

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد حليب البليدة  
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا  
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك  
Département d'Électronique



## Mémoire de Projet de Fin d'Études

présenté par

BAROUN Abderrahim

&

BELKHAMSA Dahmane

pour l'obtention du diplôme de Master 2 en Électronique option Automatique

---

Thème

---

# Commande $H_{\infty}$ d'une Machine Asynchrone

---

Proposé par : Melle.AIT MESSAOUD Lysa

Année Universitaire 2011-2012



# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

- ❖ *A mes très chers parents*
- ❖ *A mes sœurs, et frères.*

*Et à ma promotrice **Melle. AIT MESSAOUD LYSA** qui m'a aidé  
pendant toute l'année.*

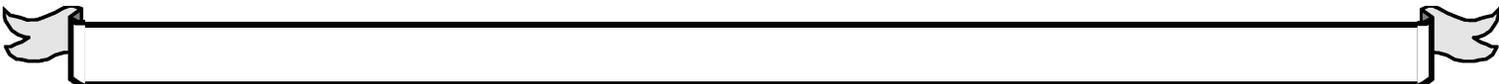
*A ma famille*

*A mon binôme **DAHMANE***

*A mes très chers amis*

*A tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin dans la  
réalisation de ce travail.*

**RAHIM.**





## *REMERCIEMENTS*

*Nous remercions **ALLAH** tout puissant qui nous a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.*

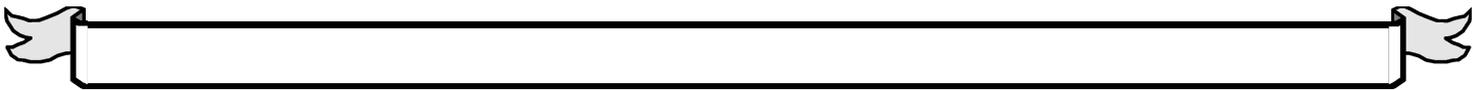
*Nous remercions tout particulièrement **Melle. AIT MESSAOUD LYSA**, pour la proposition de ce sujet, son encadrement, sa disponibilité et son soutien dans notre recherche d'informations et ses conseils lors de l'élaboration du projet.*

*Nous sommes reconnaissants envers nos enseignants auxquels nous devons notre formation en automatique grâce à l'enthousiasme qu'ils ont su nous communiquer en tant qu'étudiants lors de notre cursus d'études à l'USDB.*

*Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, par leurs aides et conseils, à finaliser ce projet.*

***RAHIM***

***DAHMANE &***



---

ملخص : هذا العمل يتمحور على معالج ذو سيطرة متينة  $H_{\infty}$  لتحكم على سرعة محرك اللاتزامني بالإضافة إلى تقديم الأداء المعتاد ، هذا المعالج يسمح بالاستقرار نظرا لتغيرات خصائص الميكانيكية للمحرك.

كلمات المفاتيح: التحكم التواتري ، التحكم المتين  $H_{\infty}$  ، الاستقرار ، هامش الاستقرار ، معيار  $H_{\infty}$  ، الآلة اللاتزامنية ، التحكم الشعاعي

---

**Résumé :** Ce travail traite de la commande robuste  $H_{\infty}$  de la vitesse d'une machine asynchrone. En plus d'assurer les performances usuelles, ce correcteur permet d'assurer la robustesse de la stabilité vis-à-vis des variations des paramètres mécaniques de la machine.

Mots clef : commande fréquentielle, commande robuste, stabilité, marge de stabilité, incertitudes, norme  $H_{\infty}$ .

**Mots clés :** commande fréquentielle, commande robuste, stabilité, marge de stabilité, incertitudes, la machine asynchrone, la commande vectorielle, norme  $H_{\infty}$ .

---

**Abstract :** This study deals with the  $H_{\infty}$  robust velocity control the field oriented asynchronous machine. In addition to ensuring the usual performances, this corrector must maintain the stability robustness against the mechanical parameters variations of the machine.

**Keywords :** frequential domain control, robust control, stability, stability margins, uncertainties,  $H_{\infty}$  norm.

---

# Sommaire

REMERCIEMENTS

DEDICACES

RESUMES

LISTES DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I : Notions sur les asservissements robustes</b>	
I.1.Introduction.....	2
I.2.Généralités sur la commande fréquentielle.....	2
I.2.1.La stabilité.....	4
I.2.2.Le degré de stabilité.....	5
I.2.3.Le concept du "Loop Shaping".....	6
I.2.4.Généralisation au cas multivariable.....	8
I.3.Les normes $H_2$ et $H_\infty$ d'un système.....	9
I.3.1.La norme $H_2$ .....	9
I.3.2.La norme $H_\infty$ .....	10
I.4. La représentation des incertitudes.....	11
I.4.1. Les incertitudes non structurées.....	11
I.4.1.a. Les incertitudes additives.....	11
I.4.1.b.Les incertitudes additives inverses.....	11
I.4.1.c.Les incertitudes multiplicatives en entrée.....	12
I.4.1.d.Les incertitudes multiplicatives en sortie.....	12
I.4.1.e.Les incertitudes multiplicatives en entrée inverse.....	13
I.4.1.f.Les incertitudes multiplicatives en entrée inverse.....	13
I.4.2.Les incertitudes structurées.....	13
I.5.Conclusion.....	14

**Chapitre II : Commande  $H_\infty$** 

II.1.Introduction.....	15
II.2.Principes d'optimisation $H_\infty$ .....	15
II.3.Le problème $H_\infty$ standard.....	17
a) Problème $H_\infty$ standard.....	19
b) Problème $H_\infty$ standard optimal.....	19
II.4.Solution du problème standard.....	20
II.4.1.Hypothèse.....	20
II.4.2.Problème de sensibilité mixte.....	23
II.4.3.Mise en œuvre par le choix de pondérations fréquentielles.....	25
II.5.Le théorème du petit gain et les incertitudes de modèle.....	25
II.6.Conclusion.....	27

**Chapitre III : Application à la commande de la machine asynchrone**

III.1.Introduction.....	29
III.2.Modèle dynamique de la Machine Asynchrone.....	30
III.3.Commande vectorielle directe par orientation du flux rotorique.....	31
III.3.1.Régulation du flux $\varphi_r$ .....	34
III.3.1.Régulation de la vitesse $\Omega$ .....	35
III.4. Application du correcteur robuste $H_\infty$ de la machine asynchrone.....	36
III.5. Conclusion.....	44
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>46</b>

**Bibliographie****Annexes**

## ***INTRODUCTION GENERALE***

Le moteur asynchrone est actuellement le moteur électrique dont l'usage est le plus répandu dans l'industrie. Son principal avantage réside dans l'absence de contacts électriques glissants, ce qui conduit à une structure simple et robuste facile à construire. Son domaine de puissance va de quelques watts à plusieurs mégawatts. Relié directement au réseau industriel à tension et fréquence constantes, le moteur asynchrone permet la réalisation d'entraînements à vitesse variable et la place qu'il prend dans ce domaine ne cesse de croître.

Malgré tous les avantages cités précédemment, la commande des machines asynchrones pose des problèmes du fait que son modèle de base est non linéaire et fortement couplé, qui est à l'opposé de la simplicité de sa structure. Aussi ce qui complique ce modèle, est que les paramètres du moteur asynchrone sont connus approximativement et peuvent varier avec le temps (température), ainsi que la présence des incertitudes de modélisation les bruits de mesures.

La commande vectorielle à flux orienté, son principe consiste à éliminer le couplage entre l'inducteur et l'induit de la machine asynchrone, donc elle permet d'obtenir un fonctionnement comparable à celui de la machine à courant continu. Cependant, l'expérience a montré les faiblesses de cette méthode face aux incertitudes des paramètres, qu'ils soient mesurés ou qu'ils varient au cours de fonctionnement, comme les résistances de rotor et du stator.

Le premier point intéressant est qu'elles sont basées sur une traduction assez directe du cahier de charge en un critère mathématique à vérifier (problème de minimisation ou d'optimisation). La formulation mathématique utilise la norme  $H_\infty$ , d'où le nom de cette méthode de synthèse. Une fois le critère mathématique est défini, la recherche du correcteur se fait par un algorithme qui résout le problème d'optimisation. La problématique de la robustesse consiste à essayer de prendre le maximum de garanties a priori pour que le correcteur synthétisé sur un modèle fonctionne effectivement sur le système physique en tenant compte explicitement du fait qu'il est impossible de représenter parfaitement un système physique par un modèle mathématique.

## I.1. Introduction

Ce premier chapitre a pour but de rappeler quelques notions élémentaires sur la commande des systèmes Linéaires à Temps Invariant (LTI). Dans un premier temps, la formalisation des performances s'effectuera dans le cas des systèmes monovariables (à une entrée et une sortie : *Single Input Single Output (SISO)*), une généralisation pour le cas des systèmes multivariables (à plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties : *Multiple Input Multiple Output (MIMO)*) s'en suivra.

La robustesse sera introduite par la notion de degré de stabilité et la représentation des incertitudes sur les systèmes, ces deux notions prendront tout leur sens au chapitre suivant.

## I.2. Généralités sur la commande fréquentielle

La figure I-1 représente le schéma fonctionnel d'une commande automatique standard [1,2,3], où  $K$  et  $G$  sont respectivement le correcteur et du procédé à commander.

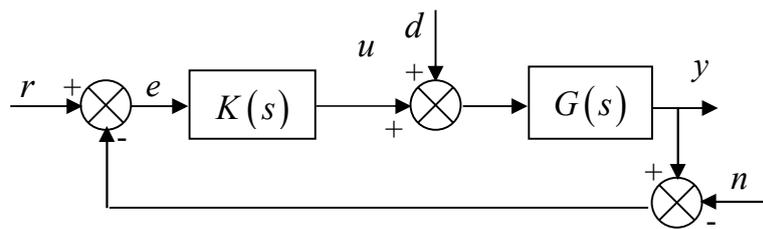


Fig.I-1 : Description de la boucle de commande

Différentes entrées agissent sur le système en boucle fermée,  $r$  représente la consigne,  $d$  la perturbation de charge, et  $n$  le bruit de mesure. La grandeur à commander  $y$ , l'écart  $e$  ainsi que l'entrée de commande  $u$  sont les autres signaux présentant un intérêt pour l'analyse.

Les cahiers des charges sur lesquels se base le processus de commande contiennent généralement les quatre classes de spécifications qui suivent :

**Suivi de trajectoires de référence (consignes)** il s'agit d'étudier l'influence du signal de référence  $r(t)$  sur le signal d'erreur  $e(t)$  qui doit de ce fait être nul ;

**Rejet/atténuation de signaux de perturbation** il s'agit d'étudier l'influence du signal de perturbation  $b(t)$  sur le signal de sortie  $y(t)$  ;

**Atténuation des bruits de mesure** il s'agit d'étudier l'influence des signaux de bruit  $n(t)$  sur le signal de commande  $u(t)$  et sur le signal de sortie  $y(t)$  (en général, le système à commander  $G$  est un système passe-bas, ce qui fait qu'il est plus impératif d'étudier l'influence du bruit  $b(t)$  sur  $u(t)$  que sur  $y(t)$ );

**Commande modérée** il s'agit d'étudier l'influence des signaux de référence  $r(t)$  et du signal de perturbation  $d(t)$  sur le signal de commande  $u(t)$ ;

Une autre spécification dont il est absolument nécessaire de prendre en compte est que la stabilité du système bouclé doit être assurée.

Etant linéaire et invariant dans le temps (LTI), le système  $G$  est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui donne dans le domaine de Laplace sa fonction de transfert  $G(s)$ . Par l'introduction de variables internes appropriées, le système  $G$  peut être également décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{I.1}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie.

Lorsque les conditions initiales sont nulles, la fonction de transfert  $G(s)$  est déduite de la représentation (I.1) par :

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D\tag{I.2}$$

$G$  est dit *propre* si  $G(j\infty)$  est fini (degré du dénominateur  $\geq$  degré du numérateur), *strictement propre* si  $G(j\infty) = 0$  (degré du dénominateur  $>$  degré du numérateur) et *bipropre* si  $G$  et  $G^{-1}$  sont tous les deux propres (degré du dénominateur = degré du numérateur).

**Remarque** Les représentations (I.1) et (I.2) restent valables pour tous les éléments composant la boucle de commande de la figure I-1, ces derniers sont supposés linéaires à temps invariant.

Soit  $L(s)$  la fonction de transfert de la boucle ouverte, dite également fonction de transfert de la boucle (de l'anglais *Loop Transfer Function*) [1,2,3,7]:

$$L(s) = K(s)G(s)\tag{I.3}$$

comme le système en entier est linéaire, les relations fondamentales entre les entrées  $r$ ,  $d$  et  $n$ , la sortie  $y$  et les grandeurs internes  $e$  et  $u$ , peuvent être exprimées à l'aide de fonctions de transfert. Soit  $R(s)$ ,  $E(s)$ ,  $U(s)$ ,  $D(s)$ ,  $Y(s)$ , et  $N(s)$  les transformées de Laplace respectives de  $r(t)$ ,  $e(t)$ ,  $u(t)$ ,  $d(t)$ ,  $y(t)$ , et  $n(t)$  ; les relations suivantes peuvent aisément être obtenues à partir du schéma de la figure I-1 :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{L(s)}{I+L(s)}R(s) + \frac{G(s)}{I+L(s)}D(s) + \frac{L(s)}{I+L(s)}N(s) \\ E(s) &= \frac{I}{I+L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{I+L(s)}D(s) + \frac{I}{I+L(s)}N(s) \\ U(s) &= \frac{K(s)}{I+L(s)}R(s) - \frac{L(s)}{I+L(s)}D(s) + \frac{K(s)}{I+L(s)}N(s) \end{aligned} \quad (I.4)$$

Il convient de remarquer que plusieurs fonctions de transfert intervenant dans les équations (III.4) sont identiques. Aussi, seul un nombre réduit de fonctions de transfert, dénommées "les quatre fonctions de sensibilité", suffit à décrire entièrement les relations entre les grandeurs d'intérêt du système de commande :

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{L(s)}{I+L(s)} \quad \text{fonction de sensibilité complémentaire} \\ S(s) &= \frac{I}{I+L(s)} \quad \text{fonction de sensibilité} \\ GS(s) &= \frac{G(s)}{I+L(s)} \quad \text{fonction de sensibilité de charge} \\ KS(s) &= \frac{K(s)}{I+L(s)} \quad \text{fonction de sensibilité de bruit} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Il est important de noter la relation suivante qui joue un rôle important dans la commande fréquentielle :

$$T(s) + S(s) = 1 \quad (I.6)$$

### I.2.1. La stabilité

La stabilité est une propriété fondamentale que doit satisfaire toute commande automatique, sa perte peut mettre en péril le système physique. Elle peut être définie par :

**Définition 1** : Un système est stable si à une entrée bornée il fait correspondre une sortie bornée.

**Définition 2** : Un système est stable si sa réponse libre tend vers zéro à l'infini.

La stabilité du système en boucle fermée représenté par la figure I.1 est déterminée par les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée donnée par :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad (I.7)$$

c'est-à-dire par les zéros de son équation caractéristique :

$$1 + K(s)G(s) = 1 + L(s) = 0 \Rightarrow L(s) = -1 \quad (I.8)$$

ces derniers doivent être à parties réelles strictement négative pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Néanmoins, ce critère ne peut pas être utilisé lorsque la conception du correcteur doit se faire dans le domaine fréquentiel. Le critère de Nyquist est plus indiqué puisqu'il est basé sur la position du lieu de la fonction de transfert de la boucle ouverte  $L(s)$  (relation (I.3)) par rapport au point  $(-1,0)$  dit "point critique", comme cela est indiqué par l'équation caractéristique (1.8). Le critère de Nyquist est énoncé comme suit :

*Le système en boucle fermée représenté par la figure I.1 est stable si et seulement si le tracé de la fonction de transfert  $L(j\omega)$  dans le plan complexe quand  $\omega$  va de  $-\infty$  à  $+\infty$  ne passe pas par le point  $(-1,0)$  et l'encercle, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de  $L(j\omega)$ .*

**Cas où  $L(s)$  est stable (critère du revert)** dans le cas où la fonction de transfert  $L(s)$  est stable, le critère se simplifie fortement. On parle alors du critère du revert. Il suffit de vérifier que le tracé de  $L(j\omega)$ , quand  $\omega$  croit, laisse le point  $(-1,0)$  sur sa gauche pour assurer la stabilité du système bouclé. Si, en plus, l'argument de la fonction de transfert  $L(j\omega)$  est égale à  $-180^\circ$  que pour une seule pulsation  $\omega_{180^\circ}$ , la stabilité du système bouclé est assurée par le fait que  $|L(j\omega_{180^\circ})| < 1$ .

### I.2.2. Le degré de stabilité

Si la position du lieu de la réponse fréquentielle de la boucle ouverte vis-à-vis du point critique détermine la stabilité de la boucle fermée, la distance minimale par rapport à ce point

va caractériser la "réserve de stabilité" ou la "robustesse en stabilité" vis à vis des incertitudes du modèle du procédé à commander. Quantitativement cette notion s'exprime par le "degré de stabilité" du système, qui peut être mesuré par les marges de gain et de phase.

Soit  $\omega_{180}$  la plus petite fréquence où la phase de  $L(j\omega)$  est de  $-180^\circ$ , la marge de gain  $g_m$  nous indique de combien le gain peut être augmenté pour atteindre la limite de stabilité, elle est donnée par :

$$g_m = \frac{1}{|L(j\omega_{180})|} \quad (I.9)$$

et soit  $\omega_c$  la plus petite fréquence où  $L(j\omega)$  possède un gain égal à 1, la marge de phase  $\varphi_m$  est égale au retard de phase requis pour atteindre la limite de stabilité, elle est donnée par :

$$\varphi_m = \pi + \arg(L(j\omega_c)) \quad (I.10)$$

$\omega_c$  est dite fréquence de gain unité mais également fréquence de croisement, elle est approximativement égale à la fréquence de coupure en boucle fermée [2]. Des valeurs typiques pour le choix de  $\varphi_m$  sont entre  $30^\circ$  et  $60^\circ$ , et pour  $g_m$  entre 2 et 5. La figure I-2 donne la signification graphique des marges de phase et de gain dans le plan de Black.

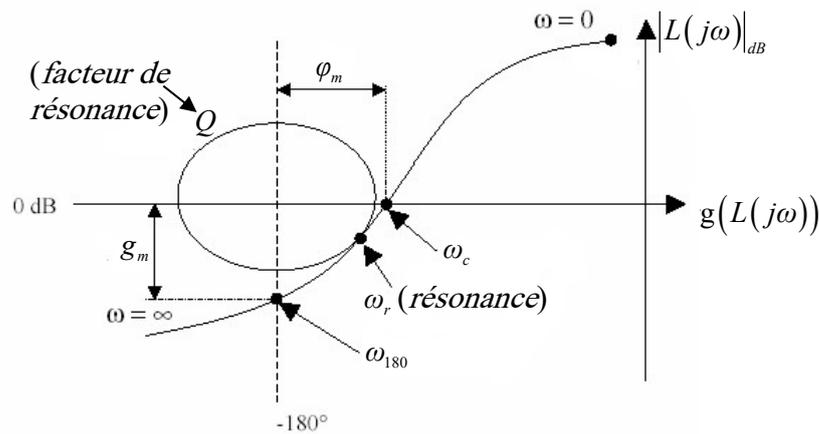


Fig.I-2. Marges de stabilité dans le plan de Black

Parfois il est plus intéressant de calculer directement la plus petite distance entre le point  $(-1,0)$  et le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte  $L(j\omega)$ , cette distance est dite marge de module notée  $M_m$ . Pour une pulsation  $\omega$ , la distance entre le point  $(-1,0)$  et le point défini par  $L(j\omega)$  est donné par  $|1 + L(j\omega)|$ . Par suite :

$$M_m = \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|}} = \frac{1}{\|S\|_{\infty}} \quad (\text{I.11})$$

**Rappel** Le facteur de résonance en boucle fermée est donné par la graduation du contour d'amplitude de l'abaque de Black tangent au lieu de Black de la boucle ouverte.

