## **UNIVERSITE DE BLIDA 1**

Département de Génie Mécanique

# THESE DE DOCTORAT

En Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

# EFFET DES IMPERFECTIONS THERMIQUES ET CALORIFIQUES ET DU GAZ SUR LA FONCTION DE PRANDTL MEYER.

Par

## **BENGHERBIA Nardjes**

Devant le jury composé de :

Abdellah BENAROUS	Professeur,	U. Blida 1,	Président
Merouane SALHI	M.C.A,	U. Blida 1,	Directeur de Thèse
Mohamed ROUDANE	Professeur,	U. Blida 1,	Co -Directeur
Samir DANOUNI	M.C.A	Centre.U de Tipaza,	Examinateur
Fatih BOUZEFOUR	M.R. A	UDES, Bousmail, Tipaza	, Examinateur

Blida, Juillet 2024

#### RESUME

L'objectif de cette étude est de créer un nouveau logiciel de calcul numérique afin d'évaluer l'impact des imperfections gazeuses sur les calculs de la fonction de Prandtl Meyer. On utilise fréquemment cette fonction dans la conception des tuyères supersoniques, en particulier celles de longueur minimale (MLN). Le but est de tester différents gaz afin d'améliorer les paramètres de conception des tuyères supersoniques pour la propulsion à froid ou pour les systèmes de propulseurs chauffés à haute pression et température. Dans cette étude, nous avons examiné les composants H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Co, No et l'air. Selon la température et la pression génératrices, le nombre de Mach et le gaz utilisé comme combustible ininflammable, la fonction de Prandtl Meyer est influencée. Quand les paramètres générateurs des gaz augmentent, leurs chaleurs spécifiques et leur rapport commencent à changer, et le gaz parfait commence à agir comme un gaz réel. Il est possible de donner cette explication à la correction de Berthelot des termes de l'équation d'état concernant un gaz parfait, car le co-volume et les forces d'attraction intermoléculaires du gaz ont eu un impact sur le système. Les écarts entre les valeurs de la fonction de Prandtl-Meyer ont été calculés pour divers gaz ainsi que pour l'air. Les résultats ont démontré que l'emploi de H2, N2 et Co a entraîné une diminution significative du poids, de lalongueur et du volume de la tuyère MLN, et a permis de développer des systèmes de propulsion aérospatiale capables d'atteindre la poussée maximale, par rapport à l'utilisation de l'air. Les résultats du système avec l'utilisation des gaz mentionnés précédemment sont supérieurs de 16 % à ceux de l'air.

#### Mots Clés

Ecoulement supersoniques, Fonction de Prandtl Meyer, imperfections thermique et calorique, Gaz parfait GP, Gaz réel GR.

#### ABSTRACT

The aim of this work is to develop a computational program to determine the effects of gaseous imperfections on calculations of the Prandtl Meyer function. Which is often applied to minimum length nozzle (MLN) design. The aim is to improve the design parameters of supersonic nozzles when using a gas propellant for cold propulsion or heated thruster systems under a high pressure and temperature. We considered H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Co, No, and air to this end. The Prandtl–Meyer function depends on the stagnation temperature, pressure, Mach number, and the gas used as non-flammable fuel. As values of the parameters of stagnation of the gases increased, their specific heats as well and ratio began to vary, and the ideal gas began behaving as a real gas. This can be explained by Berthelot's correction of the terms of the equation of state related to a perfect gas, because the co-volume and intermolecular forces of attraction of the gas influenced system. We calculated differences in values of the Prandtl-Meyer function for different gases and air. The results showed that the use of H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, and Co led to a significant reduction in the weight, length, and volume of the MLN, and it yielded better performance in terms of the manufacture of aerospace propulsion systems that can attain the maximum thrust than when air was used. The performance of the system when the above gases were used was 16% better than when air was used.

#### <u>Keywords</u>

Supersonic flow, Prandtl Meyer function, thermal and caloric imperfections, Ideal gas GP, Real gas GR.

#### ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطوير برنامج حسابي عددي جديد لإظهار مدى تأثير عيوب الغاز على حسابات دالة براندتل ماير. غالبًا ما يتم تطبيق هذه الدالة على تصميم الفوهات الأسرع من الصوت، خاصة ذات الطول الأدنى (MLN). يكمن المغزى من هذا العمل في اختبار عدد معين من الغازات من اجل تحسين معايير تصميم الفوهات الأسرع من الصوت عند استخدام الوقود الدافع الغازي للدفع البارد أو أنظمة الدفع الساخنة تحت ضغط ودرجة حرارة مرتفعين. لقد أخذنا في الاعتبار H2، O2، Cl2، Cl2، Cl2، Cl2، Cl2، والهواء لهذه الغاية. تعتمد وظيفة براندتل-ماير على درجة حرارة الركود، والضغط، ورقم ماخ، والغاز المستخدم كوقود غير قابل للاشتعال. مع زيادة ضغط وحرارة الغازات، فان قيم الحرارة النوعية ومعاملاتها غاما تبدآ في الاختلاف، ويبدأ الغاز المثالي يتصرف كغاز حقيقي. ويمكن الحجم والجزيئات للغاز تؤثر على النظام. قمنا بحساب الاختلاف، ويبدأ الغاز المثالي يتصرف كغاز حقيقي. ويمكن أظهرت النتائج أن استخدام على النظام. قمنا بحساب الاختلاف، ويبدأ الغاز المثالي يتصرف كغاز حقيقي. ويمكن أظهرت النتائج أن استخدام على النظام. قمنا بحساب الاختلاف، ويبدأ الغاز المثالي يتصرف كغاز حقيقي. ويمكن أطهرت النتائج أن استخدام على النظام. قمنا بحساب الاختلاف، ويزن وطول وحجم فوهة المنتركة بين أذه الحجارة النائي من حلال تصحيح الم والي مع الخار المالي الغاز المثالي، لأن قوى الجذب المشتركة بين المحارة النتائج أن استخدام على النظام. قمنا بحساب الاختلافات في قيم دالة براندتل ماير للغازات والهواء المختلفة. أظهرت النتائج أن استخدام على النظام. قمنا بحساب الاختلافات في قيم دالة براندتل ماير الغازات والهواء المختلفة. أذاء أفضل من حيث تصنيع أنظمة الدفع الفضائية التي يمكنها تحقيق أقصى قوة دفع. مما كان عليه عندما تم استخدام أداء أفضل من حيث تصنيع أنظمة الدفع الفضائية التي يمكنها تحقيق أقصى قوة دفع. مما كان عليه عندما تم المردام

#### الكلمات المفاتيح:

التدفق الأسرع من الصوت، ، دالة بر انتل ماير ، غاز غير مثالي حر اريا ونوعيا, غاز مثالي, غاز حقيقي.

### DEDECACES

Je dédier ce modeste travail, synonyme de concrétisation de tous mes efforts fournis ces Cinq dernières années Ames très chers parents, ma raison de vivre, symbole de courage. et de sacrifie, que dieu les gardes. A mes très chers frères. A mes oncles et mes tantes. A mes cousins et mes cousines. A toutes les familles Bengherbia et Bouchakour A tous mes amies

Bengherbia Nardjes

#### REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail. Je remercie mes très chers parent pour leurs aides et leur soutient durant cette période de réalisation de ce travail.

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il ! Alors j'y cède en disant en grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je tiens à donner notre gratitude remerciement à mon directeur de thèse, monsieur **Merouane Salhi** Maitre de Conférences A au Département de Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université de Blida 1 directeur de cette thèse, qui m'a prodigué les conseils et les encouragements pour finaliser ma thèse.Je garde l'excellent souvenir de nos discussions, il m'a aidé minutieusement avec amabilité et patience malgré ses occupations. J'ai beaucoup admiré sa simplicité, son ardeur au travail, ses qualités humaines et son raisonnement scientifique. C'est ici pour moi l'occasion de lui témoigner toute ma gratitude.

Monsieur **Mohamed Roudane**, Professeur au Département de Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université de Blida 1, Co-promoteur de cette thèse. Je n'ai pas de mots pour le remercier assez, mais je lui dirais seulement merci pour tout ce que vous avez fait pour moi et je vous serais reconnaissant durant toute ma vie... *Merci.* 

A monsieur **Benarous Abdellah**, j'exprime ma profonde gratitude pour son apport scientifique et d'avoir accepté d'honorer par sa présence notre président de jury d'examen. La présence de monsieur **Bouzeffor fatih**, dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur **Danouni Samir** pour sa confiance et d'avoir accepté être examinateur de mon travail.

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

## TABLE DES MATIERES

RE	SUME			
RE	MERC	IMENTS		
ΤA	BLE D	ES MATIE	RES	
LIS	TE DE	ES ILLUSTI	RATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	
INT	RODI	JCTION		1
1.	СНА	PITRE 1 :L	OIS DES MODELES DES GAZ REELS	7
	1.1.	Introducti	on	7
	1.2.	Relation	entre le Volume d'un Gaz et sa Pression : Loi de	7
		Boyle-Ma	ariotte	
	1.3.	La relatio	on entre Volume et Température pour les gaz	8
		parfaits p	arfait : loi de Guy Lussac	
	1.4.	Le Comp	ortement des Gaz Parfaits	9
	1.5.	Les gaz r	réels	10
	1.6.	Equation	d'état des gaz réels	10
		1.6.1.	Effet du volume exclu	11
		1.6.2.	Effet des forces d'attraction intermoléculaires	12
	1.7.	Les équ	ations des gaz réels (par ordre de complexité)	13
		1.7.1.	Equation de VAN DER WAALS	13
		1.7.2.	Equation de BERTRHELOT	14
		1.7.3.	Equation de CAUSIUS	14
		1.7.4.	Equation de REDLICH-KWONG	15
		1.7.5.	Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN	15
		1.7.6.	Equation de DIETERICI	16
		1.7.7.	Equation de WOHL	16
		1.7.8.	Equation de BERTRHELOT Modifiée	16
	1.8.	Les coo	rdonnées du point critique- équations réduites	17
		1.8.1.	Application sur l'équation de BERTHELOT	18
		1.8.2.	Calcul les constants a, b et R	18
		1.8.3.	Equation réduite	19
	1.9.	Equation	ns de VIRIEL	20

		1.9.1.	La fonctio	on du volume	e v du gaz $\frac{P}{r_{1}}$	$\frac{V}{T} = f\left(\frac{1}{V}\right)$	21
		1.9.2	La fonctio	on de la pres	ssion P du ga	$Z \frac{PV}{rT} = f(P)$	22
	1.10.	Facteur d	e compres	sibilité			23
	1.11.	Choix de	l'équation	d'état			24
	1.12	Validatior	n du choix	de l'équatior	n de Berthelot		24
	1.13	Conclusio	on				25
2.	CHAP	TRE 2 :EI	FET DE	LA PRESSI	ON GENER	ATRICE SUR	26
	LES	PARAN	IETRES	THERMO	DYNAMIQU	ES D'UN	
	ECOU	LEMENT S	SUPERSO	NIQUE			
	2.1.	Introducti	on				26
	2.2.	Hypothès	es de base	Ð			27
	2.3	Configura	ation des é	quations			28
		2.3.1	L'équatio	n de la cons	ervation d'én	ergie	29
		2.3.2	Détermin	ation la diffé	rentielle dP e	n fonction de	30
			dp lorsqu	le la tempéra	ature T sera	constante	
		2.3.3	Détermin	ation la diffé	rentielle dρ/ρ		31
		2.3.4.	Détermin	ation	les	paramètres	31
			thermody	namique po	ur les gaz rée	els	
			2.3.4.1.	L'état géné	rateur		34
			2.3.4.2.	La forme	intégrale d	e l'équation	34
				d'énergie p	our l'équation	de Berthelot	
	2.4	Détermin	ation du no	ombre de Ma	ach		35
		2.4.1	Calcul de	e la vitesse			35
		2.4.2.	Détermin	ation de la c	élérité du sor	١	36
		2.4.3.	Le nomb	re de Mach			37
	2.5	La chaleu	ır spécifiqu	ie à volume	constante $c_v$	$(T, \rho)$	38
	2.6	La chaleu	ır spécifiqu	le à pressior	constante c	$_{p}(T,\rho)$	39
	2.7	Rapport of	des chaleu	rs spécifique	esγ		40
	2.8	Détermin	ation de ra	pport des se	ections d'un é	coulement	41
	2.9	Détermin	ation de l'e	expression d	u débit massi	que critique	42
	2.10	La Pouss	ée				43
		2.10.1	Le coeffic	cient de pous	ssée		43

		2.10.2	Erreur du modèle Gaz réel	43
	2.11	Conclus	ion	43
	3.CHA	PITRE 3	EFFET DU GAZ SUR LA FONCTION DE	44
	PRAN	DTL MEY	ER	
	3.1.	Introduc	tion	44
	3.2.	Détente	de Prandtl-Meyer	45
	3.3.	Détermi	nation de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR	46
		3.3.1.	Formulations mathématiques	46
	3.4.	Les Proc	cédures du calcul numérique	48
		3.4.1.	Détermination la masse volumique génératrice	48
			ρο	
		3.4.2.	Détermination les rapports thermodynamiques	49
		3.4.3.	La méthode de Newton	51
		3.4.4.	Algorithme de la méthode de Newton appliquée	52
			aux systèmes	
		3.4.5.	Le choix de la solution initial	53
		3.4.6.	Détermination les rapports critiques au col	53
		3.4.7	Procédure de calcul par la méthode de	54
			Simpson	
		3.4.8	Procédure de calcul par la méthode de Gauss	57
			Legendre	
		3.4.9.	Effet de la quadrature sur la convergence du	60
			problème	
	3.5.	Conclus	ion	61
	4.CHA	PITRE 4	RESULTATS ET COMMENTAIRES	62
	4.1.	Résultat	s pour les caractéristiques d'un gaz réel	62
	4.2.	Résultat	s sur la fonction de Prandtl Meyer	65
	4.3.	Résultat	s sur l'erreur pour la fonction de Prandtl Meyer	70
СО	NCLUS	ION		74
AP	PENDIC	E		76
А	Liste d	les symbo	les	76
RE	FEREN	CES		78

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure. 1.1	Loi de Boyle-Mariotte	8
Figure 1. 2	Loi de Guy Lussac	9
Figure 1 .3	Configuration des molécules dans un gaz parfait et gaz réel	11
Figure 1.4	Le volume soustrait autour de chaque sphère dure	11
Figure 1.5	Effet de l'interaction moléculaire sur la pression du gaz réel	12
Figure. 1.6	les isothermes des gaz réels dans un diagramme de Clapeyron	17
Figure 1.7	Variation du Facteur de compressibilité Z en fonction de la	23
	température	
Figure 2.1	Diagramme de force pour la poussé du moteur-fusée	42
Figure 2.2	Tuyère propulsive d'un moteur fusée	43
Figure 3.1	Forme générale d'une tuyère à détente centrée	44
Figure 3.2	Schéma de la détente de Prandtl-Meyer	45
Figure3.3	Schéma d'une onde de compression	45
Figure 3.4	Étapes de calcul du PMF	50
Figure 3.5	Présentation de la condensation des nœuds:	55
Figure 3.6	Variation de la fonction $F_{vT}$ (T, $\rho$ ) dans [T <sub>S</sub> , T <sub>*</sub> ]	56
Figure3.7	Condensation des nœuds vers les deux extrémités de	56
	l'intervalle [Ts , <i>T</i> *]	
Figure 3.8	Variation de la fonction $F_{v\rho}(T, \rho)$ dans [ $\rho_S$ , $\rho$ ·]	56
Figure 4.1	Variation des chaleurs spécifiques Cp (Τ,ρ) en fonction de la	63
	température génératrice T <sub>0</sub>	
Figure 4.2	Variation du rapport de la chaleur spécifique γ en fonction de la	65
	température de génératrice T <sub>0</sub>	
Figure 4.3	Variation de la valeur v de la fonction Prandtl Meyer en fonction	67
	du nombre de Mach	
Figure 4.4	Variation de la valeur v de la fonction Prandtl Meyer en fonction	70
	de la température génératrice	
Figure 4.5	Variation de l'erreur sur v pour différents gaz par rapport à l'air	71
	en fonction de M.	
Figure 4.6	Variation de l'erreur sur v pour différents gaz par rapport à l'air	72

en fonction de la Température génératrice T<sub>0</sub>.

Figure 4.7 Variation de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction de la 73 température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice P<sub>0</sub>

Tableau1.1	Constantes a et b de l'équation de Van Der Waals	14
Tableau 2.1	Les paramètres des gaz	27
Tableau 2.2	Les paramètres critiques des gaz	27
Tableau 3.1	Abscisses et coefficients associes de la quadrature	58
	d'intégration de Gauss Legendre d'ordre 32	

Tableau 3.2EffetEfficacitédesquadraturessurlerésultatpourune60précision  $\varepsilon = 10^{-6}$ 

## ETAT DE L'ART

Les tuyères supersoniques sont des organes essentiels de la conception des engins aéronautiques et spatiaux. Ils jouent un rôle essentiel dans diverses structures, comme les moteurs d'avions, les missiles [1], ainsi que dans la production de souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale d'écoulements supersoniques réels. Les concepteurs aérodynamiciens ont lancé les premières applications en 1935. À cette époque, toutes les recherches reposaient sur les expériences.

Le développement de l'informatique n'avait pas encore débuté.

Quelques années plus tard, les designers ont considéré l'amélioration des performances des tuyères de propulsion en même temps que les études expérimentales et numériques. Le besoin et le désir d'une forme de tuyère sont différents en fonction de son usage. Les moteurs fusés sont conçus selon deux principes fondamentaux : avoir une poussée maximale tout en minimisant le poids de la tuyère (longueur minimale). On sait que la masse de la tuyère constitue une part importante de la masse totale des missiles [2].

