

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ de BLIDA 1**  
**Faculté de Technologie**  
**Département de Mécanique**



# Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de

**MASTER EN MECANIQUE**

**Spécialité :** Fabrication Mécanique et Productique

Intitulé du mémoire

**Application de modèle dynamique d'un  
robot de type PUMA 600**

Présenté par :

Mr. HAMID Mohamed Zakaria

Mr. BENCHAMMA Hamza

Proposé et encadré par :

M. HATTALI Mounir

Année universitaire 2017/2018

## REMERCIEMENTS

« Avec l'aide d'Allah tout-puissant, j'ai pu accomplir ce modeste travail » Ce travail de recherche pour l'obtention du diplôme de Master, dirigé par Monsieur HATTALI.M.

Je remercie en premier lieu mon encadreur de mémoire Monsieur HATTALI .M pour sa disponibilité, pour son suivi, ses nombreux conseils et ses critiques constructives pour l'élaboration de ce travail de recherche. À tous mes collègues qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ce travail. Je tiens aussi à remercier les membres du jury qui ont accepté de porter leur apport. J'espère que leurs remarques, critiques, orientations et conseils me seront très utiles pour une continuité dans le processus de recherche.

Avec tout respect et amour je dédie ce modeste travail à mes chers parents, et à ma fiancée qui m'ont toujours apporté leur aide et soutien, aussi bien à tous ceux qui m'ont aidé surtout mon cher cousin Islam qui était tout le temps présent et à mes côtés et je souhaite leurs adressés mes remerciements les plus sincères.

## Résumé

Notre travail a consisté à faire l'étude dynamique d'un bras de manipulateurs pour différent usage.

Nous avons commencé par une étude géométrique et cinématique basé sur la méthode de UICKER KAHN avant de passer à l'étude dynamique pour laquelle nous avons utilisé la méthode de Lagrange .Enfin nous avons utilisé comme modèle pour notre application le robot de PUMA 600

## Abstract

Our work consisted in the dynamic study of an arm of manipulators for different use.

We started with a geometric and kinematic study based on the method of UICKER KAHN before moving on to the dynamic study for which we used the Lagrange method. Finally we used as model for our application the PUMA 600 robot.

## ملخص

تألف عملنا في دراسة ديناميكية لسلسلة من المتلاعبين لاستخدام مختلف.

لقد بدأنا بدراسة هندسية وحركية تعتمد على طريقة UICKER KAHN قبل الانتقال إلى الدراسة الديناميكية التي استخدمنا بها طريقة Lagrange ، وفي النهاية استخدمنا كنموذج لتطبيق الروبوت PUMA 600.

## Sommaire :

### Chapitre 01

|  |    |
|--|----|
| 1-1 Historique .....                                 | 2  |
| 1-2 Introduction .....                               | 3  |
| 1-3 Concepts de base .....                           | 4  |
| 1-4 Bras articulé de robot.....                      | 4  |
| 1-5 Articulations .....                              | 5  |
| 1-5-1 Articulation rotoïde .....                     | 5  |
| 1-5-2 Articulation prismatique .....                 | 6  |
| 1-6 Organe terminal .....                            | 6  |
| 1-7 Les actionneurs .....                            | 6  |
| 1-8 Les capteurs .....                               | 7  |
| 1-9 Le système de commande .....                     | 7  |
| 1-10 Composantes et structures du robot .....        | 8  |
| 1-10-1 La représentation symbolique des robots ..... | 8  |
| 1-10-2 Structure et morphologie des robots .....     | 9  |
| 1-10-3 Représentation graphique .....                | 11 |
| 1-10-4 Degrés de liberté et espace de travail .....  | 12 |
| 1-10-5 La classification du robot .....              | 13 |
| 1-10-5-1 Source d'énergie .....                      | 13 |
| 1-10-5-2 Méthode de contrôle .....                   | 13 |

|  |    |
|--|----|
| 1-10-5-3 Architecture des porteurs .....                       | 14 |
| 1-10-6 Les systèmes robotiques .....                           | 17 |
| 1-10-7 La précision et la répétabilité d'un manipulateur ..... | 17 |
| 1-9 Conclusion .....   | 18 |

## Chapitre 02

|  |    |
|--|----|
| 2 Modélisation des bras manipulateurs .....                              | 19 |
| 2-1 Introduction .....   | 19 |
| 2-2 Modélisation géométrique .....                                       | 19 |
| 2-2-1 Modèle géométrique direct .....                                    | 19 |
| 2-2-2 Modèle géométrique inverse .....                                   | 19 |
| 2-2-3 Principe de la méthode de Paul .....                               | 20 |
| 2-3 Modélisation cinématique .....                                       | 21 |
| 2-3-1 Modèle différentiel direct (MDD) .....                             | 21 |
| 2-3-2 Modèle différentiel inverse (MDI) .....                            | 22 |
| 2-4 Modélisation dynamique .....   | 23 |
| 2-4-1 Méthodes d'obtention du modèle dynamique .....                     | 23 |
| 2-4-2 Obtention du modèle dynamique .....                                | 23 |
| 2-5 Méthode d'UICKER .....   | 25 |
| 2-5-1 Expression de l'énergie cinétique.....                             | 26 |
| 2-5-2 Expression des éléments de la matrice d'inertie .....              | 27 |
| 2-5-3 Expression de la matrice des termes de Coriolis .....              | 27 |
| 2-5-4 Expression des éléments de la matrice des termes centrifuges ..... | 28 |
| 2-5-5 Expression des éléments du vecteur force de gravité .....          | 28 |
| 2-5-6 Propriétés des coefficients dynamiques .....                       | 29 |

|  |    |
|--|----|
| 2-6 Formes du modèle dynamique .....                         | 30 |
| 2-6-1 Le modèle dynamique inverse .....                      | 30 |
| 2-6-2 Le modèle dynamique direct .....                       | 30 |
| 2-7 Schéma d'intégration par la méthode de RUNGE-KUTTA ..... | 31 |
| 2-8 Conclusion .....   | 31 |

### Chapitre 03

|  |    |
|--|----|
| 3 Application sur un robot PUMA 600 .....                        | 33 |
| 3-1 Introduction .....   | 33 |
| 3-2 Description géométrique et dynamique du robot PUMA 600 ..... | 33 |
| 3-3 Paramètres mesures du robot PUMA 600 .....                   | 34 |
| 3-4 Modèle géométrique direct du robot PUMA 600 .....            | 34 |
| 3-5 Modèle dynamique du robot PUMA 600 .....                     | 38 |
| 3-5-1 La matrice d'inertie .....                                 | 38 |
| 3-5-2 La matrice des forces Centrifuges et de Coriolis .....     | 40 |
| 3-5-3 Le vecteur de gravité .....                                | 42 |
| 3-6 Conclusion .....   | 43 |

## Liste de Figure

Figure 1.1 : Exemple de choix de soudage de chaîne de fabrication d'un véhicule

Figure 1.2 : Exemple d'un robot de modèle moderne et ancienne génération

Figure 1.3 : Concepts de base

Figure 1.4 : Articulation rotoïde.

Figure 1.5 : Articulation prismatique.

Figure 1.6 : Schématisation des jointes rotoïde et prismatique

Figure 1.7 : Structure à chaînes simples ouvertes.

Figure 1.8 : Structure à chaînes arborescentes.

Figure 1.9 : Structure à chaînes complexes.

Figure 1.10 : Robots articulations.

Figure 1.11 : Robots manipulateurs industriels à poste fixe d'après I.S.O 8373

Figure 1.12 : Robot parallèle.

Figure 3-1 : Le robot PUMA 600

Figure 3.2 : Le placement des repères du robot PUMA 600

## **Liste de tableau**

Tab 3.1 : Masses des axes et Longueurs des corps

Tab 3.2 : Paramètres géométriques du robot PUMA 600

## **Normalisation**

NF E 61-100 : 12.1988 Robots manipulateurs industriels. Vocabulaire

NF E 04-015 : 10.1984 Dessins techniques. Schémas cinématiques. Symboles graphiques.

## **International Organisation for Standardisation ISO**

ISO 8373 : 1994 Robots manipulateurs industriels-Vocabulaire



## Nomenclature

$R_i$  : Un repère affine relié au corps  $C_i$  de la chaîne :  $R_i(o_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ .

$A_i$  : Indique la liaison.

$\sigma_i$  : Variable binaire.

$J(q)$  : Matrice jacobéenne.

$[A]$  : Matrice d'inertie.

$[B]$  : Matrice des termes de Coriolis.

$[C]$  : Matrice des termes centrifuges.

$G$  : Matrice uni colonne des forces généralisées de gravité.

$\Gamma$  : Matrice uni colonne des forces généralisées non conservatives.

$E_p$  : Représente l'énergie potentielle de système.

$A_i$  : Désigne la quantité d'accélération généralisée.

$F_i$  : Désigne les forces généralisées.

$E_D$  : Fonction de dissipation.

$[I_K]$  : Matrice des moments d'ordre deux de  $S_K$  en  $O_K$  dans le repère  $R_K$ .

$[J_k]$  : Pseudo matrice d'inertie relative au corps  $S_k$  de la chaîne dans le repère  $R_k$ .

$m_k$  : masse du solide  $S_k$ .

$G_k$  : centre de masse de  $S_k$ .

$g$  : Matrice unicolonne des composantes du champ de pesanteur exprimé dans le repère de base  $R_o$ .

$\dot{q}_i$  : Vitesse généralisée relative au segment  $i$ .

$\dot{q}_{mi}$  : Vitesse d'entrée du réducteur  $i$ .

$q_{1i}$  : Variable relative à la génératrice tachymétrique  $i$ .

$q_{2i}$  : Variable relative au moteur  $i$ .

$q_{3i}$  : Variable relative au réducteur  $i$ .

$q_{4i}$  : Variable relative au segment porteur i.

[Ia] : Matrice des inerties des actionneurs.

[K] : Matrice rigidité des jointes.

$q_{2i-1}$  : Variable articulaire délivre par l'actionneur i.

$q_{2i}$  : Variable articulaire prise par le segment i.

$q = (q_1, q_2 \dots q_n)^T$  : Matrice unicolonne des variables articulaires.

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n)^T$  : Matrice unicolonne des vitesses généralisées.

$\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \dots, \ddot{q}_n)^T$  : Matrice uni colonne des accélérations généralisées.

$q_i^1$  : Variable articulaire délivrée par le moteur (après réducteur).

$q_i^2$  : Variable articulaire prise par le segment.

## **Introduction générale :**

Généralement, un robot manipulateur est considéré comme un système articulé qui est conçu pour dans le cadre d'application industrielle, ces robots sont destinés à faciliter les tâches pour l'homme et améliorer le rendement.

Dans notre cas on va faire notre étude sur une modélisation dynamique d'un robot ensuite nous avons pris comme exemple d'application un Robot Puma 600.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous commençons par une généralité sur la robotique (ses constituants et classifications).

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des bras manipulateurs (concerne les trois modèles utilisés d'une manière individuelle cinématique, géométrique et dynamique).

Enfin le contenu du troisième chapitre présente une application de calcul de modèle dynamique du robot PUMA 600. Nous terminons ce mémoire par une conclusion.

# Chapitre 01

### 1-1 Historique [1] :

Étymologiquement, le mot « robot » tire sa racine du bulgare robu qui signifie « serviteur », au russe rabota qui signifie « travail » et au tchèque robota qui se traduit par « travail forcé ».

C'est justement l'écrivain tchèque Karel Capek qui a popularisé le terme vers 1920, au travers d'une pièce de théâtre intitulée « Rossum's Universal Robots » qui a connu un certain succès, en particulier en France : elle met en scène des petits êtres artificiels qui répondent au doigt et à l'œil aux ordres de leur maître.