### I.2.3. Le concept du "Loop Shaping"

Parmi les spécifications des cahiers des charges citées au début du chapitre, il y a celle d'annuler l'erreur  $e(t)$  entre la sortie  $y(t)$  et la consigne  $r(t)$ , et celle d'annuler l'effet de la perturbation de charge  $d(t)$  et du bruit de mesure  $n(t)$  sur la sortie  $y(t)$ . Ceci est réalisé par l'atténuation des amplitudes des fonctions de transfert suivantes déduites des relations (I.5) :

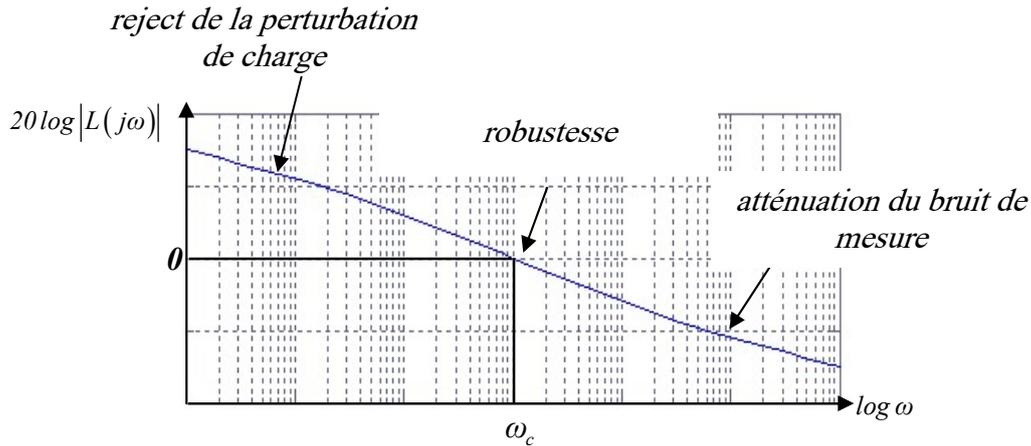
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s) \quad (\text{I.12})$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + L(s)} = G(s)S(s) \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = T(s) \quad (\text{I.14})$$

Or la relation (1.6) montre qu'il n'est pas possible d'annuler  $S(s)$  et  $T(s)$  en même temps, lorsqu'une des ces fonctions de transfert est proche de zéro l'autre est proche de l'unité. Ce qui n'est pas un problème en soi, car la perturbation de charge agit en basses fréquences (annulation de  $|S(j\omega)|$  en basses fréquences) et le bruit de mesure est un signal de hautes fréquences (annulation de  $|T(j\omega)|$  en hautes fréquences).

Le "Loop Shaping" (en français : modelage de la boucle) est une technique de commande fréquentielle, son principe est d'imposer les performances de la boucle fermée en modelant la réponse fréquentielle en amplitude de la boucle ouverte (relation (I.3)) grâce au correcteur  $K(s)$ . Le diagramme d'amplitude de  $L(j\omega)$  doit prendre la forme typique illustrée par la figure I-3.

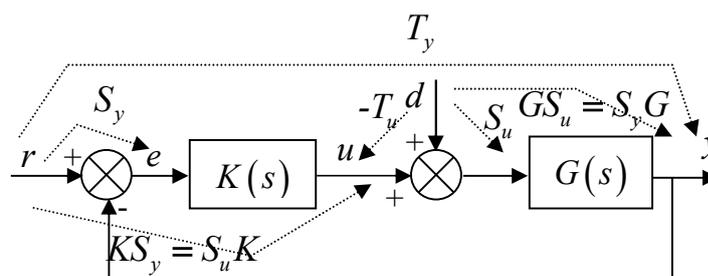


**Fig.I-3 :** Diagramme d’amplitude de Bode d’une fonction de transfert en boucle ouverte typique.

Les amplitudes  $|S(j\omega)|$  et  $|T(j\omega)|$  doivent être annulées respectivement en basses et hautes fréquences. De l’équation (I.12) il apparaît qu’en basses fréquences pour avoir  $|S(j\omega)| \rightarrow 0$  il faut réaliser la condition  $|L(j\omega)| \rightarrow \infty$ . De même, de l’équation (I.14) il apparaît qu’en hautes fréquences pour avoir  $|T(j\omega)| \rightarrow 0$  il faut réaliser la condition  $|L(j\omega)| \rightarrow 0$ . Ceci est illustré par la figure I-3. La stabilité et la dynamique de la boucle fermée sont spécifiées autour de la pulsation de coupure  $\omega_c$ , la robustesse de ces performances sera également étudiée autour de cette pulsation.

### I.2.4. Généralisation au cas multivariable

Considérons le système bouclé de la figure I-4, dans lequel  $G(s)$  représente la matrice fonction de transfert d’un système multivariable, de dimension  $p \times m$ , où chaque élément  $(i, j)$  représente la fonction de transfert reliant la  $j^{\text{me}}$  sortie à la  $i^{\text{me}}$  entrée. De même  $K(s)$  est la matrice fonction de transfert du correcteur, de dimension  $m \times p$ .  $r \in \mathbb{R}^p$  représente le signal de référence,  $b \in \mathbb{R}^m$  représente la perturbation de charge.



**Fig.I-4 :** Boucle de commande multivariable.

La stabilité du système multivariable peut être vérifiée par la version multivariable du critère de Nyquist, pour cela soit :

$$L(s) = G(s)K(s) \quad (\text{I.15})$$

la matrice fonction de transfert en boucle ouverte carrée de dimension  $p$ .

**Critère de Nyquist (cas multivariable)** Dans le cas où la matrice de fonctions de transfert  $L(j\omega)$  ne possède pas de pôles imaginaires purs, le système bouclé multivariable représenté par la figure I-4 est stable si et seulement si le tracé de la fonction déterminant  $\det(I_p + L(j\omega))$  quand  $\omega$  va de  $-\infty$  à  $+\infty$  ne coupe pas le point 0 et l'encercle (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de  $L(j\omega)$ .

Le produit matriciel étant non commutatif, plusieurs fonctions de sensibilité doivent alors être définies :

La matrice de sensibilité en entrée :

$$S_u(s) = (I_m + K(s)G(s))^{-1} \quad (\text{I.16})$$

La matrice de sensibilité en sortie :

$$S_y(s) = (I_p + G(s)K(s))^{-1} \quad (\text{I.17})$$

La matrice de sensibilité complémentaire en entrée :

$$T_u(s) = (I_m + K(s)G(s))^{-1} K(s)G(s) \quad (\text{I.18})$$

La matrice de sensibilité complémentaire en sortie :

$$T_y(s) = (I_p + G(s)K(s))^{-1} G(s)K(s) \quad (\text{I.19})$$

Les identités suivantes sont déduites :

$$S_u(s) + T_u(s) = I_m \quad (\text{I.20})$$

et

$$S_y(s) + T_y(s) = I_p \quad (\text{I.21})$$

D'autre part, la relation matricielle suivante est déduite de la figure I-4, et résume les différentes matrices fonctions de transferts mises en jeu entre les entrées et les sorties du système :

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I + GK)^{-1} GK & (I + GK)^{-1} G \\ K(I + GK)^{-1} & -K(I + GK)^{-1} G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{I.22})$$

### I.3. Les normes $H_2$ et $H_\infty$ d'un système

Soit  $G$  un système LTI représenté par  $G(s)$ , sa fonction de transfert (système monovarié) ou sa matrice fonctions de transfert (système multivarié), les deux normes suivantes permettent de mesurer sa relation entrée/sortie :

#### I.3.1. La norme $H_2$

Cette norme est donnée dans le cas SISO par :

$$\|G(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.23})$$

et dans le cas MIMO par

$$\|G(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.24})$$

où Trace définit la trace de la matrice fonctions de transfert c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux.

#### I.3.2. La norme $H_\infty$

Cette norme est donnée dans le cas SISO par :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (\text{I.25})$$

et dans le cas MIMO par

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (\text{I.26})$$

où  $\sigma(G(j\omega))$  définit les valeurs singulières de la matrice fonctions de transfert. Les méthodes de calcul des normes  $H_2$  et  $H_\infty$  dans le cas des systèmes LTI sont plus détaillées dans l'Annexe A, on y donne aussi une brève interprétation.

## I.4. La représentation des incertitudes

La synthèse d'un asservissement s'effectue à partir d'un modèle du système réel souvent appelé modèle nominal. Un modèle qui peut être obtenu à partir des équations de la physique ou d'un processus d'identification. Ces méthodes sont basées principalement sur des approximations qui induisent des incertitudes inévitables sur le modèle obtenu. Ces incertitudes peuvent être dues aux perturbations sur les différents signaux mis en cause dans le système, également aux dynamiques négligées du système (dynamiques non linéaires, de hautes fréquences, d'ordres élevés...), elles sont dues aussi aux variations sur les paramètres.

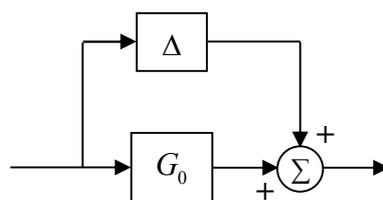
### I.4.1. Les incertitudes non structurées

Dites également incertitudes dynamiques car elles rassemblent toutes les dynamiques négligées dans le modèle. Dans le cas d'un système LTI, les incertitudes non structurées peuvent être rassemblées dans un seul bloc matrice/fonction) de transfert de perturbation  $\Delta$  qui s'ajoute à la matrice/fonction de transfert nominale du système  $G_0$  pour donner le système perturbé  $G_p$ . On peut citer les incertitudes non structurées suivantes :

#### I.4.1.a. Les incertitudes additives

Les incertitudes additives sont configurées tel que illustré par la figure 1-5, le système perturbé est par conséquent donné par :

$$G_p(s) = G_0(s) + \Delta(s) \quad (\text{I.27})$$



**Fig.I-5** : Les incertitudes additives.

#### I.4.1.b. Les incertitudes additives inverses

Les incertitudes additives inverses sont configurées tel que illustré par la figure 1-6, le système perturbé est par conséquent donné par :

$$(G_p(s))^{-1} = (G_0(s))^{-1} + \Delta(s) \quad (\text{I.28})$$

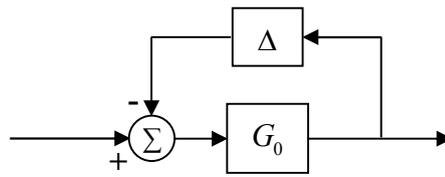


Fig.I-6 : Les incertitudes additives inverses.

#### I.4.1.c. Les incertitudes multiplicatives en entrée

Les incertitudes multiplicatives en entrée sont configurées tel que illustré par la figure 1-7, le système perturbé est par conséquent donné par :

$$G_p(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)) \quad (\text{I.29})$$

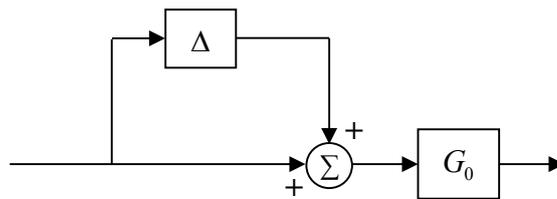


Fig.I-7 : Les incertitudes multiplicatives en entrée.

#### I.4.1.d. Les incertitudes multiplicatives en sortie

Les incertitudes multiplicatives en sortie sont configurées tel que illustré par la figure 1-8, le système perturbé est par conséquent donné par :

$$G_p(s) = (1 + \Delta(s))G_0(s) \quad (\text{I.30})$$

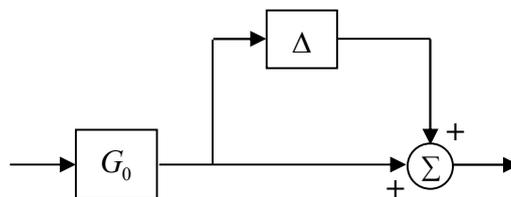


Fig.I-8 : Les incertitudes multiplicatives en sortie.

#### I.4.1.e. Les incertitudes multiplicatives en entrée inverse

Les incertitudes multiplicatives en entrée inverse sont configurées tel que illustré par la figure 1-9, le système perturbé est par conséquent donné par :

$$(G_p(s))^{-1} = (1 + \Delta(s))(G_0(s))^{-1} \quad (\text{I.31})$$

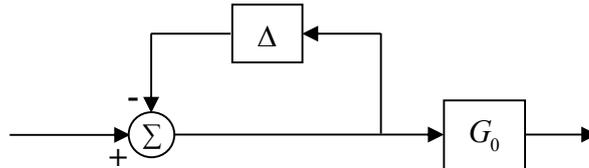


Fig.I-9 : Les incertitudes multiplicatives en entrée inverse.

#### I.4.1.f. Les incertitudes multiplicatives en sortie inverse

Les incertitudes multiplicatives en sortie inverse sont configurées tel que illustré par la figure 1-10, le système perturbé est par conséquent donné par :

$$(G_p(s))^{-1} = (G_0(s))^{-1} (1 + \Delta(s)) \quad (\text{I.32})$$

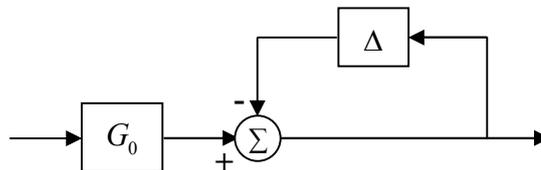


Fig.I-10 : Les incertitudes multiplicatives en sortie inverse.

#### I.4.2. Les incertitudes structurées

Les incertitudes structurées interviennent lorsque les perturbations citées précédemment causent la variation, dans un intervalle connu, de certains paramètres du système

**I.5. Conclusion**

Ce chapitre a permis de rappeler certaines notions de la commande fréquentielle, c'est-à-dire comment traduire un cahier des charges sous formes de conditions sur la forme du tracé en amplitude de la fonction de transfert en boucle ouverte.

En plus d'assurer la stabilité, les marges de stabilité permettent de "mesurer" celle-ci, plus les marges de stabilité sont importantes, plus le système est stable.

Enfin, on a introduit la notion d'incertitude pour caractériser la différence entre le système réel et son modèle. Le chapitre suivant traitera plus en détail ces incertitudes et leur utilité dans la conception de commandes robustes.

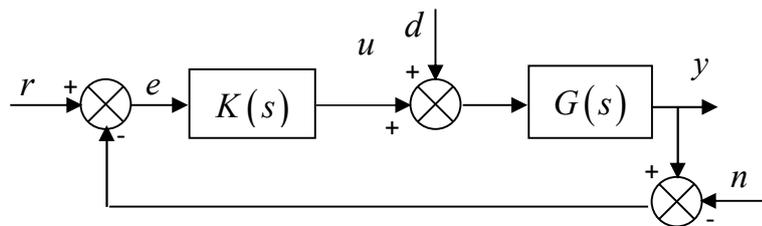
## II.1. Introduction

L'approche de synthèse  $H_\infty$ , consiste à spécifier certains objectifs sur les fonctions de transfert en boucle fermée. Ces objectifs sont spécifiés à travers un certain nombre de fonctions de transfert introduites pour pondérer les différents signaux du système ainsi que les incertitudes de modélisation. Le problème optimal consiste alors à trouver le correcteur qui minimise la norme de la matrice de transfert du modèle augmenté. Dans le cas d'un problème de robustesse en stabilité, cette norme correspond à l'inverse de la norme maximale de l'incertitude de modèle.

Dans ce chapitre, on présentera tout d'abord la méthodologie théorique de la synthèse de la loi de commande  $H_\infty$ , et on décrit la méthode utilisée pour la synthèse des correcteurs  $H_\infty$ . Cette commande qui fait partie de l'ensemble des commandes robustes. La méthode de synthèse  $H_\infty$  permettent de traiter simplement la commande des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO). en plus des spécifications de performance, elle prend en compte de façon explicite et complète un certain nombre de spécifications de robustesse, dans le cas où les incertitudes de modèle sont formalisées de façon non structurée

## II.2. Principes d'optimisation $H_\infty$

Soit le schéma-bloc de la figure II-1 (qui reproduit la figure I-1)



**Fig.II-1** : Configuration typique d'un système bouclé.

La relation existante entre la sortie  $y$  et la référence  $r$  est donnée par :

$$y = (I + GK)^{-1} GKr + (I + GK)^{-1} d \quad (\text{II.1})$$

$G(s)$  : le système,  $K(s)$  : le correcteur,  $d$  : perturbation de sortie, d'une autre manière :

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) \quad (\text{II.2})$$

Si  $S(s)$  a un grand gain la perturbation sera amplifiée, et dans le cas contraire elle sera atténuée. Si on suppose que  $S(s)=0$  alors l'effet de la perturbation sera annulé, et par la même occasion la poursuite de référence est assurée, car la relation (I.6) donne  $T(s)=I$  et par conséquent l'équation (II.1) devient  $y=r$ . On peut donc dire :

1. La recherche de la performance nominale (suivi de la référence et rejet des perturbations) Peut être conduite en spécifiant l'atténuation désirée en fonction de la fréquence pour la fonction de sensibilité  $S_y = (I_p + GK)^{-1}$ , sous la contrainte de stabilité nominale. Comme pour un système passe-bas  $S_y$  tend vers l'identité en haute fréquence, l'atténuation de la fonction de sensibilité doit être recherchée en basse fréquence. On peut pour cela définir une matrice  $W_1(p)$ , par exemple sous la forme  $W_1(p) = w_1(p)I_p$ , où  $W_1(p)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-bas avec un gain élevé en basse fréquence. L'objectif de performance nominale sera atteint si  $S_y$  vérifie :

$$\begin{aligned} \|W_1 S_y\|_\infty < 1 &\Leftrightarrow \forall \omega \in \square \quad \bar{\sigma}(w_1(j\omega)S_y(j\omega)) < 1 \\ &\Leftrightarrow \forall \omega \in \square \quad \bar{\sigma}(S_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_1(j\omega)|} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

où  $\bar{\sigma}$  représente la valeur singulière maximale. Toutefois chercher à satisfaire cette condition est insuffisant en pratique car l'objectif qu'elle traduit ne tient compte ni du fait que les commandes doivent rester limitées à des valeurs raisonnables, ni des contraintes de robustesse en stabilité vis-à-vis des incertitudes de modèle, en particulier celles agissant en hautes fréquences.