Le modèle du gaz parfait à chaleur spécifique CP constante est utilisé pour la plupart des travaux publiés dans le domaine de la conception des tuyères [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Cette idée ne prend pas en considération la réaction du gaz à une température génératrice élevée, même à des températures supérieures à 1000 K°. Dans ce cas, le modèle mathématique du calcul doit être réévalué entièrement. Le modèle actuel sera appelé modèle du gaz parfait à haute température. L'équation de conservation de l'énergie est la seule caractéristique qui différencie les deux modèles. Il n'y a pas de difficulté à maintenir la masse et la vitesse de mouvement. Par conséquent, la substitution de l'équation de l'énergie par une nouvelle qui prend en considération la variation des chaleurs spécifiques à haute température offre un nouveau modèle à résoudre, dont la philosophie de la résolution ne change pas entièrement, à l'exception de quelques modifications. Il convient de souligner qu'il est habituel de sélectionner deux variables d'état pour déterminer les autres paramètres nécessaires pour résoudre un tel problème. Ainsi, le système mathématique du gaz parfait devient un exemple particulier de modèle à haute température.

Les résultats de l'écoulement supersonique des gaz parfaits sont valides en se basant sur l'hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait, c'est-à-dire que les chaleurs spécifiques Cp et Cv sont constantes et ne dépendent pas de la température. En utilisant l'équation d'état d'un gaz parfait, les résultats obtenus par le modèle haute température sont valides en se basant sur l'hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement imparfait [10].Dans ce contexte, les deux modèles se transforment en deux exemples spécifiques de notre modèle.

L'analyse de Tsien a manqué de prendre en compte l'effet de joule thomson, ce qui a entraîné une erreur. Les auteurs ont identifié cette erreur dans leur référence [11] et ont examiné les effets des vibrations moléculaires et des défauts calorifiques sur la conception des tuyères axisymétriques. Cependant, malgré l'approximation des rapports thermodynamiques théoriques et leur présentation comme les rapports d'un gaz parfait, ce modèle est toujours applicable à une faible pression génératrice.

L'air est toujours employé comme gaz de propulsion dans les applications expérimentales ou dans le calcul, car il est présent en grande quantité dans la nature, possède des caractéristiques thermodynamiques et tous les écoulements externes et internes des engins aérospatiaux entrent en contact avec l'air.

Dans les références [12], [13], la fonction de Prandtl Meyer a été développée en se basant sur l'hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait. En revanche, la fonction de Prandtl Meyer du modèle à haute température HT [14] est utilisée en se basant sur l'imperfection calorique du gaz, ce qui entraîne une erreur significative à haute pression. Tandis que notre modèle RG repose sur les suppositions d'un gaz thermiquement et calorifiquement imparfait (gaz réel).

Ainsi, le modèle HT est corrigé par une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer, qui change en fonction de la température et de la masse volumique, notamment à haute pression. La méthode des caractéristiques [15], [16], [17] a été développée dans cette étude afin de concevoir et de dimensionner des tuyères de type à détente centrée bidimensionnelle. Cependant, en incluant l'effet de la pression génératrice sur tous les paramètres, qui varie en fonction de la température et de la masse volumique, cela est pertinent lorsque la température et la pression génératrice de la chambre de combustion sont élevées.

Afin d'obtenir des contours théoriques, une méthode a été développée pour obtenir des tuyères. La méthode consiste à rectifier les modèles GP et HT. En ce qui concerne un gaz parfait (GP), des travaux ont déjà été réalisés. Toutefois, ces études sont restreintes à des températures et des pressions basses, où nous pouvons atteindre 1000k et avec des nombres de Mach de sortie inférieurs à environ M=2,0.

### Introduction

La stabilité de l'écoulement est nécessaire pour les calculs précis de la dynamique des gaz avancés, en particulier pour la conception des tuyères des fusées. C'est pourquoi les concepteurs cherchent à rendre l'écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. De plus, une déviation au niveau du col de la tuyère est nécessaire en fixant un angle initial de détente approprié pour obtenir le nombre de Mach de sortie souhaité.

Ce type de tuyère est conçu en utilisant la méthode des caractéristiques (MOC) [18], qui est basée sur la fonction de Prandtl-Meyer (PMF) [19, 20] qui joue un rôle essentiel dans la conception des systèmes de propulsion des fusées [21]. Il est possible d'obtenir des systèmes de propulsion de fusée ayant un faible poids et un coefficient de poussée élevé en utilisant un gaz approprié comme propulseur pour satisfaire aux exigences susmentionnées de la tuyère de longueur minimale (MLN) [22].

La plupart des recherches passées sur la conception des tuyères supersoniques ont été basées sur le modèle du gaz parfait (PG) avec une chaleur spécifique constante CP, ou en utilisant un modèle à haute température (HT) où CP et les paramètres associés dépendent de la température [23]. Ces modèles ne tiennent pas compte du comportement réel du gaz lorsque la pression génératrice est élevée.

Les performances des tuyères conçues sur la base de l'hypothèse d'un PG se dégradent en termes de nombre de Mach de sortie et de poussée, en particulier lorsque la température génératrice T<sub>0</sub> est élevée. Il s'agit d'un problème important que l'on rencontre fréquemment en aéronautique. Le modèle HT est efficace à une faible pression génératrice, mais génère une erreur significative à une pression élevée. Ce modèle mathématique doit donc être révisé. Au contraire, le modèle d'un gaz réel (RG) représente un gaz caloriquement et thermiquement imparfait [24]. Par conséquent, de nombreuses équations ont été développées et améliorées dans les travaux antérieurs

dans le domaine où les caractéristiques du problème changent avec les changements de température et de pression [25].

La recherche a démontré qu'un gaz réel (GR) diffère d'un PG par trois propriétés : les forces intermoléculaires, le volume exclu et la compressibilité. Ces propriétés peuvent être classées comme des imperfections thermiques et calorifiques [26]. Dans cette étude, nous mettons l'accent sur les thèses suivantes : Les imperfections thermiques causées par les forces intermoléculaires et les effets de la taille des molécules sont particulièrement visibles à basse température et à basse pression. Les changements dans la capacité thermique vibratoire du gaz conduisent à des défauts caloriques significatifs. Les circonstances qui conduisent à la dissociation moléculaire et à l'excitation électronique des gaz (par exemple, des températures nettement supérieures à 3600 K) peuvent être ignorées pour le moment.

La fonction de Prandtl-Meyer a connu plusieurs étapes d'évolution dans la recherche, d'une fonction explicite liée au nombre de Mach basée sur l'hypothèse d'un PG [27] au modèle HT [28,29], dans lequel la variable principale est la température. Les auteurs de la référence [30] ont développé une forme générale qui est valable pour les gaz dans toutes les conditions, et qui est différente des autres modèles pertinents car elle considère la température (T) et la densité (p) comme les deux paramètres principaux.

Dans cette thèse, nous formulons les équations de l'écoulement du gaz sur la base de l'équation d'état de Berthelot au lieu de l'équation de Van der Waal [31]. Ce choix d'équation d'état permet une estimation plus précise des effets des forces intermoléculaires. L'imperfection calorique peut être représentée en incorporant les expressions dues à Planck en termes de CP et de CV. Nous cherchons à fournir une expression générale de cette fonction basée sur l'équation d'état de Berthelot, avec des corrections significatives pour tenir compte de l'influence du co-volume du gaz et des forces d'attraction intermoléculaires en considérant les effets des vibrations moléculaires [32]. Ces dernières contribuent à la perfection calorique du gaz. L'objectif de cette étude est de développer un programme de calcul pour examiner les effets du

gaz utilisé comme propulseur à une pression et une température élevées sur la fonction de Prandtl-Meyer (PM).

L'amélioration des performances des tuyères supersoniques est cruciale dans la recherche sur la propulsion et l'ingénierie aérospatiale. La tuyère supersonique est un composant important dans différents types d'appareils, y compris les avions et les missiles supersoniques [33]. La tuyère peut peser jusqu'à 80 % du poids total du moteur [34]. Il est important de trouver des solutions physiques à divers problèmes connexes afin d'améliorer ses performances, qui sont généralement mesurées sur la base du coefficient de poussée, du nombre de Mach à la sortie et de la masse de la structure lorsque la conception de la tuyère est basée sur un fluide non visqueux. Nous considérons également les effets de la température génératrice (T<sub>0</sub>) car elle peut améliorer les performances de la MLN en termes de poussée.

L'industrie des gaz propulseurs s'intéresse de près à la propulsion des moteurs aérospatiaux. L'utilisation de gaz pour la propulsion peut avoir un impact négatif important sur les écoulements supersoniques et, en particulier, sur les paramètres de conception [35]. Il est souhaitable que les tuyères des fusées supersoniques, des missiles et des moteurs d'avions supersoniques aient une faible masse et la plus grande poussée possible. Divers gaz (Cl<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Co et No) ainsi que l'air sont applicables dans une gamme de nombres de Mach inférieurs à six en cas de dissociation moléculaire.

Le remplacement de l'air par d'autres gaz pour la propulsion a pour but d'améliorer les performances de la tuyère supersonique et de réduire son volume et sa masse tout en maintenant le coefficient de poussée et le nombre de Mach. Le changement de gaz utilisé pour la propulsion peut influencer le PMF, dont la diminution de la valeur peut réduire la masse, la longueur et le volume de la tuyère [36]. Des travaux récents [37] ont montré que l'augmentation de la pression de génératrice (P<sub>0</sub>) entraîne une réduction de la valeur de la PMF, mais le résultat inverse est obtenu lorsque la température génératrice est augmentée [38]. Les gaz utilisés dans les tuyères pour la propulsion supersonique sont divisés en deux parties : La première est constituée de gaz froids utilisés pour diriger les satellites. La deuxième partie est constituée de gaz chauds qui servent de source de chaleur. Cette chaleur est fournie soit par la combustion, qui est la méthode traditionnelle utilisée pour pousser les engins spatiaux vers l'atmosphère extérieure de la Terre et qui se caractérise par une forte poussée, soit par le chauffage des gaz froids en ajoutant un propulseur chauffé avant la tuyère. Cette méthode a pour but de fournir aux gaz plus d'énergie calorique afin d'augmenter la poussée [39].

Un propulseur à gaz froid est un moteur-fusée qui utilise l'expansion d'un gaz sous pression pour générer une poussée. Contrairement aux moteur-fusée traditionnels, il se compose d'un réservoir de carburant, d'une vanne de régulation et d'une tuyère de propulsion. Ils constituent l'un des systèmes de propulsion les moins chers et les plus simples, et sont utilisés pour assurer la stabilité des petites missions spatiales qui nécessitent un fonctionnement sans contamination. La tuyère d'un moteur à gaz froid est généralement une tuyère convergente-divergente qui fournit la poussée nécessaire pendant le vol. La forme de la tuyère est telle que le gaz à faible vitesse et à haute pression qui y pénètre se dilate à l'approche du col (la partie la plus étroite de la tuyère), où la vitesse du gaz correspond à la vitesse du son [40].

L'assemblage du propulseur chauffé consiste en des éléments chauffants redondants enroulés autour d'une bobine, qui est enfermée dans un boîtier. Le propergol est forcé de circuler à travers les éléments chauffants selon une trajectoire en spirale qui permet un contact plus long pour le transfert de chaleur. La chambre est entourée d'un bouclier thermique pour minimiser la perte de chaleur due au rayonnement. Une augmentation de la température du propulseur entraîne une augmentation de l'impulsion spécifique des gaz dans la tuyère. Les gaz ininflammables chauffés conviennent au propulseur Vernier, qui est un moteur de fusée utilisé dans un engin spatial ou un satellite pour effectuer des ajustements précis de son attitude ou de sa vitesse.

Disposition des chapitres (plan du travail)

Le travail présenté est composé de 4 chapitres :

Le premier chapitre montre les limites de l'équation d'état des gaz parfaits et discute des différences entre cette dernière et les autres équations d'état caractérisant le comportement réel des gaz en intervenant les notions de covolume et les forces d'attraction intermoléculaires. Il compare également les équations d'état des gaz réels afin de choisir un modèle approprié aux objectifs de notre étude. Nous proposons l'équation de l'état de Berthelot.

Afin de déterminer la forme générale de plusieurs paramètres tels que c<sub>p</sub>, c<sub>v</sub>, M et a, l'équation de l'énergie et les rapports thermodynamiques qui sont présentés par la résolution numérique des équations, le but du deuxième chapitre est de présenter le développement des nouvelles expressions et relations thermodynamiques avec l'hypothèse de l'expansion supersonique isentropique, en prenant en compte le comportement vibratoire des molécules dans une large plage de pression et de température. Des nouvelles formes des rapports des sections géométriques et du débit massique critique ont également été découvertes pour caractériser un écoulement supersonique. Il a également été évalué le coefficient de poussé, qui est important pour la propulsion aérospatiale et nous donne une image de la performance de notre modèle.

Le but du troisième chapitre est de déterminer la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel conformément au modèle de Berthelot. En introduisant l'effet de la pression génératrice et du gaz sur cette fonction, qui sera trouvée sous la forme de deux intégrales, l'intégration numérique sera nécessaire en raison de sa complexité, ce qui rend la solution analytique impossible. On choisit les méthodes d'intégration numérique les plus appropriées, celle du Simpson a pas variable et de gauss Legendre.

Le quatrième chapitre présente divers résultats obtenus sous forme de

graphes sur l'effet de gaz de propulsion sur les paramètres thermodynamiques, géométriques, sur la fonction de Prandtl Meyer de tuyère MLN 2D, ensuite quelques résultats sur le choix de gaz convenable répondant à l'amélioration des performances des tuyères supersoniques pour le domaine de la propulsion spatiale. Le calcul de l'erreur donnée par les paramètres de l'écoulement supersoniques et les paramètres de conception du gaz considéré par rapport à l'air est présenté dansce cas, vu que l'air se trouve en quantité dans la nature et il est utilisé intensivement dans les applications.

Enfin on présente une conclusion générale sur le travail élaboré suivie par la proposition de quelques travaux de futur.

#### 1.1. Introduction

Le modèle mathématique très simplifié de l'équation d'état des gaz parfaits ne peut reproduire le comportement des gaz que dans un domaine très restreint de pression et de température. Plus de 150 équations empiriques d'état (de gaz réels) ont été proposées depuis, sans qu'aucune d'entre elles soit à la fois assez précise et assez maniable. La plus célèbre et la plus simple équation d'état des gaz réels est celle de Van Der Waals (1873). Il n'est pas exactement conforme aux résultats expérimentaux, mais il permet tout de même d'analyser les phénomènes de transition de phase des gaz réels.

Le présent chapitre présente une vue d'ensemble sur l'évolution des équations d'état pour le calcul des caractéristiques thermodynamiques des gaz. Au début, nous aborderons l'équation d'état des gaz parfaits, ses applications et ses limites, puis nous examinerons les premières modélisations semi-empiriques des équations d'état des gaz réels datant du 19ème siècle et leur évolution au cours du 20ème siècle.

#### 1.2. Loi de BOYLE-MARIOTTE : (loi de compressibilité des gaz)

La relation entre la pression et le volume d'un gaz a été prouvée par le physicien et chimiste irlandais Robert Boyle (1627-1691) et le physicien français Edme Mariotte (1620-1684). Ils ont constaté, à une température constante et pour un même nombre de molécules, que la pression d'un gaz augmente avec la diminution de son volume et inversement. On observe également l'inverse : une réduction du volume d'un gaz entraîne une augmentation de sa pression. On appelle cette relation la loi de Boyle-Mariotte.

$$P \times V = cte \tag{1.1}$$

Il s'agit de l'équation typique d'une transformation isotherme d'un gaz parfait.

Expérience : prenons en compte un système cylindre-piston qui contient un gaz parfait qui est maintenu à une température constante. En modifiant la pression, Le volume est inversement proportionnel à V (P est inversement proportionnelle à V). Le diagramme de Clapeyron (P-V) présente une branche hyperbolique de la loi de variation de P en fonction de V. (Fig.1.1)



Figure 1.1 : Loi de Boyle-Mariotte

La relation (1.1) est vérifiée en tout point de la transformation réversible illustrée par la Figure 1.1. Il est donc possible d'écrire :

$$P_1 \times V_1 = P_2 \times V_2 = \dots = P_n \times V_n = cte$$
(1.2)

### 1.3. La Loi de GUY LUSSAC : (dilatation des gaz à pression constante)

Le chimiste et physicien français Louis Joseph Gay-Lussac a démontré qu'il existait une corrélation entre la pression et la température d'un gaz. Il a observé que la pression d'un gaz augmente avec la température pour un volume constant et une quantité donnée de gaz, et inversement. L'ensemble de ses observations a engendré une relation qu'il a nommée loi de Gay-Lussac. Lorsque la pression est constante, le volume d'un gaz invariable est inversement lié à sa température absolue :

$$V = Cst \times T \quad \text{ou} \quad \frac{V}{T} = Cst \tag{1.3}$$

C'est l'équation typique d'une transformation isobare d'un gaz parfait.

Essayons de prendre en compte le même mécanisme cylindre-piston. On maintient une pression constante sur le piston. En modifiant la température du gaz, le volume change en proportion. V évolue de manière linéaire en fonction de T (Fig.1.2).



Figure 1.2 : Loi de Guy Lussac

## 1.4. Le Comportement des Gaz Parfaits

Les lois précédentes sont combinées pour obtenir une relation plus générale appelée équation d'état des gaz parfaits.

 $P = f(T, V_m)$ 

Ou tout simplement :

PV = nRT

Avec

P : la pression absolue, [kPa] ;

V : le volume occupé par le gaz, [m<sup>3</sup>]

n : le nombre de moles, [kmol] ;

R : la constante universelle des gaz parfaits 8.314 kJ/kmol.K ;

T : la température absolue, [K].

Un gaz parfait est un gaz où les forces d'interaction entre les molécules sont absentes. Les gaz sont considérés comme parfaits si leurs états sont éloignés des domaines de transformations de phase, avec une précision adéquate. Un gaz idéal doit répondre aux deux critères suivants: L'équation de l'état des gaz parfait relie la pression, le volume et la température absolue.

- La température est la seule variable qui influence l'énergie des gaz, et non la pression et le volume.

-L'énergie cinétique d'un gaz parfait est l'énergie totale et elle est inversement proportionnelle à la température absolue.