Dans cette présente étude on appelle « Robot », tout manipulateur industriel contrôlé par ordinateur ou qui doit effectuer une tâche programmée.

Ce type de robots est essentiellement un bras mécanique fonctionnant sous contrôle informatique.

De tels dispositifs sont des systèmes électromécaniques extrêmement complexes dont la description analytique nécessite des méthodes très avancées.



Figure 1-1 Exemple de choix de soudage de chaîne de fabrication d'un véhicule

**1-2 Introduction [7] :**

La robotique peut être définie comme l'ensemble des techniques et études tendant à concevoir des systèmes mécaniques, informatiques ou mixtes, capables de se substituer à l'homme dans ses fonctions matrices, sensorielles et intellectuelles.

Le robot a initialement été créé pour décharger l'homme des tâches fastidieuses, par exemple, les tâches de manutention qui sont souvent fatigantes, répétitives ou même infaisables manuellement.

L'idée d'une machine se substituant à l'homme pour de telles tâches était donc séduisante.

De ce besoin sont nés des manipulateurs relativement simples et souvent dédiés à une tâche bien définie.

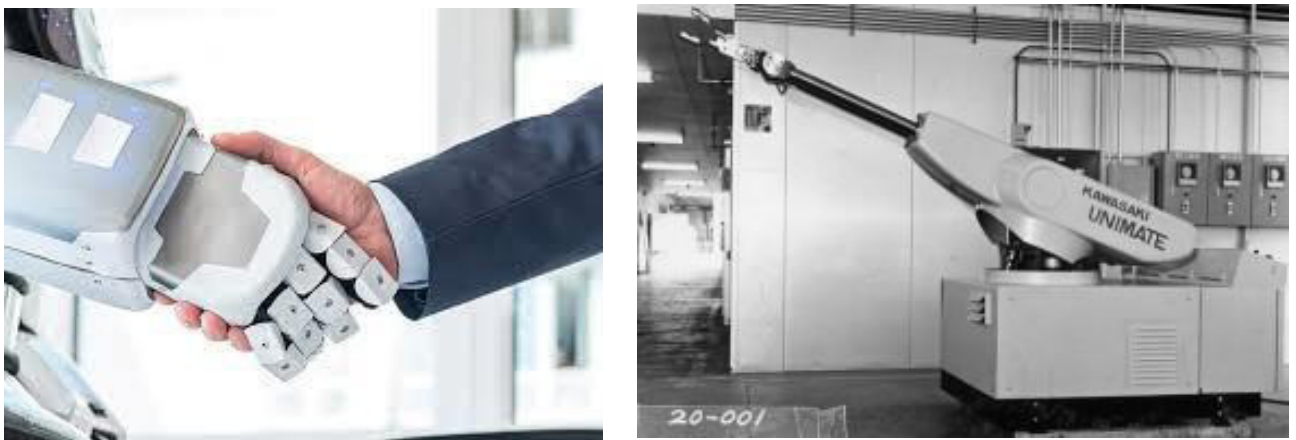


Figure 1-2 Exemple d'un robot de modèle moderne et ancienne génération

### 1-3 Concepts de base [03] :

Un robot est constitué des éléments suivants :

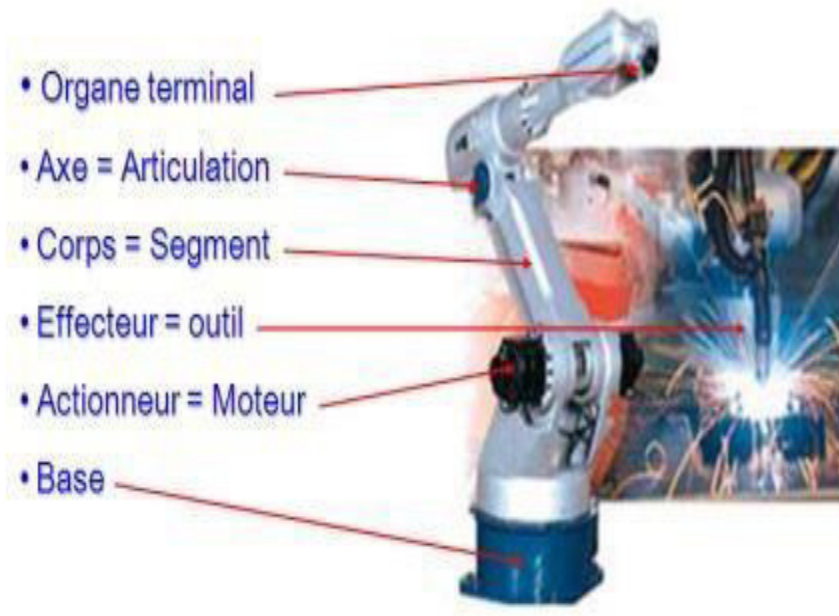


Figure 1-3 concepts de base

### 1-4 Bras articulé de robot [6] [10] :

Le bras articulé de robot est un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain. Il permet de remplacer, ou de prolonger, son action (le terme "manipulateur" exclut implicitement les robots mobiles autonomes).

Son rôle est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données.

Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides (ou supposés comme tels), assemblés par des liaisons appelées articulations.

Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés.

**1-5 Articulation [05] :**

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'un par rapport à l'autre.

Soit  $m$  le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation.

La mobilité d'une articulation est telle que :  $0 \leq m \leq 6$

**1-5-1 Articulation rotoïde :**

Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée  $R$ , réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun.

La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe (voir la figure suivante).

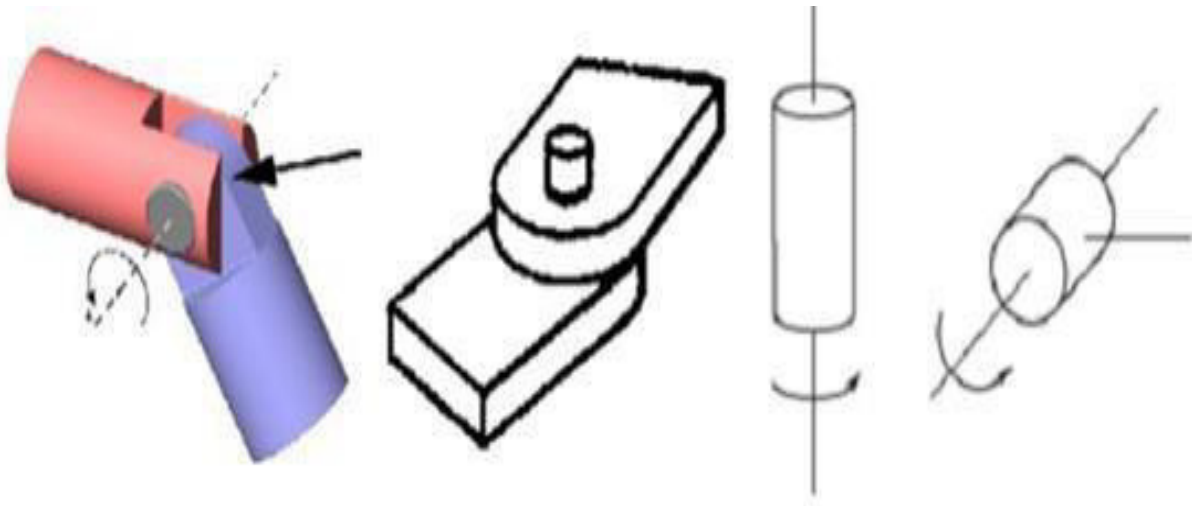


Figure 1.4 Articulation rotoïde



### 1-5-2 Articulation prismatique :

Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun.

La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe (voir la figure suivante)

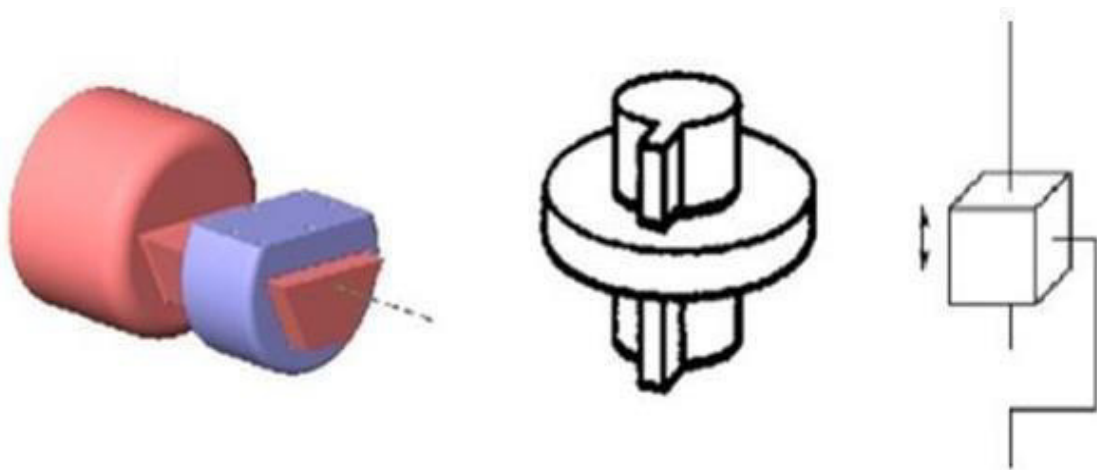


Figure 1.5 Articulation prismatique

### 1-6 Organe terminal [04] :

Désigne tout dispositif destiné soit à manipuler des objets comme les dispositifs de serrage (pinces à deux ou trois doigts), les dispositifs magnétiques ou à dépression (ventouse), soit à transformer (outils de découpe, torche de peinture, torche de soudage).

Il s'agit d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement.

**1-7 Les actionneurs [09] :**

Pour être mobile, le robot manipulateur comporte des moteurs le plus souvent associés à des transmissions (courroies crantées), l'ensemble constitue les actionneurs.

Les actionneurs utilisent fréquemment des moteurs électriques à aimant permanent, à courant continu, à commande par l'induit (la tension n'est continue qu'en moyenne car en général l'alimentation est un hacheur de tension à fréquence élevée, bien souvent la vitesse de régime élevée du moteur fait qu'il est suivi d'un réducteur, ce qui permet d'amplifier le couple moteur).

On trouve de plus en plus de moteurs à commutation électronique (sans balais), ou, pour de petits robots, des moteurs pas à pas. Pour les robots devant manipuler de très lourdes charges (par exemple, une pelle mécanique), les actionneurs sont le plus souvent hydrauliques, agissant en translation (vérin hydraulique) ou en rotation (moteur hydraulique).

Les actionneurs pneumatiques sont d'un usage général pour les manipulateurs à cycles (robots tout ou rien). Un manipulateur à cycles est un S.M.A avec un nombre limité de degrés de liberté permettant une succession de mouvements contrôlés uniquement par des capteurs de fin de course réglables manuellement à la course désirée (asservissement en position difficile dû à la compressibilité de l'air).

**1-8 Les capteurs [11] :**

La perception permet de gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des capteurs dits proprioceptifs lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions et vitesses des articulations) et extéroceptifs lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, de contact,

mesure de distance, vision artificielle).

**1-9 Le système de commande [16] :**

La partie commande synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs, à partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur.

**1-10 Composants et structure des robots [20] :**

**1-10-1 La représentation symbolique des robots :**

Un robot est composé de plusieurs corps rigides reliés par des joints, formant une chaîne cinématique.