2. Pour obtenir la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous forme additive non structurée, on doit spécifier l'atténuation désirée en fonction de la fréquence pour la fonction  $KS_y$ . Par ailleurs cette matrice traduit l'effet des signaux extérieurs  $r$  et  $w$  sur la commande, et cette démarche permettra également d'obtenir des commandes « douces » évitant de trop solliciter les actionneurs. Mais en basse fréquence où  $S$  est faible – d'après l'objectif 1 – on obtient  $S_y \approx (GK)^{-1}$ , soit si l'on suppose pour simplifier que  $G$  et  $K$  sont carrées,  $KS_y \approx (G)^{-1}$ . L'atténuation de  $KS_y$  doit donc être

recherchée en haute fréquence (où d'après le même raisonnement  $KS_y \approx K$ ). On peut pour cela définir une matrice  $W_2(p)$ , par exemple sous la forme  $W_2(p) = w_2(p)I_m$ , où  $w_2(p)$  est une fonction de transfert scalaire de type passe-haut avec un gain élevé en haute fréquence, choisie en accord avec la norme des incertitudes de modèle additives que le système doit tolérer. L'objectif de robustesse en stabilité vis-à-vis de ce type d'incertitude s'écrit alors :

$$\|W_2KS_y\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(K(j\omega)S_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_2(j\omega)|} \quad (\text{II.4})$$

3. Pour obtenir la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées en sortie sous forme multiplicative directe non structurée, on doit spécifier l'atténuation désirée pour la fonction de sensibilité complémentaire  $T_y = GK(I_p + GK)^{-1}$ . Mais en basse fréquence où  $GK$  est "grand" - d'après l'objectif  $i$ -  $T_y \approx I_p$ . L'atténuation de  $T_y$  ne peut donc être recherchée qu'en haute fréquence, comme c'était le cas pour  $KS_y$ . On peut pour cela définir par exemple  $W_3(p) = w_3(p)I_p$ , où  $w_3(p)$  est une fonction de transfert scalaire de type passe-haut avec un gain important en haute fréquence, choisie en accord avec la norme des incertitudes de modèle multiplicatives que le système doit tolérer. L'objectif de robustesse en stabilité s'écrit alors :

$$\|W_3T_y\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(T_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_3(j\omega)|} \quad (\text{II.5})$$

La figure II-2 [3] illustre les allures typiques des pondérations fréquentielles  $w_1(s)$ ,  $w_2(s)$ ,  $w_3(s)$  et des fonctions de transfert  $S(s)$ ,  $KS(s)$ ,  $T(s)$ .

### II.3. Le problème $H_\infty$ standard [1,2,3]

Considérons le schéma-bloc représenté sur la figure II-3 Le "processus" est un système comportant 2 ensembles d'entrées et 2 ensembles de sorties. Le vecteur  $w$  représente toutes les entrées extérieures, telles que les signaux de référence, perturbations, bruits. Le vecteur  $u$  représente les commandes. Les sorties  $z$  représentent les erreurs de régulation, qu'on souhaite maintenir à 0. Enfin  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

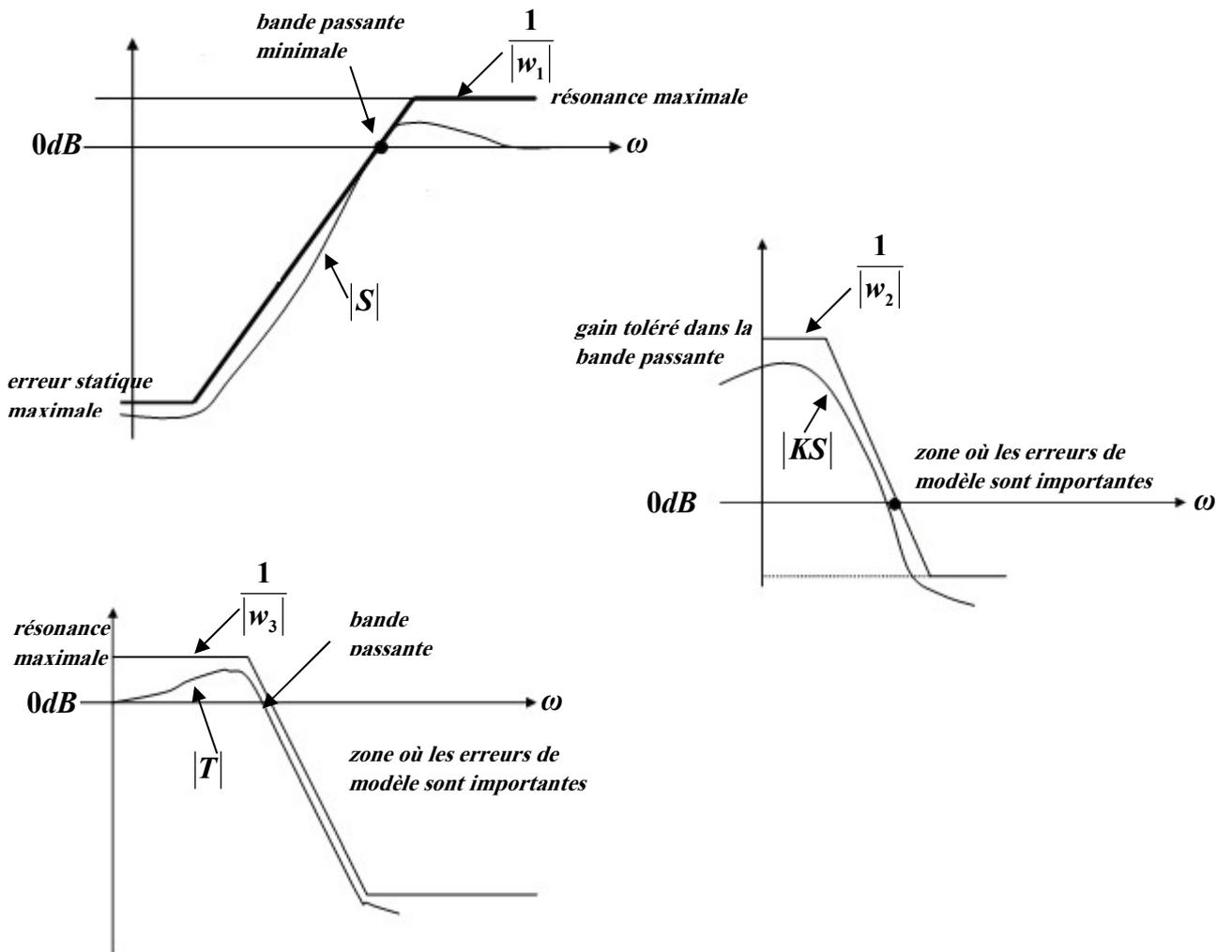


Fig.II-2 : les allures typiques des pondérations fréquentielles et des fonctions de transfert.

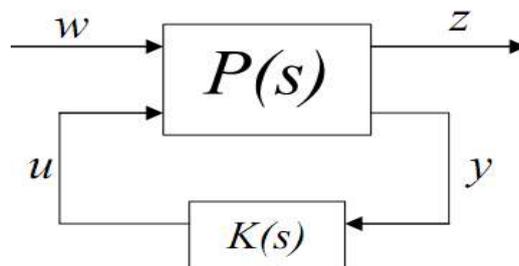


Fig. II-3 : problème  $H_\infty$  standard.

La matrice de transfert  $P(s)$  peut être partitionnée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Calculons la matrice de transfert entre  $w$  et  $z$  sur la figure II-3:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned} \quad \text{avec} \quad u(s) = K(s)y(s) \quad (\text{II.7})$$

en éliminant  $u$  et  $y$  de ces équations, on obtient :

$$\begin{aligned} z(s) &= F_l(P, K)w(s) \\ F_l(P, K) &= P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

ceci est une *Transformation Linéaire Fractionnelle (TLF)* de  $P(s)$  et  $K(s)$ , c'est-à-dire une fonction de  $K$  dont les coefficients sont les différents blocs de  $P$  (voir l'annexe A pour plus de détails sur la TLF).

Le problème de régulation peut alors être défini ainsi :

**a) Problème  $H_\infty$  standard** :  $P(s)$  et  $\gamma > 0$  étant donnés, trouver  $K(s)$  qui:

- stabilise de manière interne le système boucle de la figure II-3.
- assure  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$

Les correcteurs satisfaisant ces 2 conditions seront dits sous-optimaux.

**b) Problème  $H_\infty$  standard optimal** :

$P(s)$  étant donnée, trouver  $K(s)$  qui :

- stabilise de manière interne le système boucle de la figure II-3.
- minimise  $\|F_l(P, K)\|_\infty$

**Remarque**  $\gamma$  à la caractéristique suivante, c'est que  $1/\gamma$  définit l'amplitude maximale des incertitudes non structurées que peut subir le système bouclé  $F_l(P, K)$  sans se déstabiliser. Donc, en minimisant  $\|F_l(P, K)\|_\infty$ , le problème  $H_\infty$  optimal consiste à trouver une loi de commande  $K(s)$ , de sorte que le système bouclé soit le plus robuste possible vis-à-vis d'incertitudes non structurées.

## II.4. Solution du problème standard [1]

La solution de ce problème se fait dans l'espace d'état. Soit la représentation d'état du système augmenté  $P(s)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

avec  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ ;  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ ;  $e \in \mathbb{R}^{p_1}$ ;  $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sous une forme plus compacte, on notera :

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{P_{11}(s)}{P_{21}(s)} & \frac{P_{12}(s)}{P_{22}(s)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (\text{II.10})$$

On note  $X = Ric \left( \begin{array}{cc} A & -P \\ -Q & -A^T \end{array} \right)$ , avec  $P = P^T$ ,  $Q = Q^T$  la solution de l'équation de Riccati :

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \quad (\text{II.11})$$

qui vérifie  $X = X^T$  et pour les quelles les valeurs propres de  $A - PX$  ont une partie réelle strictement négative. Enfin, on note  $F_l(P, K)$  la transformation linéaire fractionnelle de  $P$  et  $K$  donnée par :

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} \quad (\text{II.12})$$

Rappelons que l'objectif du problème est d'assurer  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$

### II.4.1. Hypothèses

Pour résoudre ce problème, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

**A1)**  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable.

**A2)**  $\text{rang}(D_{12}) = m_2$  et  $\text{rang}(D_{21}) = p_2$

**A3)**  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

**A4)**  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

La vérification de ces hypothèses permet de s'assurer qu'on cherche à résoudre un problème dit *bien pose* :

- **A1)** est l'hypothèse classique de toute méthode de commande utilisant les variables d'état elle permet de garantir la stabilité du système boucle.
- **A2)** est une condition suffisante pour que le correcteur soit propre. Remarquons que le fait d'avoir  $D_{12}$  de rang plein signifie que toutes les commandes interviennent dans les variables à minimiser. Par ailleurs, A2) suppose implicitement que  $p_1 \geq m_2$  et  $m_1 \geq p_2$
- **A3)** entraîne que  $P_{12}$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire (mais la réciproque n'est pas vraie si la représentation d'état utilisée pour  $P_{12}$  n'est pas minimale). De même pour A4) et  $P_{21}$ .

Nous commencerons par donner la solution dans le cas où les matrices  $C_i$  et  $D_{ij}$  vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0, D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I_{m_2}] \\ D_{22} &= 0, \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Les deux théorèmes suivants permettent de décrire toutes les solutions du problème standard.

### a) Théorème 1

Le système décrit par (II.9) et vérifiant les hypothèses A1) et A4) avec les conditions (II.13) peut être stabilisé de manière interne par un correcteur  $K(s)$  assurant  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si :

$$i) H_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C & -A^T \end{pmatrix} \text{ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, et il existe}$$

une unique matrice  $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$

$$ii) J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{pmatrix} \text{ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, et il existe}$$

une unique matrice  $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$

$$iii) \rho(X_\infty Y_\infty) \leq \gamma^2$$

où  $\rho()$  désigne le module de la plus grande valeur propre.

### b) Théorème 2

Sous les conditions du théorème II.1, l'ensemble de tous les correcteurs rationnels  $K(s)$  stabilisant de manière interne le système et satisfaisant  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  est donné par :

$$K = F_l(K_a, \Phi) \quad (\text{II.14.a})$$

avec  $\Phi$  arbitraire vérifiant  $\|\Phi\|_\infty < \gamma$  et

$$\kappa_a = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I_{m_2} \\ -C_2 & I_{p_2} & 0 \end{array} \right] \quad (\text{II.14.b})$$

et avec

$$\kappa_a = \hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \quad (\text{II.14.c})$$

$$\kappa_a = F_\infty = -B_2^T X_\infty \quad (\text{II.14.d})$$

$$\kappa_a = L_\infty = -Y_\infty C_2^T \quad (\text{II.14.e})$$

$$\kappa_a = Z = \left( I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty \right)^{-1} \quad (\text{II.14.f})$$

Si toutes les conditions ci-dessus ne sont pas vérifiées, il faut augmenter  $\gamma$  et recommencer. La solution optimale est donnée par la plus petite valeur de  $\gamma$  pour laquelle on trouve une solution.

**Remarque** Si le problème est de type Minimisation de Sensibilité Mixte, on cherche plutôt le jeu de pondérations tel que l'on trouve une solution pour  $\gamma = 1$  : c'est une sub-optimales. Le gain principal doit avoir une réponse en fréquence plate à 0dB, sur la plage de fréquence la plus large possible.

### II.4.2. Problème de sensibilité mixte

Pour comprendre en quoi les problèmes présentés au paragraphe II.2, sont des cas particuliers du problème standard, considérons le schéma-bloc de la figure II-4, dans lequel le seul signal externe est la référence  $r$ . Le vecteur d'erreurs  $z$  a 2 composantes  $z_1$  et  $z_2$  : la première correspond au signal d'erreur  $\varepsilon$ , qu'on souhaite maintenir à 0, filtre par la matrice de transfert  $W_1(s)$  ; la seconde composante  $z$  est obtenue en filtrant la commande  $u$  par la matrice  $W_2(s)$ . Il est facile de vérifier que :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1(s)S_y(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) \end{pmatrix} r \quad (\text{II.15})$$

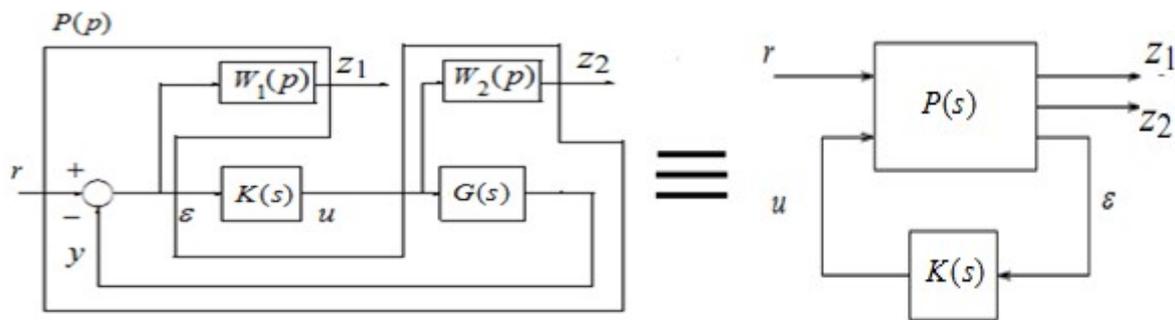


Fig. II-4 : Mise sous forme standard du problème de "sensibilité mixte"

Il faut donc déterminer la matrice  $P(s)$  du problème standard permettant d'obtenir l'identité  $\begin{pmatrix} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \end{pmatrix} \equiv F_l(P, K)$ . Pour cela, il suffit d'écrire les signaux d'erreur  $z_1$ ,  $z_2$  et l'entrée du correcteur  $z$  en fonction de la référence  $r$  et de la commande  $u$  :

$$\begin{cases} z_1 = W_1 r - W_1 G u \\ z_2 = W_2 u \\ \varepsilon = r - G u \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

On a donc :

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} W_1(s) & -W_1(s)G(s) \\ \hline 0 & W_2(s) \\ I_p & -G(s) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

La solution du problème standard conduit alors à  $\|F_l(P, K)\|_\infty \equiv \left\| \begin{pmatrix} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$ , et assure simultanément  $\|W_1 S_y\|_\infty < \gamma$  et  $\|W_2 K S_y\|_\infty < \gamma$ . Si les matrices  $W_i(s)$  sont choisies de la forme  $W_i(s)I$ ,  $i=1,2$ , avec  $W_i(s)$  scalaire. On obtient donc :

$$\forall \omega \in \square \quad \bar{\sigma}(S_y(j\omega)) < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)|} \quad (\text{II.18.a})$$

$$\forall \omega \in \square \quad \bar{\sigma}(K(j\omega)S_y(j\omega)) < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)|} \quad (\text{II.18.b})$$

On en déduit que si le problème standard admet une solution pour  $\gamma < 1$ , alors les gabarits spécifiés pour les fonctions de sensibilité grâce aux fonctions de pondération  $W_i(s)$  seront respectés. Si par contre il n'existe de solution que pour  $\gamma > 1$ , alors les gabarits demandés sont trop sévères, mais les gabarits  $\frac{\gamma}{|w_i|}$  peuvent être obtenus (figure II-5).

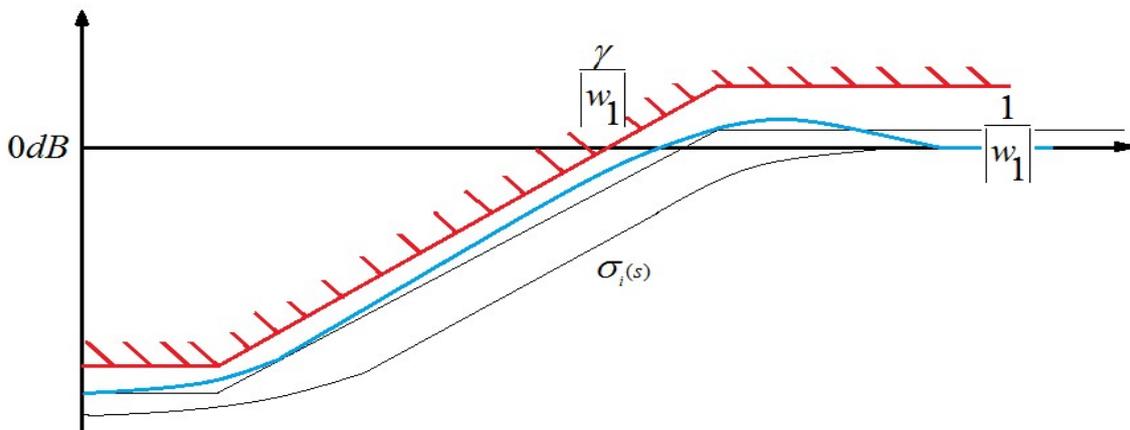


Fig. II-5 : Comportement obtenu pour  $\gamma > 1$ . [4]

### II.4.3. Mise en œuvre par le choix de pondérations fréquentielles

L'un des problèmes les plus fréquemment considérés en synthèse  $H_\infty$  est illustré par le schéma bloc de la figure (II-6) en appliquant des filtres  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ ,  $W_3(s)$  aux sorties  $\varepsilon$  et  $u$  et à la perturbation  $d$  respectivement, on introduit trois nouveaux signaux  $z_1$ ,  $z_2$  et  $b$  qui vérifient :

$$\begin{aligned} z_1(s) &= W_1(s)\varepsilon(s) \\ z_2(s) &= W_2(s)u(s) \\ d(s) &= W_3(s)b(s) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

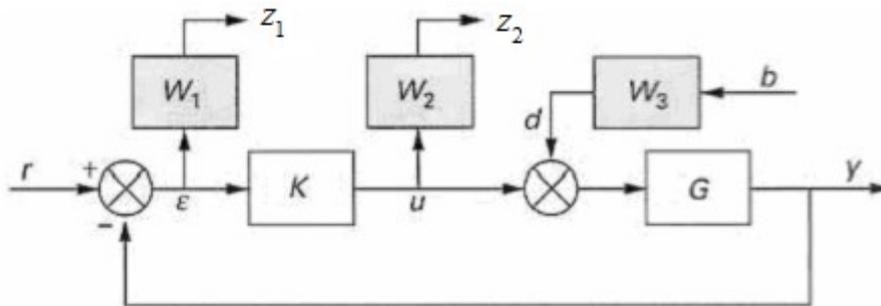


Fig. II-6 : Exemple de mise en place d'une synthèse  $H_\infty$

On cherche alors un correcteur  $K(s)$  stabilisant la boucle fermée, et assurant à la matrice de transfert entre les entrées  $r$ ,  $b$  et les sorties  $z_1$ ,  $z_2$  une norme  $H_\infty$  inférieure à 1 :

$$\left\| \begin{array}{cc} W_1(s)S(s) & W_1(s)G(s)S(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S(s) & W_2(s)T(s)W_3(s) \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II.20})$$

Une des propriétés de la norme  $H_\infty$  est que si l'inégalité (IV.7) est vérifiée, alors chacun des différents transferts composant la matrice possède la même propriété. On aura ainsi :

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1 \Leftrightarrow |W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1 \Leftrightarrow |S(j\omega)| < \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (\text{II.21})$$

et de même :

$$\begin{aligned}
|K(j\omega)S(j\omega)| &< \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \\
|G(j\omega)S(j\omega)| &< \frac{1}{|W_1(j\omega)| \cdot |W_3(j\omega)|} \\
|T(j\omega)| &< \frac{1}{|W_2(j\omega)| \cdot |W_3(j\omega)|}
\end{aligned} \tag{II.22}$$

Ainsi, par le choix des filtres  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$ , l'utilisateur peut agir sur les réponses fréquentielles des quatre transferts  $S(s)$ ,  $K(s)S(s)$ ,  $G(s)S(s)$  et  $T(s)$ . Les principes généraux guidant ses choix, sont les suivants voir figure II-7:

- le gain  $|S(j\omega)|$  doit être faible en basse fréquence, pour assurer les objectifs de précision. Sa fréquence de passage à 0 dB correspond, à peu près, à la bande passante de l'asservissement. Son maximum, c'est-à-dire sa norme  $H_\infty$  est l'inverse de la marge de module. Enfin, aucune contrainte ne peut être imposée à  $S(j\omega)$  en haute fréquence, où son gain tend vers 1 indépendamment du correcteur ;
- le gain  $|K(j\omega)S(j\omega)|$  ne peut être contraint en basse fréquence. Il doit être faible en haute fréquence, au-delà de la bande passante choisie pour l'asservissement, pour éviter de solliciter inutilement la commande, ou d'exciter des dynamiques mal modélisées ;
- le gain  $|G(j\omega)S(j\omega)|$  doit être faible en basses et moyennes fréquences, pour assurer une réjection correcte de la perturbation. Il ne peut être contraint en haute fréquence ;
- le gain  $|T(j\omega)|$  ne peut être contraint qu'en moyennes et hautes fréquences. Sa fréquence de passage à 0 dB correspond à peu près à la bande passante de l'asservissement. Il doit être faible en haute fréquence, pour éviter d'exciter inutilement la commande.