### 1.5. Les gaz réels

Pour les basses pressions et températures, un gaz réel est un gaz parfait. La théorie des gaz cinétiques nous enseigne : Dans un gaz idéal, le nombre de molécules par unité de volume est inférieur à celui d'un gaz réel. On supposera que les molécules d'un gaz parfait se rencontrent de manière ponctuelle et que les forces d'attraction mutuelles des molécules, même très proches, sont faibles, voire nulles. Donc, la pression du gaz (parfait) n'est causée que par les chocs des molécules sur les parois. On nomme cette pression pression cinétique. La distance entre les molécules dans un gaz réel est élevée, ce qui entraîne une faible énergie potentielle d'interaction. L'énergie interne se manifeste principalement sous forme d'énergie cinétique d'agitation thermique.

### 1.6. Equation d'État des gaz réels

Pour décrire le comportement du G.R. de manière adéquate, il faut ajouter des terminaisons correctives au modèle du gaz parfait, pour prendre en compte, par exemple, les interactions entre particules ou encore le volume non négligeable des molécules.

Model du gaz réel :

- Il existe des forces d'interaction entre les molécules, ce qui ne peut pas être négligé.
- Les molécules ont un volume, c'est-à-dire une taille. Chaque gaz réel possède une température critique T<sub>c</sub> spécifique. Ils peuvent se dissoudre à une température inférieure à la température critique T<sub>c</sub>.
- La tendance des gaz réels vers le G.P est à faible pression. Lorsque la pression est élevée, les molécules de gaz sont extrêmement proches les unes des autres et l'espace entre chaque molécule diminue considérablement. Le gaz réel possède un volume molaire V<sub>m</sub> plus élevé que celui d'un gaz parfait, et V<sub>m</sub> du gaz réel augmente avec la pression.
- L'impact des forces intermoléculaires est important à des températures basses, car les molécules ont une énergie cinétique inférieure pour répondre aux attractions intermoléculaires.





## 1.6.1. Effet du volume exclu

Plaçons molécules d'un gaz dans un récipient de volume. Les molécules sont assimilées à des sphères de rayon. Ces molécules sont incapables de se déplacer dans l'ensemble du volume V. Chaque molécule doit donc retrancher un volume exclu b, également connu sous le nom de covolume.



Figure 1.4 : Le volume soustrait autour de chaque sphère dure

-Le volume exclu par deux molécules est :  $\frac{4\pi\sigma^3}{3}$ 

-Le volume exclu par une molécule :  $\frac{1}{2} \left( \frac{4\pi\sigma^3}{3} \right)$ 

-Le volume exclu par 1 mole (II y a NA/2 par deux molécules) :

$$b = \frac{N_A}{2} \left(\frac{4\pi\sigma^3}{3}\right) = \frac{2\pi N_A}{3}\sigma^3$$

-Le volume exclu par n mole est donc : nb

La valeur nb correspond donc au volume écarté des molécules par n mole. En d'autres termes, le volume disponible (disponible) lors du déplacement des N molécules ne correspond plus à V, mais à (V-NB). L'état de l'équation devient :

$$P(V-nb) = nRT \tag{1.5}$$

### 1.6.2. Effet Des Forces d'attraction intermoléculaires

Le La figure ci-dessous présente l'effet de l'interaction moléculaire sur la pression du gaz réel. Chaque particule de gaz est attirée par les autres particules qui l'entourent, nous distinguons deux situations : il y a des particules loin et à proximité des parois.



Figure 1.5 : Effet de l'interaction moléculaire sur la pression du gaz réel

Toute particule (A) loin des parois est attirée dans toutes les directions de la même façon (hypothèse d'homogénéité) et la résultante de ces forces d'attraction est nulle.

Par contre, toute particule (B) à proximité des parois subit une attraction

dissymétrique (dirigée vers l'intérieur du gaz) qui réduit (par rapport au cas du gaz parfait) la pression contre les parois d'une valeur de :  $a\left(\frac{n}{V}\right)^2$  (appelée aussi pression interne) :

$$P_{GP} = P_{GR} + a \frac{n^2}{V^2}$$
(1.6)

P<sub>GP</sub> : la pression de gaz parfait ou la pression idéale P<sub>GR</sub> : la pression du gaz réel ou la pression mesurée

### 1.7. Les équations des gaz réels (par ordre de complexité)

### 1.7.1. Equation de VAN DER WAALS

A L'équation de Van Der Waals s'écrit :

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

$$P = \frac{nRT}{(V - nb)} - a\frac{n^2}{V^2}$$
(1.7)

P représente la pression absolue du fluide (gaz réel) tandis que T représente la température absolue.

 Le nombre nb est lié au volume physique occupé par les molécules microscopiques qui composent le gaz, et sa présence dans l'équation d'état correspond à une correction du volume réellement accessible aux molécules dans la cavité.

- Le concept de an<sup>2</sup>/V<sup>2</sup> est issu de la prise en compte des forces d'attraction qui s'exercent entre les molécules qui composent le gaz. Lorsque n<sup>2</sup>/V<sup>2</sup> est faible, les molécules se rapprochent les unes des autres, ce qui entraîne une augmentation des forces d'attraction mutuelles, ce qui réduit la pression exercée par les molécules sur les parois.

#### CHAPITRE1 : LOIS DES MODELES DES GAZ REELS

Les constantes positives de l'équation de Van Der Waals a et b sont liées à la nature du fluide (et non pas aux variables d'état P et V....).
Le tableau ci-dessous présente les valeurs de a et b pour certains fluides :

Tableau 1.1 : Constantes a et b de l'équation de Van Der Waa
--

Fluide	$\alpha \times 10[pa.m^6/mol^2]$	b×10 <sup>5</sup> [m <sup>3</sup> /mol]
H <sub>2</sub> o	5 ,536	3,049
O <sub>2</sub>	1,378	3,183
H <sub>2</sub>	0,2476	2,661
N <sub>2</sub>	1,408	3,913

## 1.7.2. Equation de BERTRHELOT

Elle s'écrit [56] :

$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT$$
(1.8)

Ou bien :

$$P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$$
(1.9)

$$P(T,\rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a \rho^2}{T}$$
(1.10)

Avec:  $a = 3 P_c V_c^2$ ,  $b = \frac{V_c}{3}$  et  $R = \frac{8}{3} \frac{P_c V_c}{T_c}$ 

## 1.7.3. Equation de CAUSIUS (1880)

S'exprime par :

$$\left(P + \frac{a}{T(v+c)^2}\right)(v-b) = RT$$
(1.11)

Ou bien :

$$P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{T(v+c)^{2}}$$
(1.12)

$$P(T,\rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a \rho^2}{T(1+c \rho)^2}$$
(1.13)

$$a = \frac{27 R^2 T_c^3}{64 P_c}, \qquad b = V_c - \frac{R T_c}{4 P_c}, \qquad c = \frac{3}{8} \frac{R T_c}{P_c} - V_c$$

La pression critique, la température critique et le volume critique sont respectivement définis par Pc, Tc et Vc. Voir le prochain paragraphe. L'équation de VANDER WAALS est une amélioration de cette équation. Elle fournit une estimation assez précise dans le domaine concerné.

### 1.7.4. Equation de REDLICH-KWONG (1949)

S'exprime par: La forme la plus classique de l'équation Redlich-Kwong est de la forme :  $P = f(T, V_m)$ 

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{\sqrt{T}V_m(V_m + b)}$$
(1.14)

Ou a et b sont donnés par :

$$a = \frac{0.42748R^2 T_c^{2.5}}{2a} \qquad b = \frac{0.8664RT_c}{P_c}$$
(1.15)

L'équation de Redlich-Kwong est extrêmement utile pour évaluer les caractéristiques thermodynamiques des phases vapeur. Elle est applicable à des systèmes à faible pression (< 10 atm) pour des systèmes qui ne sont pas idéalement adaptés.

#### 1.7.5. Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN (1928)

L'équation de Beattie et Bridgman s'exprime par :

$$P = \left(RT \frac{(1-\varepsilon)}{V^2}\right)(V+B) - \frac{A}{V}$$

$$A = A_0 \left(1 + \frac{a}{V}\right)$$

$$B = B_0 \left(1 + \frac{b}{V}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{VT^3}$$
(1.16)

A<sub>0</sub>, B<sub>0</sub>, a, b et c Sont des constantes caractéristiques du gaz ;

R : La constante des gaz parfaits.

### 1.7.6. Equation de DIETERICI

L'équation de DIETERIC s'exprime par :

$$P = \left(\frac{RT}{V-b}\right) \exp\left(\frac{-a}{RTV}\right)$$
(1.17)

#### 1.7.7. Equation de WOHL

L'équation de WOHL s'exprime par

$$p = \left(\frac{RT}{V-b}\right) - \frac{a}{TV(V-b)} + \frac{c}{(TV)^2}$$
(1.18)

Ces changements n'ont pas été aussi réussis que l'équation de Van Der Waals. Toutefois, elles permettent l'émergence d'autres équations qui ont considérablement amélioré la prédiction des données PVT d'une grande variété de fluides.

### 1.7.8. Equation de BERTHELOT Modifiée

La pression en fonction de la température et de la masse volumique est définie sous la forme suivante [41] :

$$p(T,\rho) = \frac{\rho RT}{\left[1 - \left[\left(\frac{9\rho RT_c}{128p_c}\right)\left(1 - \frac{6T_c^2}{T^2}\right)\right]\right]}$$
(1.19)

#### 1.8. Les coordonnées du point critique- équations réduites

Les isothermes expérimentales, à faible pression et à grand volume, sont similaires à celles du gaz parfait.

En revanche, si le gaz est comprimé, son comportement sera grandement influencé par la température.

Lorsque T est supérieur à Tc, le fluide se comprime régulièrement en restant à l'état gazeux, mais la loi p = f(V) diffère considérablement de celle du gaz parfait. Lorsque la température critique est inférieure à T, on constate un début de liquéfaction du gaz pour V = V<sub>G</sub>. La quantité de gaz liquéfié augmente graduellement à mesure que le volume diminue. V = V<sub>L</sub> signifie qu'il n'y a plus que du liquide et que la liquéfaction est complète. Lorsque T = T<sub>C</sub>, le palier horizontal de liquéfaction se réduit à un point d'inflexion à tangente horizontale avec les valeurs (Pc, Vc, Tc). La courbe en pointillé est connue sous le nom de courbe de saturation, où l'état liquide (L) et l'état gazeux (V) coexistent toujours : on peut donc observer un mélange (L+V) appelé mélange humide ou vapeur saturante.



Figure.1.6. Les isothermes des gaz réels dans un diagramme de Clapeyron

## 1.8.1. Application pour l'équation de BERTHELOT

Elle s'écrit :

$$\left(P + \frac{a'}{Tv^2}\right)(v-b) = RT$$
(1.20)

Ou bien :

$$P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$$

Calculons les coordonnées du point critique C (P<sub>c</sub>,V<sub>c</sub>,T<sub>c</sub>) en fonction de (a,b et r). L'équation caractéristique :  $P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$  (1.21)

Au point critique C : 
$$P_c = \frac{RT_c}{(v_c - b)} - \frac{a}{T_c v_c^2}$$
(1.22)

Tangente horizontale en C : 
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{\left(v_c - b\right)^2} = \frac{2a}{T_c v_c^3}$$
 (1.23)

Point inflexion en C:  $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(v_c - b)^3} = \frac{3a}{T_c v_c^4}$  (1.24)

Division l'équation (1.21) par l'équation (1.22), on Obtient :

$$(V_c - b) = \frac{2}{3}V_c \Longrightarrow V_c = 3b \tag{1.25}$$

Remplaçons l'équation (1.23) dans l'équation (1.22), On obtient :

$$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \tag{1.26}$$

Remplaçons l'équation (1.23) et (1.24) dans l'équation (1.9), On obtient

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \tag{1.27}$$

## 1.8.2. Calcul les Constantes a,b et R

Au point C, On a :

$$\begin{cases} V_c = 3b \\ T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \\ P_c = \frac{a}{27b^2} \end{cases}$$
(1.28)

Ici nous avons trois équations a trois inconnues, la solution de ce système donne :

$$\begin{cases} a = 3P_c V_c^2 \\ b = \frac{V_c}{3} \\ R = \frac{8}{3} \frac{P_c V_c}{T_c} \end{cases}$$
(1.29)

## 1.8.3 . Equation réduite

En remplaçant les constantes ab et R dans l'équation de Berthelot, On obtient :

$$\left(P + \frac{3P_c V_c^2 T_c}{T V^2}\right) \left(v - \frac{V_c}{3}\right) = \frac{8}{3} P_c V_c \frac{T}{T_c}$$
(1.30)

Divisons par Pc et Vc ca donne :

$$\left(\frac{P}{P_{c}} + 3\frac{V_{c}^{2}}{V^{2}}\frac{T_{c}}{T}\right)\left(\frac{V}{V_{c}} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\frac{T}{T_{c}}$$
(1.31)

L'équation réduite de BERTHELOT sous la forme :

$$\left(\omega + 3\frac{1}{\theta\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta$$
(1.32)

Toutefois, à la suite de diverses expériences, BERTHELOT a découvert une représentation plus précise des résultats expérimentaux pour les gaz réels en dehors du point critique, en utilisant l'équation modifiée suivante :

$$\left(\omega + \frac{16}{3}\frac{1}{\theta\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{4}\right) = \frac{32}{9}\theta$$
(1.33)

L'équation (1.31) s'appelle équation réduite modifiée de berthelot, Avec cette

équation ,les constantes a, b et R auront pour valeurs dans l'équation de

#### BERTHELOT :

$$\begin{cases} a = \frac{16}{3} P_c V_c^2 T_c \\ b = \frac{V_c}{4} \\ R = \frac{32}{9} \frac{P_c V_c}{T_c} \end{cases}$$
(1.34)

Rappelons que la modification de l'équation réduite de BERTHELOT, contrairement à celle de VAN DER WAALS, n'est pas valable pour le point critique et dans ce voisinage. En outre, l'équation simplifiée de BERTHELOT est plus précise que celle de VAN DER WAALS.Elle sera principalement utilisée pour calculer les ajustements nécessaires aux grandeurs thermodynamiques des gaz parfaits.

#### 1.9. Equations de VIRIEL

S'il est vrai que tous les gaz sont des gaz parfaits lorsque la pression est nulle (c'est-à-dire que les interactions entre molécules sont nulles), des écarts à ce comportement se manifestent rapidement pour la plupart des gaz réels. On peut utiliser un développement du virile pour décrire les petites différences par rapport à un comportement de gaz parfait. Il est possible d'exprimer le facteur de compressibilité Z =PV/RT en fonction de cette évolution. Le volume spécifique du gaz réel est représenté par V ; lorsque la pression diminue, V diminue vers l'infini et diminue vers zéro. Il est obtenu :

$$Z = \frac{PV}{RT} = \left[1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots\right]$$
(1.35)

Où

B(T) est le coefficient secondaire du virile, C(T) le coefficient troisième du virile..., etc. Un tel progrès, qui ne s'applique qu'à des valeurs de 1/V et donc à des pressions faibles, est une extension de la loi des gaz parfaits (valable pour des pressions très basses) vers des pressions modérées.

#### 1.9.1. La fonction du volume v du gaz :

$$\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$$

On cherche une relation de la forme  $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$ 

L'équation de Berthelot :  $P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$ 

Le développement de l'équation de Berthelot donne :

$$PV = RT + Pb - \frac{a}{TV} + \frac{ab}{TV^2}$$
(1.36)

Remplaçons l'équation (1.9) dans (1.34), on trouve :

$$PV = RT + -\frac{a}{TV} + \left(\frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}\right)b + \frac{ab}{TV^2}$$
(1.37)

$$PV = RT + -\frac{a}{TV} + \frac{RTb}{(v-b)} = RT \left( 1 + \frac{b}{(v-b)} - \frac{a}{RT^2V} \right)$$
(1.38)

$$\left(\frac{b}{V-b}\right) = \frac{b}{V\left(1-\frac{b}{V}\right)}$$
 D'après la relation approchée  $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$ 

$$\left(\frac{b}{V-b}\right) \approx \frac{b}{V} \left(1 + \frac{b}{V}\right) \approx \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2}$$
(1.39)

Remplaçons (1.37) dans (1.36) :

$$PV = RT\left[1 + \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2} - \frac{a}{RT^2V}\right] = RT\left[1 + \left(b - \frac{a}{RT^2}\right)\frac{1}{V} + b^2\frac{1}{V^2}\right]$$
(1.40)

$$PV = RT \left[ 1 + A\frac{1}{V} + B\frac{1}{V^2} \right]$$
(1.41)

Les coefficients de VIRIEL sont donc :

$$A = \left(b - \frac{a}{RT^2}\right), B = b^2$$

## 1.9.2. La fonction de la pression P du gaz :

$$\frac{PV}{rT} = f\left(P\right)$$

On cherche une relation de la forme  $\frac{PV}{rT} = f(P)$ 

L'équation de Berthelot :

$$P_{GP} = P_{GR} + a \frac{n^2}{V^2}$$
(1.42)

$$P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \Longrightarrow v = \frac{rt}{P + \frac{a}{Tv^2}} + b = \frac{rt}{P} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{PTv^2}\right)} + b$$
(1.43)

Or, d'après la relation approchée :  $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$ , On aura :

$$v = \frac{rT}{P} \left( 1 - \frac{aP}{P^2 T v^2} \right) + b = \frac{rT}{P} \left( 1 - \frac{aP}{P^2 T v^2} + \frac{bP}{rT} \right)$$
(1.44)

En première approximation,  $P^2 v^2 \approx r^2 T^2$ 

$$V = \frac{RT}{P} \left( 1 - \frac{aP}{R^2 T^3} + \frac{bP}{RT} \right) \Longrightarrow \frac{1}{V} = \frac{P}{RT} \left( \frac{1}{1 - \frac{aP}{R^2 T^3} + \frac{bP}{RT}} \right) = \frac{P}{RT} \left[ 1 + \frac{aP}{R^2 T^3} - \frac{bP}{RT} \right]$$
(1.45)

Soit

$$\frac{1}{V} = \frac{P}{RT} \left( 1 + \frac{a}{R^2 T^3} P - \frac{b}{RT} P \right)$$
(1.46)