Les joints sont généralement rotoïdes ou prismatiques. Les joints rotoïdes sont comme des charnières, ils permettent une rotation relative entre deux corps. Les joints prismatiques permettent un mouvement relatif linéaire entre deux corps. Nous utiliserons la convention (R) pour les joints rotoïdes et (P) pour les joints prismatiques et on les dessine comme indiqué sur la Figure suivante :

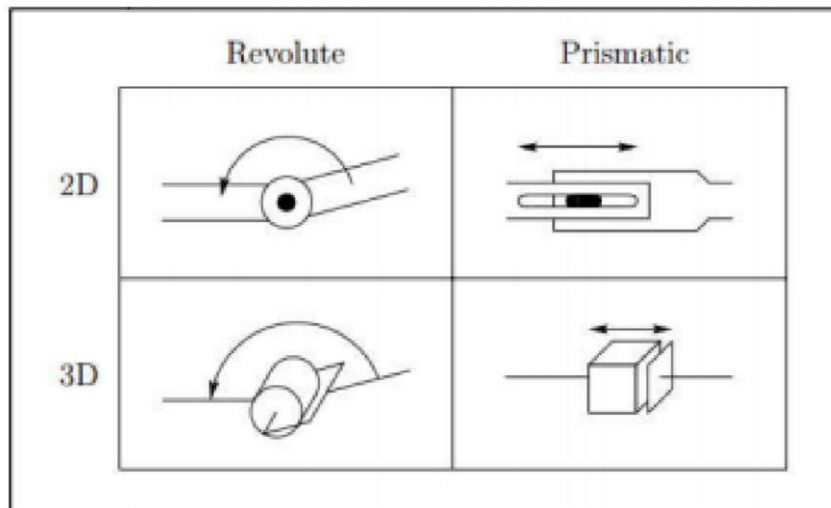


Figure 1-6 Schématisation des joints rotoïdes et prismatiques

**1-10-2 Structure et morphologie des robots [11] [12] :**

La partie mécanique d'un robot est généralement constituée de deux sous-ensembles distincts.

Un (ou plusieurs) organe terminal considéré comme une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement.

Une structure mécanique articulée qui sert à amener l'organe terminal dans une position et orientation désirées, cette structure est composée de bras, base, poignet coupleur et axe mécanique.

Les robots peuvent être de :

- Structure à chaînes simples ouvertes figure 1.7.
- Structure à chaînes arborescentes figure 1.8.
- Structure à chaînes complexes figure 1.9.

Terminologie :

$C_0$  : Corps de référence

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  : Corps.

$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$  : Liaison

O.T : Organe terminal

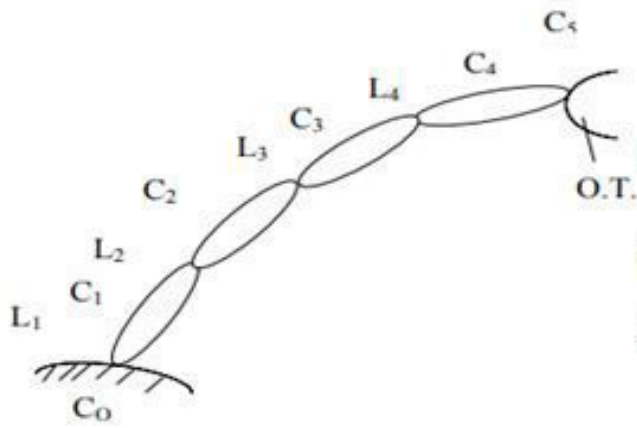


Figure 1.7 : Structure à Chaînes  
Simples Ouvertes

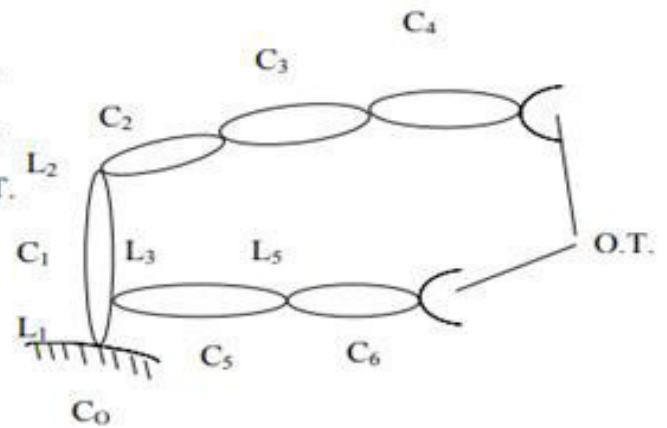


Figure 1.8 : Structure à Chaînes  
Arborescentes

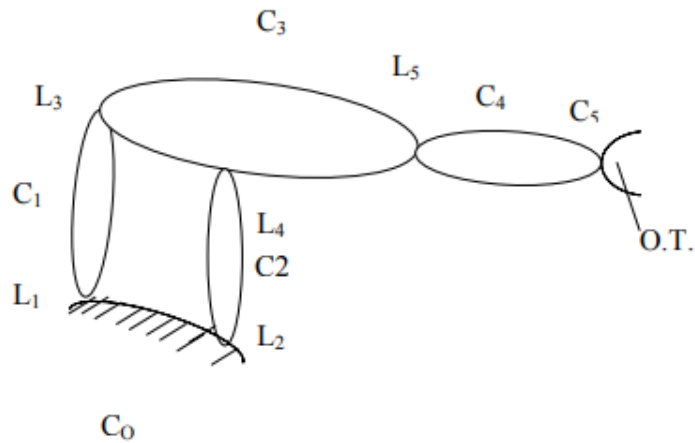


Figure 1.9 : Structure à Chaînes Complexes

**1-10-3 Représentation graphique [02] :**

Pour la représentation graphique des différents types d'articulation, nous utiliserons

(D'après la norme N.F. EO4-O15).

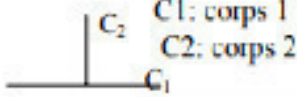

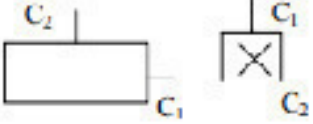

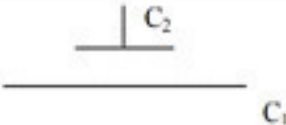

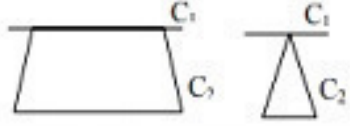
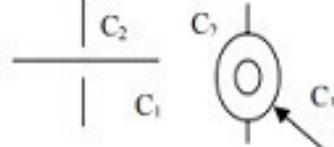
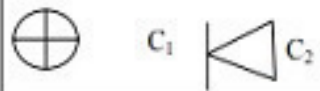
| Nom de Liaison                           | Mouvement relatifs                          | Nombre de Degré de liberté | Symbole  |
|--|---|----------------------------|--|
| Encastrement                             | 0: rotation<br>0: translation               | 0                          |    |
| Pivot<br>Articulation<br>Cylindrique     | 1: rotation<br>0: translation               | 1                          |    |
| Glissière<br>Articulation<br>Prismatique | 0: rotation<br>1: translation               | 1                          |    |
| Glissière<br>Hélicoïdale                 | 1: rotation<br>1: translation<br>conjuguées | 2                          |   |
| Appui<br>Plan                            | 1: rotation<br>2: translation               | 3                          |  |
| Rotule<br>Articulation<br>Rotoïde        | 3: rotation<br>0: translation               | 3                          |  |
| Linéaire<br>Rectiligne                   | 2: rotation<br>2: translation               | 4                          |  |
| Linéaire<br>Annulaire                    | 3: rotation<br>1: translation               | 4                          |  |
| Ponctuelle                               | 3: rotation<br>2: translation               | 5                          |  |
| Libre                                    | 3: rotation<br>3: translation               | 6                          | Pas de symbole, pas de contact entre les deux corps                                  |

Figure 1-10 Articulations

## Généralités sur la robotique

Quand on commande un robot, on a intérêt à pouvoir contrôler individuellement chaque articulation ou axe pour être bien maître de la trajectoire.

C'est pourquoi on utilise principalement des liaisons pivot (articulations cylindriques) et des liaisons glissière (articulations prismatiques).

Elles ont par ailleurs l'avantage d'une réalisation pratique peu onéreuse, comparée aux articulations à plusieurs degrés de liberté.

On comprend qu'une combinaison d'articulations cylindriques et prismatiques permet de réaliser toutes les liaisons mécaniques données dans ce tableau.

Les articulations cylindriques autour de 3 axes normaux et concourants donnent une rotule ou articulation rotoïde. [02]

### **1-10-4 Degrés de liberté et espace de travail :**

Le nombre de joints détermine le nombre de degrés de liberté (DDL) du manipulateur. Généralement un manipulateur doit posséder au plus six (DDL) indépendants : trois pour le positionnement et trois pour l'orientation. Avec moins de six (DDL), le bras ne pourra pas atteindre tous les points dans son environnement de travail avec une orientation arbitraire.

Certaines applications tels que l'atteinte de points derrière des obstacles nécessitent plus de six (DDL). La difficulté de contrôler un manipulateur augmente rapidement avec le nombre de joints. Un manipulateur ayant plus de six joints est appelé « cinématiquement redondant ». L'espace de travail d'un manipulateur est le volume total balayé par l'organe terminal lorsque le manipulateur exécute tous les mouvements possibles.

L'espace de travail est contraint par la géométrie du manipulateur, ainsi que les contraintes mécaniques sur les joints, par exemple les joints rotoïdes peuvent être limités à moins de 360° de rotation.

**1-10-5 La classification des robots [20] :**

Les robots peuvent être classés selon plusieurs critères, tel que leur source d'énergie, la manière dont les articulations sont actionnées, leur géométrie, leur structure cinématique...etc.

Une telle classification est utile pour déterminer quel robot est bon pour une tâche donnée.

**1-10-5-1 Source d'énergie :**

Les robots sont alimentés électriquement, hydrauliquement ou à la pneumatique. Les actionneurs hydrauliques sont inégalés dans leur vitesse de réponse et leur capacité de produire des couples importants. Par conséquent les robots hydrauliques sont utilisés pour soulever des charges lourdes. Mais ils ont l'inconvénient de fuites répétitives et ils nécessitent beaucoup d'équipements auxiliaires comme les pompes, par conséquent ils sont plus bruyants. Les robots pilotés par des servomoteurs CC et CA sont de plus en plus populaires, car ils sont moins chers, plus propres et moins bruyants. Les robots pneumatiques sont peu coûteux et simples mais ne peuvent pas être contrôlés par précision. En conséquence les robots pneumatiques sont limités dans leur gamme d'applications.

**1-10-5-2 Méthode de contrôle :**

Les robots sont classés selon leur méthode de contrôle en deux catégories, « Les servo robots » et les « non-servo robots ».

Les premiers robots étaient des non-servo robots, qui sont des dispositifs à boucle ouverte dont les mouvements sont limités aux arrêts mécaniques prédéterminés, et ils sont généralement utilisés pour le transfert de matériaux.

Les servo robots sont contrôlés par ordinateur en boucle fermée, pour déterminer leur mouvement et sont donc capables d'être des dispositifs multifonctionnels et reprogrammables.

Les servo robots sont encore classés selon la méthode utilisée par le contrôleur pour guider l'organe terminal.



Le type le plus simple est le « Robot point à point », dans ce type de robots un ensemble discret de points est introduit, mais il n'y a aucun contrôle sur la trajectoire de l'organe terminal entre les points introduits. Par conséquent ces robots sont très limités dans leur gamme d'application.

L'autre type de robots sont appelés « Robots à chemin continue », en contrepartie dans ce type de manipulateurs toute la trajectoire de l'effecteur peut être contrôlée.

L'organe terminal peut suivre un contour prédéterminé, par exemple un cordon de soudure, tout en contrôlant sa vitesse et son accélération.

Ce type de robots sont les plus avancées et nécessitent des contrôleurs sophistiqués et des logiciels de contrôle très performants.

