

Roger Godement

Analyse mathématique II

**Calcul différentiel
et intégral,
séries de Fourier,
fonctions holomorphes**



Springer

Table des matières du volume II

V – Calcul Différentiel et Intégral	1
§1. <i>L'intégrale de Riemann</i>	1
1 – Intégrales supérieure et inférieure d'une fonction bornée	1
2 – Propriétés élémentaires des intégrales	5
3 – Sommes de Riemann. La notation intégrale	13
4 – Limites uniformes de fonctions intégrables	15
5 – Applications aux séries de Fourier et aux séries entières	19
§2. <i>Conditions d'intégrabilité</i>	25
6 – Le théorème de Borel-Lebesgue	25
7 – Intégrabilité des fonctions réglées ou continues	28
8 – La continuité uniforme et ses conséquences	31
9 – Dérivation et intégration sous le signe $\int$	35
10 – Fonctions semi-continues	40
11 – Intégration des fonctions semi-continues	48
§3. <i>Le "Théorème Fondamental" (TF)</i>	52
12 – Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	52
13 – Extension du théorème fondamental aux fonctions réglées	60
14 – Fonctions convexes; inégalités de Hölder et Minkowski	66
§4. <i>Intégration par parties</i>	74
15 – Intégration par parties	74
16 – La série de Fourier des signaux carrés	77
17 – La formule de Wallis	80
§5. <i>La formule de Taylor</i>	83
18 – La formule de Taylor	83
§6. <i>La formule du changement de variable</i>	92
19 – Changement de variable dans une intégrale	92
20 – Intégration des fractions rationnelles	96

VI Table des matières du volume II

§7. <i>Intégrales de Riemann généralisées</i>	103
21 – Intégrales convergentes : exemples et définitions	103
22 – Intégrales absolument convergentes	105
23 – Passage à la limite sous le signe $\int$	110
24 – Séries et intégrales	116
25 – Dérivation sous le signe $\int$	119
26 – Intégration sous le signe $\int$	125
§8. <i>Théorèmes d'approximation</i>	130
27 – Comment rendre C^∞ une fonction qui ne l'est pas	130
28 – Approximation par des polynômes	136
29 – Fonctions ayant des dérivées données en un point	139
§9. <i>Mesures de Radon dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$</i>	143
30 – Mesures de Radon sur un compact	143
31 – Mesures sur un ensemble localement compact	153
32 – La construction de Stieltjes	160
33 – Application aux intégrales doubles	168
§10. <i>Les distributions de Schwartz</i>	171
34 – Définition et exemples	171
35 – Dérivées d'une distribution	176
VI – Calculs Asymptotiques	181
§1. <i>Développements limités</i>	181
1 – Relations de comparaison	181
2 – Règles de calcul	183
3 – Développements limités	184
4 – Développement limité d'un quotient	186
5 – Le critère de convergence de Gauss	188
6 – La série hypergéométrique	190
7 – Etude asymptotique de l'équation $xe^x = t$	192
8 – Asymptotique des racines de $\sin x \cdot \log x = 1$	194
9 – L'équation de Kepler	196
10 – Asymptotique des fonctions de Bessel	199
§2. <i>Formules sommatoires</i>	211
11 – Cavalieri et les sommes $1^k + 2^k + \dots + n^k$	211
12 – Jakob Bernoulli	213
13 – La série entière de $\cot z$	218
14 – Euler et la série entière de $\arctan x$	221
15 – Euler, Maclaurin et leur formule sommatoire	225
16 – La formule d'Euler-Maclaurin avec reste	226