En remplaçant (1.44) dans (1.34), on obtient :

$$PV = RT - \frac{aP}{RT^2} \left( 1 + \frac{a}{R^2 T^3} P - \frac{b}{RT} P \right) + pb + \frac{abP^2}{R^2 T^3} \left( 1 + \frac{a}{R^2 T^3} P - \frac{b}{RT} P \right)^2$$
(1.47)

En se limitant aux termes du second degré en P, on obtient :

$$PV = RT - \frac{aP}{RT^2} - \frac{a^2 P^2}{R^3 T^5} + \frac{abP^2}{R^2 T^3} + bP + \frac{abP^2}{R^2 T^3}$$
(1.48)

$$PV = RT + \left[b - \frac{a}{RT^2}\right]P + \frac{2ab}{R^2T^3}P^2 + bP - \frac{a^2P^2}{R^3T^5} = RT + \left[b - \frac{a}{RT^2}\right]P + \frac{2a}{R^2T^3}\left[b - \frac{a}{2RT^2}\right]P^2 \quad (1.49)$$

$$PV = RT \left[ 1 + \frac{1}{RT} \left( b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2a}{R^3 T^4} \left( b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \right]$$
(1.50)

Ou :

$$\frac{PV}{RT} = \left[1 + \left(\frac{b - \frac{a}{RT^2}}{RT}\right)P + \frac{2a}{R^3T^4}\left(b - \frac{a}{2RT^2}\right)P^2\right]$$
(1.51)

$$\frac{PV}{RT} = \left[1 + \overline{A}P + \overline{B}P^2\right]$$
(1.52)

Les coefficients de VIRIEL sont donc :

$$\overline{A} = \left(\frac{b - \frac{a}{RT^2}}{RT}\right), \overline{B} = \frac{2a}{R^3T^4} \left(b - \frac{a}{2RT^2}\right)$$

### 1.10. Facteur de compressibilité

Les gaz réels présentent un comportement différent de celui des gaz parfaits dans la région de saturation et au point critique. On peut mesurer cette
déviation en utilisant un facteur appelé facteur de compressibilité, également connu sous le nom de facteur de correction :

PV = ZRT

L'équation de Berthelot : 
$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT$$
 (1.53)

$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT \Longrightarrow PV - Pb + \frac{a}{TV} - \frac{ab}{TV^2} = RT$$
(1.54)

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2V} + \frac{ab}{RT^2V^2}$$
(1.55)

$$Z = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2V} + \frac{ab}{RT^2V^2}$$
(1.56)



Figure 1.7 : Variation du Facteur de compressibilité Z en fonction de la température

La figure 1.7 illustre la variation du facteur de compressibilité Z pour l'air avec la température pour diverses valeurs de pression. Dans le modèle de gaz parfait, Z reste constant à (Z = 1). Cependant, pour le modèle de gaz réel, Z est influencé par les changements de la pression et de la température. Dans des conditions modérées caractérisées par de basses pressions et températures, nous pouvons

approximer Z comme se comportant comme un gaz parfait. Néanmoins, dans des conditions extrêmes caractérisées par des pressions élevées ou des températures basses, le facteur de compressibilité de l'air s'écarte de 1 en raison de l'impact des forces intermoléculaires et des interactions moléculaires. Dans de telles situations, le facteur de compressibilité a été déterminé à l'aide de l'équation d'état de Berthelot. La figure révèle que lorsque la pression augmente, Z augmente également. Elle peut devenir 2,5 fois plus élevée à basse température et à une pression de 500 bars. Avec l'augmentation de la température, Z diminue et les courbes représentant différentes pressions se rapprochent et convergent dans la plage de 1,0 à 1,2 à partir de 800 K.

# 1.11. Choix de l'équation d'état

Les diverses lois de l'État ont été exposées. Nous devons maintenant sélectionner celle que nous utiliserons dans notre modèle. L'équation du virile, tronquée au deuxième ou troisième coefficient, ne représente pas les effets observés à haute pression et est donc inappropriée pour notre étude. Les paramètres des équations analytiques sont limités et peuvent être résolues de manière analytique, ce qui permet d'estimer de manière fiable le comportement des gaz en dehors de la zone critique. Malgré leur plus grande précision, les équations empiriques, aussi connues sous le nom d'équations non analytiques, requièrent la connaissance d'un grand nombre de constantes, ce qui peut être difficile à trouver dans la littérature. Ainsi, nous avons choisi de prendre en compte l'équation d'état analytique de Berthelot. La littérature ne contient que deux coefficients, a et b.

#### 1.12. Validation du choix de l'équation de Berthelot

La loi de BERTHELOT a été sélectionnée en raison de sa simplicité et de son faible nombre de coefficients. Pour valider ces résultats, il faut donc vérifier la validité des résultats fournis par cette loi et les différences avec la loi des gaz parfaits pour les gaz retenus. On compare les valeurs expérimentales trouvées dans une base de données [42] à la masse volumique calculée en utilisant la loi des gaz parfaits et la loi de BERTHELOT, près de la température critique de ces gaz. On remarque que les gaz ne sont pas du tout des gaz parfaits à ces températures et pressions, et que la loi de BERTHELOT fournit des valeurs de masse volumique plus précises. Les résultats seront analysés en détail dans le quatrième chapitre. De cette manière, la loi de Berthelot peut être appliquée et légitimée.

# 1.13. Conclusion

L'équation de Berthelot, qui introduit les effets de taille moléculaire et de force intermoléculaire, permet de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques requis et d'analyser l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (par exemple, pour les gaz H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, No, Cl<sub>2</sub> et l'air notamment). Cette équation est employée plutôt que les autres équations d'état afin d'obtenir des évaluations légèrement plus élevées des effets de force intermoléculaire. L'utilisation de cette dernière sera utilisée dans le prochain chapitre afin de concevoir un nouveau modèle mathématique pour évaluer les relations thermodynamiques et géométriques.

### 2.1. Introduction

Selon l'hypothèse que l'air est un gaz parfait, de nombreux problèmes d'écoulement compressible ont été résolus. La pression et la température ambiante d'intérêt sont faibles et proches de l'atmosphère, ce qui rend cette hypothèse plausible. Toutefois, quand de l'air est extrait de l'atmosphère par des modifications d'état, de pressions et de températures, il ne respecte plus la loi simple du gaz et montre d'autres propriétés qui ne sont pas propres à un gaz parfait. Ainsi, il est possible d'anticiper que les mécanismes d'écoulement dans lesquels aèrent, à condition de ces conditions extrêmes, diffèrent du comportement de gaz parfait. Ce lièvre de départ revêt une grande importance en termes d'aérodynamique, car il est bien connu qu'un tel écoulement sera généré dans des souffleries hypersoniques et par le vol d'avions à des vitesses anémométriques supersoniques élevées. Les théories et les expériences traditionnelles ont prouvé que parmi les trois caractéristiques du gaz réel, la première consiste à présenter des caractéristiques différentes de celles d'un gaz parfait. On peut classer ces caractéristiques comme des imperfections caloriques et thermiques. Les imperfections thermiques sont clairement visibles à des températures et des pressions basses, avec des forces intermoléculaires et des tailles moléculaires. Les altérations de la capacité de chaleur entraînent une imperfection calorique significative en comparaison avec les températures hautes. Les effets de la dissociation moléculaire ou de l'excitation électronique peuvent être négligés pour le moment (les températures sensiblement au-dessus de 3550 K), et si des gaz en équilibre sont impliqués, il est généralement suffisant d'expliquer la force intermoléculaire et les effets de taille moléculaire en ajoutant des limites supplémentaires à l'équation d'état. De la même manière, les variations de capacité de chaleur des molécules peuvent être expliquées par une fonction de température dans les expressions de chaleurs spécifiques. Dans ce chapitre, on obtient des équations d'écoulement en se basant sur l'équation d'état de Berthelot. Cette équation est utilisée au lieu de Van der Waals pour obtenir des évaluations un peu plus précises des effets de force intermoléculaire. Il est présumé que des anomalies caloriques peuvent être expliquées par les représentations des chaleurs particulières.

L'objectif de substituer l'air par d'autres gaz de propulsion est d'améliorer les performances de la tuyère supersonique, de diminuer son volume et sa masse tout en conservant le coefficient de poussée et le nombre de Mach.

# 2.2. Hypothèses de base

 Les gaz H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Co, No, Cl<sub>2</sub> et l'air se comportent comme des gaz diatomiques.

Les paramètres des gaz	O <sub>2</sub>	No	H <sub>2</sub>	Cl <sub>2</sub>	Со	N <sub>2</sub>	Air
Constante des gaz parfait R [J/Kg. K]	259.828	277.1	4124.3	117.259	296.8	296.946	287
Rapport de chaleur spécifique γ	1.393	1.387	1.409	1.4	1.399	1.4	1.4
Constante de molécule énergie vibratoire θ [K]	2274	2719	6332	805	3122	3392.7	3056
La capacité thermique spécifique CP [KJ/Kg. K]	0.922	0.993	14.209	0.4104	1.041	1.042	1.004

Tableau 2.1.Les paramètres des gaz

Tableau 2.	2. Les paramètres critiques des gaz

Paramètres critiques	O2	No	H <sub>2</sub>	Cl <sub>2</sub>	Со	N <sub>2</sub>	Air
Température critique T <sub>c</sub> [K]	154.58	179.8	33.3	417	133	126.2	132.5
Pression critique $P_c$ [pas] * $10^6$	5.08	65.8	1.30	7.71	3.50	3.39	37.7
Volume critique V <sub>c</sub> [m <sup>3</sup> ] * 10 <sup>-3</sup>	2.4	1.92	32.1	1.75	3.32	3.2	3.22

En se basant sur l'équation de Berthelot, qui intègre les effets de taille moléculaire (covolume) et de force intermoléculaire, les paramètres de stagnation (pression et température génératrices) sont conformes à la loi des gaz réels.
L'expansion (la détente) des gaz se déroule de manière homogène, sans aucun choc ni interruption.

• Les transferts de chaleur par rayonnement, convection ou conduction sont très faibles.

Dans les différentes stations, la combustion et l'écoulement des gaz sont adiabatiques, ce qui signifie qu'il n'y a pas de perte de chaleur due à l'environnement.

L'écoulement à travers la tuyère est unidimensionnel et isentropique.
Au cours des prochaines analyses, des hypothèses supplémentaires seront suggérées si besoin. Si de nombreuses suppositions simplificatrices semblent avoir été faites, toutes sont raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent assez exactement le véritable comportement de notre domaine d'étude.

#### 2.3. Configuration des équations

Afin de comprendre les liens entre les rapports thermodynamiques et géométriques requis, et d'analyser l'écoulement supersonique isentropique d'un gaz réel (comme le H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Co, No, Cl<sub>2</sub> et l'air), on utilise l'équation de Berthelot qui expose les effets de taille et de force intermoléculaire. Les termes de l'équation de Berthelot sont [43] :

$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v - b) = RT$$
(2.1)

Ou bien :

$$P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$$
(2.2)

Connaissons :  $v = \frac{1}{\rho}$ 

$$P(T,\rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}$$
(2.3)

28

$$a = 3P_c V_c^2$$
 et  $b = \frac{V_c}{3}$ 

# 2.3.1. L'équation de la conservation d'énergie

L'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique est [44] :

$$dH + VdV = 0 \tag{2.4}$$

D'autre part [45] :

$$dH = C_p dT + (h+v)dP \tag{2.5}$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$
(2.6)

Avec :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = h + V \tag{2.7}$$

$$h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{P}$$
(2.8)

Alors :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T} = V - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{P}$$
(2.9)

On a [46] :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_{T} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{P} = -1 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v} = \frac{-1}{\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_{T} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{P}}$$
(2.10)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v} = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{P} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T}$$
(2.11)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{P} = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v}}{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T}}$$
(2.12)

L'équation de Berthelot

$$P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{(v-b)} - \frac{a}{T^2v^2} \quad , \quad \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{Tv^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{P} = \frac{-RT^{2}v^{3}(v-b) + av(v-b)^{2}}{2aT(v-b)^{2} - RT^{3}v^{2}}$$
(2.13)

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_P(T,\rho)}{C_S^2} dT + \frac{C_T(T,\rho)}{C_S^2} d\rho$$
(2.14)

Posons :

$$C = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T} \Longrightarrow C = v.\left(\frac{3a(v-b)^{3} - RT^{2}v^{2}b}{2a(v-b)^{2} - RT^{2}v^{2}}\right)$$
(2.15)

$$Connaissons: v = \frac{1}{\rho}$$
(2.16)

Remplaçons l'équation (2.16) dans l'équation (2.15) on obtient :

$$C = \left(\frac{3ab^{2}\rho^{2} - 6ab\rho - RT^{3}b + 3a}{2ab^{2}\rho^{3} - 4ab\rho^{2} + 2a\rho - RT^{2}}\right)$$
(2.17)

# 2.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T sera constante

La relation (2.6) s'écrit : 
$$dH = C_p dT + CdP$$
 (2.18)  
Avec :  $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ , et  $C = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$   
 $P = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}$ 

La différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T est constante donne [33] :

$$dP = d\left(\frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}\right)_{T=cte} = \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}\right)_{T=cte} d\rho$$

$$dP = \left(\frac{RT^{3} - 2a\rho(1 - \rho b)^{2}}{T(1 - \rho b)^{2}}\right)d\rho$$
(2.19)

Remplaçons l'équation (2.19) dans l'équation (2.18), on obtient :

$$dH = C_p dT + \underbrace{\left(C.\left(\frac{RT^3 - 2a\rho(1-\rho b)^2}{T(1-\rho b)^2}\right)\right)}_{C_T} d\rho$$

Alors :

$$C_{T}(T,\rho) = C \cdot \left(\frac{RT^{3} - 2a\rho(1-\rho b)^{2}}{T(1-\rho b)^{2}}\right) = \left(\frac{3ab^{2}\rho^{3} - 6ab\rho - RT^{3}b + 3a}{2T\rho b - Tb^{2}\rho^{2} - T}\right)$$
(2.20)

Donc :

$$dH = C_P(T,\rho)dT + C_T(T,\rho)d\rho$$
(2.21)

L'identification entre les relations (2.4) et (2.21) donne :

$$VdV = -dH = C_P(T,\rho)dT - C_T(T,\rho)d\rho$$
(2.22)

#### 2.3.3. Détermination la différentielle dp/p

L'équation de Bernoulli donne [47]

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \tag{2.23}$$

Par la multiplication et la division par dp, on trouve :

$$VdV + \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{S=cte} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0$$
(2.24)

Connaissons que la célérité du son [48] :

$$C_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{s=cte}$$
(2.25)

La relation (1.78) devient :

$$VdV + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{2.26}$$

Remplaçons l'équation (2.22) dans l'équation (2.26), on obtient :

$$\left[-C_{P}(T,\rho)dT - C_{T}(T,\rho)d\rho\right] + C_{S}^{2}\frac{d\rho}{\rho} = 0$$
(2.27)

Alors :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_P(T,\rho)}{C_S^2} dT + \frac{C_T(T,\rho)}{C_S^2} d\rho$$
(2.28)

# 2.3.4. Détermination les paramètres thermodynamiques pour les gaz réels

La différentielle de l'équation d'expansion isentropique peut être utilisée pour étudier l'écoulement isentropique d'un gaz caractérisé par l'équation de

Berthelot [49]

$$du + dw = 0 \tag{2.29}$$

Sachant que :

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$
(2.30)

On a [50]: 
$$v = \frac{1}{\rho} \Longrightarrow dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$$
 (2.31)

Remplaçons l'équation (2.31) dans l'équation (2.30), On obtient :

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$
(2.32)

$$dw = Pdv \tag{2.33}$$

Remplaçons les équations (2.32) et (2.33) dans l'équation (2.29), on obtient :

$$du + dw = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$
(2.34)

Avec : 
$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{v} = C_{v}$$
 (2.35)

L'effet de Joule – Thomson est donné par [51] :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{T} = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho} - \frac{\rho RT}{1 - b\rho} + \frac{a\rho^{2}}{T}$$
(2.36)

La différentielle de la pression est calculée à partir de l'équation (2.3) :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho} = \frac{R\rho}{1-\rho b} + \frac{a\rho^2}{T^2}$$
(2.37)

L'équation (2.36) devient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{T} = \frac{2a\rho^{2}}{T}$$
(2.38)

En combinant les équations (2.35), (2.31) et (2.38) et en substituant la valeur de p de l'équation de Berthelot dans l'équation (2.34), on obtient la suivante conclusion

$$C_{\nu}dT - \frac{a}{T}d\rho - \frac{RT}{\rho(1-b\rho)}d\rho = 0$$
(2.39)

32

Maintenant l'expression de la différentielle de  $c_v$  est donnée par :

$$\left(\frac{\partial c_{\nu}}{\partial \nu}\right)_{T} = T \left(\frac{\partial p^{2}}{\partial T^{2}}\right)_{\rho}$$
(2.40)

En utilisant l'équation de Berthelot, on peut calculer la deuxième dérivée de la pression par rapport à la température à masse volumique constante :

$$\left(\frac{\partial\rho^2}{\partial T^2}\right)_{\rho} = -2\frac{a\rho^2}{T^3}, \text{ donc}: T\left(\frac{\partial p^2}{\partial T^2}\right)_{\rho} = -2\frac{a\rho^2}{T^3}$$
(2.41)

Alors l'équation (1.94) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial C_{v}}{\partial v}\right)_{T} = -2\frac{a\rho^{2}}{T^{3}}$$
(2.42)

L'intégration de l'équation (2.40) en utilisant la pression de l'équation d'état de Berthelot nous donne :

$$\int \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \int -\frac{2a}{T^2 v^2} dv$$
(2.43)

Donc :

$$c_v = \int \left(-\frac{2a}{T^2 v^2}\right) dv \tag{2.44}$$

Avec 
$$v^2 = \frac{1}{\rho^2}$$
  
 $c_v = c_v^0 + \frac{2a\rho^2}{T}$ 
(2.45)

La fonction qui représente la variation de  $c_v$  en fonction de la température est appelée fonction  $c_v^0$ , tandis que le deuxième terme représente l'impact de l'imperfection du gaz sur $c_v$ .