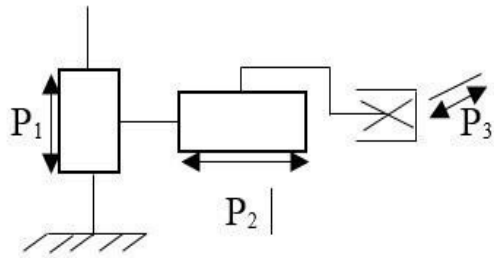
#### **1-10-5-3 Architecture des porteurs [02] :**

Un robot industriel (à poste fixe) se compose fonctionnellement de deux grand parties le porteur ou bras qui a pour objet d'amener son extrémité dans une position déterminée de l'espace (il lui faut pour cela trois degrés de liberté) et l'organe terminal, support d'un outil de travail qu'il s'agit d'orienter correctement (ce qui nécessite trois autre degrés de liberté).

Sur la figure sont représentés des porteurs. Ce sont les seuls types réellement utilisés, bien qu'il y ait mathématiquement plus de 30 combinaisons différentes de rotation et translation pouvant conduire à un porteur à trois degrés de liberté.

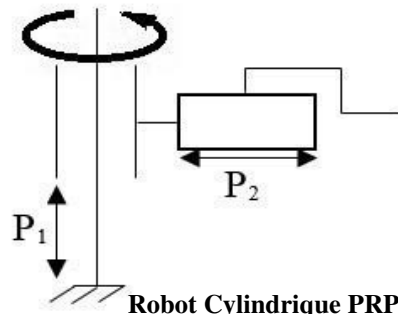
Tous ces robots sont des type robot série, signifiant par là qu'en partant de la base et en allant vers l'extrémité on rencontre les articulations les unes après les autres sur la même chaines cinématiques séries qui sont physiquement situées en parallèle et travaillent simultanément.

## Généralités sur la robotique



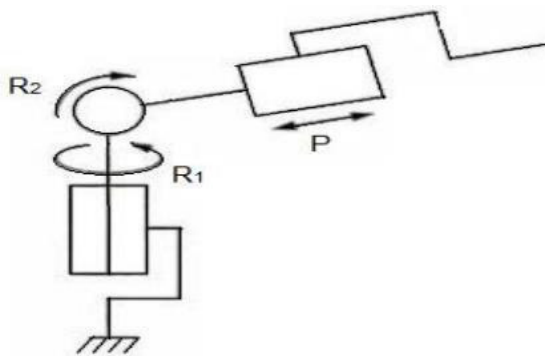
**Robot Cartésien PPP**

(Environ 15% des parcs des robots industriels)



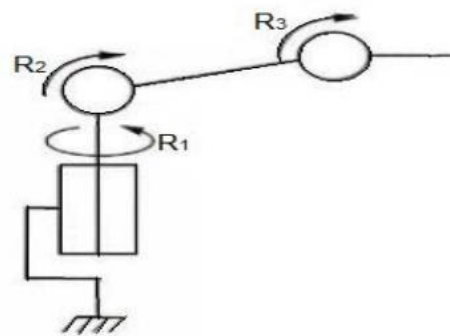
**Robot Cylindrique PRP**

(Environ 45% des parcs des robots industriels)



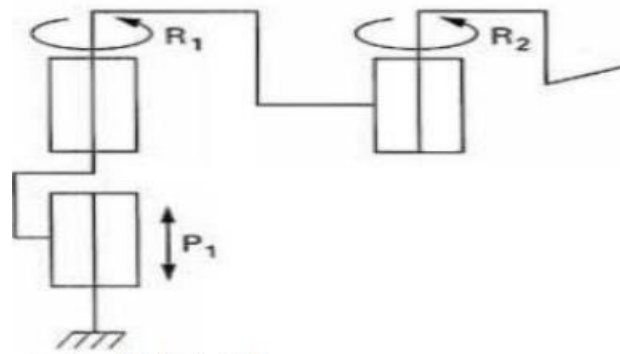
**Robot polaire RRP**

Si  $R_2$  est de type cardon, on parle de robot pendulaires (environ 13% robots industriels)



**Robot articulée RRR**

(Environ 25% des parcs des robots industriels)



**Robot SCARA**

(Environ 2% des parcs des robots industriels)

**Figure1-11 Robots manipulateurs industriels à poste fixe d'après I.S.O 8373**

- Symboles R : Rotation ou liaison cylindrique ou liaison pivot
- Symboles P : Translation ou liaison glissière ou liaison prismatique

## Généralités sur la robotique

Chacune de ces cinq configurations est un robot en série, dans lequel on trouve chaque joint indépendant des autres et représente un degré de liberté.

Il existe une autre classe de manipulateurs, qui est fondamentalement distincte des cinq précédentes, c'est la classe des robots parallèles.

Dans une configuration parallèle les joints sont disposés dans une chaîne cinématique fermée plutôt qu'ouverte, donc le déplacement de certains joints est dépendant avec d'autres joints, ce qui va donner un degré de liberté inférieur au nombre de joints.



Figure 1-12 Robot parallèle

**1-10-6 Les systèmes robotiques :**

Un robot manipulateur doit être considéré comme étant plus qu'un simple assemblage de pièces mécaniques. Le bras mécanique n'est qu'un élément d'un système robotique global.

Un système robotique se compose généralement d'un bras mécanique, de la source d'alimentation externe, de l'outil effecteur et de l'ordinateur de commande. Même le logiciel de contrôle doit être considéré comme partie intégrante du système global, puisque la manière dont le robot est programmée et contrôlé, peut avoir un impact majeur sur ses performances.

**1-10-7 La précision et la répétabilité d'un manipulateur :**

La précision d'un manipulateur est la mesure de l'exactitude de son déplacement, vers un point donné dans son espace de travail. La répétabilité est la mesure de l'exactitude de déplacement d'un robot vers un point exécuté précédemment.

La plupart des manipulateurs industriels actuels ont une répétabilité élevée mais leur précision est très moyenne.

La méthode principale utilisée pour la détection des erreurs de positionnement, est l'utilisation de détecteurs de position, situés soit sur l'arbre du moteur qui entraîne l'articulation soit sur l'articulation elle-même. Il n'y a pratiquement aucune mesure directe de la position et de l'orientation de l'organe terminal.

Alors la position et l'orientation de l'effecteur sont calculées à partir des positions articulaires.

La précision est donc affectée par des erreurs de calcul résultantes à partir des effets de flexibilité induits par les charges des composants robot, et par d'autres effets dynamiques. C'est principalement pour cette raison que les robots.

Sont conçus avec une rigidité extrêmement élevée. Sans rigidité élevée la précision ne peut être améliorée que par une sorte de détection directe de la position de l'organe terminal, par exemple en utilisant la vision.

Une fois qu'un point donné est enregistré dans l'ordinateur de commande, les effets cités ci-dessus seront pris en compte par le logiciel de contrôle.

Par conséquent la répétabilité n'est affectée que par la résolution du contrôleur.

**1-11 Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons fait le point sur des généralités et des définitions dans le domaine de la robotique, qui vont nous être utiles dans la suite de notre étude. Nous avons également présenté les différents critères de classification des robots.

Dans le chapitre suivant nous allons présenter une méthode générale utilisée pour l'établissement du modèle dynamique.

# Chapitre 02

## 2 Modélisation des bras manipulateurs :

### 2-1 Introduction :

On dispose de trois modèles utilisés d'une manière individuelle ou combinée pour réaliser ces modélisations qui sont :

- Le modèle géométrique (direct et inverse).
- Le modèle différentiel ou cinématique (direct et inverse).
- Le modèle dynamique (direct et inverse).

### 2-2 Modélisation géométrique :

Le modèle géométrique qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires du mécanisme et inversement.

#### 2-2-1 Modèle géométrique direct (MGD) :

C'est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires.

Ces variables sont définies par la matrice uni colonne  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ .

La situation de l'organe terminal est définie par la matrice unicolonne formée de  $m$  coordonnées, telle que :

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \quad \text{Avec : } m \leq 6$$

Le modèle géométrique direct est défini par l'équation :

$$X = F(q) \quad (2.1)$$

Si la structure est ouverte simple ou arborescente, le calcul de  $X$  implique celui de l'organe terminal. Si la structure est fermée, il faut ajouter les relations liant les variables articulaires pour la fermeture de chaîne.

#### 2-2-2 Modèle géométrique inverse (MGI) :

Le modèle géométrique inverse consiste à utiliser les coordonnées articulaires pour calculer les coordonnées opérationnelles (positions désirées de l'organe terminal).

C'est l'inverse du MGD :

$$q = F^{-1}(X) \quad (2.2)$$

Les solutions à la forme explicite de l'équation  $q = F^{-1}(X)$  sont en nombre fini.

En général, pour résoudre le MGI, il n'existe pas de méthodes analytiques mais d'autres formes de résolution adaptées à des classes cinématiques données, (méthode de PIEPER, méthode de PAUL, etc...) [09] [16].

Ce modèle présente un grand intérêt pour les robots programmés par apprentissage ou langage de haut niveau.

### 2-2-3 Principe de la méthode de Paul [18] :

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène s'écrit par expression suivante :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.3)$$

Soit  $U_0$  la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.5)$$

Pour trouver les solutions de l'équation (1.5) Paul a proposé une méthode qui consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation (1.5) par les matrices  ${}^jT_{j-1}$  pour  $j$  variant de 1 à  $(n-1)$ , opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche. [18]

Pour un robot à six degrés de liberté par exemple, on procède comme suit :

– multiplication à gauche de l'expression (1.5) par  ${}^1T_0$  :

$${}^1T_0 U_0 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (2.6)$$



## Modélisation des bras manipulateurs

Le terme de droite est fonction des variables  $q_2, \dots, q_6$ .

Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de  $U_0$  et de la variable  $q_1$ .

- Identification terme à terme des deux membres de l'équation (1.6) On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de  $q_1$  uniquement, dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine de types possibles.
- Multiplication à gauche de l'expression (1.6) par  ${}^2T_1$  et calcul de  $q_2$ .

La succession des équations permettant le calcul de tous les  $q_j$  est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 U_0 &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^5T_4 {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 &= {}^5T_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$$U_i = {}^i T_{i+1} \cdot U_{i+1}$$

L'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les types d'équations rencontrés sont peu nombreux et que leur résolution même si elle nécessite parfois quelques développements reste cependant relativement simple. [18]

### 2-3 Modélisation cinématique :

#### 2-3-1 Modèle différentiel direct (MDD) :

Il décrit les variations élémentaires des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires :

$$dX = J(q) dq \quad (2.8)$$

## Modélisation des bras manipulateurs

Le terme  $J(q)$  désigne le jacobéenne (matrice de dimension  $m \times n$ ) :

$$J(q) = \frac{\partial X}{\partial q} \quad (2.9)$$

Ce modèle permet de déterminer par itération les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires.

Si on remplace le calcul différentiel par le calcul des dérivées par rapport au temps, le MDD devient :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (2.10)$$

Où :

$\dot{X}$  Représente les vitesses opérationnelles et  $\dot{q}$  les vitesses articulaires. Sous forme matricielle, l'équation devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Où :

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_j} \quad i = (1, \dots, m) \quad \text{et} \quad j = (1, \dots, n)$$

### 2-3-2 Modèle différentiel inverse (MDI) :

A partir d'une configuration  $q$ , on calcule la différentielle articulaire  $dq$  pour satisfaire une différentielle des coordonnées opérationnelles  $dX$  imposée.

Si les différentielles sont remplacées par les dérivées par rapport au temps, on constitue le modèle cinématique inverse.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ij} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pour obtenir le modèle différentiel inverse, on peut soit dériver le modèle géométrique inverse (PAUL) (méthode analytique) soit inverser le modèle différentiel direct d'une manière plus générale (résolution analytique ou numérique)

## 2-4 Modélisation dynamique :

Les modèles dynamiques des bras manipulateurs sont décrits par un ensemble d'équations mathématiques qui portent la dynamique de ceux-ci et peuvent être simulées sur ordinateur dans le but de synthétiser une commande conditionnée par des performances désirées, les équations différentielles qui décrivent le comportement d'un mécanisme à plusieurs corps articulés peuvent être déterminés par des lois mécaniques classiques Newtoniennes (théorèmes généraux de la mécanique classiques) et Lagrangiennes.