## II.5. Le théorème du petit gain et les incertitudes de modèle

Soit le théorème suivant :

### Théorème 3 :

La famille des systèmes  $(M, \Delta)$  représentés figure II-8 est stable pour toute (matrice de) fonctions de transfert stable  $\Delta$  tel que  $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$  (respectivement  $\|\Delta\|_\infty < \beta$ ) si et seulement si  $\|M\|_\infty \leq 1/\beta$  (respectivement  $\|M\|_\infty < 1/\beta$ ).

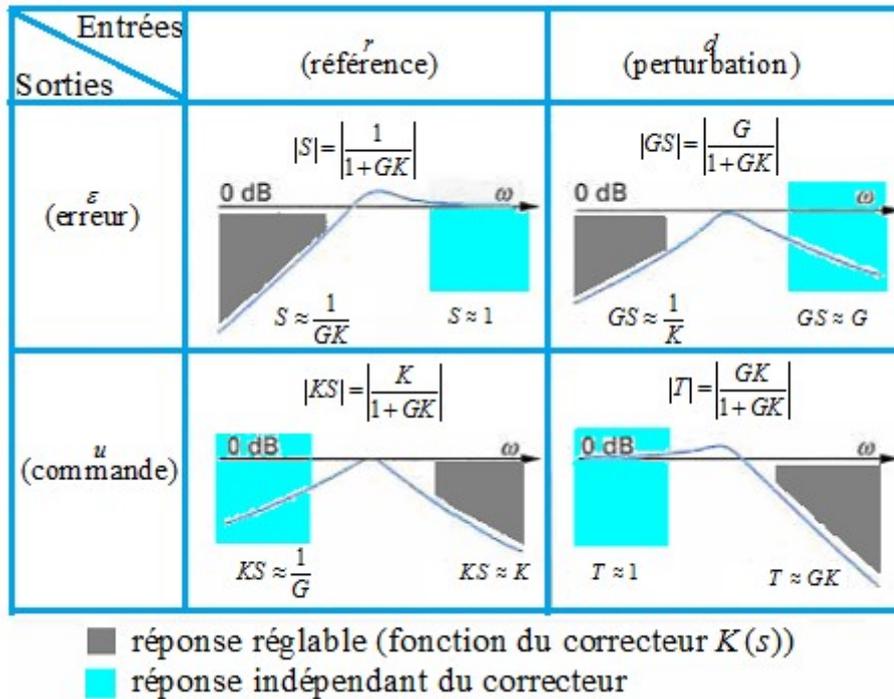


Fig. II-7 : Comportement asymptotique des transferts en boucle fermée.

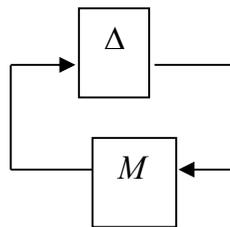


Fig.II-8 : Connection de M et  $\Delta$

D’où le tableau suivant qui résume les conditions de robustesse de stabilité en fonction des incertitudes utilisées.

### II.6. Conclusion

Le problème  $H_\infty$  standard consiste à chercher un correcteur qui permette de borner ou de minimiser la norme  $H_\infty$  de la matrice de transfert entre les entrées et les signaux d’erreur. Les atténuations souhaitées pour les fonctions de sensibilité étant exprimées au moyen de fonctions de pondération ajoutées au modèle du système, sa résolution fournit un correcteur qui établit un compromis entre performance nominale et robustesse en stabilité.

type d'incertitude	borne sur l'incertitude	stabilité robuste ssi
$G + \Delta$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_s(\omega)$	$\ w_s K(I + GK)^{-1}\ _\infty < 1$
$G(I + \Delta)$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_{mi}(\omega)$	$\ w_{mi} KG(I + KG)^{-1}\ _\infty < 1$
$(I + \Delta)G$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_{mo}(\omega)$	$\ w_{mo} GK(I + GK)^{-1}\ _\infty < 1$
$K + \Delta$	$\ \Delta(j\omega)\ _\infty \leq w_k(\omega)$	$\ w_k G(I + KG)^{-1}\ _\infty < 1$

**TAB.I-1** : conditions pour la stabilité robuste

L'objectif de ce chapitre était de présenter les éléments de base de la synthèse  $H_\infty$  sur la construction de la forme standard et le choix des pondérations fréquentielles. Nous nous sommes appuyés pour cela sur le schéma très classique de la sensibilité mixte, particulièrement bien adapté au modelage de la boucle de commande et la prise en compte des contraintes de performances et de robustesse aux incertitudes non structurées sur les fonctions de sensibilité  $S$  et  $T$

### III. 1. Introduction

L'industrie fait appel de plus en plus aux moteurs asynchrones pour assurer la variation de la vitesse et/ou de la position des processus (traction, robotique...). Le regain d'intérêt pour ces machines se justifie notamment par leur robustesse et leur faible coût d'entretien. Seulement, l'absence de découplage naturel entre l'induit et l'inducteur donne au moteur asynchrone un modèle dynamique non linéaire qui rend sa commande plus complexe, ce qui contraste avec la simplicité de sa construction [4]. Une difficulté à laquelle la commande vectorielle apporte une solution en rendant la commande du couple indépendante de celle du flux, reproduisant ainsi un comportement propre à la machine à courant continu à excitation indépendante [4,5].

Un entraînement de haute performance doit avoir de bonnes réponses en poursuite et en régulation, et ces performances doivent être insensibles aux incertitudes de la machine, ces dernières incluent principalement les variations des paramètres, les perturbations de charge ainsi que les dynamiques non linéaires et non modélisées. C'est pourquoi, on se propose dans ce travail de synthétiser un correcteur de la vitesse de l'entraînement possédant la propriété de robustesse par rapport à la variation des paramètres de la machine asynchrone (MAS), un correcteur de type  $H_\infty$ .

La commande de la machine se divise en deux sous-systèmes, interne électrique et externe mécanique [4,6], le premier permet de contrôler les grandeurs internes telles que les courants, en limitant leurs valeurs maximales pour ne pas altérer le fonctionnement de la machine. Une fonction intégrale dans les régulateurs de ces boucles internes garantit une erreur statique nulle en poursuite et en régulation, quelque soit les variations des paramètres électriques. Ce qui rend la vitesse de la machine insensible aux variations de ces paramètres, car la dynamique du sous-système mécanique est beaucoup plus lente que celle du sous-système électrique.

#### Définitions et notations

$R_s, R_r$  : résistances statorique et rotorique ;

$L_s, L_r$  : inductances statorique et rotorique ;

$L_m$  : inductance mutuelle entre stator et rotor ;

$T_s = \frac{L_s}{R_s}$  : constante de temps statorique ;

$T_r = \frac{L_r}{R_r}$  : constante de temps rotorique ;

$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$  : coefficient de fuite total ;

$p$  : nombre de paires de pôles ;

$J$  : moment d'inertie du système ;

$f$  : coefficient de frottement visqueux ;

$V_{ds}, V_{qs}$  : tensions statoriques selon l'axe  $d$  et l'axe  $q$  ;

$i_{ds}, i_{qs}$  : courants statoriques selon l'axe  $d$  et l'axe  $q$  ;

$\varphi_{dr}, \varphi_{qr}$  : flux rotoriques selon l'axe  $d$  et l'axe  $q$  ;

$C_{em}, C_r$  : couple électromagnétique et couple de perturbation de charge ;

$\omega_s, \omega_r$  : pulsations électriques des courants statoriques et rotoriques ;

$\omega, \Omega$  : vitesses électrique et mécanique ( $\omega = P\Omega$ ).

### III. 2. Modèle dynamique de la machine asynchrone

Le variateur de vitesse utilisé est composé d'un convertisseur de fréquence de type "redresseur onduleur à source de tension" alimentant une machine asynchrone [8]. La description et la mise en équation de la machine asynchrone sont des points largement repris dans la littérature [4-8], aussi nous ne retenons que le modèle en représentation d'état (III.1) donné dans le référentiel biphasé ( $dq$ ) lié au champ tournant, issu de la transformation de Park du référentiel triphasé d'origine.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (\text{III.1})$$

Le choix des vecteurs de commande  $u$  et d'état  $x$  se fait respectivement selon le type d'alimentation (dans notre cas en tension), soit  $u = [v_{ds}, v_{qs}]^t$ , et le type du contrôle vectoriel envisagé (orientation du flux rotorique), soit  $x = [i_{ds}, i_{qs}, \varphi_{dr}, \varphi_{qr}]^t$ . Le modèle (III.1) est dans ce cas donné par :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2}\right) & \omega_s & \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} & \frac{L_m \omega}{\sigma L_s L_r} \\ -\omega_s & -\left(\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2}\right) & -\frac{L_m \omega}{\sigma L_s L_r} & \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & \omega_s - \omega \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & -(\omega_s - \omega) & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

La vitesse mécanique qui est la grandeur à asservir est donnée par l'équation :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) = C_{em}(t) - C_r(t) \quad (\text{III.3})$$

sachant que le couple électromagnétique a pour expression :

$$C_{em}(t) = p \frac{L_m}{L_r} (\varphi_{dr}(t) i_{qs}(t) - \varphi_{qr}(t) i_{ds}(t)) \quad (\text{III.4})$$

Cette relation montre que le couple électromagnétique est un produit croisé des composants du courant et du flux, synonyme de l'absence de découplage entre les réglages de ces deux grandeurs. Le recours à la commande vectorielle permet de résoudre ce problème, permettant alors la commande séparée du couple, donc de la vitesse, par une composante du courant, et le flux par son autre composante.

### III. 3. Commande vectorielle directe par orientation du flux rotorique

La commande vectorielle par orientation du flux rotorique consiste à orienter le repère  $(dq)$  de sorte que le flux rotorique soit entièrement porté sur l'axe  $(d)$ , c'est à dire:

$$\varphi_{dr}(t) = \varphi_r(t) \quad \text{et} \quad \varphi_{qr}(t) = 0 \quad (\text{III.5})$$

l'expression du couple devient alors :

$$C_{em}(t) = p \frac{L_m}{L_r} \varphi_r(t) i_{qs}(t) \quad (\text{III.6})$$

il convient alors de régler le couple en agissant sur la composante  $i_{qs}$  et le flux en agissant sur la composante  $i_{ds}$  du courant statorique. Une stratégie consiste à fixer  $i_{ds}$  à une valeur de

référence  $i_{ds}^*$  de manière à imposer un flux constant dans la machine égal à  $\varphi_r^*$ , ensuite contrôler les variations du couple au moyen de  $i_{qs}$ .

Afin d'explicitier les différentes boucles de régulation des courants  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$ , du flux  $\varphi_r$  et de la vitesse  $\Omega$ , reprenons le modèle (III.2) et en utilisant les conditions (III.5), on obtient:

$$v_{ds} = \sigma L_s \frac{di_{ds}}{dt} + \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{ds} - \sigma L_s \omega_s i_{qs} - R_r \frac{L_m}{L_r} \varphi_r \quad (\text{III.7})$$

$$v_{qs} = \sigma L_s \frac{di_{qs}}{dt} + \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{qs} + \sigma L_s \omega_s i_{ds} + \omega \frac{L_m}{L_r} \varphi_r \quad (\text{III.8})$$

$$T_r \frac{d}{dt} \varphi_r + \varphi_r = L_m i_{ds} \quad (\text{III.9})$$

$$\omega_r = \omega_s - \omega = \frac{L_m}{T_r \varphi_r} i_{qs} \quad (\text{III.10})$$

Il est à noter que la dépendance du temps des grandeurs n'a pas été mentionnée pour ne pas encombrer les écritures, la transposition dans le domaine de Laplace nous donne :

$$V_{ds}(s) = \sigma L_s s I_{ds}(s) + \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) I_{ds}(s) - \sigma L_s \omega_s I_{qs}(s) - R_r \frac{L_m}{L_r} \Phi_r(s) \quad (\text{III.11})$$

$$V_{qs}(s) = \sigma L_s s I_{qs}(s) + \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) I_{qs}(s) + \sigma L_s \omega_s I_{ds}(s) + \omega \frac{L_m}{L_r} \Phi_r(s) \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\Phi_r(s)}{I_{ds}(s)} = \frac{L_m}{1 + T_r s} \quad (\text{III.13})$$

Les expressions (III.11) et (III.12) montrent que les grandeurs de commande  $V_{ds}$  et  $V_{qs}$  influencent sur  $I_{ds}$  et  $I_{qs}$ , donc sur le flux et le couple simultanément, ce qui est contraire à la stratégie envisagée. Pour contourner cette difficulté les expressions (III.11) et (III.12) sont réécrites comme suit :

$$V_{ds}(s) = f_d(s) x_d(s) - e_q(s) \quad (\text{III.14})$$

$$V_{qs}(s) = f_q(s) x_q(s) - e_d(s) \quad (\text{III.15})$$

où  $x_d(s)$  et  $x_q(s)$  sont les grandeurs à contrôler,  $e_q(s)$  et  $e_d(s)$  sont les f.e.m. de perturbation responsables du couplage non linéaire entre le flux et le couple.

En posant :

$$a = \sigma L_s \quad \text{et} \quad c = \frac{L_m^2}{L_r^2} \quad (\text{III.16})$$

Les équations (III.14) et (III.15) deviennent alors :

$$V_{ds}(s) = (R_s + cR_r)I_{ds}(s) + a s I_{ds}(s) - e_q(s) \quad (\text{III.17})$$

et

$$V_{qs}(s) = (R_s + cR_r)I_{qs}(s) + a s I_{qs}(s) - e_d(s) \quad (\text{III.18})$$

avec

$$e_q(s) = a\omega_s I_{qs}(s) + c \frac{R_r}{L_m} \Phi_r(s) \quad \text{et} \quad e_d(s) = - \left( a\omega_s I_{ds}(s) + \omega \frac{L_m}{L_r} \omega \Phi_r(s) \right) \quad (\text{III.19})$$

et enfin, ajouter des force électromotrices identiques à  $e_q(s)$  et  $e_d(s)$  mais de signes opposés à la sortie des régulateurs des courants  $I_{ds}$  et  $I_{qs}$  respectivement, de manière à séparer les boucles de régulation d'axe  $d$  et  $q$ , comme le montre la figure III-1.

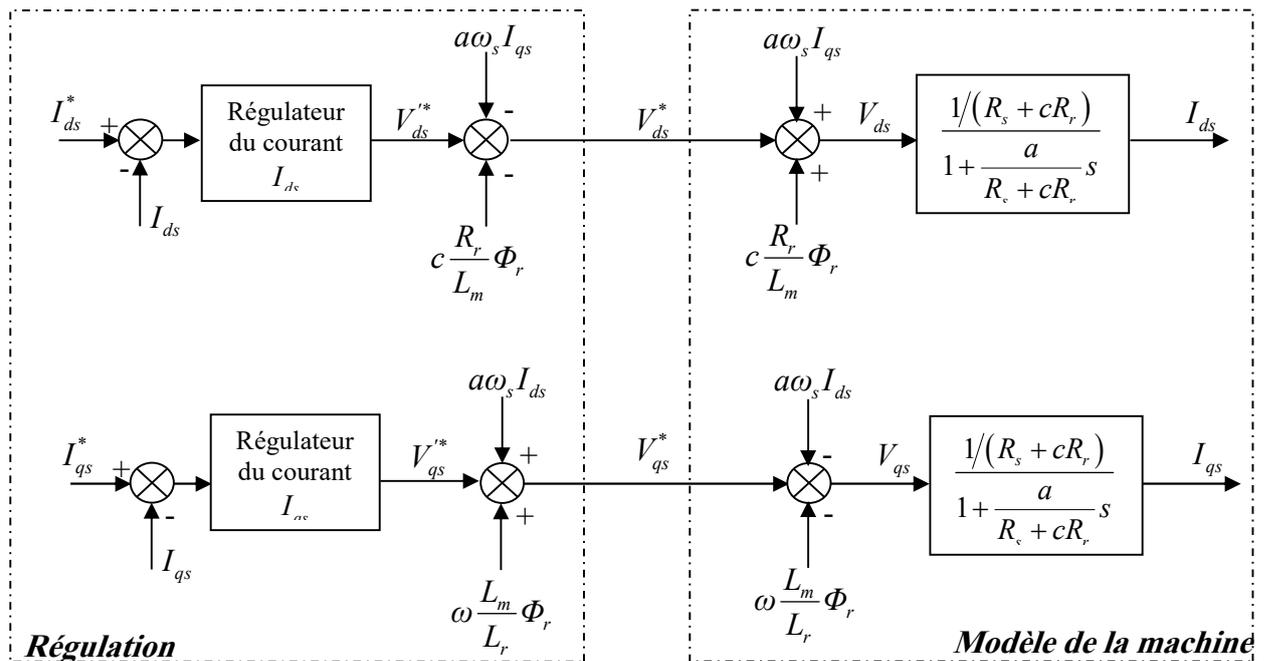


Fig.III-1 : Découplage par addition des termes de compensation

Sachant que lorsque les forces électromotrices de perturbations sont nulles, les fonctions de transfert en boucle ouverte respectivement par rapport aux axes  $d$  et  $q$  sont :

$$\frac{I_{ds}(s)}{V_{ds}(s)} = \frac{1}{R_s + cR_r} \quad \text{et} \quad \frac{I_{qs}(s)}{V_{qs}(s)} = \frac{1}{R_s + cR_r} \quad (III.20)$$

$$1 + \frac{a}{R_s + cR_r} s$$

avec une même constante de temps :

$$T_i = \frac{a}{R_s + cR_r} \quad (III.21)$$

ont aboutit alors aux schémas bloc simples et identiques pour les deux axes :

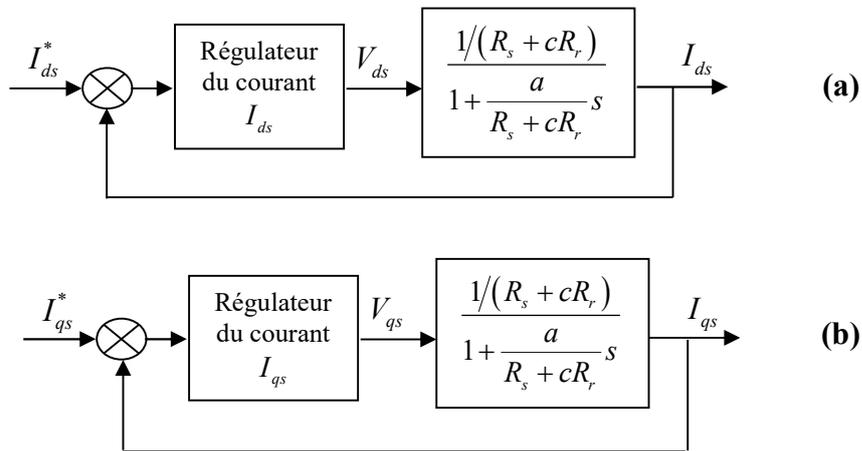


Fig.III-2 : Boucles de régulation de  $I_{ds}$  (a) et  $I_{qs}$  (b) après découplage.