17 – Calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes	228
18 – La somme $1 + 1/2 + \dots + 1/n$, le produit infini de la fonction Γ et la formule de Stirling	229
19 – Prolongement analytique de la fonction zêta	234
VII – Analyse Harmonique et Fonctions Holomorphes	237
1 – La formule intégrale de Cauchy pour un cercle	237
§1. <i>L'analyse sur le cercle unité</i>	241
2 – Fonctions et mesures sur le cercle unité	241
3 – Coefficients de Fourier	248
4 – Produit de convolution dans $\mathbb{T}$	252
5 – Suites de Dirac dans $\mathbb{T}$	257
§2. <i>Théorèmes élémentaires sur les séries de Fourier</i>	261
6 – Séries de Fourier absolument convergentes	261
7 – Calculs hilbertiens	262
8 – L'égalité de Parseval-Bessel	264
9 – Séries de Fourier des fonctions dérivables	271
10 – Distributions sur $\mathbb{T}$	274
§3. <i>La méthode de Dirichlet</i>	282
11 – Le théorème de Dirichlet	282
12 – Le théorème de Fejér	288
13 – Séries de Fourier uniformément convergentes	290
§4. <i>Fonctions analytiques et holomorphes</i>	294
14 – Analyticité des fonctions holomorphes	295
15 – Le principe du maximum	297
16 – Fonctions analytiques dans une couronne. Points singuliers Fonctions méromorphes	300
17 – Fonctions holomorphes périodiques	306
18 – Les théorèmes de Liouville et de d'Alembert-Gauss	308
19 – Limites de fonctions holomorphes	317
20 – Produits infinis de fonctions holomorphes	320
§5. <i>Fonctions harmoniques et séries de Fourier</i>	328
21 – Fonctions analytiques définies par une intégrale de Cauchy	328
22 – La fonction de Poisson	330
23 – Applications aux séries de Fourier	332
24 – Fonctions harmoniques	335
25 – Limites de fonctions harmoniques	339
26 – Le problème de Dirichlet pour un disque	342

VIII Table des matières du volume II

§6. <i>Des séries aux intégrales de Fourier</i>	345
27 – La formule sommatoire de Poisson	345
28 – La fonction θ de Jacobi	350
29 – Formules fondamentales de la transformation de Fourier	354
30 – Extensions de la formule d'inversion	357
31 – Transformation de Fourier et dérivation	362
32 – Distributions tempérées	367
 Postface. Science, technologie, armement	 377
 Index	 467
 Table des matières du volume I	 471

Table des matières du volume I

Préface. L'analyse et ses adhérences	I/V
I – Ensembles et Fonctions	I/1
§1. <i>La théorie des ensembles</i>	I/8
1 – Appartenance, égalité, ensemble vide	I/8
2 – Ensemble défini par une relation. Intersections et réunions	I/11
3 – Entiers naturels. Ensembles infinis	I/15
4 – Couples, produits cartésiens, ensembles de parties	I/18
5 – Fonctions, applications, correspondances	I/20
6 – Injections, surjections, bijections	I/25
7 – Ensembles équipotents. Ensembles dénombrables	I/27
8 – Les différentes sortes d'infini	I/30
9 – Ordinaux et cardinaux	I/34
§2. <i>La logique des logiciens</i>	I/41
II – Convergence : Variables discrètes	I/47
§1. <i>Suites et séries convergentes</i>	I/47
0 – Introduction : qu'est-ce qu'un nombre réel ?	I/47
1 – Opérations algébriques et relation d'ordre : axiomes de $\mathbb{R}$	I/55
2 – Inégalités et intervalles	I/57
3 – Propriétés locales ou asymptotiques	I/60
4 – La notion de limite. Continuité et dérivabilité	I/64
5 – Suites convergentes : définition et exemples	I/69
6 – Le langage des séries	I/78
7 – Les merveilles de la série harmonique	I/83
8 – Opérations algébriques sur les limites	I/94
§2. <i>Séries absolument convergentes</i>	I/97
9 – Suites croissantes. Borne supérieure d'un ensemble de nombres réels	I/97
10 – La fonction $\log x$. Racines d'un nombre positif	I/102
11 – Qu'est-ce qu'une intégrale ?	I/109

12 – Séries à termes positifs	I/113
13 – Séries alternées	I/119
14 – Séries absolument convergentes classiques	I/123
15 – Convergence en vrac : cas général	I/127
16 – Relations de comparaison. Critères de Cauchy et d'Alembert ...	I/131
17 – Limites infinies	I/137
18 – Convergence en vrac : associativité	I/139
§3. <i>Premières notions sur les fonctions analytiques</i>	I/148
19 – Applications aux fonctions analytiques	I/148
20 – Le principe du prolongement analytique	I/158
21 – La fonction $\cot x$ et les séries $\sum 1/n^{2k}$	I/162
22 – Multiplication des séries. Composition des fonctions analytiques. Séries formelles	I/167
23 – Les fonctions elliptiques de Weierstrass	I/178
III – Convergence : Variables continues	I/187
§1. <i>Le théorème des valeurs intermédiaires</i>	I/187
1 – Valeurs limites d'une fonction. Ensembles ouverts et fermés	I/187
2 – Fonctions continues	I/192
3 – Limites à droite et à gauche d'une fonction monotone	I/197
4 – Le théorème des valeurs intermédiaires	I/201
§2. <i>Convergence uniforme</i>	I/205
5 – Limites de fonctions continues	I/205
6 – Un dérapage de Cauchy	I/211
7 – La distance de la convergence uniforme	I/216
8 – Séries de fonctions continues. Convergence normale	I/220
§3. <i>Bolzano-Weierstrass et critère de Cauchy</i>	I/225
9 – Intervalles emboîtés, Bolzano-Weierstrass, ensembles compacts .	I/225
10 – Le critère général de convergence de Cauchy	I/228
11 – Le critère de Cauchy pour les séries : exemples	I/235
12 – Limites de limites	I/240
13 – Passage à la limite dans une série de fonctions	I/242
§4. <i>Fonctions dérivables</i>	I/244
14 – Dérivées d'une fonction :	I/244
15 – Règles de calcul des dérivées	I/252
16 – Le théorème des accroissements finis	I/260
17 – Suites et séries de fonctions dérivables	I/265
18 – Extensions à la convergence en vrac	I/270