Les approches d'Euler- Lagrange et Newton- Euler permettent d'aboutir aux équations du mouvement des robots

En définissent les " équations du mouvement du robot qui permettent d'établir les relations entre les couples ou et les forces exercés par les actionneurs et positions, vitesses et accélérations. [08]

### 2-4-1 Méthodes d'obtention du modèle dynamique [08] :

Les principales méthodes actuelles d'obtention du modèle dynamique sont basées sur l'un des quatre formalismes suivants :

- La notion d'énergie d'accélération ou fonction de Gibbs.
- Les équations de Newton et d'Euler.
- Le principe du travail virtuel de D'Alembert.
- Les équations de Lagrange.

Ces dernières semblent les plus utilisées et peuvent être les plus faciles à manipuler.

### 2-4-2 Obtention du modèle dynamique [12] [13] :

L'énergie cinétique du système est une forme quadratique des vitesses articulaires :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T [A] \dot{q} \quad (2.13)$$

Tel que :

[A] : matrice (n x n) symétrique définie positive d'éléments génériques.

A<sub>ij</sub> : (q) dépendant du variable articulaire q.

## Modélisation des bras manipulateurs

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n)^t \quad \text{Matrice uni colonne des vitesses généralisées.}$$

L'énergie potentielle est due aux champs de pesanteur, alors l'effort généralisé par le champ de pesanteur sur l'articulation  $i$  s'écrit :

$$G_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q} \quad (2.14)$$

$E_p$  : Représente l'énergie potentielle externe du système.

Le Principe des puissances virtuelles donne les équations suivantes :

$$A_i = F_i \quad (2.15)$$

$A_i$  : Désigne la quantité d'accélération généralisée.

$F_i$  : Désigne les forces généralisées.

Tel que :

$$A_i = \partial_i(E_c) \quad (2.16)$$

$$\partial_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} \right] \quad (2.17)$$

$$F_i = -\frac{\partial E_D}{\partial q_i} - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \Gamma_i \quad (2.18)$$

$E_D$  : Energie de dissipation par effet du frottement visqueux.

$\Gamma_i$  : Forces généralisées non conservatives.

Les équations scalaires de Lagrange peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^n \left[ A_{ij} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{k=j+1}^n \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \dot{q}_j^2 \right] - G_i \quad (2.19)$$

Avec :

$$B_{i,jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.20)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i} \quad (2.21)$$

$$G_i = - \frac{\partial E_P}{\partial q_i} \quad (2.22)$$

$\Gamma_i$  : Matrice uni colonne des forces généralisées.

[A] : Matrice carrée de dimension (n x n) symétrique définie positive.

C'est la matrice de masse du système, elle intervient dans le calcul du couple / force d'inertie exprimé par le produit  $[A]\ddot{q}$ .

[B] : Matrice de dimension (n x (n-1) n/2), appelée matrice des termes de Coriolis.

[C] : Matrice de dimension (n x n), appelée matrice des termes centrifuges.

G : Matrice colonne de dimension (n x 1), représentant les forces généralisées aux champs de pesanteur.

$\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \dots, \ddot{q}_n)^T$  Matrice uni  
 $\dot{q}\dot{q} = (\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \quad \dot{q}_1 \dot{q}_3 \dots \dot{q}_1 \dot{q}_n \quad \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dots \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n)^T$  colonne des accélérations  
 généralisées.

$$\dot{q}^2 = (\dot{q}_1^2 \dot{q}_2^2 \dot{q}_3^2 \dots \dot{q}_n^2)^T$$

Les équations peuvent être regroupées sous la forme matricielle suivante :

$$\Gamma = [A]\ddot{q} + [B]\dot{q}\dot{q} + [C]\dot{q}^2 - G \quad (2.23)$$

Les éléments des A, B, C et G s'appellent les coefficients dynamiques du système. Ils sont des paramètres géométriques d'inertie du mécanisme.

### 2-5 Méthode d'UICKER KAHN [14] [12] :

S'appuyant sur le formalisme de Lagrange, la méthode d'UICKER KAHN fait appel à deux notions essentielles :

- La notion de matrice de passage dans l'espace R4 : matrice homogène.
- La notion de matrice d'inertie homogène d'un corps.

**2-5-1 Expression de l'énergie cinétique [20] [15] :**

Soit  $M_k$  un point appartenant au solide  $S_k$  tel que :

$$\overrightarrow{O_0M_k} \rightarrow [O_0M_k]$$

$$\overrightarrow{O_kM_k} \rightarrow [O_kM_k]$$

$$[O_0M_k] = [T_{0k}] [O_kM_k]$$

$$\|O_kM_k\| = cte$$

Calculons la vitesse :

$$[V^0(M_k)] = \frac{d^0}{dt} [O_0M_k] = \frac{d^0}{dt} (T_{0k}) [O_kM_k] \quad (2.24)$$

L'énergie cinétique du solide est donnée par :

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \int_{S_k} [V^0(M_k)]^2 dm \quad (2.25)$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right]_{S_k} [O_kM_k] [O_kM_k] dm \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \cdot \dot{q}_l \quad (2.26)$$

$$[J_k] = \int_{S_k} [O_kM_k] [O_kM_k] t dm \quad (2.27)$$

$[J_k]$  : est le pseudo matrice d'inertie de dimension (4\*4), relative au corps  $S_k$  de la chaîne dans le repère  $R_k$ .

Elle est constituée par :

- Le moment d'ordre zéro de  $S_k$  :  $m_K$  masse de  $S_k$ .
- Le moment d'ordre de  $S_k$  :  $m_K \overrightarrow{O_k G_k}$  tel que  $G_k$  est le centre de masse de  $S_k$ .
- Le moment d'ordre deux de  $S_k$  : qui présente la matrice d'inertie  $[I_K]$  en  $O_k$  dans le repère  $R_k$ .

$$I_k = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

## Modélisation des bras manipulateurs

$$[J_{KK}] = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{xy} & -I_{xz} & m\bar{x} \\ -I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{yz} & m\bar{y} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] [J_k] \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (2.30)$$

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{ck} \quad (2.31)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] [J_k] \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] q_j q_l$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] [J_k] \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (2.32)$$

On pose :

$$A_{il} = \sum_{k=\max(i,l)}^n \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] [J_k] \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} q_j q_l \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique d'un système poly articulé est une forme quadratique des vitesses articulaires.

Les éléments de la matrice d'inertie [A] sont donnés par la relation suivante :

$$A_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] [J_k] \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \right] \quad (2.33)$$

### 2-5-2 Expression des éléments de la matrice d'inertie [A] :

Les éléments de la matrice [A] sont donnés par l'expression suivante (voir annexe A) :

$$A_{i,j} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[ [\Omega_{0i} \cdot T_{0k}] [J_k] [\Omega_{0j} \cdot T_{0k}]^T \right] \quad (2.34)$$

### 2-5-3 Expression de la matrice des termes de Coriolis :

Les éléments de la matrice des termes de Coriolis sont donnés par l'expression suivante (voir annexe A) :

$$B_{i,jl} = \sum_{k=\max(i,j,l)}^n \text{Trace} \left[ [\Omega_{0j} \cdot \Omega_{0l} \cdot T_{0k}] [J_k] [\Omega_{0j} \cdot T_{0k}]^T \right] \quad (2.35)$$

### 2-5-4 Expression des éléments de la matrice des termes centrifuges :

Les éléments de la matrice des termes centrifuges sont donnés par l'expression suivante (voir annexe A) :

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i}$$

$$C_{i,j} = 2 \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial^2 T_{0k}}{\partial q_j \partial q_j} \right] [J_k] \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \right]$$

$$C_{i,j} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[ [\Omega_{0i} \cdot \Omega_{0j} \cdot T_{0k}] [J_k] [\Omega_{0j} \cdot T_{0k}]^T \right] \quad (2.36)$$

### 2-5-5 Expression des éléments du vecteur force de gravité :

$$E_p = \sum_{i=1}^n (-m_i \cdot g \cdot T_i \cdot u_i) \quad \text{Donc} \quad G_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot \left[ \frac{\partial T_{0i}}{\partial q_i} \right]$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot T_{0i} \cdot \Omega_{0i} \quad (2.37)$$



$E_p$  : énergie potentielle du système.

$m_k$  : masse du solide  $S_k$ .

$G_k$  : centre de masse de  $S_k$ .

$[g]$  : vecteur accélération de la pesanteur exprimé dans le repère de base  $R_0$ .

Tel que :

$$\Omega_{jl} = T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} \quad (2.38)$$

$$\text{Et } \Omega_{ll} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\sigma_l) & 0 & 0 \\ (1-\sigma_l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_l = 0 \quad \text{pour une liaison rotoïde}$$

$$\sigma_l = 1 \quad \text{pour une liaison prismatique}$$

### 2-5-6 Propriétés des coefficients dynamiques [05] :

Afin de réduire le nombre de termes à calculer nous utilisons les propriétés suivantes des coefficients dynamiques suivantes.

$$B_{i,jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}$$

$$B_{i,jl} = -B_{l,ij} \quad \text{si } j \leq i \text{ et } l$$

$$B_{i,jj} = -B_{j,ij} \quad \text{si } j \leq i$$

$$B_{i,jk} = 0 \quad \text{si } j \leq i$$

Pour la matrice des termes centrifuges.

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i}$$

$$C_{ij} = -\frac{1}{2} B_{j,i} \quad \text{Si } j > i$$

$$C_{ij} = 0$$

Le comportement dynamique d'un système poly articulé dans le cas rigide est régi par l'équation (2.36) qui représente un système d'équations différentielle du second ordre couplées et non linéaires.

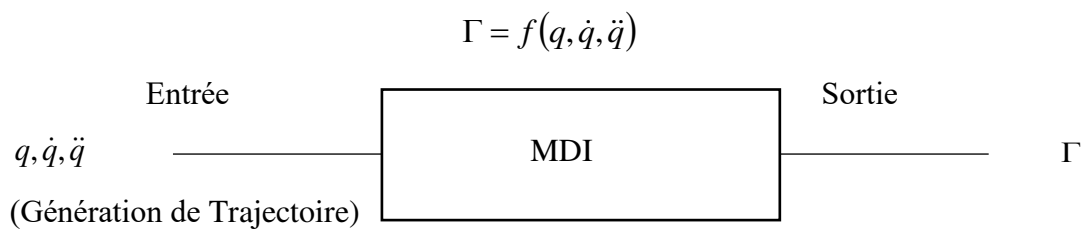
**2-7 Formes du modèle dynamique :**

Le modèle dynamique présente deux formes d'utilisations :

- Le modèle inverse
- Le modèle direct

**2-7-1 Le modèle dynamique inverse :**

Le modèle dynamique inverse est appelé aussi modèle dynamique.



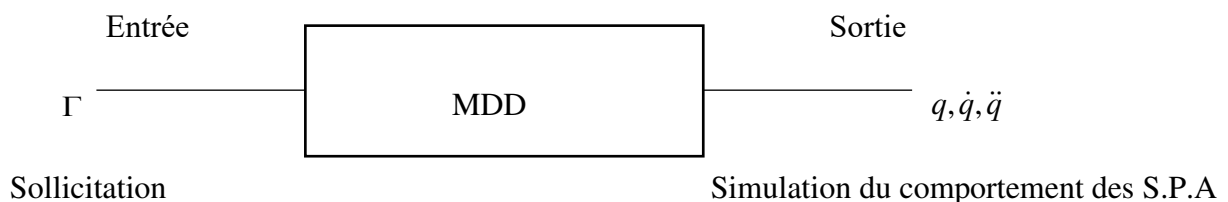
Ce modèle permet d'exprimer les forces ou/et les couples généralisés en fonction des variables articulaires.