La structure moléculaire, la gamme de température ou l'effet sur $c_v$ . Sont pris en compte dans le choix de la fonction pour  $c_v^0$ .

La gamme de température d'un gaz diatomique est significative, allant de la température de liquéfaction jusqu'à quelques milles de degré kelvin. Dans ce type de gaz diatomique, les degrés de liberté transrationnels et rotationnels sont constants tandis que  $c_{\nu}^{0}$  varie en fonction de la température vibrationnelle .Par conséquent, la fonction  $c_{\nu}^{0}$  peut être rédigée de la manière suivante :

$$c_{v}^{0} = c_{v_{gp}} + \left\{ \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left( \frac{\theta}{T} \right) - \frac{e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}}{1 - e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}} \right\}$$
(2.46)

La contribution vibratoire de la chaleur spécifique à volume constant est expliquée par le deuxième terme dans les parenthèses, qui est principalement le terme de Planck.

Selon la supposition, tant que les degrés de liberté vibrationnelle sont pris en compte, les molécules de gaz agissent comme des oscillateurs harmoniques linéaires.

#### 2.3.4.1. L'état générateur

La chambre de combustion où la vitesse de l'écoulement est considérée comme nulle [52] et  $[53](V_0 = 0 \Rightarrow M = 0)$ , et les paramètres générateurs sont  $(T_0, \rho_0, P_0)$ . Autrement dit, T<sub>0</sub> est la température à laquelle se produit la combustion, P0 est la pression de la chambre et  $\rho_0$  est la densité de combustion dans les conditions de combustion de la chambre.

La conception de la chambre de combustion est liée aux paramètres  $T_0$  et  $P_0$ . Nous utiliserons la méthode de dichotomie [54] afin de calculer  $\rho_0$  sur l'équation de Berthelot.

# 2.3.4.2. La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot

Il est possible d'obtenir une expression régissant l'expansion isentropique d'un gaz diatomique réel en substituant les équations (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.39) et en intégrant l'état générateur à un état statique spécifique, ce qui donne :

$$c_{\nu}dT - \frac{a}{T}d\rho - \frac{RT}{\rho(1-b\rho)}d\rho = 0$$
(2.47)

Devisant cette équation pat "T" on obtient :

$$c_{\nu} \frac{dT}{T} - \frac{a}{T^2} d\rho - \frac{R}{\rho(1 - b\rho)} d\rho = 0$$
(2.48)

Il est possible d'intégrer l'équation (2.48) de l'état générateur à un état statique

spécifique, ce qui donne :

$$\int_{T_0}^{T} c_v \frac{dT}{T} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a}{T^2} d\rho - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{R}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0$$
(2.49)

$$\int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} = C_{V_{gp}} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1}\right) + R \left(\frac{\theta}{T} \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} - \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}\right)$$
(2.50)

Maintenant :

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a}{T^2} d\rho = -a \left( \frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right)$$
(2.51)

Et: 
$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{R}{\rho(1-b\rho)} d\rho = R \ln \frac{\rho_0(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_0)}$$
 (2.52)

$$C_{V_{i}}\ln\left(\frac{T}{T_{0}}\right) + R\ln\frac{\rho_{0}(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_{0})} - a\left(\frac{\rho}{T^{2}} - \frac{\rho_{0}}{T_{0}^{2}}\right) + R\ln\left(\frac{e^{\left(\frac{\theta}{T_{0}}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} - 1\right)} + R\left(\frac{\theta}{T}\frac{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} - 1\right)} - \frac{\theta}{T_{0}}\frac{e^{\left(\frac{\theta}{T_{0}}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{\theta}{T_{0}}\right)} - 1\right)}\right)^{2} = 0$$

$$(2.53)$$

L'équation d'énergie d'une détente isentropique telle que définie par l'équation de Berthelot est représentée par la relation (2.53) en tenant compte du comportement vibratoire des molécules.

#### 2.4. Détermination du nombre de Mach

La vitesse de l'écoulement et la célérité du son doivent être déterminées pour déterminer la fonction du nombre de Mach. L'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique peut être utilisée pour calculer ces deux quantités [55] :

$$du + d(pv) + VdV = 0 (2.54)$$

#### 2.4.1. Calcul de la vitesse

En modifiant les équations de Berthelot, on intègre (2.38), (2.45), (2.46) dans l'équation (2.54) et on passe de l'état générateur à un état statique (température et masse volumique spécifiée), on obtient:

$$VdV = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{V} dT - d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$
(2.55)

$$\int V dV = \int_{\rho_{0,T_0}}^{\rho,T} \frac{2a}{T} d\rho - \int_{\rho_{0,T_0}}^{\rho,T} c_v dT - \int_{P_0,T_0}^{P,T} d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$
(2.56)

Finalement, la fonction de vitesse sera la suivante :

$$V^{2}(T,\rho) = 2 \left\{ c_{v_{gp}}(T_{0}-T)^{2} + R\theta \left( \frac{1}{\left(1-e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)^{2}} - \frac{1}{\left(1-e^{\left(\frac{\theta}{T_{0}}\right)}\right)^{2}} \right) + 4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_{0}}{T_{0}}\right) \right\}$$
(2.57)

En substituant l'équation (2.22) entre l'état générateur (0) et un état statique donné par (T<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>, $\rho_1$ et V<sub>1</sub>), on obtient :

$$\int_{0}^{V_{1}} V dV = -\int_{T_{0}}^{T_{1}} C_{P}(T,\rho) |_{\rho=\rho_{1}} dT - \int_{\rho_{0}}^{\rho_{1}} C_{T}(T,\rho) |_{T=T_{1}} d\rho$$
(2.58)

Donc :

$$V^{2} = -2\int_{T_{0}}^{T_{1}} C_{P}(T,\rho) |_{\rho=\rho_{1}} dT - 2\int_{\rho_{0}}^{\rho_{1}} C_{T}(T,\rho) |_{T=T_{1}} d\rho$$
(2.59)

Il existe deux méthodes pour calculer la vitesse : la première est la méthode explicite et simple représentée par l'équation (2.57), ou bien la méthode intégrale représentée par l'équation (2.59). Les résultats du test numérique indiquent que les deux méthodes produisent exactement les mêmes résultats.

#### 2.4.2 Détermination de la célérité du son

La célérité du son correspondant peut être trouvée en substituant les équations de Berthelot, (2.45), (2.46), et (2.47) dans l'équation générale qui suit [56]:

$$a^{2} = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho} \frac{dT}{d\rho}$$
(2.60)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T} = \frac{RT}{\left(1 - b\rho\right)^{2}} - \frac{2a\rho}{T}$$
(2.61)

D'après l'équation (2.48), on a :

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{1}{c_v} \left( \frac{a}{T} + \frac{RT}{\rho(1 - b\rho)} \right)$$
(2.62)

La célérité du son est exprimée par :

$$a^{2}(T,\rho) = \frac{RT^{3}}{(1-b\rho)^{2}} - \frac{2a\rho}{T} + \frac{\rho^{2}T^{2} \left(\frac{a}{T^{2}} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)}\right)^{2}}{c_{v_{gp}} \cdot \left[1 + \left(\gamma_{gp} - 1\right) \left\{ \left(\frac{\theta}{T}\right)^{2} \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)^{2}} + \frac{2a\rho}{RT^{2}} \right\} \right]}$$
(2.63)

#### 2.4.3. Le nombre de Mach

En combinant (2.57) et (2.63), l'équation du nombre du Mach est la suivante :

$$M(T,\rho) = 2 \left( \frac{\frac{1}{(\gamma_{i}-1)} \left(\frac{T_{0}}{T}-1\right)^{2} + \left(\frac{\theta}{T}\right) \left(\frac{1}{1-e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}} - \frac{1}{1-e^{\left(\frac{\theta}{T_{0}}\right)}}\right)^{0.5} + \frac{1}{RT} \left(4a \left(\frac{\rho}{T}-\frac{\rho_{0}}{T_{0}}\right)\right)}{\frac{(\gamma_{i}-1) \left(\frac{1}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{RT}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{RT}\right)^{2}} + \frac{1}{(1-b\rho)^{2}} - \frac{4a\rho}{RT}} \right)}$$
(2.64)

L'équation suivante est obtenue si on prend en compte que  $\theta$ , b et à sont nuls :

$$M^{2} = 2\left(\left(\frac{T_{0}}{T} - 1\right)\left(\frac{1}{\gamma_{gp} - 1}\right)\right)$$
(2.65)

Dans cette situation, le rapport des températures est :

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2}M^2\right)^{-1}$$
(2.66)

Ces relations (2.65) et (2.66) sont les équations qui déterminent de manière précise le nombre de mach (cas de détente) et le rapport de température pour un gaz parfait.

Ainsi, l'équation (2.64) pour un gaz réel représente la forme générale du nombre de Mach (calorifiquement et thermiquement imparfait).

# **2.5.** La chaleur spécifique à volume constante $c_{y}(T, \rho)$

En substituant les équations (2.45) dans l'équation (2.46), on peut obtenir la chaleur spécifique avec un volume constant, ce qui donne la relation suivante :

$$c_{v}(T,\rho) = c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left( \left( \frac{\theta}{T} \right)^{2} \frac{e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}}{\left( 1 - e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)} \right)^{2}} + \frac{2a\rho}{RT^{2}} \right) \right\}$$
(2.67)

Il est clair que l'effet de covolume b n'a pas d'impact sur la chaleur spécifique à volume constante et que les seuls paramètres impactés sont les forces d'attraction intermoléculaires et le comportement vibratoire. En retrouvant l'état d'un gaz parfaitement thermique et calorifique, c'est-à-dire

 $c_{v}(T,\rho) = c_{v_{(gp)}}$ 

En cas de nullité des forces d'attraction entre les molécules ( $\dot{\alpha}$ =0), on obtient un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait où la chaleur spécifique à volume constante ne dépend que de la température et des paramètres de comportement vibratoire  $\theta$ . On appelle ce type de gaz le modèle HT ou le gaz parfait à haute température.

$$c_{v}\left(T,\rho\right) = c_{v_{(gp)}}\left\{1 + \left(\gamma_{(gp)} - 1\right)\left(\frac{\theta}{T}\right)^{2} \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^{2}}\right\}$$
(2.68)

# **2.6.** La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$

La relation suivante définit la chaleur spécifique à pression constante :

$$c_{p}(T,\rho) = c_{v}(T,\rho) - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho}}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T}}$$
(2.69)

On rappelle l'équation de Berthelot en termes de volume :  $P = \frac{RT}{v-b} - \frac{\dot{a}}{Tv^2}$ 

D'où: 
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{\left(v-b\right)^2} + \frac{2\dot{a}}{Tv^3} = -\frac{RT\rho^2}{\left(1-b\rho\right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho^3}{T}$$
 (2.70)

Ainsi, l'expression  $c_p(T, \rho)$  sera obtenue en substituant les équations (2.68), (2.70), (2.37) dans l'équation (2.69).

$$c_{p}(T,\rho) = c_{p_{(gp)}} 1 + \left[ \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left( \frac{\theta}{T^{2}} \right) \frac{\theta}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^{2}} + \frac{4\dot{a}\rho}{RT} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2 + b\rho}{1 - b\rho} + \frac{\dot{a}\rho}{2RT} \right)}{\left( 1 - b\rho \right)^{2}} - \frac{2\dot{a}\rho}{RT} \right] \right\} \right]$$
(2.71)

En retournant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait, on considère que  $\theta$ , b et *à* sont nuls :

$$c_P(T,\rho) = c_{p_{(gp)}}$$

Si l'imperfection des gaz réels (b et à nuls) n'est pas prise en compte, on obtient une relation qui représente le cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait.

$$c_{p}(T,\rho) = c_{p(gp)}\left(1 + \frac{\gamma_{(gp)}}{\gamma_{(gp)}} - \left(\left(\frac{\theta}{T}\right)\frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^{2}}\right)\right)$$
(2.72)

À pression constante, la chaleur spécifique dépend exclusivement de la température et du comportement vibratoire θ.

#### 2.7. Rapport des chaleurs spécifiques y

Notre domaine d'étude est limité au régime supersonique pour un nombre de Mach M  $\in$  [1.0, 6.0].La relation suivante est produite par le rapport des chaleurs spécifiques :

$$\gamma(T,\rho) = \frac{c_p(T,\rho)}{c_v(T,\rho)}$$
(2.73)

En devisant l'équation (2.71) par l'équation (2.67): on obtient ce rapport des chaleurs spécifique :

$$\gamma(T,\rho) = \gamma_{(gp)} \left[ \frac{1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T^2}\right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \left[ 1 + \frac{\left(\frac{2 - b\rho}{1 - b\rho} + \frac{\dot{a}\rho}{2RT^2}\right)}{\left(1 - b\rho\right)^2} - \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \right] \right]}{1 + (\gamma_{(gp)} - 1) \left(\frac{\theta}{T^2}\right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2}} \right]}$$
(2.74)

#### 2.8. Détermination de rapport des sections d'un écoulement

Selon l'équation pour la conservation de la masse, nous avons :

$$\rho VA = cte$$

 $\log(\rho VA) = \log(cte) \tag{2.75}$ 

La différentielle de la relation (2.75) donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{2.76}$$

Dans ce cas :

$$\frac{dA}{A} = -\left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V}\right)$$
(2.77)

D'après la relation (2.26), on peut écrire :

$$VdV - C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dV}{V} - \frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho}$$
(2.79)

Remplaçons l'équation (2.79) dans l'équation (2.77) on obtient :

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1-M^2}{M^2}\right) \frac{d\rho}{\rho}$$
(2.80)

Remplaçons l'équation (2.28) dans l'équation (2.80) on obtient :

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1-M^2}{M^2}\right) \left[\frac{C_P(T,\rho)}{a^2} dT + \frac{C_T(T,\rho)}{a^2} d\rho\right]$$
(2.81)

Finalement :

$$\frac{dA}{A} = \left[ \left( \frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} . C_p(T, \rho) \right) dT + \left( \frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} . C_T(T, \rho) \right) d\rho \right]$$
(2.82)

En modifiant la relation (2.82) entre l'état critique (\*) fourni par ( $T^*$ ,  $P^*$ ,  $\rho^*$ ,  $M^*=1$ ,  $A^*$ ) et l'état (1) supersonique fourni par (T, P,  $\rho$ , M, A), on obtient :

$$\int_{A^{*}}^{A} \frac{dA}{A} = \int_{T^{*}}^{T} \left( \frac{1 - M^{2}(T,\rho)}{V^{2}(T,\rho)} . C_{P}(T,\rho) \right) dT + \int_{\rho^{*}}^{\rho} \left( \frac{1 - M^{2}(T,\rho)}{V^{2}(T,\rho)} . C_{T}(T,\rho) \right) d\rho$$
(2.83)

Alors :

$$\frac{A}{A^*} = Exp\left(\int_{T}^{T^*} FA_T(T,\rho)dT + \int_{\rho}^{\rho^*} FA_{\rho}(T,\rho)d\rho\right)$$
(2.84)

#### 2.9. Détermination de l'expression du débit massique critique

Le débit massique traversant une section A est donné par :

$$\dot{m} = \int_{A} \rho V \cos \alpha \, dA \tag{2.85}$$

 $\alpha$ : est l'angle que le vecteur de vitesse prend avec la normale. Pour rendre le calcul non dimensionnel, si nous divisons la relation (2.40) par la quantité A\* $\rho_0 \alpha_0$  nous aurons :

$$\frac{\dot{m}}{A_*\rho_0 a_0} = \int_A \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \cos \alpha \frac{dA}{A_*}$$
(2.86)

En supposant que le débit critique reste constant, il est possible de le déterminer au niveau du col de la tuyère. Dans cette section,  $\rho = \rho^*$ ,  $A = A^*$ ,  $a = a^*$ , M=1et  $\alpha = 0$  (écoulement horizontal). Ainsi, notre relation devient plus simple.

$$\frac{\dot{m}}{A_*\rho_0 a_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \times \frac{a_*}{a_0}$$
(2.87)

Finalement :

$$\frac{\dot{m}}{A_{*}\rho_{0}a_{0}} = \left( \frac{\frac{RT_{*}\rho_{*}}{\left(1-b\rho_{*}\right)^{2}} - \frac{2\dot{a}\rho_{*}^{2}}{T_{*}} + \frac{\rho_{*}^{3}T_{*}\left(\frac{\dot{a}}{T_{*}^{2}} + \frac{R}{\left(1-b\rho_{*}\right)}\right)^{2}}{c_{v_{gp}}\left\{1 + (\gamma_{gp} - 1)\left(\frac{\theta}{T_{*}^{2}}\right)\frac{e^{\frac{\theta}{T_{*}}}}{\left(1-e^{\frac{\theta}{T_{*}}}\right)^{2}} + \frac{2\dot{a}\rho_{*}}{RT_{*}^{2}}\right\}}{\left(1-e^{\frac{\theta}{T_{*}}}\right)^{2}} + \frac{\rho_{0}^{3}T_{0}\left(\frac{\dot{a}}{T_{0}^{2}} + \frac{R}{\left(1-b\rho_{0}\right)}\right)^{2}}{c_{v_{gp}}\left\{1 + (\gamma_{gp} - 1)\left(\frac{\theta}{T_{0}^{2}}\right)\frac{e^{\frac{\theta}{T_{0}}}}{\left(1-e^{\frac{\theta}{T_{0}}}\right)^{2}} + \frac{2\dot{a}\rho_{0}}{RT_{0}^{2}}\right\}}\right)} \right)$$
(2.88)

Pour permettre un écoulement supersonique à travers le divergent, il est nécessaire que le débit traversant la tuyère réponde à la condition (2.88), sinon il y aura un écoulement subsonique à travers ce divergent, qui n'est pas le sujet de notre étude.

#### 2.10. La Poussée

La force produite par une tuyère dépend non seulement de la vitesse de sortie des gaz de combustion, mais aussi de la variation de la pression de sortie par rapport à la pression ambiante. La poussée s'exprime dans la théorie monodimensionnelle d'un écoulement permanent non visqueux ;

$$F = \int P dA = \dot{m} \times V_s + (P_s - P_a) A_s \tag{2.89}$$

As: la section de sortie des gaz

Ps : la pression a la sortie de la tuyère

Pa: pression extérieur (pression atmosphérique)



Figure 2.1.Diagramme de force pour la poussée du moteur-fusée.