§5. Fonctions dérivables de plusieurs variables	I/273
19 – Dérivées partielles et différentielles	I/274
20 – Différentiabilité des fonctions de classe C^1	I/276
21 – Dérivation des fonctions composées	I/279
22 – Limites de fonctions dérivables	I/284
23 – Permutabilité des dérivations	I/287
24 – Fonctions implicites	I/290
<i>Appendice au Chapitre III. Généralisations</i>	I/303
1 – Espaces cartésiens et espaces métriques généraux	I/303
2 – Ensembles ouverts ou fermés	I/306
3 – Limites et critère de Cauchy dans un espace métrique; espaces complets	I/307
4 – Fonctions continues	I/310
5 – Séries absolument convergentes dans un espace de Banach	I/312
6 – Applications linéaires continues	I/316
7 – Espaces compacts	I/320
8 – Espaces topologiques	I/322
IV – Puissances, Exponentielles, Logarithmes, Fonctions Trigonométriques	I/327
§1. <i>Construction directe</i>	I/327
1 – Exposants rationnels	I/327
2 – Définition des exposants réels	I/329
3 – Calcul des exposants réels	I/332
4 – Logarithme de base a . Fonctions puissances	I/334
5 – Comportements asymptotiques	I/335
6 – Caractérisations des fonctions exponentielles, puissances et logarithmiques	I/339
7 – Dérivées des fonctions exponentielles : méthode directe	I/341
8 – Dérivées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmiques	I/344
§2. <i>Développements en séries</i>	I/347
9 – Le nombre e . Logarithme néperien	I/347
10 – Série exponentielle et logarithme : méthode directe	I/349
11 – La série du binôme de Newton	I/353
12 – La série entière du logarithme	I/361
13 – La fonction exponentielle comme limite	I/371
14 – Exponentielles imaginaires et fonctions trigonométriques	I/375
15 – La relation d'Euler chez Euler	I/385
16 – Fonctions hyperboliques	I/390

474 Table des matières du volume I

§3. <i>Produits infinis</i>	I/395
17 – Produits infinis absolument convergents	I/395
18 – Le produit infini de la fonction sinus	I/398
19 – Développement en série d'un produit infini	I/404
20 – Etranges identités	I/409
§4. <i>La topologie des fonctions $\text{Arg}(z)$ et $\text{Log } z$</i>	I/415
Index	I/425
Table des matières du volume II	I/429

Roger Godement Analyse mathématique

- vol. 1 Convergence, fonctions élémentaires
- vol. 2 Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes
- vol. 3 Fonctions analytiques, intégration, transformation de Fourier

Les deux premiers volumes sont consacrés aux fonctions dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, y compris la théorie élémentaire des séries et intégrales de Fourier et une partie de celle des fonctions holomorphes. L'exposé, non strictement linéaire, combine indications historiques et raisonnements rigoureux. Il montre la diversité des voies d'accès aux principaux résultats afin de familiariser le lecteur avec les méthodes de raisonnement et idées fondamentales plutôt qu'avec les techniques de calcul, point de vue utile aussi aux personnes travaillant seules.

Le volume 3 traitera des fonctions analytiques et de la théorie de l'intégration, en suivant d'assez près le célèbre cours donné longtemps par l'auteur à l'Université Paris 7.

On reconnaîtra dans ce nouvel ouvrage le style inimitable de l'auteur, et pas seulement par son refus de l'écriture condensée en usage dans de nombreux manuels.