En utilisant le formalisme de Lagrange, le modèle dynamique inverse est donné par le système d'équation suivant :

$$\Gamma = [A].\ddot{q} + [B].\dot{q}.\dot{q} + [C].\dot{q}^2 - G$$

**2-7-2 Le modèle dynamique direct :**

Ce modèle consiste à déterminer les variables articulaires en fonction des forces (ou/et couples) généralisés



Le calcul de ces variables se fait en résolvant le système d'équations différentielles non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \Gamma = [A]\ddot{q} + [B]\dot{q}\dot{q} + [C]q^2 - G \\ \text{à } t = t_0 \quad q(t_0) = q_0, \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (2.39)$$

La résolution de ce système d'équation peut se faire par plusieurs méthodes d'intégration numériques [3] [4] [17] telle que :

- Méthode d'Euler
- Méthode de Runge-Kutta
- Méthode de Newmark

Dans cette étude nous avons utilisé la méthode de Runge Kutta à 4 approximations qui offre une précision satisfaisante au problème, et se prête facilement à la programmation.

**2-8 Schéma d'intégration par la méthode de RUNGE-KUTTA [16] [19] :**

$$\frac{d}{dt}[Y] = f(t, Y)$$

Avec  $[Y] = [Y_0]$

Pour  $t = t_0$

Avec la méthode de Runge Kutta on a :

$$[Y]_{t+dt} = [Y]_t + \frac{1}{6} [[K_1] + 2[K_2] + 2[K_3] + [K_4]]$$

$$[K_1] = f(t, [Y]).dt$$

$$[K_2] = f\left(t + \frac{dt}{2}, [Y] + \frac{[K_1]}{2}\right).dt$$

$$[K_3] = f\left(t + \frac{dt}{2}, [Y] + \frac{[K_2]}{2}\right).dt$$

$$[K_4] = f(t + dt, [Y] + [K_3]).dt$$

Le système d'équation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{q} = -[A]^{-1} [[B] \dot{q} \cdot \dot{q} + [C] \dot{q}^2 - G - \Gamma] \\ t = t_0 \quad q(t_0) = q_0, \dot{q}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix}$$

$$f(t, y) = \frac{d}{dt}[Y] = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -[A]^{-1} [B] \dot{q} \dot{q} + [C] \dot{q}^2 - G - \Gamma \end{bmatrix}$$

### 2-9 Conclusion :

Ce chapitre est consacré pour la modélisation des robots manipulateurs, à partir de la modélisation géométrique, la modélisation cinématique, jusqu'à la modélisation dynamique où il est représenté le formalisme de Lagrange pour l'obtention de l'équation de mouvement du robot manipulateur. La dernière section présente une application de calcul des différents modèles du robot PUMA 600.

# Chapitre 03

### 3 Application sur un Robot PUMA 600 :

#### 3-1 Introduction :

Afin d'appliquer les différentes notions et techniques de modélisation présentées dans ce chapitre, on présente dans cette section une application de calcul de modèle géométrique et modèle dynamique, du robot manipulateur PUMA 600.

Ces Modelés seront utilisés pour valider les commandes présentées dans les chapitres suivants.

L'application sera faite pour les trois premières articulations (robot à 3 ddl).

#### 3-2 Description géométrique et dynamique du robot PUMA 600 :

Le robot PUMA 600 est un robot à six axes qui est le plus réponsus dans les domaines de recherche et d'assemblage le plus utilisés dans l'industrie. Le PUMA (Programmable Universel Machine for Assembly) à été originalement conçu par Vic Schliemann et financier par General Motors et The Massachussetts Institute of Technology au milieu des années 70, et fut produit pendant de nombreuses années par UNIMATION.

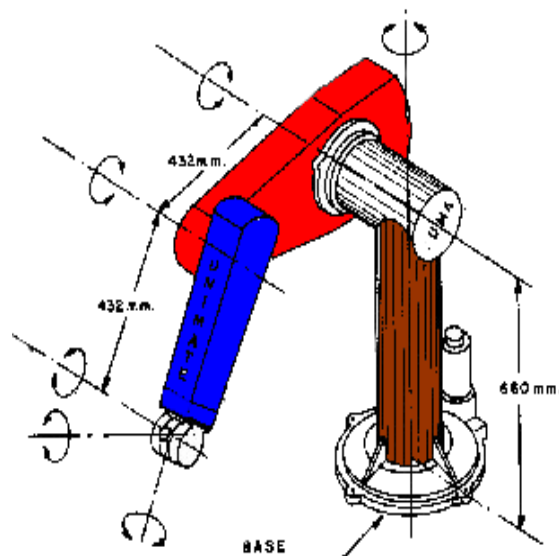


Figure 3-1 : Le robot PUMA 600

## Application

### 3-3 Paramètres mesures du robot PUMA 600 :

Les valeurs des paramètres mesurés du robot PUMA 600 utilisés sont données par les tableaux suivants :  
Nous supposons les frottements sont nuls.

|                        | Masse d'Axe |           | Longueurs   |         |
|------------------------|-------------|-----------|-------------|---------|
| 1 <sup>er</sup> corps  | $m_1$       | 10.521 Kg | $l_1 = r_2$ | 0.149 m |
| 2 <sup>eme</sup> corps | $m_2$       | 10.236 Kg | $l_2 = d_3$ | 0.432 m |
| 3 <sup>eme</sup> corps | $m_3$       | 8.767 Kg  | $l_3 = a$   | 0.431 m |

Tab 3.1 : Masses des axes et Longueurs des corps

### 3-4 Modèle géométrique direct du robot PUMA 600 :

Le placement des repères du robot manipulateur en utilisant la notation de Denavit-Hartenberg des trois premiers degrés de libertés est donné par la figure (Figure 3.2) qui permet de tirer les paramètres géométriques.

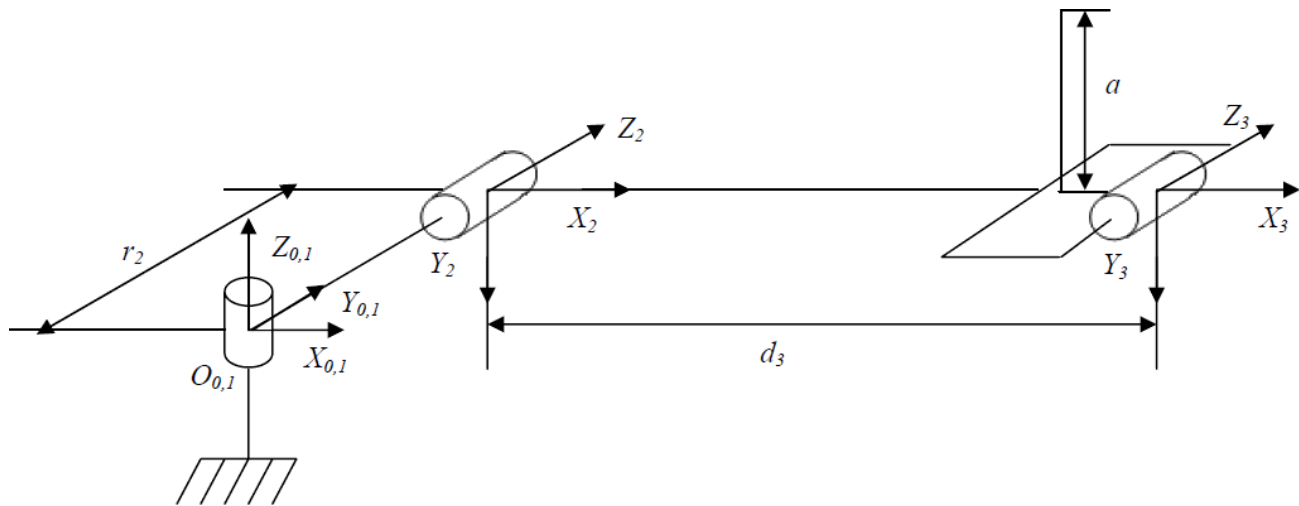


Figure 3.2 : Le placement des repères du robot PUMA 600

## Application

En utilisant l'équation de méthode de Paul on obtient les matrices de transformations suivantes :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_i & -\sin \mathcal{G}_i & 0 & d_i \\ \cos \alpha_i \cdot \sin \mathcal{G}_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \mathcal{G}_i & -\sin \alpha_i & -r_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cdot \sin \mathcal{G}_i & \sin \alpha_i \cdot \cos \mathcal{G}_i & \cos \alpha_i & r_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

| Articulation $i$ | $\sigma_i$ | $\alpha_i$ | $d_i$ | $r_i$ | $\theta_i$ |
|------------------|------------|------------|-------|-------|------------|
| 1                | 0          | 0          | 0     | 0     | $q_1$      |
| 2                | 0          | $-\pi/2$   | 0     | $r_2$ | $q_2$      |
| 3                | 0          | 0          | $d_3$ | 0     | $q_3$      |

**Tab 3.2 :** Paramètres géométriques du robot PUMA 600

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Application

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le MGD, il faut déterminer la matrice de passage du robot : soit  ${}^0T_3$  dans le cas présent. Pour l'obtenir, on multipliera les matrices  ${}^{i-1}T_i$  en partant de la dernière afin de définir des matrices intermédiaires  $U_i$  utiles pour l'élaboration du modèle géométrique inverse (MGI).

On a :

$$U_i = {}^i T_{i+1} \cdot U_{i+1}$$

Appliquer à notre cas, on définit successivement :

$$U_3 = I_3$$

$$U_2 = {}^2T_3 \cdot U_3 = {}^2T_3 \cdot I_3 = {}^2T_3$$

$$U_1 = {}^1T_2 \cdot U_2 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = {}^1T_3$$

$$U_0 = {}^0T_1 \cdot U_1 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = {}^0T_3$$

Les expressions des matrices  $U_i$  peuvent être présentes sous la forme :

$$U_i = \begin{bmatrix} s_{xi} & n_{xi} & a_{xi} & p_{xi} \\ s_{yi} & n_{yi} & a_{yi} & p_{yi} \\ s_{zi} & n_{zi} & a_{zi} & p_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Application

$$U_2 = {}^2T_3 \cdot U_3$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = {}^1T_2 \cdot U_2$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 q_2 - \sin q_2 \cdot \cos q_3 & -\cos q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_3 \cdot \sin q_2 & 0 & d_3 \cdot \cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ -\sin q_2 \cdot \cos q_2 - \cos q_2 \cdot \sin q_3 & \sin q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_2 \cdot \cos q_3 & 0 & -d_3 \cdot \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_0 = {}^0T_1 \cdot U_1$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times U_1$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} -\cos q_1 \cdot (\sin q_2 \sin q_3 - \cos^2 q_2) & -\cos q_1 \cdot (\cos q_2 \cdot \sin q_3 + \cos q_3 \cdot \sin q_2) & -\sin q_1 & r_2 \cdot \sin q_1 + d_3 \cdot \cos q_1 \cdot \cos q_2 \\ -\sin q_1 \cdot (\sin q_2 \sin q_3 - \cos^2 q_2) & -\sin q_1 \cdot (\cos q_2 \cdot \sin q_3 + \cos q_3 \cdot \sin q_2) & \cos q_1 & d_3 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_1 - r_2 \cdot \cos q_1 \\ -\cos q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_2 \cdot \sin q_3 & \sin q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_2 \cdot \cos q_3 & 0 & -d_3 \cdot \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Application

