
VARIABLE COMPLEXE**

**OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES**



# Table des Matières

<b>1 Fonctions Analytiques</b>	<b>9</b>
1.1 Topologie de $\mathbb{C}$	10
1.1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes	10
1.1.2 Topologie de $\mathbb{C}$ et sphère de Riemann	14
1.2 Fonctions à variable complexe	20
1.2.1 Définitions - Limite et continuité	20
1.2.2 Fonctions analytiques	27
1.3 Exemples de fonctions analytiques	37
1.3.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	37
1.3.2 Fonction exponentielle	37
1.3.3 Fonctions trigonométriques et fonction hyperboliques	39
1.3.4 Fonction Logarithme	40
1.3.5 Fonctions puissances	43
<b>2 Le Théorème de Cauchy</b>	<b>51</b>
2.1 Chemins différentiables	52
2.2 Le théorème de CAUCHY	63
2.2.1 Intégrale de Stieltjes-Riemann	63
2.2.2 Intégrale curviligne	64
2.2.3 Le théorème de Cauchy	67
2.2.4 Primitive globale	74
<b>3 Applications du théorème de Cauchy</b>	<b>81</b>
3.1 Indice d'un chemin fermé et Version Homologique	82
3.1.1 Indice d'un chemin fermé	82
3.1.2 Version homologique du théorème de Cauchy	85
3.2 Applications du théorème de Cauchy	94
3.2.1 La formule intégrale de Cauchy	<b>94</b>

# TABLE DES MATIERES

3.2.2	Applications de la formule intégrale de CAUCHY	95
4	Développements en séries	107
4.1	Séries de Taylor	108
4.1.1	Développements en série de Taylor	109
4.1.2	Le principe du prolongement analytique	113
4.2	Séries de Laurent	119
4.2.1	Séries de Laurent	119
4.2.2	Points singuliers	124
5	Le théorème des résidus	133
5.1	Le théorème des résidus	134
5.1.1	Définition des résidus	135
5.1.2	Le théorème des résidus	139
5.1.3	Principe de l'argument	141
5.1.4	Le théorème de l'application ouverte	145
5.2	Calcul d'intégrales par la méthode des résidus	150
6	Les transformations conformes	171
6.1	Transformations conformes	172
6.2	Le Théorème de l'application de Riemann	178
6.2.1	Exemples de représentations conformes	178
6.2.2	Le théorème de l'application de Riemann	182
7	Fonctions harmoniques	191
7.1	Les fonctions harmoniques	192
7.2	Formule intégrale de Poisson et ses applications	199
7.2.1	Formule intégrale de Poisson	200
7.2.2	Le problème de Dirichlet pour un disque	203
8	L'espace des fonctions analytiques	211
8.1	L'espace des fonctions analytiques	212
8.1.1	L'espace des fonctions analytiques	212
8.1.2	Le théorème de Runge	218
8.2	Prolongement analytique	225
8.2.1	Le principe du prolongement analytique	228



# TABLE DES MATIERES

8.2.2	Prolongement analytique le long d'un chemin . . . . .	230
8.2.3	Le théorème de Monodromie . . . . .	232
9	<b>Théorème de factorisation de Weierstrass</b> . . . . .	235
9.1	<b>Produits infinis</b> . . . . .	236
9.1.1	Produits infinis de nombres complexes . . . . .	236
9.1.2	Fonctions définies par un produit infini . . . . .	238
9.2	<b>Théorème de Factorisation de Weierstrass</b> . . . . .	244
9.2.1	Théorème de factorisation de Weierstrass . . . . .	246
9.2.2	Les fonctions d'ordre fini . . . . .	248
9.3	<b>Séries de fonctions méromorphes</b> . . . . .	256
9.3.1	Définition et propriétés . . . . .	256
9.3.2	Le théorème de Mittag-Leffler . . . . .	257
9.3.3	Exemples de séries de fonctions méromorphes . . . . .	259
10	<b>Quelques fonctions spéciales</b> . . . . .	267
10.1	<b>Les fonctions Eulériennes</b> . . . . .	268
10.1.1	La fonction gamma . . . . .	268
10.1.2	La fonction Béta . . . . .	279
10.2	<b>Les fonctions de Bessel</b> . . . . .	284
10.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	284
10.2.2	Représentation intégrale des fonctions de Bessel . . . . .	293
10.3	<b>Fonctions Elliptiques</b> . . . . .	301
10.3.1	Fonctions elliptiques . . . . .	301
10.3.2	Exemples de fonctions elliptiques . . . . .	304