# 2.10.1. Le coefficient de poussée

Le coefficient de poussée se définit comme le rapport entre la poussée F et le produit de la pression totale dans la chambre par l'air de la section correspondante au col :

$$C_F = \frac{F}{\rho_0 A^*} \tag{2.90}$$

Il s'agit d'un facteur qui représente la détente des gaz dans la partie divergente de la tuyère.



Figure 2.2 Tuyère propulsive d'un moteur fusée

# 2.10.2. Erreur du modèle Gaz réel

En raison de son abondance dans la nature, l'air est utilisé comme gaz propulseur dans la plupart des applications aérospatiales. Nous avons calculé la différence entre les fonctions v de l'air et des autres gaz pris en compte dans cette étude pour évaluer les avantages et les inconvénients de l'utilisation du gaz à la place de l'air, en utilisant la relation suivante :

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{AIR}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{GAS}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100$$
(2.91)

Nous étions intéressés par une différence supérieure à 5% entre les résultats car c'est la norme dans les applications de la dynamique des gaz.

# 2.11. Conclusion

Ce chapitre explique en détail les relations thermodynamiques et géométriques en prenant en compte la pression génératrice. Une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer sera créée en utilisant ces paramètres géométriques et thermodynamiques.

#### 3.1. Introduction

Les écoulements supersoniques sont calculés en utilisant la fonction de Prandtl Meyer. L'angle de détente initial au col est crucial pour obtenir le nombre de Mach de sortie désiré et ainsi élaborer une tuyère supersonique qui assurera un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. On utilise la méthode des caractéristiques [57] pour élaborer ce genre de tuyère. La fonction de Prandtl Meyer constitue le fondement de celle-ci.

Ce chapitre explore l'impact du gaz sur la fonction de Prandtl Meyer. A partir des hypothèses d'équation d'état de Berthelot, de nouvelles relations et expressions sur l'écoulement supersonique et une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer sont développées, expliquant les effets de la taille moléculaire et de la force intermoléculaire, ainsi que les variations de capacités de chaleur. Des expressions ont été créées pour analyser les flux supersoniques d'un gaz calorifiquement et thermiquement imparfait. Divers selon la température et la masse volumique, et basés sur l'hypothèse d'un gaz réel.

L'application est pour les gaz (H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Co, No, Cl<sub>2</sub> et l'air) dans le domaine supersonique, qui est inférieur au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ



Figure 3.1: Forme générale d'une tuyère à détente centrée

#### 3.2. Détente de Prandtl-Meyer

La déviation d'un écoulement supersonique peut provoquer une expression ou une compression continue et isentropique. Comme l'indique la figure (3.2), La détente de Prandtl-Meyer est une détente supersonique d'un fluide

parfait sur une plaque plane avec une rampe déviée vers le bas, comme illustré dans la figure (3.2). La déviation de cet écoulement produit les ondes de détentes, ou lignes de Mach, qui augmentent le nombre de Mach et réduisent les caractéristiques du fluide (masse volumique, pression et température).

On appelle détente une succession d'ondes de Mach dont chacune forme un angle µ avec la direction de l'écoulement amont. La zone de détente est restreinte par l'angle de Mach amont µ1 et l'angle de Mach aval µ2.



Figure 3.2: Schéma de la détente de Prandtl-Meyer

Lorsque la rampe est déviée vers le haut, les ondes générées sont des ondes de compression (figure 3.3) et les effets obtenus diffèrent de ceux qui ont été évoqués précédemment. L'analyse aérodynamique des profils met en évidence l'importance de ces flux.



Figure 3.3: Schéma d'une onde de compression

#### 3.3. Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR

Il s'agit de déterminer une expression générale de cette fonction à l'aide de l'équation d'état de Berthelot, qui est sensiblement modifiée par l'ajout des termes de covolume et de force d'attraction intermoléculaire, tout en prenant en considération l'effet de vibration qui rend le gaz calorifiquement imparfait.

#### 3.3.1. Formulations mathématiques

La déviation d'un écoulement supersonique peut provoquer une compression ou une expansion. Ils fournissent les ressources nécessaires pour étudier ce phénomène lorsque l'intensité du choc  $\Delta P/P$  tend vers zéro. En effet, une onde de choc oblique se transforme en une onde de Mach. La vitesse du son est la vitesse normale à l'onde. La relation suivante [58] indique qu'une légère déviation d'écoulement (d) en dessous de l'onde est corrélée à une différence de vitesse (dV), on a :

$$d\upsilon = -\cot g(\mu) \frac{dV}{V}$$
(3.1)

 $\mu$  : Représente l'angle de mach

dv : Représente une déflexion élémentaire.

Lorsque l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde (onde de compression), l'angle est positif et lorsque l'écoulement se rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente), l'angle est négatif.

En ajoutant l'équation (3.1) à la relation entre l'angle de Mach  $\mu$  et le nombre de Mach M, on obtient :

$$d\upsilon = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \tag{3.2}$$

Tel que : v est définie comme étant la fonction de Prandtl Meyer.

Afin de traiter le cas d'un angle fini, il est nécessaire d'intégrer la relation mentionnée ci-dessus, ce qui implique que l'on puisse exprimer en fonction de et de M.

Connaissons :

$$-d\theta = \sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V}$$
(3.3)

D'après la relation (2.26), on peut écrire :

46

$$VdV = -C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} \tag{3.4}$$

Divisons la relation (3.4) par V<sup>2</sup> on obtient :

$$\frac{VdV}{V^2} = -\frac{C_s^2}{V^2} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho}$$
(3.5)

Remplaçons l'équation (3.5) dans l'équation (3.3) on obtient :

$$-d\theta = -\frac{1}{M^2}\sqrt{M^2 - 1}\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)$$
(3.6)

Remplaçons l'équation (2.28) dans l'équation (3.6) on obtient :

$$-d\theta = -\frac{1}{M^{2}(T,\rho)}\sqrt{M^{2}(T,\rho) - 1} \left(\frac{C_{P}(T,\rho)}{C_{S}^{2}(T,\rho)}dT + \frac{C_{T}(T,\rho)}{C_{S}^{2}(T,\rho)}d\rho\right)$$
(3.7)

$$\Rightarrow d\theta = \left(\frac{\sqrt{M^2(T,\rho)-1}}{V^2(T,\rho)}, C_p(T,\rho)\right) dT + \left(\frac{\sqrt{M^2(T,\rho)-1}}{V^2(T,\rho)}, C_T(T,\rho)\right) d\rho$$
(3.8)

Alors :

La fonction de Prandtl Meyer est la valeur d'un état supersonique quelconque donné par (T, P,  $\rho$ , M) :

$$d\upsilon = -d\theta \tag{3.9}$$

$$dv = -\left(\frac{\sqrt{M^{2}(T,\rho)-1}}{V^{2}(T,\rho)}, C_{P}(T,\rho)\right) dT - \left(\frac{\sqrt{M^{2}(T,\rho)-1}}{V^{2}(T,\rho)}, C_{T}(T,\rho)\right) d\rho$$
(3.10)

Substituant la relation entre l'état critique (\*)  $(T_*, \rho_*, P_*, M_* = 1, \upsilon_* = 0)$  et un état supersonique  $(T, \rho, P, M, \upsilon)$  et on intègre :

$$\int_{\nu_*}^{\nu} d\nu = \nu - \nu_* = \nu$$

Finalement la fonction de Prandtl Meyer sera :

$$\upsilon(T,\rho) = \int_{T}^{T_{*}} \left( \frac{\sqrt{M^{2}(T,\rho)-1}}{V^{2}(T,\rho)} \cdot C_{p}(T,\rho) \right)_{\rho=\rho_{1}} dT + \int_{\rho}^{\rho_{*}} \left( \frac{\sqrt{M^{2}(T,\rho)-1}}{V^{2}(T,\rho)} \cdot C_{T}(T,\rho) \right)_{T=T_{1}} d\rho$$
(3.11)

47

Ou bien :

$$\upsilon(T,\rho) = \int_{T}^{T*} F\upsilon_{T}(T,\rho) \Big|_{\rho} dT + \int_{\rho}^{\rho*} F\upsilon_{\rho}(T,\rho) \Big|_{T} d\rho$$
(3.12)

Avec :

$$Fv_{T}(T,\rho) = \frac{\sqrt{M^{2}(T,\rho)-1}}{V^{2}(T,\rho)}.C_{P}(T,\rho)$$
(3.13)

$$Fv_{\rho}(T,\rho) = \frac{\sqrt{M^{2}(T,\rho)-1}}{V^{2}(T,\rho)}.C_{T}(T,\rho)$$
(3.14)

Il est facile de constater que la fonction de Prandtl-Meyer est directement liée à la température et à la masse volumique.

Il convient également de souligner que cette fonction de Prandtl Meyer est tout à fait positive car notre étude se concentre spécifiquement sur une détente supersonique où les paramètres supersoniques sont toujours inférieurs aux paramètres critiques du col.

#### 3.4. Les procédures du calcul numérique

#### 3.4.1. Determination la masse volumique génératrice ρ<sub>0</sub>

Après avoir établi les valeurs de pression et de température génératrices, il faut déterminer la masse volumique génératrice  $\rho_0$ , qui peut être calculée numériquement en utilisant la méthode de dichotomie. Il est facile de choisir un intervalle [ $\rho$ 1,  $\rho$ 2] contenant la masse volumique  $\rho_0$  et de vérifier que la condition  $F(\rho 1) F(\rho 2) \le 0$ .  $\rho 1=0 \text{ Kg/m3}$  et  $\rho 2= \rho 1 + \rho as$ . On peut calculer  $\rho_0$  avec une grande précision et un petit pas une fois que cet intervalle est trouvé. La valeur  $\rho_0$ est déterminée par la précision  $\varepsilon$  et le pas. Le nombre d'itérations correspondant à la précision  $\varepsilon$  nécessaire pour déterminer la masse volumique génératrice  $\rho_0$  est fourni par [59] :

$$K = \frac{1}{0.6931} \log\left(\frac{Pas}{\varepsilon}\right) + 1 \tag{3.15}$$

Si  $\varepsilon = 10^{-16}$ , et le pas= $10^{-4}$ , le nombre d'itérations K ne peut excéder 41 itérations.

#### 3.4.2. Détermination les rapports thermodynamiques

Avant de déterminer les rapports thermodynamiques, On calcule numériquement en premier lieu, les paramètres de l'état statique  $T, P, \rho$ , avec un nombre de Mach M connu, ces paramètres statique peuvent être trouvées on résoudre le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.3), (2.53) et (2.64), le calcul se fait en utilisant l'algorithme de newton avec une dérivation numérique de ces équations, une fois par rapport à la température, et deuxième fois par rapport à la masse volumique, en mettant les paramètres statique  $T, P, \rho$  du cas d'un gaz parfait comme un vecteur initial pour le démarrage du calcul, concernant notre algorithme, la dérivation se fait avec un pas=10<sup>-4</sup>, et le calcul se fait avec une précision  $\varepsilon$ =10<sup>-8</sup>, et le nombre d'itérations K ne peut excéder 100 itérations.

Après avoir établi ces paramètres statiques, on procède au calcul des rapports thermodynamiques avec une précision  $\varepsilon = 10^{-16}$  en divisant ces paramètres statiques par nos paramètres générateurs. Cela permet de déterminer le rapport des températures T/T0, le rapport des pressions P/P0, le rapport des masses volumiques P/P0 et le rapport des vitesses sonores a/a0. Pour cela, on utilise les paramètres générateurs de l'équation (2.63) pour remplacer nos paramètres générateurs.

Le problème consiste à trouver le vecteur  $[T, \rho, P]$  vérifiant les 3 équations non linéaires suivantes:

$$\begin{cases} f_E(T, \rho, P) = 0 \\ f_M(T, \rho, P) = 0 \\ f_B(T, \rho, P) = 0 \end{cases}$$
(3.16)

Où  $f_E$ ,  $f_M$  et  $f_B$  sont des fonctions de trois variables que nous supposons différentiable set réfèrent respectivement aux équations (2.3) et (2.53), (2.64).

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'y a pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Le plus souvent, il existe plusieurs solutions possibles et seul le contexte indique laquelle est la bonne.

Il existe de nombreuses techniques pour résoudre les systèmes non linéaires. En particulier, nous ne proposons que la méthode la plus essentielle et la plus répandue, la méthode de Newton.



Figure 3.4. Étapes de calcul du PMF.

#### 3.4.3. La méthode de Newton

Le cas général est donné par l'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires.

Prenons donc en compte le système :

$$\begin{cases} f_E(T, \rho) = 0 \\ f_M(T, \rho) = 0 \end{cases}$$

Soit[ $T_i$ ,  $\rho_i$ ], une approximation initiale de la solution de ce système.

Cette approximation initiale, est cruciale et doit toujours être choisie avec soin. Le but de ce qui suit est de déterminer les pas $[dT, d\rho]$  à  $[T_i, \rho_i]$  de telle

sorte que:  $\begin{cases} f_E(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0\\ f_M(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \end{cases}$ (3.17)

Pour déterminer  $[dT, d\rho]$  il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions:

$$\begin{cases} 0 = f_E(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i) dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) d\rho + \dots \\ 0 = f_M(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i) dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) d\rho + \dots \end{cases}$$
(3.18)

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant. Pour déterminer  $[dT, d\rho]$  il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i,\rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i,\rho_i)d\rho = -f_E(T_i,\rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i,\rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i,\rho_i)d\rho = -f_M(T_i,\rho_i) \end{cases}$$
(3.19)

Où encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i,\rho_i) & \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i,\rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i,\rho_i) & \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i,\rho_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d\rho \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_E(T_i,\rho_i) \\ f_M(T_i,\rho_i) \end{pmatrix}$$
(3.20)

Ce système linéaire s'écrit, également sous une forme plus compacte :

$$J(T_i, \rho_i) \Delta \vec{k} = -\vec{R}(T_i, \rho_i)$$
(3.21)

Où  $J(T_i, \rho_i)$  désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice jacobienne évaluée au point  $(T_i, \rho_i)$ , où  $\Delta \vec{k}$  est le vecteur des corrections relatives à chaque variable  $(\Delta \vec{k} = [\Delta T, \Delta \rho])$  et où  $-\vec{R}(T_i, \rho_i)$  est le vecteur résidu évalué en  $(T_i, \rho_i)$ . Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien.

Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit inversible. On pose ensuite:  $\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases}$ (3.22)

Qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger $(T_{i+1}, \rho_{i+1})$  d'une nouvelle quantité  $\Delta \vec{k}$ , et ce jusqu'à la convergence. Pour en arriver à l'algorithme général suivant :

#### 3.4.4. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes

1. Étant donné  $\varepsilon$ , un critère d'arrêt.

2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations.

3. Étant donné  $\vec{k} = [T_i, \rho_i]$  une approximation initiale de la solution du système

4. Résoudre le système linéaire:  $J(T_i, \rho_i)\Delta \vec{k} = -\vec{R}[T_i, \rho_i]$  et poser:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases}$$

52

5. Si $\|T_i - T_{i+1}\| + \|\rho_i - \rho_{i+1}\| < \varepsilon$  et  $\|\vec{R}[T_i, \rho_i]\| \le \varepsilon$ 

- convergence atteinte
- écrire la solution
- arrêt

6.. i reçois i+1 et retour à l'étape 4

- 7..Si le nombre maximal d'itérations N est atteint:
  - convergence non atteinte en N itérations.
  - arrêt.

#### 3.4.5. Le choix de la solution initial

La convergence de la méthode de Newton dépend directement de l'approximation initiale de la solution, car un mauvais choix entraînera une divergence. Pour cette raison, la solution doit être initialisée en utilisant les paramètres thermodynamiques d'un gaz parfait, puis on déterminera si ce choix est justifié.

Notre recherche se concentre sur la détente isentropique unidimensionnelle, où l'écoulement est considéré comme supersonique (1<M<6). Le nombre de mach défini dans l'équation dans cette zone sera modifié en calculant les paramètres initiaux (ceux du gaz parfait) pour chaque valeur de M en utilisant les lois suivantes [60] :

$$\frac{T_i}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2}M^2\right]^{-1}, \frac{\rho_i}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2}M^2\right]^{\frac{-1}{\gamma_{gp} - 1}}, \frac{P_i}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2}M^2\right]^{\frac{-\gamma_{gp}}{\gamma_{gp} - 1}}$$
(3.23)

# 3.4.6. Détermination les rapports critiques au col

L'état générateur est indiqué par le nombre de Mach nul (M=0). Il est donc possible d'obtenir les paramètres critiques (T\*, P\*, p\* et a\*) qui correspondent à la température T0, à la masse volumique p0 et au nombre de Mach M=1 (ce qui est 53 le cas au col de la tuyère). En ce qui concerne la méthode employée (méthode de Newton), dans le cas où M=1 est remplacé dans la relation (2.64) et que le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.3), (2.53) et (2.64) est résolu par la méthode de Newton, les paramètres critiques du cas d'un gaz parfait sont utilisés comme vecteur initial pour le démarrage du calcul. On dérive numériquement les équations (2.3), (2.53) et (2.64) à la fois par rapport à la température et par rapport à la masse volumique, avec un pas de  $10^{-4}$ . La précision du calcul est de  $\varepsilon$ =10<sup>-8</sup>, et le nombre d'itérations K ne peut dépasser 100.