### 3-5 Modèle dynamique du robot PUMA 600 :

#### 3-5-1 La matrice d'inertie :

Les matrices de pseudo-inertie des trois premiers corps sont :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m_1r^2 & 0 & \frac{1}{2}m_1r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_1r & 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2d^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2d \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}m_1r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}m_2d & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_3a^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}m_3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}m_3a & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Les 'éléments de la matrice d'inertie sont (Annexe A) :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) & m_{13}(q) & m_{14}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) & m_{23}(q) & m_{24}(q) \\ m_{31}(q) & m_{32}(q) & m_{33}(q) & m_{34}(q) \\ m_{41}(q) & m_{42}(q) & m_{43}(q) & m_{44}(q) \end{bmatrix}$$

### Application

$$\begin{aligned}
 m_{11}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_1}{\partial q_1} I_1 \frac{\partial^0 T_1^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \frac{\partial^0 T_2}{\partial q_1} I_2 \frac{\partial^0 T_2^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_1} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 \right\} \\
 &= \frac{1}{6} m_3 r^2 + \frac{1}{6} d^2 (3m_3 + m_2) \cos(2q_2) + \frac{1}{6} m_3 a^2 \cos(2q_3 + 2q_2) + \frac{1}{2} m_3 d^2 + \frac{1}{6} m_2 d^2 + \frac{1}{3} m_3 r^2 \\
 &\quad + \frac{1}{6} m_3 a^2 + \frac{1}{2} m_3 a d \cos(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} m_3 a d \cos(q_3) + r^2 m_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{21}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_2}{\partial q_1} I_2 \frac{\partial^0 T_2^T}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_1} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} m_3 a \sin(q_3 + q_2) - \frac{1}{2} d r (m_2 + 2m_3)(q_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{31}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_1} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_3} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} m_3 a \sin(q_3 + q_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{22}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_2}{\partial q_2} I_2 \frac{\partial^0 T_2^T}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dot{q}_2 + \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_2} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dot{q}_2 \right\} \\
 &= \frac{1}{3} m_2 d^2 + m_3 d^2 + \frac{1}{3} m_3 a^2 + m_3 d \cos(q_3)
 \end{aligned}$$

$$m_{32}(q) = \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_2} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_3} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right\} = -\frac{1}{3} m_3 a^2 + -\frac{1}{2} m_3 a d \cos(q_3)$$

$$m_{33}(q) = \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_3} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_3} \dot{q}_3 \dot{q}_3 \right\} = -\frac{1}{3} m_3 a^2$$

## Application

Donc :

$$m_{11} = 3.24 + 1.77\cos(2q_2) + 0.814\cos(2q_3 + 2q_2) + 1.63(2q_2 + q_3) + 1.63(q_3)$$

$$m_{12} = m_{21} = -1.22\sin(q_2) - 0.563\sin(q_3 + q_2)$$

$$m_{22} = 5.17 + 3.26\cos(q_2)$$

$$m_{13} = m_{31} = -0.563\sin(q_3 + q_2)$$

$$m_{32} = m_{23} = 1.63 + 1.63\cos(q_2)$$

$$m_{33} = 1.63$$

### 3-5-2 La matrice des forces Centrifuges et de Coriolis :

Les éléments de la matrice des forces Centrifuges et de Coriolis sont (*Annexe A*) :

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) & c_{13}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) & c_{23}(q, \dot{q}) \\ c_{31}(q, \dot{q}) & c_{32}(q, \dot{q}) & c_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$c_{11}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q}$$

$$= -\frac{1}{4} m_3 a d (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + q_3) + \frac{1}{6} m_3 a^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \sin(3q_3 + 2q_2)) - \frac{1}{2} d^2 (m_3 + \frac{1}{3} m_3) \dot{q}_2 \sin(2q_2) - \frac{1}{4} m_3 a d \sin(q_3) \dot{q}_3$$

$$c_{11}(q, \dot{q}) = 1.63(\dot{q}_2 + 0.5\dot{q}_3) \sin(2q_2 + q_3) - 0.814(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_3 + 2q_2) - 1.77\dot{q}_2 \sin(2q_2) - 0.816\sin(q_3) \dot{q}_3$$

$$c_{12}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_3$$

## Application

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m_3 a^2 \sin(2q_3 + q_2) \frac{1}{3} m_3 ad \sin(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} m_3 ad \sin(q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{4} m_3 ar \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_2 \right)$$

$$\begin{aligned} c_{21}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{31}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_3 \\ &= -\frac{1}{2} m_3 ad \sin(q_3) \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$c_{22}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q}$$

$$\begin{aligned} c_{23}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_3 \\ &= -\frac{1}{2} m_3 ad (q_2 + q_3) \sin(q_3) - \frac{1}{4} m_3 ar \cos(q_3 + q_2) \dot{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{31}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{32}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{32}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$c_{33}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q}$$

Donc, on a :

$$c_{12}(q, \dot{q}) = -1.22 \dot{q}_2 \cos(q_2) - 0.563(\dot{q}_2 + 0.5\dot{q}_3) \cos(q_3 + q_2) - 1.77 \dot{q}_1 \sin(2q_2) \\ - 0.5(1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) + 3.26 \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1$$

$$c_{13}(q, \dot{q}) = -0.5(-1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) - 1.63 \sin(2q_2 + q_3) - 1.63 \sin(q_3)) \dot{q}_1 - 0.282 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_2$$

$$c_{22}(q, \dot{q}) = -1.63 \sin(q_3) \dot{q}_3$$

$$c_{31}(q, \dot{q}) = 0.5(1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) + 1.63 \sin(2q_2 + q_3) + 1.63 \sin(q_3)) \dot{q}_1 + 0.282 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_2$$

$$c_{32}(q, \dot{q}) = 1.63 \sin(q_3) \dot{q}_2 + 0.282 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1$$

$$c_{33}(q, \dot{q}) = 0$$

### 3-5-3 Le vecteur de gravité :

Pour calculer le vecteur de gravité, nous devons déterminer l'énergie potentielle du robot, comme

exprime par les équations (1.48) et (1.49)

$$\begin{aligned} P_1 &= -m_1 {}^0g^T {}^0T_1 1_{\bar{r}} = 0 \\ P_2 &= -m_2 {}^0g^T {}^0T_2 2_{\bar{r}} = -\frac{1}{2} m_2 g d \sin(q_2) \\ P_3 &= -m_3 {}^0g^T {}^0T_3 3_{\bar{r}} = -m_2 g \left\{ \frac{1}{2} a \sin(q_2 + q_3) + d \sin(q_2) \right\} \end{aligned}$$

## Application

Ou

$${}^0g^T = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0]$$

$$1_r = [0 \quad \frac{1}{2}r \quad 0 \quad 1]$$

$$2_r = [\frac{1}{2}d \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$3_r = [\frac{1}{2}a \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Alors

$$P(q) = -\frac{1}{2}m_2gd \sin(q_2) - m_2g \left\{ \frac{1}{2}a \sin(q_2 + q_3) + d \sin(q_2) \right\}$$

En utilisant cette expression de l'énergie potentielle totale, on peut calculer les éléments du vecteur de gravité comme suit :

$$g_1(q) = \frac{\partial P(q)}{\partial q_1} = 0$$

Le vecteur de gravité est :

$$g_2(q) = \frac{\partial P(q)}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}gd(m_2 + 2m_3) \cos(q_2) - \frac{1}{2}m_3ga \cos(q_2 + q_3)$$

$$g_3(q) = \frac{\partial P(q)}{\partial q_3} = -\frac{1}{2}m_3ga \cos(q_2 + q_3)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -80.5 \cos(q_2) - 37.1(q_3 + q_2) \\ -37.1 \cos(q_3 + q_2) \end{bmatrix}$$

### 3-6 Conclusion :

Ce chapitre est présenté une application de calcul des différents modèles du robot PUMA 60



## **Conclusion général :**

Le travail qui a fait l'objet de notre mémoire nous a permis de modéliser un bras manipulateur. Nous avons utilisé une modélisation cinématique et géométrique déjà traitée dans d'autres ouvrages et masters pour faire une modélisation dynamique afin de déterminer les efforts et les couples transmis par chaque articulation à chaque instant.

Nous avons choisi délibérément d'utiliser le formalisme de Lagrange car c'est une méthode pour laquelle la bibliographie est abondante et aussi dont les solutions des équations différentielles qui sont obtenues par cette dernière peuvent faire l'objet d'une résolution par les méthodes numériques.

Nous avons conclu notre travail par une application sur le robot puma pour lequel nous avons déduits les efforts et les couples à chaque instant pour une configuration précise.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] .M.PRIEL

Les robots industriels. Caractéristiques, performances et choix

Éditions AFNOR Technique (1990)

[2]-M .GIORDANO ; J .LOTTIN

Cours de robotique ,description et fonctionnement des robots industriels.

ARMAND COLIN 1990

[3]-M.J.ALDON

Elaboration automatique des méthodes dynamiques des robots en vue de leur conception et leur commande.

Thèse de doctorat d'état ,université de Languedoc Montpellier 1982.

[4]-R . J. H OOKER ; J-PEREIRA

An integrated robot analysis procedure

IEEE 1997 ,vol 22 ,N°10 , PP1069-1081

[5]-H.ASADA, J.J.SLOTINE-Robot Analysis and control

John Willey & sons-New York 1990

[6]-A . BARACCO

Modèle dynamique des manipulateurs.

ENSAM- paris Décembre 19867

[33]-M.C.READMAN ; P.R.BELANGER

Analysis and control of flexible joint robot ,

IEEE 1990

N [8]-P.COIFFET

Les robots ,Tome 1 :Modélisation et commande

HERMES 1981

## BIBLIOGRAPHIE

[9]-KHORASANI

Adaptive control of flexible joint robots.

IEEE 1992 ,vol8, N° 2, PP250-267.

[10]-J.WITTENBURG

Dynamics of systems of rigid bodies-B.G.TEUBNER

International conference on robotics. Stuttgart 1995

[11]-K.P.JAUKOWSKY; H.A.EL MARGHY

Dynamic decoupling for hybrid control of rigid /flexible –joint robots interacting with the environment .

IEEE 1992 ,vol 22, N°4 ,PP736-747.

[12]-E . DOMBRE ; W. KHALIL

Modélisation et commande des robots .HERMES 1988

[13]-K.A.TABOUB ;P.C.MULLER

A new control method applied to robot with joint elasticity.

IEEE 1994 , PP 565-570.

[14]-Dynamique Behaviour of deformable and rigid articulated systems

Structural mechanics in reactor technology 10<sup>th</sup> conf –Los Angeles. Aout1989

[15]-T.J.TARN ; A.K. BEJCZY

software elements

Journal of structural mechanics vol15 PP 1198-1208

[16]-P.ÄNDRE ;J.M KAUFMANN ; F.LHOTE ; J.P.TAILLARD

Les robots. Tome 4 Les constituants technologiques.

HERMES 1983.

[17]-SHYNG-HER LIN,SABRI TOSUNOGLI et DELBERT TESAR.

## BIBLIOGRAPHIE

Control of a six degree –of –freedom flexible industrial manipulator  
IEE journal of robotics research

[18]-C.S.G.LEE ; M. ZIEGLER.

A geometrical approach in solving the inverse kinematics of PUMA robots  
vol3 PP 87 -101

[19]-YOO,W.S ,and HAUG ,E.J

Dynamics of structural mechanics  
vol 14 PP 105-126.

[20]-FARHANG ,SAKHITAB ,YAZDI

Contribution à la simulation du comportement dynamique des mécanismes tridimensionnels  
Application à la conception des robots manipulateurs .  
Otobre 1983.

[21]-Introduction à la robotique

J-Grant, f .Bara Dalloz 1994

[22]-DENAVID, J & HARTENBERG.R.S.

Kinematic notation for lower –pair mechanisms based on matrices.  
Jour .Appl .Mech. , ASME, 22 , 1955, 215-221.

