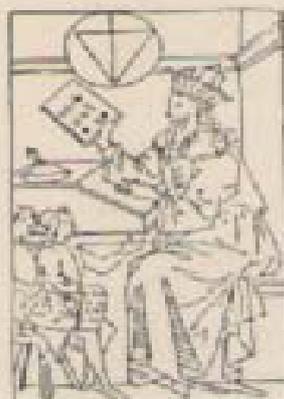


Carl Friedrich GAUSS

RECHERCHES
ARITHMÉTIQUES

Traduction française des *Disquisitiones Arithmeticae*



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE

DES MATIÈRES.

SECTION PREMIÈRE. *Des Nombres congrus en général.*

Nombres congrus, modules, résidus et non-résidus	n° 1 — 3
Résidus minima	4
Propositions élémentaires sur les nombres congrus	5 — 11
Applications	11 et 12

SECTION SECONDE. *Des Congruences du premier degré.*

Théorèmes préliminaires sur les nombres premiers, les diviseurs, etc. n°	13 — 23
Résolution des congruences du premier degré	24 — 31
De la recherche d'un nombre congru à des nombres donnés suivant des modules donnés	32 — 36
Congruences du premier degré à plusieurs inconnues	37
Différens théorèmes	38 et suiv.

SECTION TROISIÈME. *Des résidus des puissances.*

Les résidus des termes d'une progression géométrique qui commence par l'unité, forment une suite périodique	n° 45 — 48
--	------------

Des modules qui sont des nombres premiers.

Si le module est un nombre premier p , le nombre des termes de la période divise nécessairement $p - 1$	49
Théorème de <i>Fermat</i>	50, 51
A combien de nombres répondent les périodes dont le nombre des termes est un diviseur donné de $p - 1$	52 — 56
Racines primitives, bases, indices	57
Algorithme des indices	58, 59
Des racines de la congruence $x^n \equiv A$	60 — 68
Relation entre les indices pour différens systèmes.	69 — 71
Bases choisies pour des usages particuliers	72
Méthode pour trouver les racines primitives	73, 74
Divers théorèmes sur les périodes et les racines primitives.	75 — 81

Théorème

TABLE DES MATIÈRES.

xvii

Théorème de <i>Wilson</i>	n° 75
<i>Des modules qui sont des puissances de nombres premiers</i>	82 — 89
<i>Des modules qui sont des puissances de 2</i>	90 , 91
<i>Des modules composés</i>	92 , 93

SECTION QUATRIÈME. *Des congruences du second degré.*

Résidus et non-résidus quadratiques.	n° 94 , 95
Toutes les fois que le module est un nombre premier, le nombre des résidus moindres que lui est égal au nombre des non-résidus.	96 , 97
La question de savoir si un nombre composé est résidu d'un nombre premier donné, dépend de la nature de ses facteurs.	98 , 99
Des modules composés.	100 — 105
Caractère général auquel on peut reconnaître si un nombre donné est résidu ou non-résidu d'un nombre premier donné	106
<i>Recherches sur les nombres premiers qui ont pour résidus ou non- résidus des nombres premiers donnés</i>	107 et suiv.
Résidu $- 1$	108 — 111
Résidu $+ 2$ et $- 2$	112 — 116
Résidu $+ 3$ et $- 3$	117 — 120
Résidu $+ 5$ et $- 5$	121 — 123
Résidu $+ 7$ et $- 7$	124
Préparation à une recherche générale	125 — 129
Le théorème général (<i>fondamental</i>) s'établit par induction; con- clusions qu'on en déduit.	130 — 134
Démonstration rigoureuse de ce théorème	135 — 144
Méthode analogue de démontrer le théorème du n° 114	145
Solution du problème général	146
Des formes linéaires qui contiennent tous les nombres premiers dont un nombre quelconque donné est résidu ou non-résidu.	147 — 150
Travaux des autres géomètres sur ce sujet.	151
Des congruences complètes du second degré	152

SECTION CINQUIÈME. *Des formes et des équations du second degré.*

Objet de la recherche; définition et notation des <i>formes</i>	n° 153
Représentation des nombres; <i>déterminans</i>	154
Valeurs de l'expression $\sqrt{(b^2 - ac)}$ (mod. M), auxquelles appartient la représentation du nombre M par la forme (a, b, c)	155 ; 156
Forme qui en contient une autre, ou qui y est contenue; transfor- mation propre ou impropre.	157
Équivalence propre et impropre	158
Formes opposées	159
Contiguës	160