#### 3.4.7 Procédure de calcul par la méthode de Simpson

L'intégration numérique des fonctions FvT (T,  $\rho$ ) et Fv $\rho$  (T,  $\rho$ ) dans les intervalles [TS, T\*] et [pS, p\*] est nécessaire pour obtenir la valeur de Prandtl meyer vS, qui correspond au nombre de Mach MS (T=TS) et ( $\rho=\rho$ S). On remarque que les paramètres T0 et P0 sont influencés par les intégrations. Les figures 3.6 et 3.8 ont illustré la variation de ces fonctions afin de donner une idée de la forme précise avant de choisir la quadrature d'intégration. Étant donné que la fonction FvT (T, ρ) varie très rapidement aux extrémités de l'intervalle, il est possible de conclure que les guadratures d'intégrations à pas constant requièrent une discrétisation très élevée pour obtenir une précision adéquate. Afin de présenter correctement les extrémités, on utilise le traçage des fonctions avec T0=2000 K et MS=6.00 (extrême supersonique). La fonction FvT (Τ, ρ) présente une dérivée très élevée au voisinage de la température T\*, infinie à T=T\*, et inférieure au voisinage de TS. Un résultat plus satisfaisant pour la deuxième fonction  $Fv(T, \rho)$  est obtenu en utilisant une simple intégrale à pas constant telle que Trapèze ou Simpson à pas constant. Il est donc essentiel de condenser les nœuds afin de favoriser les voisinages des températures T\* et TS. Cette condensation a pour objectif de calculer rapidement la valeur de l'intégrale en diminuant le nombre de nœuds de quadrature. La quadrature d'intégration utilisée pour calculer numériquement l'intégrale donnée par (3.12) est celle de Simpson. Selon la relation (3.24), nous avons sélectionné la forme de condensation pour notre calcul. La distribution des valeurs de T peut être trouvée aisément après avoir obtenu s par :

$$S_{i} = b_{1} \cdot z_{i} + (1 - b_{1}) \cdot \left[ 1 - \frac{\tanh[b_{2} \cdot (1 - z_{i})]}{\tanh(b_{2})} \right]$$
(3.24)

Avec :

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \le i \le N \tag{3.25}$$

$$\frac{T-T_s}{T_*-T_s} = f\left(s\right) \tag{3.26}$$

La fonction f(s) de la relation est arbitraire (3.26). On choisit la formule f(s)= s pour notre calcul. Ensuite, les nœuds sont distribués de la manière suivante:

$$T_i = S_i \cdot (T_* - T_S) + T_S \tag{3.27}$$

Les nœuds peuvent être condensés vers l'extrémité gauche T<sub>S</sub> de l'intervalle si les valeurs de b1 sont proches de zéro (par exemple, b1=0.1) et b2=2.0. On peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite T\* pour des valeurs de b1 proches de 2.0 (par exemple, b1=1.9) et b2=2.0. Les nœuds ne peuvent être condensés qu'à une extrémité gauche ou droite grâce à la fonction de condensation (3.24).



Figure 3.5 : Présentation de la condensation des nœuds

Les nœuds doivent être condensés vers les deux extrémités simultanément car notre fonction an une variation rapide aux deux extrémités. Après cela, l'intervalle d'intégration [Ts, T\*] doit être divisé en deux parties, (égales par exemple) [Ts, T<sub>M</sub>] et [T<sub>M</sub>, T\*], tel que :

$$T_M = \frac{T_* - T_S}{2}$$
(3.28)

Pour condenser les nœuds vers les extrémités gauche T<sub>S</sub> et droite T\* pour chaque intervalle, on doit prendre des valeurs de b1 proches de zéro (par exemple,

b1=0,1) et b2=2.00 pour l'intervalle [T<sub>s</sub>, T<sub>M</sub>] gauche. Le nombre N est également divisé en deux parties distinctes. La figure montre la forme de la subdivision de l'intervalle [T<sub>s</sub>, T<sup>\*</sup>].







Figure 3.7 : Condensation des nœuds vers les deux extrémités de



Figure 3.8 : Variation de la fonction  $F_{v\rho}(T, \rho)$  dans  $[\rho_S, \rho^*]$ 

Après avoir déterminé la fonction de condensation, la distribution des températures et des masses volumiques peut être déterminée par :

$$T_i = S_i \cdot (T_D - T_G) + T_G$$
(3.29)

$$\rho_i = S_i \cdot \left(\rho_D - \rho_G\right) + \rho_G \tag{3.30}$$

L'utilisation de la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers les deux extrémités permet d'obtenir la valeur de S correspondant au TS et à ps en sommant l'intégration de la fonction FnT(T, p) dans l'intervalle [TS, T\*]. Enfin, afin d'évaluer l'influence des paramètres générateurs, notamment la pression génératrice, sur la fonction de Prandtl Meyer pour l'air en utilisant l'équation d'état de Berthelot, il est simplement nécessaire de tracer cette fonction pour différentes valeurs des paramètres générateurs et de la comparer avec les modèles de gaz parfait et de haute température. Par la suite, notre modèle se rapproche le plus d'un cas réel d'écoulement supersonique.

#### 3.4.8 Procédure de calcul par la méthode de Gauss Legendre

Dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale [61]. La somme pondérée calculée en plusieurs points du domaine d'intégration est généralement substituée au calcul de l'intégrale. La quadrature de Gauss, ou quadrature de Carl Friedrich Gauss, est une quadrature exacte d'un polynôme de degré 2n-1 avec n points dans le domaine d'intégration. Le calcul de l'intégrale définie d'une fonction f continue donnée sur un intervalle fini [a, b] est possible si ce dernier est (a, b). La méthode a la forme suivante :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_{i}f(x_{i})$$
(3.31)

Ou une fonction de pondération qui peut garantir que f est intégrable. Les coefficients de quadrature (ou poids) Pour le produit scalaire, les points ou nœuds sont réels, distincts et uniques.

Le tableau 3.1 contient les coefficients de quadrature et les abscisses pour une
intégration d'ordre 32.

Nous distinguerons deux perspectives distinctes :

• Une fonction d'approximation ou une fonction interpolant remplace la fonction d'intégration.

Une somme pondérée des valeurs prises par la fonction en des points situés dans un voisinage de [a, b] est utilisée pour approcher l'intégrale.

Tableau 3.1 : Abscisses et coefficients associes de la quadrature d'intégration de

i	$X_{i}$	$W_i$
1	.001368073	0.003509312
2	.0071942277	0.0081372115
3	0.0176188818	0.0126959771
4	0.0325469453	0.0171370005
5	0.0518394344	0.0214179378
6	0.0753161897	0.0254990642
7	0.1027581033	0.0293420289
8	0.1339089403	0.0329111118
9	0.1684778666	0.0361728923
10	0.2061421214	0.0390969435
11	0.2465500455	0.0416559573
12	0.2893243619	0.0438260415
13	0.3340656989	0.0455869341
14	0.3803563189	0.0469221942
15	0.4277640192	0.0478193546
16	0.4758461672	0.0482700387
17	0.5241538328	0.0482700387
18	0.5722359808	0.0478193546
19	0.6196436811	0.0469221942
20	0.6659343011	0.0455869341
21	0.7106756381	0.0438260415
22	0.7534499545	0.0416559573
23	0.7938578786	0.0390969435
24	0.8315221334	0.0361728923
25	0.8660910597	0.0329111118
26	0.8972418967	0.0293420289
27	0.9246838103	0.0254990642
28	0.9481605656	0.0214179378
29	0.9674530547	0.0171370005
30	0.9823811182	0.0126959771
31	0.9928057723	0.0081372115
32	0.9986319268	0.0035093120

Gauss Legendre d'ordre 32

## Algorithme du calcul par la méthode de Gauss Legendre

Bien que l'équation (3.11) implique l'intégration de deux fonctions, on préfère intégrer la première fonction  $F_{vT}$  (T,  $\rho$ ) à l'aide de la méthode de Gauss Legendre dans [T<sub>S</sub>, T\*]. L'algorithme suivant décrit en détail l'intégration numérique de la fonction  $F_{vT}$  (T,  $\rho$ ).

Algorithme d'intégration  $F_{vT}(T, \rho) = \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_p(T, \rho)$ 

- Lecture des données :
  - 1. T et ρ : sont calculées (Voir paragraphe 3.4.2)
  - 2. T\* : calculée (Voir paragraphe 3.4.6)
- Changement des variables :

X<sub>sup</sub>=T\*

Xinf=T

• Initialisation (U1=0)

Pour i=1 jusqu'à 32

Faire;

$$x = x_{inf} + (x_{sup} - x_{inf}) \cdot x_i$$
  
U<sub>1=</sub> U<sub>1+</sub>  $w_i \cdot \frac{\sqrt{M^2(x, \rho) - 1}}{V^2(x, \rho)}$ .  $C_p(x, \rho)$ 

Fin pour;

• La valeur du premier intégral est

$$U = U \cdot (x_{sup} - x_{inf})$$

La valeur finale de la fonction de Prandtl Meyer est la sommation de u<sub>1</sub> donné par  $F_{vT}(T, \rho)$  et u<sub>2</sub> donné par  $F_{v\rho}(T, \rho)$ 

 $U = U_1 + U_2$ 

Cette valeur sera calculée en radian, alors la conversion vers le degré fait par la relation suivante :

$$\upsilon^{\circ} = \upsilon \cdot \frac{\pi}{180.}$$

## 3.4.9. Effet de la quadrature sur la convergence du problème

On a opté pour l'exemple où T<sub>0</sub>=2000 K et M<sub>S</sub>=6.00. Dans le but d'obtenir la précision souhaitée, cet exemple requiert une quadrature d'ordre élevé par rapport au troisième triple (T<sub>0</sub>,  $\rho_0$  et M<sub>S</sub>). Le résultat de la quadrature sera toujours inférieur à la solution exacte, ce qui entraînera une convergence monotone. Il est indispensable de quadrature Gauss Legendre d'ordre 32 afin d'obtenir le résultat si la précision est de  $\epsilon$ =10<sup>-6</sup>. Peu importe le triple (T<sub>0</sub>,  $\rho_0$  et M<sub>S</sub>), il est possible d'utiliser la quadrature d'ordre n=32 au maximum afin d'obtenir la même précision  $\epsilon$ . Pour information, afin d'obtenir une précision  $\epsilon$ =10<sup>-6</sup> pour le même exemple, les quadratures de rectangle, de trapèze et de Simpson à pas constant ou variable requièrent un nombre minimum de points, tel que représenté dans le tableau 3.2 ci-dessous :

Quadrature	Rectangle	Trapèze	Simpson A Pas	Simpson A Pas	Gauss Legendre
			constant	Variable	
Minimum Nombre de points pour avoir une précision ε=10 <sup>-6</sup>	274.827	162.914	8.637	3734	32

Tableau 3.2 : Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision  $\varepsilon = 10^{-6}$ 

La même précision  $\varepsilon$  peut être obtenue en utilisant la condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle d'intégration [TS, T\*] comme indiqué dans la référence [21]. En utilisant la quadrature de Simpson avec un nombre de points inférieur à celui indiqué dans le tableau 3.2. Dans cette situation, il faut avoir 8.637 points pour la quadrature de Simpson et 162.914 points pour la quadrature de trapèze. Si d'autres paramètres de la fonction de

condensation sont sélectionnés, il est possible d'obtenir des valeurs inférieures à celles mentionnées (3.24).

## 3.5. Conclusion

Ce chapitre expose le développement et l'élaboration de la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel. Toutes les situations de température élevée et basse ou de pression, cette dernière étant calculée en combinant deux fonctions complexes, cette forme sera applicable. Afin de résoudre ce problème et de simplifier la conception de tuyères supersoniques, il sera nécessaire d'améliorer les techniques de calcul numérique. Dans ce chapitre, Les différents résultats obtenus par les programmes de calcul numérique développés pour la fonction de Prandtl Meyer sont présentés. Ils incluent également les résultats sur l'impact du gaz de propulsion sur les différents paramètres thermodynamiques de l'écoulement supersonique [62]. La fonction de Prandtl Meyer est également présentée pour un gaz réel caractérisé par l'équation de Berthelot dans un régime supersonique au seuil de la dissociation moléculaire. La présentation de l'imperfection calorique pour différents gaz sélectionnés et les résultats de choix de gaz offrant des performances supérieures à celles de l'air.

La température sélectionnée est de 220 k (supérieure à la température de liquéfaction jusqu'à 3500 k) car notre travail est restreint pour comparer avec l'air, nous limitons notre travail jusqu'à 3500 k en raison du début de dissociation de quelques gaz (O2) à cette température particulière. Le nombre de Mach est utilisé dans le domaine d'application allant de MS=1.00 à MS=5.00 (extrême supersonique). Les programmes numériques peuvent produire des résultats supérieurs à MS>5.00, mais ils se détériorent lorsque MS augmente, car la marge supersonique est limitée à MS=5.00.

## 5.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel

La figure 4.1 montre les variations des valeurs de la chaleur spécifique C<sub>P</sub> de différents gaz (O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, C<sub>0</sub>, N<sub>2</sub> et N<sub>0</sub>) et de l'air à une température génératrice allant jusqu'à T<sub>0</sub> = 3 500 K et une pression de P<sub>0</sub> = 100 bar. Les gaz peuvent être divisés en trois niveaux selon leurs valeurs de chaleur spécifique C<sub>P</sub>. Le premier niveau était occupé par l'hydrogène gazeux (H<sub>2</sub>), qui avait la valeur de C<sub>p</sub> la plus élevée. Le deuxième niveau était constitué de chlore gazeux (Cl<sub>2</sub>), qui avait le C<sub>p</sub> le plus faible, tandis que le troisième niveau était occupé par l'air, le Co, le No, le N<sub>2</sub> et O<sub>2</sub>. Ces gaz avaient des valeurs de Cp comprises entre celles de H<sub>2</sub> et Cl<sub>2</sub>. Les valeurs de Cp des gaz ont augmenté avec T<sub>0</sub>, et cette variation a influencé les paramètres de flux thermodynamiques, caractérise le pouvoir calorifique d'un gaz et influence le PMF.



Figure 4.1. Variation des chaleurs spécifiques C<sub>P</sub> (T, ρ) en fonction de la température génératrice T<sub>0</sub>

La figure 4.2 montre les variations du rapport de chaleur spécifique  $\gamma$  de O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, No, Cl<sub>2</sub>, air et Co en fonction d'une température génératrice allant jusqu'à 3 500 K lorsque les pressions étaient P<sub>0</sub> = 1bar, 10 bars , 100 bars, 250 bars. Les gaz peuvent être divisés en quatre niveaux en fonction de leurs valeurs de  $\gamma$  : H<sub>2</sub>, qui avait la valeur la plus élevée, Cl<sub>2</sub>, qui avait la valeur la plus basse, No et O<sub>2</sub>, avec des valeurs supérieures à celles de Cl<sub>2</sub>, et l'air, le Co et le N<sub>2</sub>, qui avaient des valeurs légèrement supérieures que celles du No et du O<sub>2</sub>.

Les graphes montrent que lorsque T<sub>0</sub> augmente, le rapport des chaleurs spécifiques des gaz diminue. Cette variation a influencé les paramètres thermodynamiques de l'écoulement,  $\gamma$  est resté constant pour toute valeur donnée de P<sub>0</sub>. Nous avons également noté que Cl<sub>2</sub>, No et O<sub>2</sub> avaient des valeurs de  $\gamma$  inférieures à celles du Co, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> et de l'air. Plus la valeur de  $\gamma$  d'un gaz donné diminue, plus les valeurs de la longueur et du rayon de sortie de la tuyère augmentent. Cela a également influencé ses paramètres de conception. Ainsi, nous recommandons d'utiliser H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> et Co dans les applications aérospatiales car ils peuvent être utilisés avec une petite tuyère supersonique dans les missiles et les avions supersoniques. Un gaz avec une faible valeur de  $\gamma$  est un gaz chaud tandis que celui avec une valeur élevée est un gaz froid.





Figure : 4.2.Variation du rapport de chaleur spécifique γ en fonction de la température génératrice T<sub>0</sub>

### 4.2. Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer

Les valeurs des PMF de  $O_2$ ,  $H_2$ , air,  $Cl_2$ ,  $N_2$ , No et Co sont représentées dans la figure 4.3, avec des températures génératrice de T0 = 1000 K, 2000 K et 3000 K, ainsi que des pressions génératrice de P0 = 1 bar et 100 bars, en fonction d'un nombre de Mach allant jusqu'à 5. La valeur du PMF a été la plus élevée pour  $Cl_2$ , tandis que la valeur la plus faible a été enregistrée pour  $H_2$ . Les PMF de l'air, du  $N_2$ , du Co,  $O_2$  et du No étaient proches. Tous les résultats sont à peu près identiques, en particulier à faible nombre de Mach, et s'écartent lorsque ce dernier augmente. En augmentant la pression génératrice, les valeurs des PMF de  $H_2$ ,  $N_2$  et Co ont diminué de manière plus significative que celles de l'air,  $Cl_2$ , No et  $O_2$ , notamment à  $T_0 = 1000$  K. En diminuant la valeur PM, les paramètres de conception, tels que la longueur et la masse du MLN, ont été réduits. Le PMF a été impacté par la pression génératrice, notamment à des niveaux de pression élevés et de température bas. Nous pouvons conclure que l'utilisation de  $H_2$ ,  $N_2$  et Co a entraîné une augmentation de la masse, de la longueur et du volume du MLN.





Figure 4.3. Variation de la valeur v de la fonction Prandtl Meyer en fonction du nombre de Mach

La figure. 4.4 Montre la variation de la valeur de la fonction de Prandtl Meyer v donnée respectivement par la pression génératrice  $P_0= 1$  bar, 100 bar lorsque le nombre de Mach M = 2,0 et M = 4,0, en fonction de la température génératrice pour les déférents gaz (O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, No, Co, air, Cl<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>). Cl<sub>2</sub> avait la valeur la plus élevée

### **CHAPITRE 4 : RESULTATS ET COMMENTAIRES**

tandis que H<sub>2</sub> avait la valeur la plus faible. Les valeurs de v des PMF de l'air, du N<sub>2</sub> et du Co étaient similaires, tout comme celles de O<sub>2</sub> et du No. Les valeurs de ces deux derniers gaz étaient légèrement plus élevées.