Régulation du flux  $\phi_r$

On considère que  $I_{ds}$  est parfaitement régulé, selon le transfert (III.13) définissant  $\Phi_r(s)$  la boucle de régulation du flux aura la forme suivante :

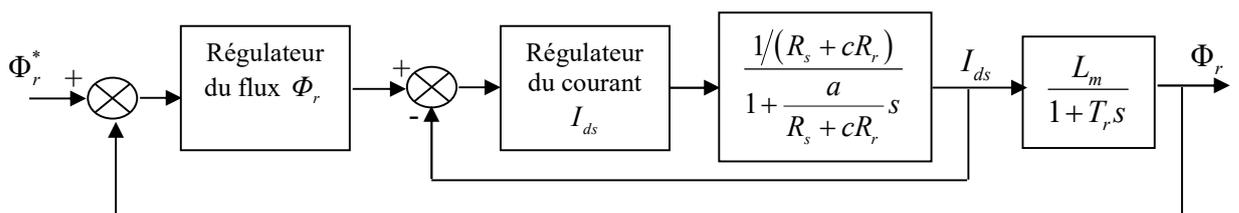


Fig.III-3 : Boucle de régulation du flux

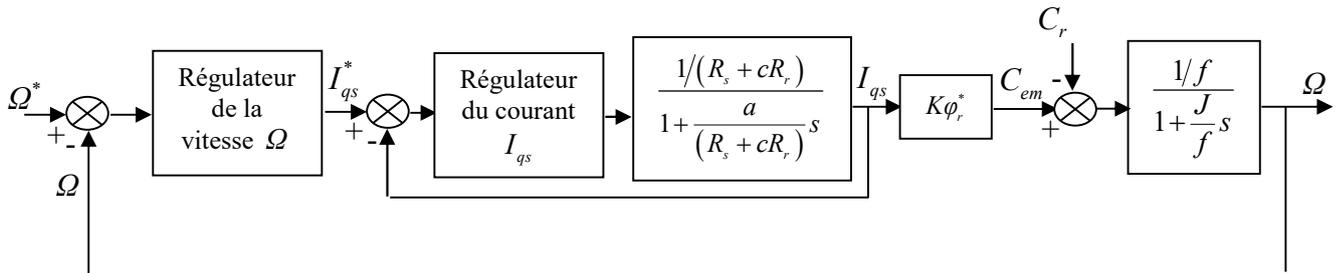
La boucle de régulation du courant  $I_{ds}$ , interne à celle du flux  $\Phi_r$ , doit avoir une dynamique plus rapide. Une fois que le courant eut atteint son régime permanent, la régulation du flux peut commencer, la fonction de transfert reliant ces deux grandeurs étant donnée par la relation (III.13) :

$$\frac{\Phi_r(s)}{I_{ds}(s)} = \frac{L_m}{1 + T_r s} \quad (III.22)$$

Régulation de la vitesse  $\Omega$

La vitesse est régulée à travers la boucle la plus externe du bloc (partie mécanique), la sortie de son régulateur est le courant de référence  $I_{qs}^*$  qui servira à son tour pour le calcul du couple électromagnétique. Les courants devant s'établir et la machine se magnétiser, la constante de temps de la boucle de vitesse doit être relativement importante.

Le schéma bloc de la régulation de la vitesse est donné par :



**Fig.III-4** : Régulation de la vitesse

L'expression du couple étant la suivante :

$$C_{em} = p \frac{L_m}{L_r} \varphi_r^* I_{qs} \quad (III.23)$$

en posant

$$K = p \frac{L_m}{L_r} \quad (III.24)$$

L'expression (III.23) s'écrira alors :

$$C_{em} = K \varphi_r^* I_{qs} \quad (III.25)$$

En remplaçant (III.25) dans l'équation mécanique (III.6) (à couple de perturbation nul) et en se transposant dans le domaine de Laplace, nous obtenons le transfert :

$$\frac{\Omega(s)}{I_{qs}(s)} = \frac{K\varphi_r^*/f}{1 + \frac{J}{f}s} \quad (\text{III.26})$$

la constante de temps de la partie mécanique étant :

$$T = \frac{J}{f} \quad (\text{III.27})$$

C'est le régulateur de vitesse (voir figure III-5) qui sera de type  $H_\infty$ , on s'intéresse en particulier à la robustesse de ce correcteur vis-à-vis des variations des paramètres mécaniques de la machine : le coefficient de frottement visqueux  $f$ , et le moment d'inertie  $J$ . On étudiera également leur comportement lorsque la machine est sollicitée par un couple résistant.

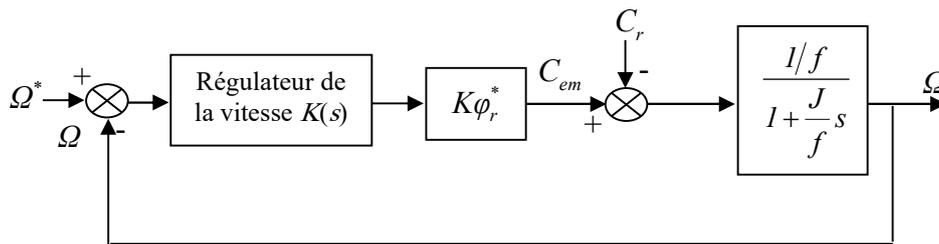


Fig.III-5 : Boucle de régulation de la vitesse.

### III. 4. Application du correcteur robuste $H_\infty$ de la machine asynchrone

On se propose d'étudier la synthèse d'un correcteur robuste  $H_\infty$  pour l'asservissement en vitesse de la MAS. En plus des spécifications usuelles de stabilité et de performances, le correcteur devra assurer la robustesse de la stabilité par rapport aux variations paramétriques de la MAS, la dynamique électrique étant préalablement négligée, la robustesse sera étudiée uniquement par rapport aux variations des paramètres mécaniques que sont le coefficient d'amortissement visqueux  $f$  et le moment d'inertie  $J$ .

Le cahier de charge à imposer est celui utilisé dans [7,8] : un flux de référence  $\varphi_r^* = 1 \text{ Wb}$ , une régulation par simples PI (Proportionnel Intégral) des boucles des courants et du flux, une constante de temps de  $8.10^{-3} \text{ sec}$  pour les boucles des courants, qu'on multipliera par 7 pour obtenir celle de la boucle du flux, et par au moins par 50 pour obtenir celle de la

vitesse. on imposera donc pour la boucle d'asservissement de la vitesse une fréquence de croisement minimale  $\omega_c = 2\pi/(50 \times 0.008) = 16 \text{ rad/sec}$ .

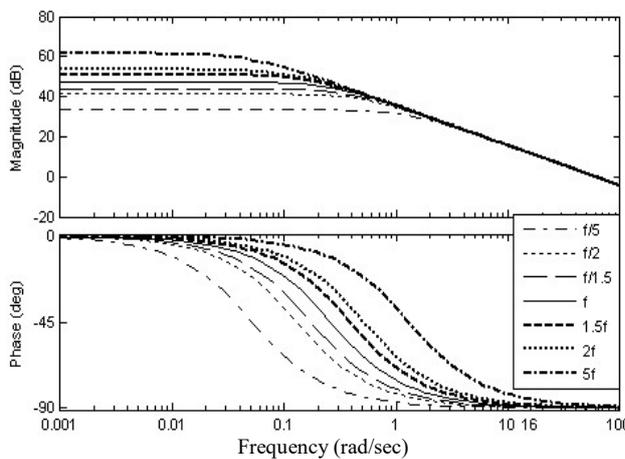
Le procédé à commander représente la partie mécanique de la MAS, sa fonction de transfert est de premier ordre et correspond à son état paramétrique nominal (voir Annexe B), elle est donnée par :

$$G(s) = \frac{K\phi_r^*/f}{1 + \frac{J}{f}s} = \frac{G_s}{1 + Ts} = \frac{235.4}{1 + 3.875s} \quad (\text{III.28})$$

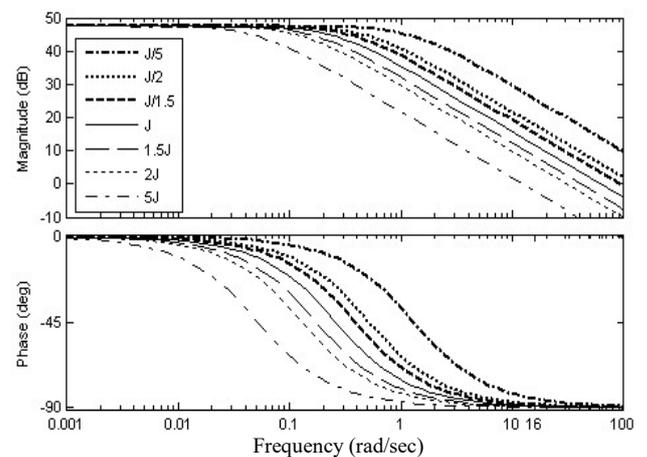
$G_s$  est le gain statique et  $T$  est la constante de temps.

Le cahier des charges constitue donc des spécifications suivantes :

1. bande passante minimale :  $\omega_c = 16 \text{ rad/sec}$  ;
2. marge de module supérieure à 0.5 ( $M_m \geq 0.5$ ) ;
3. suivi de consigne en échelon avec une erreur statique inférieure à  $10^{-6}$  ;
4. robustesse en stabilité par rapport aux variations allant de la moitié au double des paramètres mécaniques de la MAS, soit  $f \in [f/2, 2f]$  et  $J \in [J/2, 2J]$  [6,7] ;
5. correcteur de forme simple (d'ordre minimal).



**Fig.III-6.a** : Diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  pour différentes valeurs de  $f$ .



**Fig.III-6.b** : Diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  pour différentes valeurs de  $J$ .

Les figures III-6.a et III-6.b illustrent le comportement fréquentiel du procédé nominal, et du procédé reparamétrisé par des variations du coefficient de frottement pour la première, et du moment d'inertie pour la seconde. Il est à remarquer que les variations du coefficient de frottement visqueux  $f$  ne modifient pas le comportement en amplitude du procédé autour de la

fréquence de croisement  $\omega_c = 16 \text{ rad/sec}$ , fréquence à laquelle la stabilité est à étudier. Le comportement fréquentiel du correcteur étant supposé fixe, le diagramme d'amplitude en boucle ouverte ne risque pas de changement. Contrairement à cela, les variations du moment d'inertie  $J$  modifient le comportement en amplitude du procédé autour de la fréquence de croisement, et de ce fait celui de la boucle ouverte, le correcteur  $H_\infty$  est envisagé pour ce cas de figure.

Tel que explicité dans le chapitre précédant, la synthèse d'un correcteur  $H_\infty$  commence par le choisir un type d'incertitude pour modéliser l'erreur sur la dynamique du système introduite par les variations de  $J$ .

L'examen de la fonction de transfert du procédé  $G(s)$  donnée par l'expression (III.28) montre que  $J$  n'intervient qu'au dénominateur de cette dernière. L'incertitude multiplicative permet de donner une erreur de forme simple grâce à l'intervention de l'inverse  $G(s)$ . L'erreur multiplicative aura donc cette forme :

$$\Delta(j\omega) = \frac{G_0(j\omega) - G(j\omega)}{G_0(j\omega)} \quad (\text{III.29})$$

où  $G_0(j\omega)$  représente la fonction de transfert du procédé nominal, et  $G(j\omega)$  représente la fonction de transfert modifiée (perturbée) par un changement sur la valeur de  $J$ .

La figure III-7 illustre les modules des erreurs relatives  $\Delta_{J/2}(j\omega)$  et  $\Delta_{2J}(j\omega)$  définies pour les valeurs limites de l'intervalle de variation du moment d'inertie, à savoir  $J/2$  et  $2J$  respectivement. Les erreurs relatives  $\Delta_{J/1.5}(j\omega)$  et  $\Delta_{1.5J}(j\omega)$  définies respectivement pour les valeurs  $J/1.5$  et  $1.5J$  sont ajoutées à titre indicatif, comme il fallait s'y attendre l'erreur est plus importante aux limites inférieure et supérieure de l'intervalle de variation.

Le choix de l'erreur relative impose le critère suivant (voir le chapitre précédant) :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{III.30})$$

$S(s)$  et  $T(s)$  sont données par les équations (III.31) conformément à la figure III-5.

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad \text{et} \quad S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad (\text{III.31})$$

D'après le chapitre 2, les spécifications de performances se traduisent comme une contrainte sur la fonction de sensibilité  $S(s)$  via la pondération  $W_1(s)$ . D'après la relation (III-30) le module de la  $S(s)$  doit être borné par celui de  $1/W_1(s)$ . On rappelle que  $|S(0)|$  donne l'erreur statique de la réponse du système en boucle fermée et que  $1/\|S\|_\infty = M_m$ . Pour imposer une marge de module minimale il est nécessaire d'imposer  $\|S\|_\infty \leq 1/G_\infty$  c'est à dire  $1/\|S\|_\infty = M_m \geq G_\infty$ , définir une limite inférieure pour la marge de module.

Dans [2] on propose pour la fonction  $W_1(s)$  la forme suivante :

$$W_1(s) = \frac{G_\infty \sqrt{|G_0^2 - 1|} s + G_0 \omega_{W_1}^c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}}{\sqrt{|G_0^2 - 1|} s + \omega_{W_1}^c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}} \quad (\text{III.32})$$

avec  $|W_1(0)| = G_0$ ,  $G_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_1(j\omega)|$  et  $|W_1(j\omega_{W_1}^c)| = 1$ . La figure III-7 donne le module de l'inverse de la fonction  $W_1(s)$  (qui doit délimiter le module de  $S(s)$ ), pour  $G_0=10^{-6}$ ,  $G_\infty = 0.5$  puis augmenté progressivement à 0.8,  $\omega_{W_1}^c = 16 \text{ rad/sec}$  (bande passante minimale), soit :

$$W_1(s) = \frac{8 \times 10^5 s + 9.6 \times 10^6}{10^6 s + 9.6} \quad (\text{III.33})$$

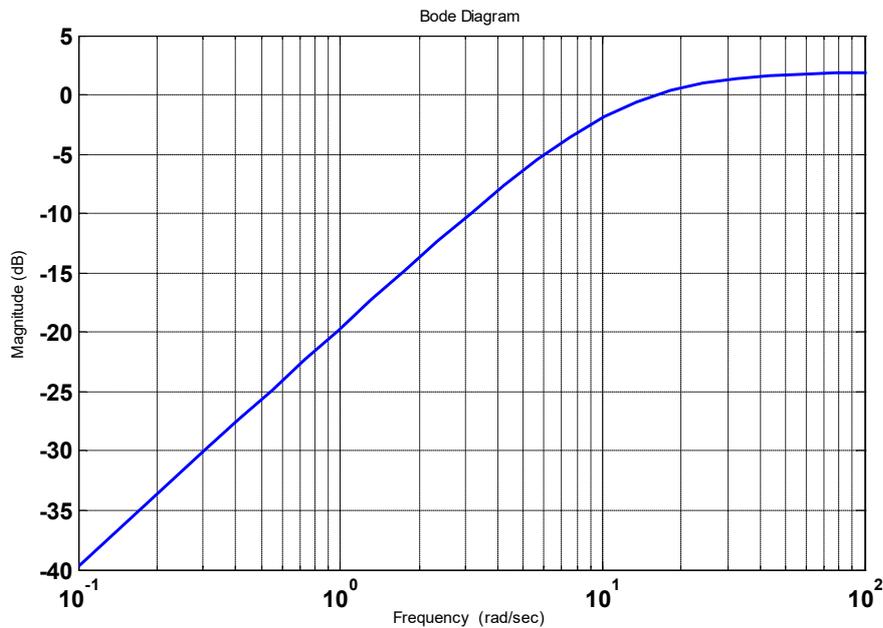


Fig.III-7 : Module de  $1/W_1(j\omega)$ .

La pondération  $W_3(s)$  doit borner les erreurs relatives (III.29), on la choisira la plus simple possible au moyen de la méthode essai-erreur. En effet, après l'examen de la figure on donnera comme première forme :

$$W_3(s) = \frac{s}{1+1.2s} \tag{III.34}$$

Après ajustement conjointement de la constante de temps et du gain on obtient la forme définitive:

$$W_3(s) = \frac{4.2s}{1+4s} \tag{III.35}$$

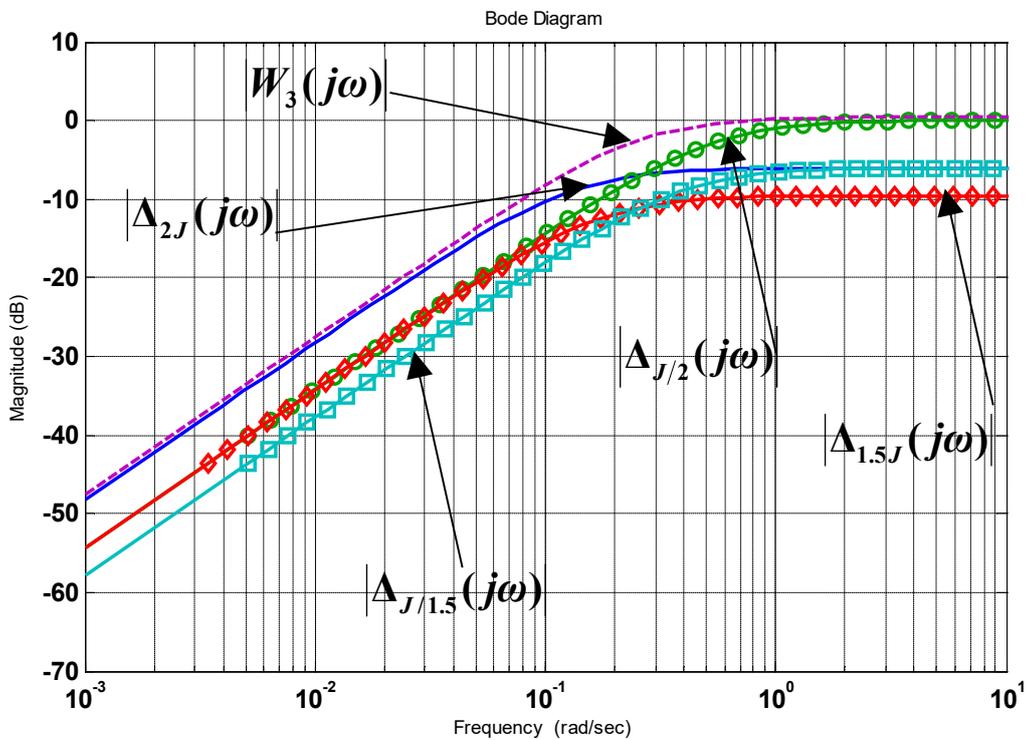


Fig.III-8 : Modules de  $\Delta(j\omega)$  et  $W_3(j\omega)$ .