Diviseurs communs des coefficients des formes.	n° 161
Relation entre les transformations semblables d'une forme donnée en une autre forme donnée.	162
Formes <i>ambiguës</i>	163
Théorème relatif au cas où une forme est contenue à-la-fois dans une autre proprement et improprement	164 , 165
Considérations générales sur les représentations des nombres par les formes et leur liaison avec les transformations	166 — 170
<i>Des formes de déterminant négatif</i>	171 — 182
Applications particulières à la décomposition des nombres en deux quarrés, en un quarré et le double d'un autre, en un quarré et le triple d'un autre	182
<i>Des formes de déterminant positif non quarré</i>	183 — 205
<i>Des formes de déterminant quarré</i>	206 — 212
Des formes qui sont contenues dans d'autres, auxquelles elles ne sont cependant pas équivalentes.	213 , 214
<i>Des formes de déterminant = 0</i>	215
Solution générale en nombres entiers de toutes les équations indéterminées du second degré à deux inconnues.	216 — 221
Remarques historiques	222

RECHERCHES ULTÉRIEURES SUR LES FORMES.

Distribution par <i>classes</i> des formes de déterminant donné . . . n°	223 — 225
————— Des <i>classes en ordres</i>	226 , 227
Division des ordres en <i>genres</i>	228 — 237
<i>De la composition des formes</i>	238 — 244
Comparaison des ordres	245
————— des genres	246 — 248
————— des classes	249 — 251
Pour un déterminant donné, chaque genre d'un même ordre contient le même nombre de classes.	252
Composition des nombres de classes contenues dans deux genres d'ordres différens	253 — 256
Du nombre de classes <i>ambiguës</i>	257 — 260
Il y a toujours une moitié des caractères assignables pour un déterminant donné, à laquelle ne répond aucun genre proprement primitif (positif quand le déterminant est négatif).	261
Seconde démonstration du théorème fondamental, et des théorèmes relatifs aux résidus -1 , $+2$ et -2	262
On déterminera plus exactement cette moitié des caractères assignables auxquels ne répond aucun genre.	263 — 264
Méthode particulière pour décomposer un nombre premier donné en deux quarrés.	265

TABLE DES MATIÈRES.

xix

DIGRESSION CONTENANT UN TRAITÉ DES FORMES TERNAIRES, n° 266 — 285

Quelques applications à la théorie des formes binaires.

Trouver une forme de la duplication de laquelle résulte une forme binaire donnée	286
Il répond effectivement des genres à tous les caractères, excepté à ceux qui (n° 262, 263) ont été démontrés impossibles.	287 (3°)
Théorie de la décomposition des nombres et des formes binaires en trois carrés.	288 — 292
Démonstration des théorèmes de <i>Fermat</i> , que tout nombre entier est décomposable en trois nombres triangulaires ou en quatre carrés	293
Résolution de l'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$	294 — 295
Sur la méthode par laquelle <i>Legendre</i> a traité le théorème fondamental.	296 — 298
Représentation de zéro par des formes ternaires quelconques.	299
Résolution générale en nombres rationnels des équations indéterminées du second degré à deux inconnues	300
Du nombre moyen de genres.	301
————— de classes.	302 — 304
Algorithme particulier des classes proprement primitives; déterminans réguliers et irréguliers.	305 — 308

SECTION SIXIÈME. *Application des recherches précédentes.*

Décomposition des fractions en fractions plus simples	309 — 311
Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales.	312 — 318
Résolution de la congruence $x^2 \equiv A$ par une méthode d'exclusion	319 — 322
Résolution de l'équation indéterminée $mx^2 + ny^2 = A$ par exclusions,	323 — 326
Autre méthode pour résoudre la congruence $x^2 \equiv A$, quand A est négatif.	327 , 328
Deux méthodes pour distinguer les nombres composés des nombres premiers, et pour chercher leurs facteurs	329 et suiv.

SECTION SEPTIÈME. *Des équations qui déterminent les divisions du cercle.*

On réduit la recherche au cas le plus simple, où le nombre des parties en lesquelles on doit diviser le cercle, est un nombre premier. . . n°	336
Équations pour les fonctions trigonométriques des arcs qui sont une ou plusieurs parties aliquotes de la circonférence. Réduction des fonctions trigonométriques aux racines de l'équation $x^n - 1 = 0$	337
<i>Théorie des racines de cette équation</i> , en supposant n un nombre premier; si l'on omet la racine 1, les autres (Ω) seront données par l'équation $X = x^{n-1} + x^{n-2} + \text{etc.} + x + 1 = 0$	339 , 340
La fonction X ne peut être décomposée en facteurs de degré moindre dans lesquels les coefficients soient rationnels.	341

TABLE DES MATIÈRES.