Ces résultats montrent qu'une augmentation de T<sub>0</sub> et M entraîne une augmentation de la valeur de v du PMF et de sa valeur initiale v<sub>i</sub> .Au contraire, une augmentation de P<sub>0</sub> a entraîné une diminution des valeurs initiales v<sub>i</sub> des PMF de H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> et Co, tandis que celles de Cl<sub>2</sub>, d'air, de No et O<sub>2</sub> ont augmenté de manière surprenante. Lorsque la température génératrice était inférieure à 1000 K, le gaz utilisé et le nombre de Mach en sortie influençaient le PMF. Cela a à son tour influencé les paramètres d'écoulement et les paramètres de conception de la tuyère. Nous recommandons d'utiliser H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> et Co car ils conduisent à une petite tuyère et une poussée élevée.







Figure 4.4.Variation de la valeur v de la fonction Prandtl Meyer en fonction de la température génératrice.

### 4.3. Résultats sur l'erreur pour la fonction de Prandtl Meyer

La figure 4.5 présente les différences entre les valeurs de la fonction v de différents gaz (Cl<sub>2</sub>, Co, No, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>) et de l'air avec des changements de M, sous P<sub>0</sub>=1bar et T<sub>0</sub>=2000 K, et P<sub>0</sub>=100bar et T<sub>0</sub>=3000 K. Les variations de v dépendaient des valeurs de M, P<sub>0</sub> et T<sub>0</sub> ainsi que du gaz utilisé. L'erreur dans sa valeur calculée dépendait de T<sub>0</sub> et de P<sub>0</sub>, et augmentait lorsque P<sub>0</sub> augmentait et diminuait lorsque T<sub>0</sub> augmentait. Ainsi, l'erreur dans les calculs était la plus importante à haute pression et basse température. Cl<sub>2</sub> a généré l'erreur la plus importante par rapport à celle encourue lors de l'utilisation de l'air, tandis que le Co a généré la plus petite erreur.





Figure.4.5. Variation de l'erreur de v pour différents gaz par rapport à l'air en fonction de nombre de Mach M.

Les valeurs de la fonction v de divers gaz (Cl<sub>2</sub>, Co, No, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>) et de l'air sont illustrées dans la figure 4.6 avec les variations de température génératrice T<sub>0</sub> lorsque P<sub>0</sub>=1bar et M = 2,0 et P<sub>0</sub>=100bar et M = 4,0. Il est évident que les valeurs de T<sub>0</sub> et M étaient influencées par l'erreur, qui augmentait lorsque P<sub>0</sub> et M augmentaient. On a observé une erreur la plus importante par rapport à l'air pour le Cl<sub>2</sub> et une erreur la plus faible pour le Co.





Figure 4.6. Variation de l'erreur de v pour différents gaz par rapport à l'air en fonction de la Température génératrice T<sub>0</sub>.

La Figure 4.7. Illustre comment la fonction de Prandtl Meyer v varie pour l'air en fonction des pressions génératrices  $P_0= 1$  Bar, 10 Bar, 100 Bar, 300 Bar et 550 Bar, lorsque le nombre de Mach M est respectivement de 2.0 et 4.0, en fonction de la température génératrice T<sub>0</sub>, pour les modèles HT, GP et RG.

Il est observé que lorsque la température génératrice T<sub>0</sub> augmente pour différents modèles, la valeur de v augmente considérablement. Cependant, cette augmentation est plus importante lorsque la valeur de T<sub>0</sub> est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait. Cependant, dans des conditions de basse température et basse pression, le gaz peut être considéré comme calorifiquement et thermiquement parfait, jusqu'à environ 240 K. Il est également observé que les valeurs de v obtenues par notre modèle RG sont toujours inférieures à celles obtenues par le modèle HT, et que l'augmentation de la pression génératrice P<sub>0</sub> entraîne une baisse de la valeur de v. Cependant, à haute température génératrice T<sub>0</sub>, on observe une approche des deux modèles HT et RG, tandis qu'à basse température génératrice T<sub>0</sub>, les deux modèles s'éloignent. Cette distance est d'autant plus significative lorsque la pression génératrice P<sub>0</sub> est élevée, ce qui justifie l'utilisation du modèle RG pour corriger les résultats et illustrer les effets de la pression génératrice P<sub>0</sub>, de la température, des imperfections thermiques et calorifiques sur la fonction de Prandtl Meyer.



Figure 4.7 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction de la température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice P<sub>0</sub>

### CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons approfondi l'analyse des effets de l'utilisation de gaz de propulsion à haute pression sur la fonction de Prandtl Meyer (PMF). La fonction de Prandtl Meyer est un outil crucial dans l'analyse des écoulements supersoniques, car elle permet de déterminer l'angle de déviation des vitesses de gaz en fonction de diverses conditions de pression et de température. En examinant attentivement ces effets, nous avons pu tirer plusieurs conclusions importantes qui ont des implications directes pour la conception et l'optimisation des systèmes de propulsion.

Les conclusions suivantes peuvent être tirées de notre étude :

- La température génératrice, le nombre de Mach, et le type de gaz utilisé jouent un rôle déterminant dans la variation des valeurs de la fonction de Prandtl Meyer (PMF). Ces valeurs influencent à leur tour les paramètres de conception des tuyères propulsion. En effet, la température génératrice affecte directement les caractéristiques thermodynamiques du gaz, tandis que le nombre de Mach est employé pour déterminer les bornes d'intégration ; ainsi que pour le calcul de termes de cette nouvelle fonction. Le choix du gaz, qu'il s'agisse d'air ou d'autres gaz spécifiques, impacte également la façon dont la tuyère doit être conçue pour optimiser les performances.
- La pression génératrice est un facteur crucial qui influence la fonction de Prandtl Meyer. Cet effet devient particulièrement significatif à haute pression et basse température, où les variations de pression peuvent entraîner des modifications substantielles dans le comportement de l'écoulement. Une pression génératrice élevée entraîne une expansion plus importante du gaz, ce qui modifie les angles de déviation et les performances globales du système de propulsion.
- L'usage de gaz autres que l'air, comme l'hydrogène (H2), le monoxyde de Carbone (Co), ou l'azote (N2), peut offrir des améliorations notables des résultats de la fonction de Prandtl Meyer. En effet, nous avons observé une différence maximale d'environ 16 % dans les résultats. Cela suggère que le choix du gaz peut être optimisé pour maximiser l'efficacité du système de propulsion.

- Nous recommandons l'utilisation de gaz de propulsion ayant la valeur de PMF la plus faible pour les moteurs de fusée, les missiles, et les avions supersoniques. Ce choix permet non seulement l'utilisation d'une tuyère plus légère, mais aussi la production d'un coefficient de poussée (CF) élevé. Des gaz comme l'hydrogène (H2), le monoxyde de Carbone (Co), et l'azote (N2) se révèlent particulièrement adaptés pour ces applications en raison de leurs propriétés favorables en termes de PMF.
- Enfin, l'utilisation de gaz tels que l'hydrogène (H2), l'azote (N2), et le monoxyde de carbone (Co) entraîne une augmentation significative de la longueur de la tuyère, de son rayon de sortie, ainsi que de sa masse. Bien que ces gaz puissent améliorer les performances, il est crucial d'optimiser le volume occupé par la tuyère et de réduire sa masse pour améliorer les performances globales. Une réduction de ces paramètres contribue à augmenter la charge utile de l'appareil, offrant ainsi un avantage stratégique pour les applications aéronautiques et spatiales.

# Comme toute étude réalisée, On recommande les thèmes suivants comme des travaux de futur et perspectives :

- 1 Faire la conception des tuyères supersoniques bidimensionnelle, axisymétrique et tridimensionnelle par la méthode des caractéristiques et pour des autres types de tuyères telles que la tuyère à bouchon (plug nozzle), tuyère à détente déflexion (Expansion Deflexion nozzle), la tuyère à double galbe (dual galbe) et la tuyère à zone d'expansion (Bell shaped nozzle).
- 2 Programmer d'autres méthodes de conception des tuyères et faire la comparaison entre elles, par rapport au temps d'exécution et convergence du processus numérique.
- 3 Faire l'analyse physique et la simulation numérique des écoulements compressibles dans les tuyères et autour des ailes supersoniques.

## **APPENDICE A**

## LISTE DES SYMBOLES

а	Constante des forces intermoléculaire.
b	Constante de taille moléculaire.
т	Débit massique critique.
V	Volume spécifique.
Н	Enthalpie.
L	Longueur de la tuyère.
М	Nombre de Mach.
Р	Pression.
R	Constant thermodynamique de gaz.
S	Entropie.
Т	Température.
V	Vitesse de l'écoulement.
Ζ	Facteur de compressibilité.
CP	Chaleur spécifique a pression constante.
$C_V$	Chaleur spécifique a volume constant.
CT	Constant déterminée a température constante.
CF	Coefficient de la force de pression.
Cs	Célérité du son.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques.
ρ	Masse volumique.
θ	Température caractéristique de vibration.
υ	Fonction de Prandtl Meyer.
μ	Angle de Mach.
θ	Déviation du vecteur vitesse.
Δ	Coefficient de la fonction de condensation.
$\rho_M$	Masse volumique du matériau de la structure de la tuyère.
Δx	Pas non-dimensionnel ( $\Delta x/y^*$ ) pour le calcul dans la région de
	transition.

## Abréviations

RG	Gaz réel.
HT	Haute Température.
GP	Gaz Parfait.
MLN	Abréviation du terme Minimum Lenght Nozzle (tuyère à détente centrée).

## Indices

0	Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion).
*	Condition critique ou juste après le col.
1	Condition a l'état 1
2	Condition a l'état 2
S	Section de sortie.

## Exposant

- \* valeur au col juste après la détente.
- K itération.

### REFERENCES

- 1. Rao G. V. R., "Recent development in Rocket Nozzle Configuration", ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 1488-1494, (1961).
- 2. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, (1988).
- 3. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September (1988).
- Argrow B. M. and Emanuel G., "Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles," AIAA-1989-1822, 20<sup>th</sup> Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, June 12-14, (1989).
- 5. Hagemann G., Immich H., Van Nguyen T. and Dumnov G. E., "Advanced Rocket Nozzles," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 5, PP. 620-634, (1998).
- 6. Rao G. V. R., "Contoured Rocket Nozzles," Proc. 9<sup>Th</sup> Int. Astro-Fed. Congress, Amsterdam, (1958).
- Rao G. V. R., "Spike Nozzle Contour for Optimum Thrust", Ballistic Missile and Space Technology; edited by C. W. Morrow, Vol. 2, Pergamon Press, New York, PP. 92-101, (1961).
- 8. Rao G. V. R., "Recent development in Rocket Nozzle Configuration", ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 1488-1494, (1961).
- 9. Rao G. V. R., "The E-D Nozzle," Astronautics, PP. 28-29. Sptember (1960).
- 10. Zebbiche T. et Youbi Z., "Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température," Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, CIMA'04, Boumerdès (Algérie), (30 Nov., 02 Déc. 2004).
- Johnson, C. B., and Boney, L. R., "A Method for Calculating a Real-Gas Two Dimensional Nozzle Contour Including the Effects of Gamma," NASA TM X-3243, (September 1975).
- Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc, New York, (1965).
- 13. Rhyming I. L., "Dynamique des fluides," Press polytechnique Romandes, Lausanne, Suisse. (1984).
- 14. Zebbiche T., "Tuyères Supersoniques à Haute Température," Edition Universitaires Européennes, ISBN 978-613-1-50997-1, (May 2010).

- Geoing M., "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA-1 990 2024, 26111 AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Orlando, Florida, (July 16-18 1990).
- 16. Ruptash, J., "Supersonic Wind Tunnels-Theory, Design and Performance," University of Toronto, Institute of Aerophysics, (June 1952),
- 17. Sauer R., "General Characteristics of the Flow Through Nozzles at near Critical Speeds," NASA TM-1 147, (1947).
- 18. J D Jr Anderson Modern compressible flow with historical perspective (New York :Mc Graw-Hill) p.1-650 (1989).
- 19. P H Oosthuisen,W E Carsallen Comperessible Fluid Flow (New york :McGraw- Hill) p.1-290 (1997).
- 20. A Ferri Elements of aerodynamics of supersonic flow (New York :Dover publications) p.1-439 (2005).
- 21. Malina F. J., "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases," J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, (1940).
- 22. P Sutton ,O Biblarz Rocket propulsion Elements (Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons,Inc) p.1-786 (2010).
- 23. K Annamalai, K P Ishwar, A J Milind Advanced thermodynamics engineering (USA :Taylor and FrancisGroup) p .1-1142 (2011).
- 24. Tsien, H.-S. One-dimensional flow of a gas characterized by van der waal's equation of state. JMath Phy,pp.301-324,(1947).
- 25. salhi M, Zebbiche T, Mehalem A. Stagnation pressure effect on the supersonic flow parameters with application for air in nozzles. *the aeronautical journal, 120 No 1224*, 313-354.(2016).
- 26. M Salhi 3 rd International Conference and Exhibition on Mechanical &Aerospace Engineering(san Francisco,USA,(5-7 October 2015) a Gaseous imperfection effect on the supersonic flow parameters for air in nozzles p. 122 (2015).
- 27. G Emanuel Gasdynamics: Theory and Application (New York : AIAA Education Serie) p.1-400 (1986).
- 28. Zebbiche T. Stagnation Temperature Effect on the Prandtl Meyer Function. *AIAA Journal, 45,.No.4.*2007,(2007).
- 29. Zebbiche T.Numerical quadrature for the prandtl Meyer function at hight temperature with application for air,journal of computational methods in sciences and engineering, vol. 10, no. 1-2, pp. 13-22, (2010).

- 30. Salhi M, Zebbiche Tand Mehalem A. Stagnation pressure effect on prandtl meyer function for air . *journal of aerospace engineering* ,231,2 :326-337.(2016).
- 31. D Berthlot Travaux et Mémoires du bureau international des Poids et Mesures(Paris Gauthier-Villars:Tome XIII) (1907).
- M Salhi,T Zebbiche 8<sup>th</sup> AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference (Denver,Colorado,USA,(5-9 June 2017) A New General Form of Prandtl Meyer Function ,Application on Air p.118 (2017).
- 33. Noori Rahim Abadi SMA, R. Kouhikamali and K. Atashkari. Two-fluid model for simulation of supersonic flow of wet steam within high pressure nozzle. *Int J Therm Sci*, 96:173-182.(2015).
- 34. Bian .J, Cao. X, Yang .W, Edem. MA, Yin. P, Jiang W. Supersonic liquefaction properties of natural gas in the laval nozzle. *Energy*,vol. 159 :706-715. (2018).
- 35. Boun-jad M, Zebbiche T and Allali A. Gas effect at high temperature on the supersonic nozzle conception . *International Journal of Aeronautical and Space Sciences (Thomson Reuters), 18,N° 02*, 1-9. (2017).
- 36. Boun-jad M, Zebbiche T and Allali A.High temperature on the prandtl -Meyer function with application for supersonic nozzle design. *Mechanics & Industry (Thomson Reuters), 18,N°1,pp 82-90.* (2017).
- 37. Roudane M, Salhi M and Boucherit A. A new design method for hight conditions applied on minimum lenght nozzles. *SRTI6-BAS, 33*, 167-183. (2021).
- 38. Zebbiche T, Youbi Z. Supersonic Two -Dimensionnel Minimum Lengh Nozzle Design at High Temperature. Application for Air. *Chinese Journal* of Aeronautics ,vol 20,(01), 29-39. (2007).
- Zebbiche, T. Youbi Z. Effect of Stagnation Temperature on the Supersonic Flow Parameters with Application for Air in Nozzles. *The Aeronautical Journal*, 31-40.vol.111,No.1-9. (2007).
- 40. Amri, R. Low thrust and low power propulsion systems options for small satellites. *International Journal of Aviation ,Aeronautics ,and Aerospace ,7(3)*,1-26 (2020).
- 41.ROGERS, E. M.: "Physics for the Enquiring Mind," pp. 416—424, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1960).
- 42. CRC., "handbook of chemistry and physics", 75th A ready reference book of chemical and physical data, Oxford University, (1995).

- 43. Picard Ch., "Thermochimie," 2<sup>ème</sup> Edition, Bruxelles, Belgium (1996)
- 44..Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, The Ronald Press Company, New York. (1953.
- 45. Singh O., "Applied Thermodynamics," new age international limited publishers, New Delhi, India, (2003).
- 46. Liepmann, H. W., and Roshko, A., "Elements of Gas dynamics," John Wiley & Sons, Inc., NewYork. (1966).
- 47. Zucker R. D. and Bilbarz O., "Fundamentals of Gas Dynamics," John Wiley & Sons, New Jersey, USA. (2002).
- Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1988).
- 49. Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2ème edition, John Willey and sons, Inc. (1976).
- 50. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, (1988).
- 51.Nag, P. K. Engineering Thermodynamics. 4th Edition, McGraw-Hill, New Delhi, INDIA, (2008).
- 52. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature application for Air in Nozzle," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress, Friendrichshafen, Germany. (26 29, September 2005).
- 53. Zebbiche, T. New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature. AIAA 2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, (5-8 Jun 2006).
- 54. Demidovitch B. et I. Maron I., "Eléments de calcul numérique," Edition MIR, Moscou, Russia. (1987).
- 55. Singh O., "Applied Thermodynamics," new age international limited publishers, New Delhi, India, (2003).
- 56. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson, (1979).
- 57. Zebbiche T. and Youbi Z., "Design of Two-Dimensional Supersonic Minimum Length Nozzle at Higth Temperature. Application for Air," DGLR 2005-257, German Aerospace Congress 2005, Friendrichshafen, Germany. (26-29 Sep. 2005).

- 58. Gerald H., Hans L., Thong V. N. and Gennady E. D., "Advanced Rocket Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 3, PP. 318-326, (1998).
- 59. Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, (1985).
- 60. Zebbiche, T., "Conception et Dimensionnement des tuyères supersoniques de Propulsion," Thèse de Doctorat, Département d'Aéronautique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université SAAD Dahleb de Blida, Algeria. (2006)
- 61. Raltson A., "A Family of Quadrature Formulas Which Achieve High Accuracy in Composite Rules," J. Ass. Comput. Mach., Vol. 6, PP. 384-394, (1984).
- 62. Bengherbia N,Salhi M and Roudane ,"Effet Des Imperfection Thermique Et Calorifique Et Du Gaz Sur La Fonction De Prandtl Meyer ,lindian Journal Of Physics (2023)