De ce fait, et d'après la relation (III.29) le module de  $T(s)$  doit être borné par celui de  $1/W_3(s)$ , représenté par la figure III-9.

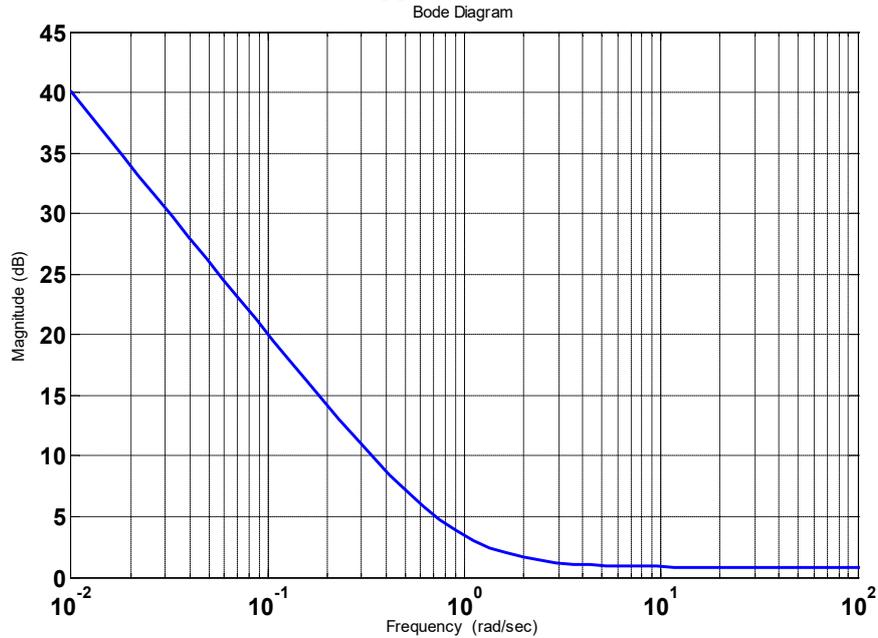


Fig.III-9 : Module de  $1/W_3(j\omega)$ .

D'après le cahier des charges cité plus haut,  $T(s)$  doit être un passe bas, du coup si  $S(s)$  est correctement calculée, le module de  $T(s)$  sera sûrement sous celui de  $1/W_3(s)$ . On choisira en définitive  $W_3(s) = 1$ . Puisque l'ordre du correcteur obtenu est égal à celui du procédé additionné à ceux de ses fonctions de pondération [2], l'ordre de notre correcteur sera le minimal possible.

Le correcteur  $H_\infty$  est calculé au moyen du logiciel MATLAB ver.7.8.0, grâce à son toolbox dédié à la commande robuste : "**Robust Control Toolbox**", dont l'algorithme de calcul est basé sur la méthode de Glover-Doyle (voir le chapitre 2). Le correcteur est de la forme :

$$K(s) = \frac{1817s + 468.9}{s^2 + 6597s + 0.06333} \quad (\text{III.36})$$

avec

$$\gamma = 1.1530 \quad (\text{III.36})$$

La figure III-10 montre le module de  $S(s)$  ainsi obtenu, on voit bien qu'il est borné par celui de  $1/W_1(s)$ , avec  $1/\|S\|_\infty = 0.9980 = M_m$ .

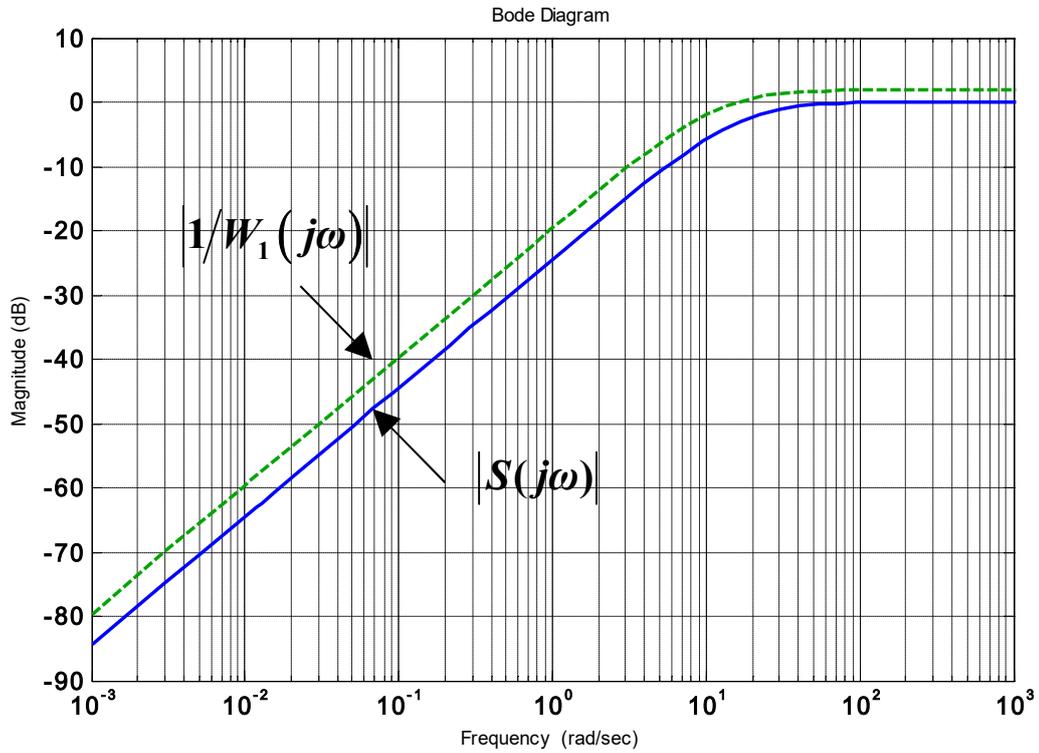


Fig.III-10 : Modules de  $1/W_1(j\omega)$  et de  $S(j\omega)$

La figure III-11 montre les diagrammes de Bode de fonction de transfert en boucle ouverte  $L(s)$ , elle a bien une fréquence de coupure de  $16.7 \text{ rad/sec}$ , tel que spécifié plus haut.

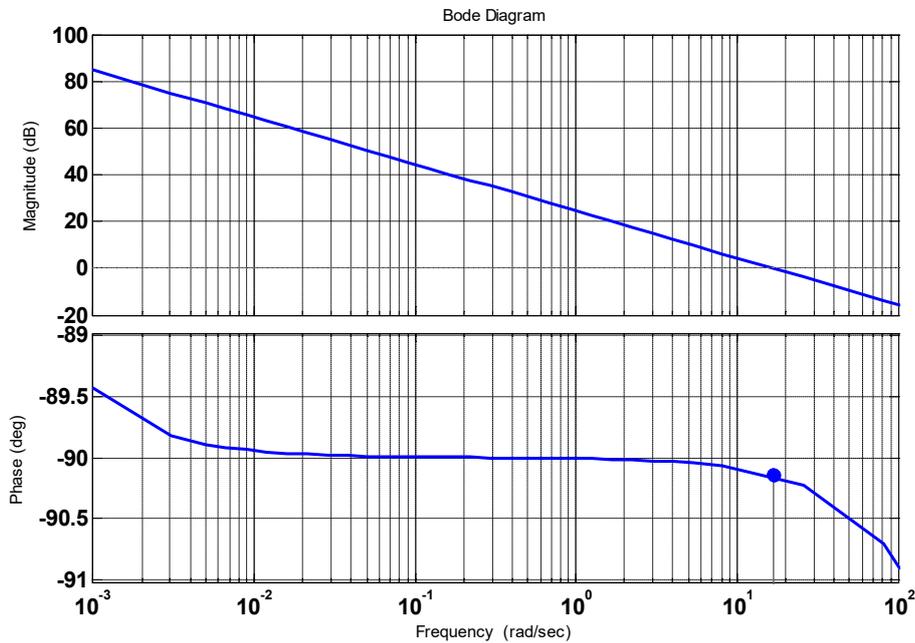
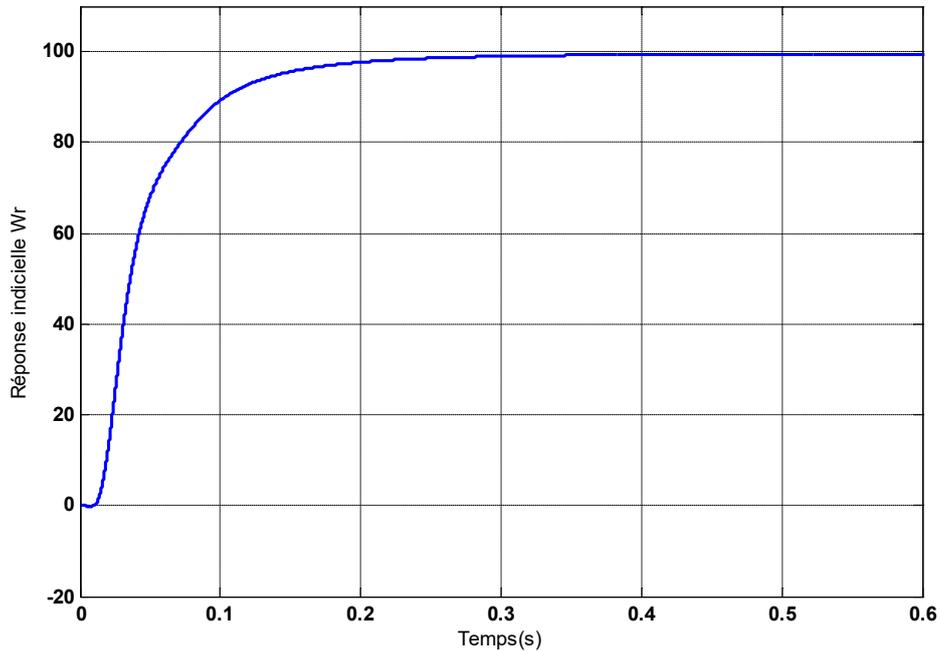


Fig.III-11 : Réponse en fréquences de  $L(s)$ .

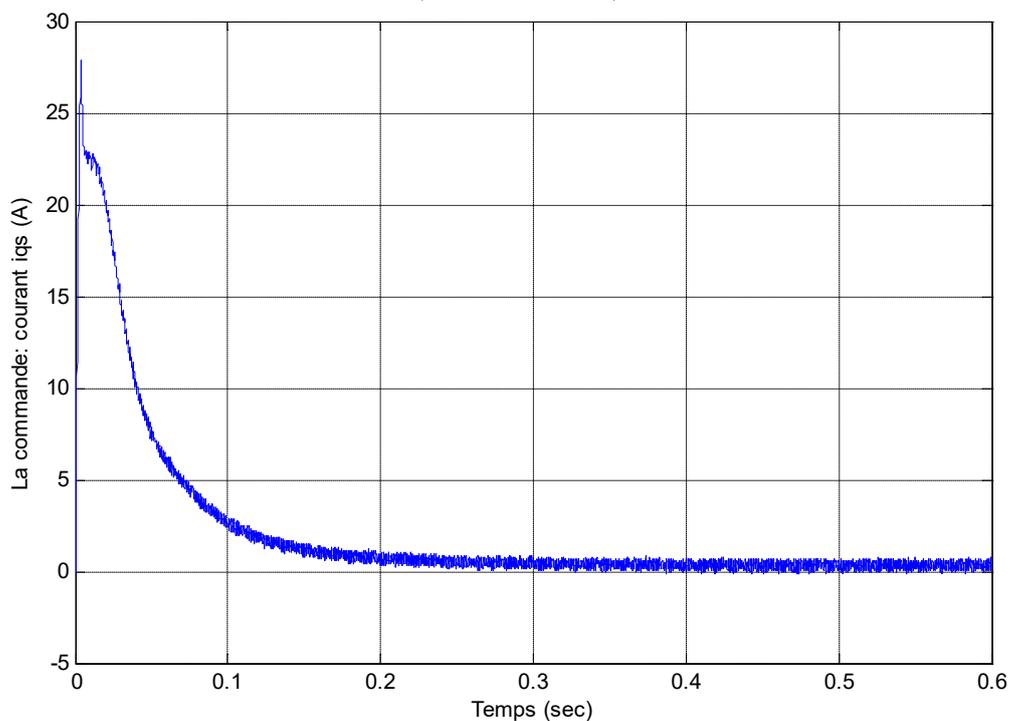
La figure III-11 montre la réponse en de la MAS en réponse à une sollicitation sous forme d'un échelon de  $100 \text{ rad/sec}$ , on y remarque un temps de réponse satisfaisant d'environ  $0.4 \text{ sec}$  (aussi bon que celui obtenu dans la littérature en rapport avec ce même cahier des

charges [6,7]), cependant l'erreur statique est de 0.4382% inférieure à celle spécifiée au préalable, cependant elle reste inférieure à 5%.



**Fig.III-12** : Réponse indicielle.

La figure III-12 représente la grandeur interne de la boucle de commande de la vitesse qu'est le courant  $i_{qs}$ , l'allure du courant est pratiquement la même pour tous les correcteurs vu dans la littérature en rapport [6,7] et sa valeur maximale, au démarrage, ne dépasse pas les 5 fois le courant nominal de la machine (voir Annexe B).



**Fig.III-13** : Signal de commande  $i_{qs}$ .

La figure III-13 montre la réponse indicielle, lorsqu'on sollicite la machine dans son état paramétrique nominal avec un couple résistant (en échelon) de 8Nm à l'instant  $t=0.75\text{sec}$ , on note le comportement insuffisant en rejet de perturbation.

Enfin, la figure III-14 montre les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée pour  $J$ ,  $J/2$  et  $2J$ . La stabilité est robuste car toujours vérifiée.

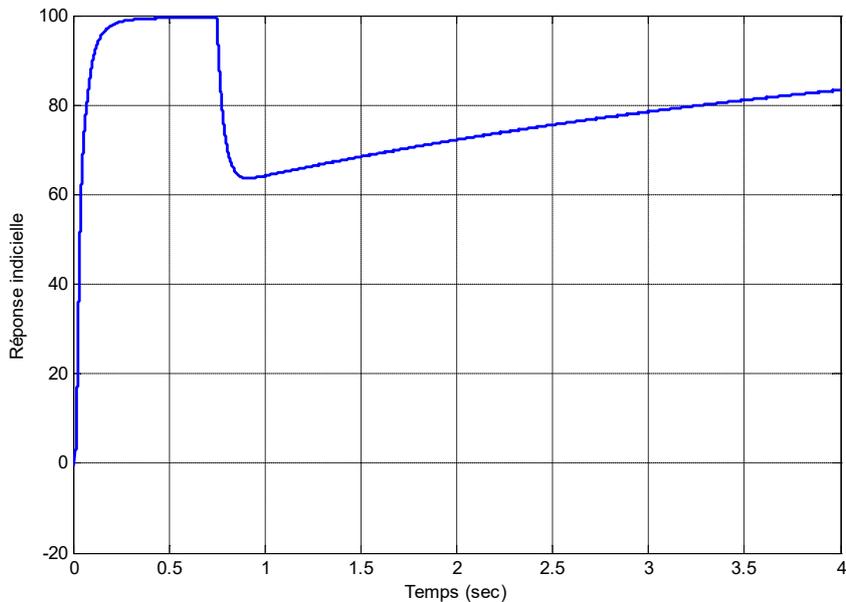


Fig.III-14 : Réponse indicielle avec perturbation en échelon.

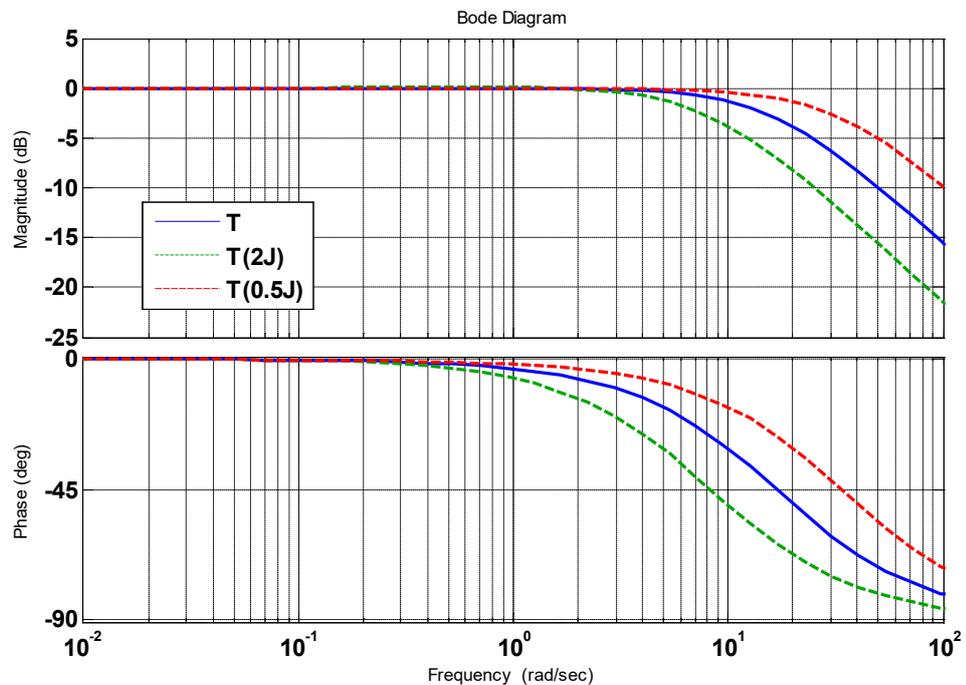


Fig.III-15 : Diagrammes de Bode des différentes formes de  $T(s)$

### III. 5. Conclusion

Dans ce chapitre, un correcteur robuste  $H_\infty$  a été synthétisé pour la commande en vitesse de la machine asynchrone. Le but étant d'assurer la robustesse de la stabilité vis-à-vis des variations des paramètres mécaniques de la machine, l'effet des paramètres électriques étant négligé au préalable. Le correcteur synthétisé qui devait être d'une forme simple pour des considérations pratiques, a répondu au cahier des charges. Cependant, il présente un mauvais rejet de perturbation, cette propriété est commune aux correcteurs robustes, principalement car ils ne contiennent pas une action intégrale franche ( $1/s$ ) en boucle ouverte, ceci bien que la fonction de transfert  $\mathcal{S}(s)$  présente un faible gain en basses fréquences. C'est le principal problème à traiter dans la suite de ce travail. Reste à dire que l'étude a montré une stabilité robuste naturelle de la machine vis-à-vis des variations de ses paramètres mécaniques, ceci est remarqué par la forme de l'erreur relative faible en basses et moyennes fréquences, et qu'il faut envisager directement la robustesse en performances grâce notamment à la  $\mu$ -synthèse, une forme plus avancées de la commande  $H_\infty$  pour la robustesse en stabilité et en performances conjointement.

# Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des complexes
$\mathbb{R}^n$	Ensemble des vecteurs réels de dimension $n$
$\mathbb{C}^n$	Ensemble des vecteurs complexes de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles $m \times n$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Ensemble des matrices complexes $m \times n$
$j$	Index ou $j^2 = -1$
$ \cdot $	Valeur absolue d'éléments dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\ f(\cdot)\ _\infty, \ f(\cdot)\ _2$	Les normes $H_\infty$ et $H_2$
$A^T$	Transpose
$A^{-1}$	Inverse
$I$	Matrice identité
$\underline{\sigma}(A)$	Valeur singulière minimale de la matrice $A$
$\bar{\sigma}$	Valeur singulière maximale de la matrice $A$
$\lambda(A)$	Valeur propre de la matrice $A$
$\rho(A)$	Rayon spectral de $A$ , $\rho(A) = \max_i  \lambda_i(A) $
$Im(A)$	Espace image de $A$
$\dim(V)$	Dimension de l'espace $V$
$rag(A)$	$\dim(Im(A))$
$\ G(s)\ _\infty$	Norme $H_\infty$ de la fonction de transfert $G(s)$ .
$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	Matrice système associée à la matrice de transfert $C(sI - A)^{-1}B + D$ .
$V_{sa}, V_{sb}, V_{sc}$	Tensions d'alimentation des phases statoriques.
$V_{ra}, V_{rb}, V_{rc}$	Tensions d'alimentation des phases rotoriques.

$i_{sa}, i_{sb}, i_{sc}$	Courants statoriques.
$i_{ra}, i_{rb}, i_{rc}$	Courants rotoriques.
$\phi_{sa}, \phi_{sb}, \phi_{sc}$	Flux statoriques.
$\phi_{ra}, \phi_{rb}, \phi_{rc}$	Flux rotoriques.
$[L_s]$	Matrice d'inductances statoriques.
$[L_r]$	Matrice d'inductances rotoriques.
$[M_{sr}]$	Matrice des inductances mutuelles du couplage entre stator-rotor.
$R_s, l_s$	Resistance et inductance propre d'une phase statorique.
$R_r, l_r$	Resistance et inductance propre d'une phase rotorique.
$M_{sr}$	Inductance mutuelle entre une phase de stator et une phase de rotor.
$m_s$	L'inductance mutuelle entre phases statoriques.
$m_r$	L'inductance mutuelle entre phases rotoriques.
$\theta$	Angle électrique.
$(\alpha, \beta)$	Axes fixes au stator.
$(x, y)$	Axes fixes au rotor
$(u, v)$	Axes fixes par rapport au champ tournant.
$\theta_s, \theta_r$	Déphasage de l'axe direct par rapport au stator, rotor.
$[p]$	Matrice de transformation de PARK.
$\omega_s$	Pulsation statorique.
$\omega_r$	Pulsation rotorique.
$\omega$	Pulsation mécanique du rotor.
$p$	Nombre de paires de pôles.
$C_r$	Couple résistant
$\Omega$	Vitesse angulaire de rotation.
$f$	Coefficient de frottement.
$J$	Moment d'inertie de la partie tournante de la machine.
$C_{em}$	Couple électromagnétique.
$\delta$	Coefficient de dispersion.

$T_r, T_s$	Constantes de temps rotorique et statorique.
$V_s$	Valeur efficace de tension.
$\omega_s$	Pulsation d'alimentation.
$s$	Operateur dérivée de LAPLACE $\frac{d}{dt}$ .

## **Acronymes**

B.F	Boucle fermée
B.O	Boucle ouverte
MAS	Machine asynchrone
LTI	Linéaire A Temps Invariant
LFT	Transformation Linéaire Fractionnaire
SISO	Single-Input Single-Output (système à une entrée et une sortie).
MIMO	Multi-Input Multi-Output (système à plusieurs entrées et plusieurs sorties).
SVD	Singular Values Décompositions (décomposition en valeurs singulières).

# ***LISTES DES FIGURES***

## **CHAPITRE I**

Figure I-1: Description de la boucle de commande.....	2
Figure I-2: Marges de stabilité dans le plan de Black.....	6
Figure I-3: Diagramme de Bode d'une fonction de transfert en boucle ouverte typique.....	7
Figure I-4: Boucle de commande multivariable.....	8
Figure I-5: Les incertitudes additives.....	11
Figure I-6: Les incertitudes additives inverses.....	12
Figure I-7: Les incertitudes multiplicatives en entrée.....	12
Figure I-8: Les incertitudes multiplicatives en sortie.....	13
Figure I-9: Les incertitudes multiplicatives en entrée inverse.....	13
Figure I-10: Les incertitudes multiplicatives en sortie inverse.....	13

## **CHAPITRE II**

Figure II-1: Configuration typique d'un système bouclé.....	18
Figure II-2: les allures typiques des pondérations fréquentielles et des fonctions de transfert.....	21
Figure II-3: problème $H_\infty$ standard.....	21
Figure II-4: Mise sous forme standard du problème de "sensibilité mixte ".....	26
Figure II-5: Comportement obtenu pour $\gamma > 1$ .....	26
Figure II-6: Exemple de mise en place d'une synthèse $H_\infty$ .....	38
Figure II-7: Comportement asymptotique des transferts en boucle fermée.....	30

## **CHAPITRE III**

Figure III-1: Découplage par addition des termes de compensation.....	33
Figure III-2: Boucles de régulation de $I_{ds}$ <b>(a)</b> et $I_{qs}$ <b>(b)</b> après découplage.....	34
Figure III-3: Boucle de régulation du flux.....	34
Figure III-4: Régulation de la vitesse.....	35
Figure III-5: Boucle de régulation de la vitesse.....	36
Figure III-6.a: Diagrammes de Bode de $G(j\omega)$ pour différentes valeurs de $f$ .....	37

FIGURES

Figure III-6.b: Diagrammes de Bode de $G(j\omega)$ pour différentes valeurs de $J$ .....	37
Figure III-7: Module de $1/W_1(j\omega)$ .....	39
Figure III-8: Modules de $\Delta(j\omega)$ et $W_3(j\omega)$ .....	40
Figure III-9: Module de $1/W_3(j\omega)$ .....	40
Figure III-10: Modules de $1/W_1(j\omega)$ et de $S(j\omega)$ .....	41
Figure III-11: Réponse en fréquences de $L(s)$ .....	42
Figure III-12: Réponse indicielle.....	42
Figure IV-13: Signal de commande $\dot{i}_{qs}$ .....	43
Figure III-14: Réponse indicielle avec perturbation en échelon.....	44
Figure III-15: Diagrammes de Bode des différentes formes de $T(s)$ .....	44



Dans le cadre de la synthèse  $H_\infty$  standard, nous avons vu en effet qu'il était possible de traduire de façon assez systématique les objectifs de performance et de robustesse en terme de modelage des matrices de transfert de la boucle fermée. Dans le cadre de la commande  $H_\infty$  par facteurs premiers, on peut également modeler de façon relativement systématique les valeurs singulières de la boucle ouverte.

Nous avons préféré d'utiliser la commande  $H_\infty$  par facteurs premiers, parce que cette méthode nous a semble plus simple d'emploi que la commande  $H_\infty$  standard.

Notre travail consiste à étudier la synthèse  $H_\infty$  par facteurs premiers et son application dans le but de commander la machine asynchrone. Nous avons essayé de la présenter d'une manière simple et claire pour permettre la compréhension de son fonctionnement.

Nous avons remarqué par ailleurs sur notre application que les correcteurs  $H_\infty$  pouvaient présenter de bonnes propriétés de robustesse face à des dynamiques négligées.

Le travail présenté est consacré à la commande de la machine asynchrone alimentée par un onduleur de tension.

Le modèle mathématique de système étudié a été présenté. On a commencé par la modélisation de la machine asynchrone dans un référentiel lié au stator. Nous avons ensuite, modélisé l'alimentation de la machine, puis on a discuté le principe du contrôle vectoriel à flux rotorique orienté. La synthèse des régulateurs classiques est ensuite abordée.

Différents tests de simulation montrant les performances de la commande sont présentés. Ces tests nous permettent de mieux comprendre le comportement de la machine asynchrone en présence des perturbations de différentes natures (électrique ou mécanique).

Les résultats de simulation montrent que les régulateurs classiques sont insuffisants pour satisfaire les performances exigées. Ils sont sujets à une détérioration des performances en présence des variations paramétriques. L'utilisation d'une commande moderne est plus que nécessaire. La synthèse  $H_\infty$  est bien adaptée pour résoudre ce type de problèmes et maintenir les performances exigées.

# Bibliographie

- [1] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferreres. "*Robustesse et commande optimale*", Cépaduès-editions, Toulouse, France, 1999.
- [2] G. Scorletti et V. Fromion, "*Introduction à la commande multivariable des systèmes méthodes de synthèse fréquentielle  $H_\infty$* ", polycopié de cours de l'Université de Caen, France, 2007. Page web : [http://www.greyc.ensicaen.fr/~scorlett/Gerard\\_S/ENSI\\_comrob.html](http://www.greyc.ensicaen.fr/~scorlett/Gerard_S/ENSI_comrob.html)
- [3] G. Duc. "*Robustesse des systèmes linéaires multivariables*", polycopié de cours de Supélec, France, 1994.
- [4] J. P. Caron et J. P. Hautier. "*Modélisation et commande de la machine asynchrone*". Edition TECHNIP, Paris, 1995.
- [5] G. Grellet et G. Clerc. "*Actionneurs Électriques Principes Modèles Commande*". Edition EYROLLES, 2000.
- [6] L. Baghli. "*Contribution à la commande de la machine asynchrone, utilisation de la logique floue, des réseaux de neurones et des algorithmes génétiques*". Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I, 1999.
- [7] L. Ait Messaoud. "*Contribution à la commande des systèmes par des régulateurs d'ordre non entier Application à la commande de la machine asynchrone*". Mémoire de Magister UMMTO, Algérie, 2007.
- [8] D. Kemache. "*Contrôle vectoriel et adaptatif d'une machine asynchrone alimentée par un onduleur de tension*". Mémoire de Magister UMMTO, Algérie, 1998.

# ANNEXE A

## A.1. Interconnexions des systèmes [1]

Les formules données ci-dessous donnent les réalisations d'état des connexions les plus répandues des systèmes LTI.

### A.1.1. La somme

Si  $G_1(s)$  et  $G_2(s)$  admettent comme réalisation minimale :

$$G_1 = \begin{bmatrix} \underline{A_1} & \underline{B_1} \\ \underline{C_1} & \underline{D_1} \end{bmatrix}; \quad G_2 = \begin{bmatrix} \underline{A_2} & \underline{B_2} \\ \underline{C_2} & \underline{D_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

une réalisation minimale de la somme  $G_1(s) + G_2(s)$  est :

$$G_1 + G_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A_1} & 0 \\ 0 & \underline{A_2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{B_1} \\ \underline{B_2} \end{bmatrix} \\ \underline{C_1} & \underline{C_2} \end{bmatrix} \quad \underline{D_1 + D_2} \quad (\text{A.2})$$

### A.1.2. Le produit

Pour  $G_1(s)$  et  $G_2(s)$  une réalisation minimale du produit  $G_1(s) G_2(s)$  est :

$$G_1 G_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A_1} & \underline{B_1 C_2} \\ 0 & \underline{A_2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{B_1 D_2} \\ \underline{B_2} \end{bmatrix} \\ \underline{C_1} & \underline{D_1 C_2} \end{bmatrix} \quad \underline{D_1 D_2} \quad \text{ou} \quad G_1 G_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A_2} & 0 \\ \underline{B_1 C_2} & \underline{A_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{B_2} \\ \underline{B_1 D_2} \end{bmatrix} \\ \underline{D_1 C_2} & \underline{C_1} \end{bmatrix} \quad \underline{D_1 D_2} \quad (\text{A.3})$$

### A.1.3. L'inversion

La fonction de transfert  $G = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$  est inversible si et seulement si  $D$  est inversible.

Alors une réalisation minimale de  $G^{-1}$  est :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{A - B D^{-1} C} & \underline{B D^{-1}} \\ \underline{-D^{-1} C} & \underline{D^{-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

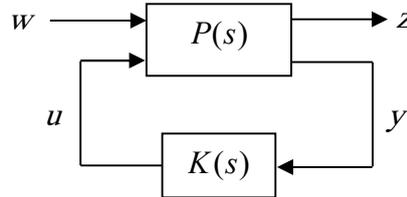
### A.1.4. La dérivation

Si  $G = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$ , une représentation de  $sG(s)$  est

$$sG = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{CA} & \underline{CB+sD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{AB} \\ \underline{C} & \underline{CB+sD} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

### A.1.5. La transformation linéaire fractionnaire (LFT)

Cette transformation intervient dans la connection des deux systèmes par rétroaction suivant le schéma de la figure A-1.



**Fig.A-1** : La transformation linéaire fractionnaire.

Le système  $P(s)$  décrit la relation entre les signaux d'entrée  $w$  et  $u$  et les signaux de sortie  $y$  et  $z$  :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Lorsque ce système est bouclé sur le retour de sortie :

$$u = K(s)y \quad (\text{A.7})$$

la fonction de transfert en boucle fermée de  $W(s)$  à  $Z(s)$  est :

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{21}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (\text{A.8})$$

Cette expression s'appelle la Transformée linéaire Fractionnaire (LFT) de  $P$  et  $K$ , si des réalisations minimales de  $P(s)$  et  $K(s)$  sont :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

et

$$K(s) = D_K + C_K (sI - A_K)^{-1} B_K \quad (\text{A.10})$$

une réalisation (pas nécessairement minimale) de  $F_l(P, K)$  est donnée par :

$$F_l(P, K) = D_{BF} + C_{BF} (sI - A_{BF})^{-1} B_{BF} \quad (\text{A.11})$$

avec

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A + B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} C_K \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \end{bmatrix} \quad (\text{A.12.a})$$

$$B_{BF} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12.b})$$

$$C_{BF} = \begin{bmatrix} C_1 D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} C_K \end{bmatrix} \quad (\text{A.12.c})$$

$$D_{BF} = D_{11} + D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \quad (\text{A.12.d})$$

La stabilité interne de la boucle fermée est équivalente à la stabilité de  $A_{BF}$ , c'est-à-dire à  $\text{Re}(\lambda_i(A_{BF})) < 0$ .

## A.2. Calcul des normes $H_2$ et $H_\infty$ [1]

Dans ce qui suit sont donnés des algorithmes pour le calcul des normes  $H_2$  et  $H_\infty$  d'une fonction de transfert  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1} B$ . Pour la norme  $H_2$ , on supposera que  $A$  est stable  $D$  nulle ( $G(s)$  propre). En remarquant que  $G(j\omega)$  est la transformée de Fourier de  $Ce^{At} B$ , l'identité de Parseval donne :

$$\int_0^{+\infty} B^T e^{tA^T} C^T C e^{tA} B dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega) G(j\omega) d\omega \quad (\text{A.13})$$

soit

$$Q = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt \quad (\text{A.14})$$

On montre que  $Q$  est la solution de l'équation de Lyapunov

$$A^T Q + Q A + C^T C = 0 \quad (\text{A.15})$$

En prenant la trace de chaque membre de (A.13), on obtient le carré de la norme  $H_2$  de  $G$ :

$$\|G\|_2^2 = \text{Trace}(B^T Q B) \quad (\text{A.16})$$

Ce qui fournit un algorithme simple pour évaluer cette norme. A noter que l'on a aussi

$$\|G\|_2^2 = \text{Trace}(C P C^T) \quad (\text{A.17})$$

où  $P$  est la solution de

$$A P + P A^T + B B^T = 0 \quad (\text{A.18})$$

Le calcul de la norme  $H_\infty$  est le plus délicat. On peut tracer la fonction  $\omega \rightarrow \sigma_{\max}(G(j\omega))$  et déterminer la valeur maximale. Cette méthode présente cependant le risque de manquer un pic étroit. Un algorithme plus sûr est basé sur la caractérisation suivante.

**Théorème :** Soit  $(A,B,C,D)$  une réalisation de  $G(s)$ . On a toujours  $\|G\|_{\infty} > \sigma_{\max}(D)$  et pour tout  $\gamma > \sigma_{\max}(D)$ , il y a équivalence entre

(i)  $\|G\|_{\infty} < \gamma$

(ii) la matrice

$$H(\gamma) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma I & D \\ D^T & \gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -B^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.1}\zeta)$$

n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

De plus, si  $j\omega$  est une valeur propre de  $H(\gamma)$  pour  $\gamma > \sigma_{\max}(D)$  alors,  $\sigma_{\max}(G(j\omega)) = \gamma$ , i.e., le gain  $\gamma$  est obtenu à la fréquence  $\omega$ .

La matrice  $H$  est d'une structure particulière dite "Hamiltonienne". Lorsque  $D=0$ , elle s'écrit

$$\text{simplement } H(\gamma) = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-1}BB^T \\ -\gamma^{-1}C^TC & -A^T \end{bmatrix}.$$

Cette caractérisation suggère un simple algorithme de dichotomie pour calculer  $\|G\|_{\infty}$ .

On part d'un encadrement grossier  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  de cette norme et on l'améliore itérativement de la façon suivante :

- on calcul le spectre de  $H(\gamma)$  pour  $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{\min} + \gamma_{\max})$ ,
- s'il n'y a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire,  $\gamma$  est trop grand et l'on obtient comme nouvel encadrement  $[\gamma_{\min}, \gamma]$  ;
- sinon,  $\gamma$  est trop petit et on obtient le nouvel encadrement  $[\gamma, \gamma_{\max}]$ .

## **ANNEXE B**

### **Paramètres de la machine asynchrone**

Puissance nominale :	1.5 kW
Nombre de paires de pôles :	$P = 2$
Vitesse nominales :	$N = 1420 \text{ tr/mn}$
Tension :	220/380 V
Intensité nominale :	6.31/3.64 A
Rendement :	$\eta = 0.78$

#### **Paramètres Electriques**

Résistance statorique :	$R_s = 4.85 \Omega$
Résistance rotorique :	$R_r = 3.805 \Omega$
Inductance statorique :	$L_s = 0.274 \text{ H}$
Inductance rotorique :	$L_r = 0.274 \text{ H}$
Inductance mutuelle entre stator et rotor :	$L_m = 0.258 \text{ H}$

#### **Paramètres mécaniques**

Moment d'inertie :	$J = 0.031 \text{ Kg.m}^2$
Coefficient de frottement visqueux :	$K_f = 0.008 \text{ kg.m}^2 / \text{s}$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Université SAAD DAHLAB Blida

جامعة سعد دحلب البليدة

*Un Haut Lieu du Savoir*

**MEMOIRE DE PROJET DE FIN D'ETUDES POUR L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE  
OPTION: AUTOMATIQUE**

Thème :

# **Commande $H_{\infty}$ d'une Machine Asynchrone**

Présenté par :

Mr BAROUN Abderrahim

Mr BELKHAMSA Dahmane

Proposé par:

M<sup>elle</sup>. AIT MESSAOUD Lysa

# Objectifs

Les objectifs du travail :

A- Synthèse sous MATLAB ver.7.8.0 des principaux régulateurs  $H_\infty$

B- Application à la commande du moteur asynchrone.