[23]-M.RENAND

Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs .  
Thèse de doctorat d'état université Paul Sabatier de Toulouse, septembre 1980.

[24]- N.BOLOTNIK ;V GRADETSKY; F.CHERNOUSKO

Manipulation robots dynamics and optimisation.  
CRC1993.

## ANNEXE A : Changement de repère affine

Etant donnés deux repères orthonormés direct  $R_i$  et  $R_j$  tels que :

$$R_i(o_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$$

$$R_j(o_j, \bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$$

$$\overrightarrow{o_i o_j} = p_x \cdot \bar{x}_i + p_y \cdot \bar{y}_i + p_z \cdot \bar{z}_i$$

Soit un point M quelconque tel que :

$$\overrightarrow{o_i M} = x_{mi} \cdot \bar{x}_i + y_{mi} \cdot \bar{y}_i + z_{mi} \cdot \bar{z}_i$$

$$\overrightarrow{o_j M} = x_{mj} \cdot \bar{x}_j + y_{mj} \cdot \bar{y}_j + z_{mj} \cdot \bar{z}_j$$

Selon la relation de Charll on a :

$$\overrightarrow{o_i M} = \overrightarrow{o_i o_j} + \overrightarrow{o_j M}$$

$$\overrightarrow{o_i M} \cdot \bar{x}_i = \overrightarrow{o_i o_j} \cdot \bar{x}_i + \overrightarrow{o_j M} \cdot \bar{x}_i$$

$$x_{mi} = p_x + x_{mj} \cdot \bar{x}_j \cdot \bar{x}_i + y_{mj} \cdot \bar{y}_j \cdot \bar{y}_i + z_{mj} \cdot \bar{z}_j \cdot \bar{z}_i$$

Et sous forme matricielle :

$$x_{mi} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mj} \\ y_{mj} \\ z_{mj} \\ 1 \end{bmatrix}$$

De même pour  $y_{mi}$  et  $z_{mi}$  et on aura finalement :

$$\begin{bmatrix} x_{mi} \\ y_{mi} \\ z_{mi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_x \\ \bar{y}_i \bar{x}_j & \bar{y}_i \bar{y}_j & \bar{y}_i \bar{z}_j & p_y \\ \bar{z}_i \bar{x}_j & \bar{z}_i \bar{y}_j & \bar{z}_i \bar{z}_j & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mj} \\ y_{mj} \\ z_{mj} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_x \\ \bar{y}_i \bar{x}_j & \bar{y}_i \bar{y}_j & \bar{y}_i \bar{z}_j & p_y \\ \bar{z}_i \bar{x}_j & \bar{z}_i \bar{y}_j & \bar{z}_i \bar{z}_j & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $T_{ij}$  est dite la matrice de transformation homogène.

## Matrice de transformation homogène

Soit  $R_{i-1}$  un repère orthonormé lié au corps  $C_{i-1}$  de la chaîne qui constitue le système poly articulé, soit  $R_i$  un repère lié au corps  $C_i$ .

La matrice de transformation homogène  $T_{(i-1)i}$  permet de définir le repère  $R_i$  par rapport au repère  $R_{i-1}$ . En utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg cette transformation est composée par un produit de quatre transformations qu'on définit comme suit :

$$T_{(i-1)i} = \text{Rot}(\bar{x}_{(i-1)}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\bar{x}_{(i-1)}, d_i) \cdot \text{Rot}(\bar{z}_i, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\bar{z}_i, r_i)$$

$$\text{Rot}(\bar{x}_{(i-1)}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \text{Trans}(\bar{x}_{(i-1)}, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(\bar{z}_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \text{Trans}(\bar{z}_i, r_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors on aura :

$$T_{(i-1)i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & d_i \\ c\alpha_i \cdot s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Dérivation de la matrice de transformation homogène

Soit  $T_{ij}$  la matrice de transformation homogène du repère  $R_i$  et  $R_j$  qu'on peut mettre sous forme :

$$T_{ij} = T_{(i+1)} \cdot T_{(i+2)} \dots T_{(j-1)j}$$

Elle dépend des variables  $q_{i+1}, \dots, q_j$  pour calculer la dérivée partielle de  $T_{ij}$  par rapport à la variable  $q_l$  on distingue les deux cas suivants :

**1<sup>er</sup> cas :**  $i \geq l > j$

Les éléments de la matrice  $T_{ij}$  ne dépendent pas de  $q_l$  alors :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = T_{i(i-1)} \cdot T_{(i-1)l} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} = T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}$$

On pose  $\Omega_{jl} = T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}$  et on peut écrire

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} = T_{ij} (T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}) = T_{ij} \cdot \Omega_{jl}$$

$$\begin{aligned} \text{Notons ici que : } \Omega_{il} \cdot T_{ij} &= (T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{li}) \cdot T_{ij} = T_{ij} \cdot T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} \\ &= T_{ij} (T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}) = T_{ij} \cdot \Omega_{jl} \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a } \Omega_{il} \cdot T_{ij} = T_{ij} \cdot \Omega_{jl}$$

finalement on peut écrire :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = \begin{cases} [0] & \text{si } i \geq l > j \\ T_{ij} \cdot \Omega_{jl} & \text{si } i < l \leq j \end{cases}$$



$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_1} = [0]$$

2eme cas ::  $i < l \leq j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} [T_{i(i+1)} \cdot T_{(i+1)(i+2)} \cdots T_{(j-1)j}] \\ &= T_{i(i+1)} \cdot T_{(i+1)(i+2)} \cdots T_{(l-2)(l-1)} \cdot \left( \frac{\partial T_{(l-1)l}}{\partial q_1} \right) \cdot T_{(l-1)l} \cdots T_{(j-1)j} \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\frac{\partial T_{(l-1)l}}{\partial q_1} = T_{(l-1)l} \cdot \Omega_{ll}$$

$$\text{et } \Omega_{ll} = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - \sigma_l) & 0 & 0 \\ (1 - \sigma_l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_j = 0$  pour une liaison rotoïde

$\sigma_j = 1$  pour une liaison prismatique

### Matrice d'un système constitué de n corps :

Soit  $T_{0n}$  la matrice de transformation homogène du repère  $R_0$  au repère  $R_n$  alors :

$$\frac{\partial T_{0n}}{\partial q_1} = \begin{cases} [0] & \text{si } 0 \geq l > n \\ T_{0n} \cdot \Omega_{nl} & \text{si } 0 < l \leq n \end{cases}$$

### Dérivée de la matrice de transformation homogène par rapport au temps :

$$dT_{ij} = \sum_{k=i+1}^j \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \cdot dq_k$$

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \sum_{k=i+1}^j \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt}$$

Il existe deux formes pour la dérivée de  $T_{ij}$  par rapport au temps :

$$1)- \frac{dT_{ij}}{dt} = \sum_{k=i+1}^j \Omega_{ik} \cdot T_{ij} \cdot \dot{q}_k = \left( \sum_{k=i+1}^j \Omega_{ik} \cdot \dot{q}_k \right) T_{ij}$$

$$2)- \frac{dT_{ij}}{dt} = \sum_{k=i+1}^j T_{ij} \cdot \Omega_{jk} \cdot \dot{q}_k = T_{ij} \left( \sum_{k=i+1}^j \Omega_{jk} \cdot \dot{q}_k \right)$$

$$\text{Donc } \frac{dT_{ij}}{dt} = \left( \sum_{k=i+1}^j \Omega_{ik} \cdot \dot{q}_k \right) T_{ij} = T_{ij} \left( \sum_{k=i+1}^j \Omega_{jk} \cdot \dot{q}_k \right)$$

Expression de l'énergie cinétique

## Expression de la matrice d'inertie A :

Soit  $M_k$  un point appartenant au solide  $S_k$

$$\overrightarrow{O_0 M_k} = T_{0k} \cdot \overrightarrow{(O_k M_k)} \quad \|\overrightarrow{O_k M_k}\| = \text{cte} \quad \text{cas des corps rigides}$$

$$V^0(M_k) = \frac{d^0}{dt} (O_0 M_k) = \frac{d^0}{dt} (T_{0k}) \cdot [O_k M_k]$$

$$\text{Soit deux vecteurs } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ alors } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \text{Trace}([a] \cdot [b]^T)$$

$$[V^0(M_k)]^2 = \text{Trace}([V^0(M_k)][V^0(M_k)]^T)$$

$$[V^0(M_k)]^T = [O_k M_k]^T \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \right)^T = [O_k M_k]^T \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right]$$

L'énergie cinétique du solide  $S_k$  est donnée par :

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \int_{S_k} [V^0(M_k)]^2 dm$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \int_{S_k} \text{Trace} \left[ \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j [O_k M_k] [O_k M_k]^T \sum_{l=1}^k \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \dot{q}_l \right] dm$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \int_{S_k} [O_k M_k] [O_k M_k]^T dm \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \dot{q}_j \dot{q}_l \right]$$

$$[J_k] = \int_{S_k} [O_k M_k] [O_k M_k]^T dm$$

$[J_k]$  c'est la pseudo matrice d'inertie de dimensions (4\*4) relative au corps  $S_k$  de la chaîne dans le repère  $R_k$ .

Elle est constituée à partir :

-du moment d'ordre zéro de  $S_k$  :  $m_k$  masse de  $S_k$ .

- des moments d'ordre un de  $S_k$  :  $G_k$  centre de masse de  $S_k$ .

- des moments d'ordre deux de  $S_k$  qui représente la matrice d'inertie  $[I_k]_k$  en  $O_k$  dans le repère  $R_k$ .

$$[I_k] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[J_k]_k = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{xy} & -I_{xz} & m\bar{x} \\ -I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{yz} & m\bar{y} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix}$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} = \begin{cases} [0] & \text{si } l > k \\ T_{0k} \cdot \Omega_{0l} & \text{si } l \leq k \end{cases}$$

puisque  $\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} = [0]$  si  $j > k$  et  $\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} = [0]$  si  $l > k$  Alors on peut écrire

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

pour cela:

$$\left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \max(l, j) \\ \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] & \text{si } k \geq \max(l, j) \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{k=\max(l, j)}^n \text{Trace} \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

$$\text{On pose } A_{jl} = \sum_{k=\max(l, j)}^n \text{Trace} \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \left[ \dot{q} \right] [A] \left[ \dot{q} \right]$$

⇒ L'énergie cinétique d'un système poly articulé est une forme quadratique des vitesses articulaires.

Les éléments de la matrice d'inertie [A] sont donnés par la relation suivante :

$$A_{ij} = \sum_{k=\max(i, j)}^n \text{Trace} \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right]$$

## Expression des coefficients dynamiques

### Expressions des éléments de la matrice des termes de Coriolis :

$$B_{i,jl} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_l} + \frac{\partial A_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jl}}{\partial q_i}$$

$$B_{i,jl} = 2 \sum_{k=\max(i,j,l)}^n \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial^2 T_{0k}}{\partial q_j \partial q_l} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \right]$$

$$B_{i,jl} = 2 \sum_{k=\max(i,j,l)}^n \text{Trace} \left[ \left[ \Omega_{0j} \cdot \Omega_{0l} \cdot T_{0k} \right] [J_k]_k \left[ \Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right]^T \right]$$

### Expression des éléments de la matrice des forces centrifuges :

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i}$$

$$C_{ij} = 2 \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[ \left[ \frac{\partial^2 T_{0k}}{\partial q_j \partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[ \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \right]$$

$$C_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[ \left[ \Omega_{0j} \cdot \Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right] [J_k]_k \left[ \Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right]^T \right]$$

### Expression des éléments du vecteur force de gravité :

$$E_p = \sum_{i=1}^n (-m_i \cdot g \cdot T_i \cdot u_i) \quad \text{donc} \quad G_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot \left( \frac{\partial T_{0i}}{\partial q_i} \right)$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot T_{0i} \cdot \Omega_{0i}$$