

Arezki KESSI et Abdelouahab MAHMOUDI

ELEMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE
SERIES et INTEGRALES

Cours et Exercices corrigés

LES
Mathématiques
à
l'Université

 Intégrales impropres

 Séries numériques réelles

 Suites et séries de fonctions
d'une variable réelle

 Séries entières

 Séries de Fourier

 Intégrales dépendant
d'un paramètre



Table des matières

1	Intégrales impropres	1
1.1	Notions générales	1
1.2	Formules d'intégration des intégrales impropres	3
1.2.1	Utilisation d'une primitive	3
1.2.2	Linéarité des intégrales impropres	3
1.2.3	Inégalité des intégrales	4
1.2.4	Intégration par parties	4
1.2.5	Changement de variable	4
1.2.6	Exemples de base	5
1.3	Convergence des intégrales impropres	6
1.3.1	Critère de Cauchy	6
1.3.2	Convergence absolue d'une intégrale impropre	7
1.3.3	Intégrales impropres des fonctions positives	8
1.3.4	Intégrales impropres semi-convergentes	13
1.3.5	Formules de la moyenne	13
1.3.6	Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales	15
1.3.7	Valeur principale d'une intégrale divergente	16
1.4	Exercices corrigés	19
2	Séries numériques réelles	49
2.1	Progression géométrique	49
2.1.1	Notions générales	49
2.1.2	Progression infinie	50
2.1.3	Transformations élémentaires des progressions	51
2.2	Notions générales sur les séries numériques	52
2.3	Séries à termes positifs	56
2.3.1	Critères de comparaison	56
2.3.2	Règle de D'Alembert et règle de Cauchy	58
2.3.3	Comparaison d'une série avec une intégrale	60
2.3.4	Comparaison avec les séries de Riemann	61
2.4	Séries à termes de signe quelconque	61
2.4.1	Séries absolument convergentes	61
2.4.2	Séries semi-convergentes	64
2.4.3	Critères de convergence pour les séries à termes de signe quelconque	66
2.5	Complément sur les séries numériques	69
2.5.1	Règle de Duhamel	69
2.5.2	Critère de Kummer	70
2.5.3	Critère de Raabe	71
2.5.4	Critère de Bertrand	72

2.5.5	Critère de Gauss	73
2.6	Exercices corrigés	73
3	Suites et séries de fonctions d'une variable réelle	101
3.1	Progression géométrique	101
3.1.1	Introduction	101
3.1.2	Intégration d'une progression géométrique	102
3.1.3	Dérivation d'une série géométrique	103
3.2	Convergence des suites et séries de fonctions	103
3.2.1	Convergence simple des suites et séries de fonctions	103
3.2.2	Convergence uniforme des suites de fonctions	104
3.2.3	Convergence uniforme des séries de fonctions	107
3.2.4	Propriétés des suites et séries de fonctions uniformément convergentes	110
3.3	Exercices corrigés	115
4	Séries entières	129
4.1	Généralités	129
4.2	Convergence uniforme des séries entières	132
4.3	Opérations sur les séries entières	133
4.4	Dérivation et intégration des séries entières	134
4.5	Développement d'une fonction en série entière	135
4.5.1	Unicité du développement d'une fonction en série entière	135
4.5.2	Conditions suffisantes	136
4.5.3	Développement en série entière de fonctions usuelles	136
4.6	Exercices corrigés	138
5	Séries de Fourier	151
5.1	Notions générales	151
5.1.1	Périodes d'une fonction périodique	151
5.2	Séries trigonométriques-Séries de Fourier	153
5.2.1	Propriétés du système trigonométrique; série de Fourier	154
5.2.2	Développement en séries de Fourier des fonctions paires et impaires	156
5.2.3	Développement de fonctions en séries de Fourier sur $[-\pi, \pi]$	158
5.2.4	Convergence des séries de Fourier	158
5.2.5	Approximation en moyenne quadratique - Egalité de Parseval	162
5.3	Exercices corrigés	163
6	Intégrales dépendant d'un paramètre	175
6.1	Intégrales propres dépendant d'un paramètre	175
6.2	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre	178
6.2.1	Notion de convergence uniforme	179
6.2.2	Critères de convergence	181
6.2.3	Propriétés des intégrales uniformément convergentes	183
6.3	Fonctions eulériennes	192
6.3.1	Fonction Bêta	192
6.3.2	Fonction Gama	194
6.4	Exercices corrigés	197
	Bibliographie	215

L'assimilation de bien de notions mathématiques requière d'abord la maîtrise de quelques notions sur les séries et les intégrales impropres. Leur rôle est essentiel dans l'étude de plusieurs techniques et concepts tels que : l'intégration de certaines équations différentielles, le calcul opérationnel, la notion de fonctions analytiques, le calcul asymptotique, et bien d'autres ...

C'est en raison de cela que la place attribuée à ce cours dans le programme des années du tronc commun des filières de technologie, de sciences exactes et d'informatique est d'une importance manifeste.

L'avantage de ce livre est de donner, d'une part, des démonstrations claires et rigoureuses sans faire usage de résultats hors programme et, d'autre part, faire suivre chaque chapitre d'une longue série d'exercices avec des solutions détaillées pour parfaire la compréhension du tout.

Ouvrages déjà parus dans la même collection