Objet des recherches suivantes	n° 342
Toutes les racines Ω sont distribuées par périodes.	343
Divers théorèmes sur ces périodes.	344 — 351
Solution de l'équation $X = 0$, établie sur ces recherches.	352
Exemples pour $n = 19$, où la difficulté est réduite à deux équations du troisième degré et une du second, et pour $n = 17$, où elle est réduite à quatre équations du second degré.	353 , 354
<i>Recherches ultérieures sur ce sujet. Les valeurs des périodes dans les- quelles le nombre de termes est pair, sont toujours réelles. . .</i>	356
De l'équation qui détermine la distribution en deux, ou en trois périodes	357 , 358
Les équations qui donnent les racines Ω peuvent toujours être rame- nées à des équations à deux termes.	359 , 360
<i>Application des recherches précédentes aux fonctions trigonométriques; Méthode pour distinguer les angles qui répondent aux différentes racines Ω.</i>	361
On tire des sinus et cosinus les valeurs des tangentes, cotangentes, sécantes, cosécantes, sans se servir de la division.	362
Méthode pour abaisser successivement les équations qui donnent les fonctions trigonométriques.	363 , 364
Divisions du cercle qui peuvent s'effectuer par de seules équations du second degré, c'est-à-dire, par des constructions géométriques,	365 , 366

ADDITIONS DE L'AUTEUR.

NOTES (du Traducteur) sur les n° 162 et 164.

TABLES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



**ÉDITIONS
JACQUES GABAY**
RÉIMPRESSIONS

Paul APPELL

- *Traité de Mécanique rationnelle (3 tomes)*

Ludwig BOLTZMANN

- *Leçons sur la théorie des gaz*

Emile BOREL

- *Leçons sur les séries divergentes*

Léon BRILLOUIN

- *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
- *La science et la théorie de l'information*

Louis de BROGLIE

- *Ondes et mouvements*

Elie CARTAN

- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
- *Leçons sur la géométrie projective complexe*
- *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*
- *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile*

Augustin-Louis CAUCHY

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*
- *Analyse algébrique*

Michel CHASLES

- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*

R. DELTHEIL & D. CAIRE

- *Géométrie*
- *Transformations - Coniques*
- *Compléments de géométrie*
- *Géométrie métrique - Géométrie projective*
- *Géométrie anallagmatique*

Joseph FOURIER

- *Théorie analytique de la chaleur*

Évariste GALOIS

- *Œuvres mathématiques*
- publiées en 1846 dans le *Journal de Liouville*
- suivies d'une étude par

Sophus LIE

- *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*

Carl Friedrich GAUSS

- *Disquisitiones Arithmeticae* (traduction française)

Jacques HADAMARD

- *Leçons de géométrie élémentaire (2 vol.)*

Camille JORDAN

- *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 vol.)*
- *Traité des substitutions et des équations algébriques*

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- *Textes d'Anpère, Cauchy, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Poisson...*

Stephen C. KLEENE

- *Logique mathématique*

Joseph-Louis LAGRANGE

- *Mécanique analytique*
- Édition originale de la *Mécanique analytique* parue en 1788

Trajan LALESCO

- *La géométrie du triangle*

Henri LEBESGUE

- *Leçons sur les constructions géométriques*
- *Les Coniques*

A. LIAPOUNOFF

- *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ

- *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst MACH

- *La Mécanique*
- *Exposé historique et critique de son développement*

James Clerk MAXWELL

- *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 vol.)*

John von NEUMANN

- *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Julius PETERSEN

- *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de géométrie*

Henri POINCARÉ

- *Calcul des probabilités*
- *La Mécanique nouvelle*
- *Conférence (1909), Mémoire (1905) et Note (1905) sur la Théorie de la Relativité*
- *Théorie du potentiel newtonien*
- *Théorie des tourbillons*
- *Théorie mathématique de la lumière*
- *Tome I,*
- *Tome II, Nouvelles études sur la diffraction*
- *Théorie de la dispersion de Helmholtz*
- *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
- *Électricité et Optique*

George POLYA

- *Comment poser et résoudre un problème*

Erwin SCHRÖDINGER

- *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Paul TANNERY

- *Pour l'histoire de la science helène*
- *La géométrie grecque*

François TISSERAND

- *Traité de Mécanique céleste*
- *Tome I, Perturbation des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires*
- *Tome II, Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*
- *Tome III, Exposé d'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune*
- *Tome IV, Théorie des satellites de Jupiter et de Saturne*
- *Perturbations des petites planètes*
- *Leçons sur la détermination des orbites, avec une préface de H. Poincaré*

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY

151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

Téléphone : (1) 43 54 64 64 - Télex : 203 521 F