# PLAN DE TRAVAIL

1- *Notions sur les asservissements robustes.*

2- *Commande  $H_\infty$*

3- *Application à la commande de la*

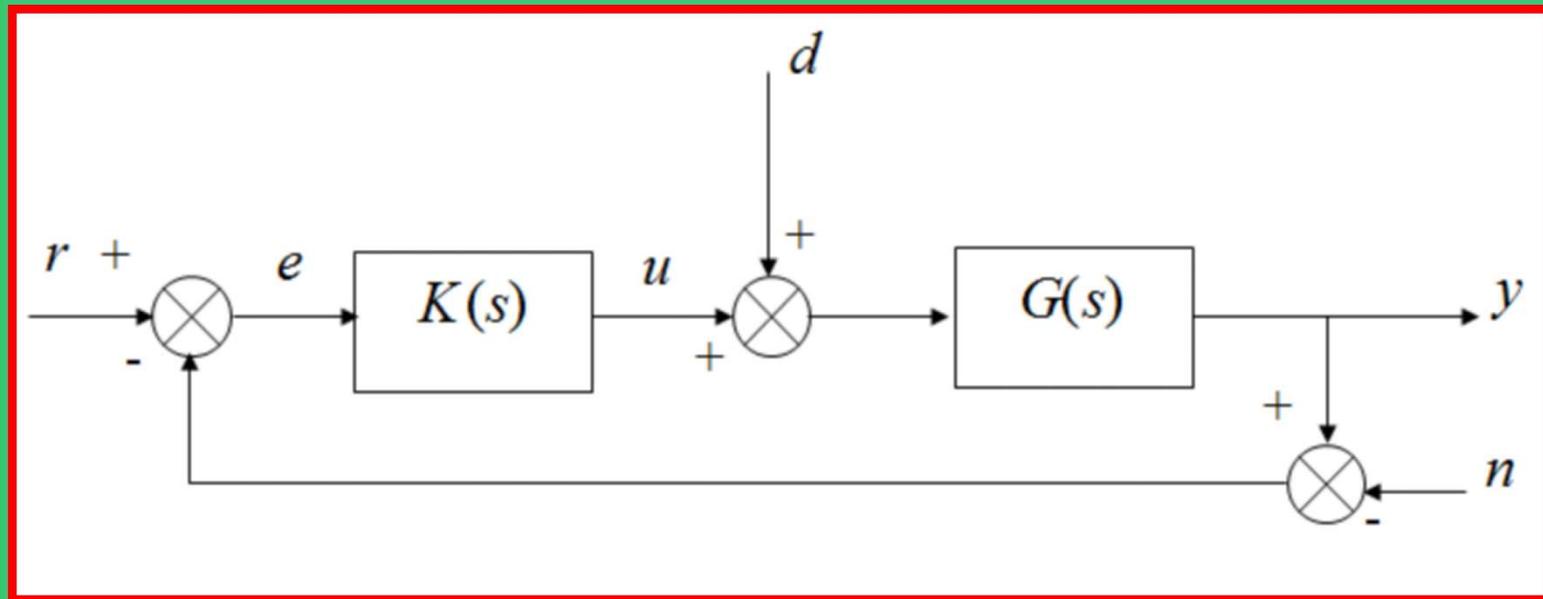
*machine asynchrone*

*Conclusion*

*Notions sur les  
asservissements  
robustes*

# Notions sur les asservissements robustes

## Généralités sur la commande fréquentielle



Boucle d'asservissement

$$L(s) = K(s)G(s)$$

# Notions sur les asservissements robustes

## Généralités sur la commande fréquentielle

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+L(s)}D(s) + \frac{L(s)}{1+L(s)}N(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+L(s)}D(s) + \frac{1}{1+L(s)}N(s)$$

$$U(s) = \frac{K(s)}{1+L(s)}R(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)}D(s) + \frac{K(s)}{1+L(s)}N(s)$$

# *Notions sur les asservissements robustes*

## Généralités sur la commande fréquentielle

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

fonction de sensibilité

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

fonction de sensibilité complémentaire

$$T(s) + S(s) = 1$$

# Notions sur les asservissements robustes

## Généralités sur la commande fréquentielle

### Objectifs:

- ❖ Suivi de trajectoires de référence (consignes)
- ❖ Rejet/atténuation des signaux de perturbation
- ❖ Atténuation des bruits de mesure
- ❖ Commande modérée

# Notions sur les asservissements robustes

## Généralités sur la commande fréquentielle

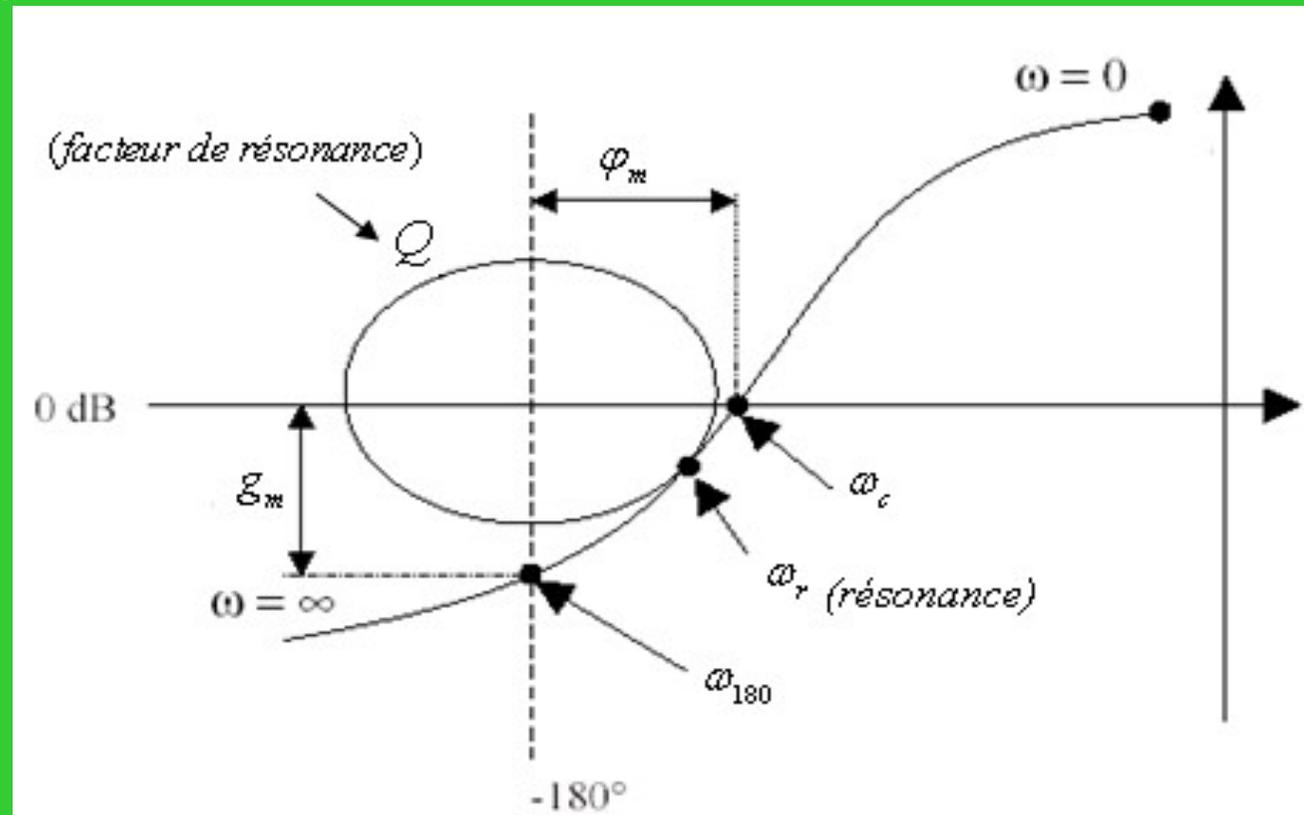
### ❖ La stabilité

Un système est stable si à une entrée bornée il fait correspondre une sortie bornée.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

# Notions sur les asservissements robustes

## ❖ Le degré de stabilité



Marge de gain:

$$g_m = \frac{1}{|L(j\omega_{180})|}$$

Marge de phase:

$$\varphi_m = \pi + \arg(L(j\omega_c))$$

# Notions sur les asservissements robustes

## ❖ Les normes $H_2$ et $H_\infty$ d'un système

norme  $H_2$

Le cas SISO

$$\|G(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le cas MIMO

$$\|G(s)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace} \left( G^*(j\omega)G(j\omega) \right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Notions sur les asservissements robustes

- ❖ Les normes  $H_2$  et  $H_\infty$  d'un système

norme  $H_\infty$

Le cas SISO

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

Le cas MIMO

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega))$$

# Notions sur les asservissements robustes

- ❖ La représentation des incertitudes

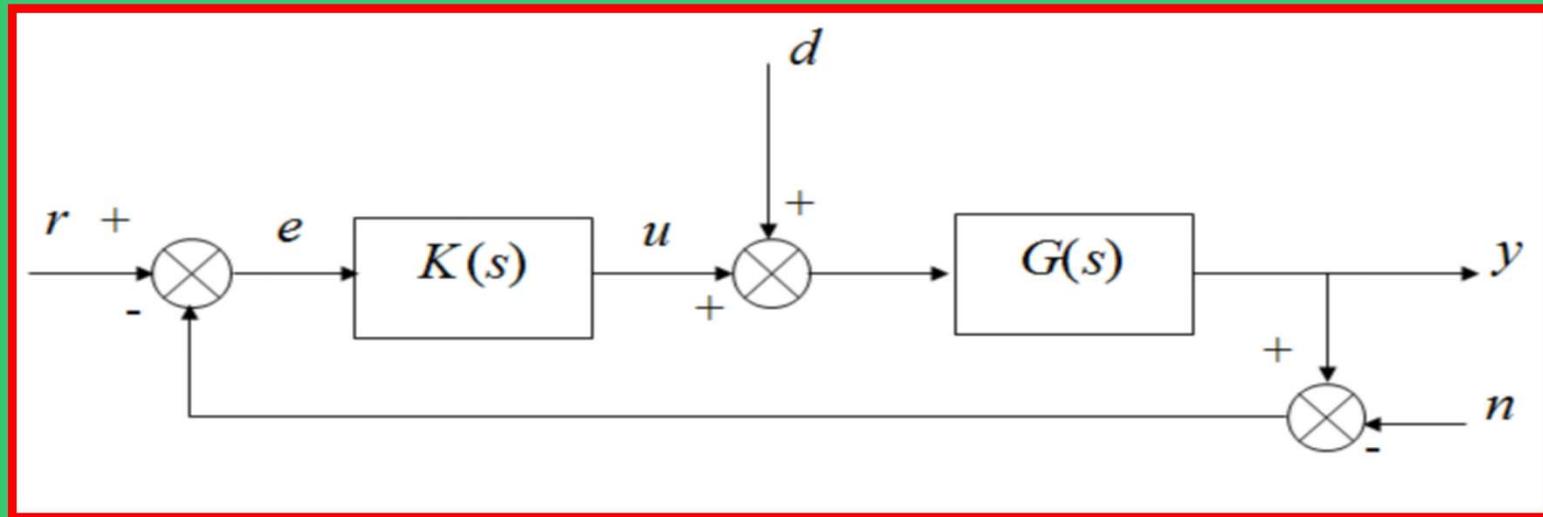
Les incertitudes non structurées

Les incertitudes structurées

# *Commande* $H_\infty$

# Commande $H_\infty$

- ❖ Principes d'optimisation  $H_\infty$



Configuration typique d'un système bouclé

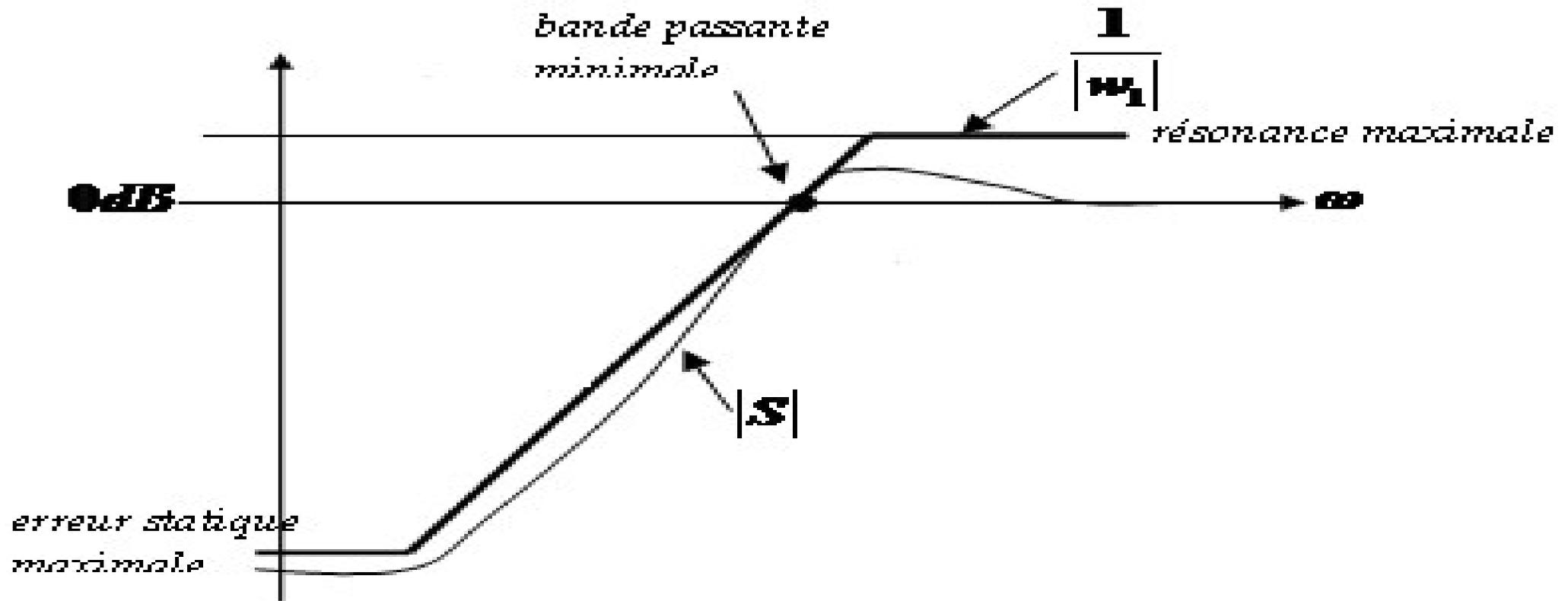
$$y = (I + GK)^{-1} GK r + (I + GK)^{-1} d$$

d'une autre manière

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s)$$

# Commande $H_\infty$

## ❖ Principes d'optimisation $H_\infty$

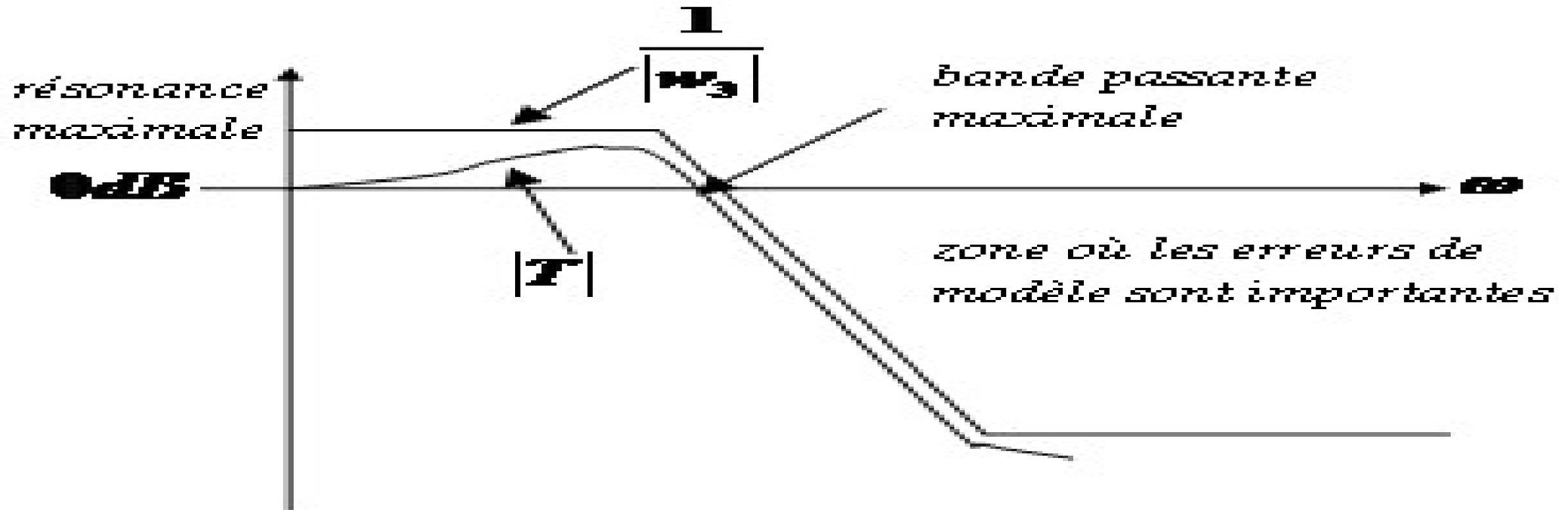


le allures typiques de pondération fréquentielle et de fonctions de sensibilité .

$$\|W_1 S_y\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(w_1(j\omega)S_y(j\omega)) < 1$$

# Commande $H_\infty$

## ❖ Principes d'optimisation $H_\infty$

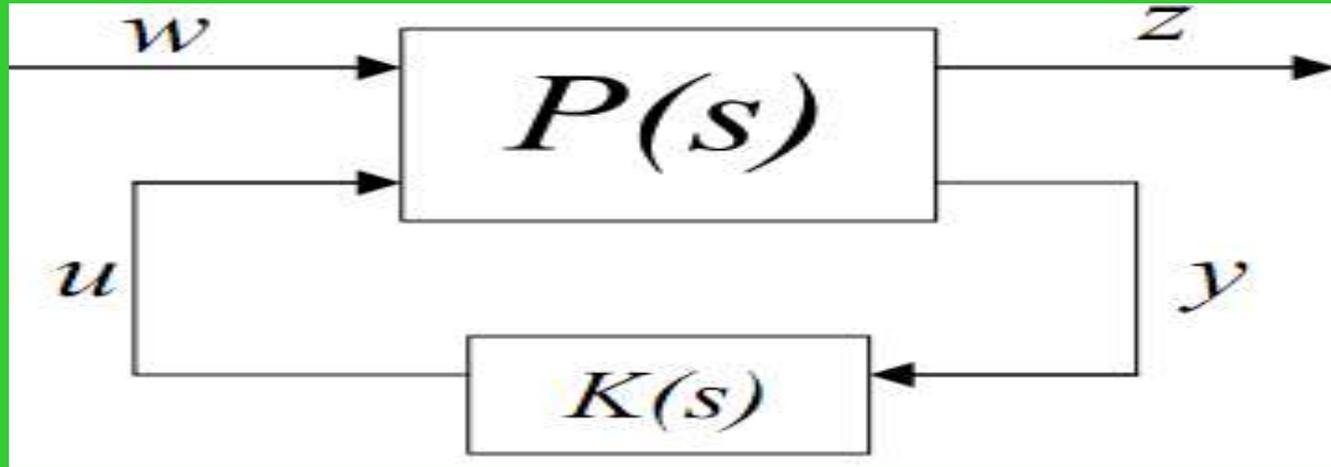


le allures typiques de pondération fréquentielle et de fonctions de sensibilité complémentaire

$$\|W_3 T_y\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \overline{\sigma}(T_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_3(j\omega)|}$$

# Commande $H_\infty$

## ❖ Le problème $H_\infty$ standard



$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

## ❖ en éliminant $u$ et $y$ de ces équations, on obtient :

$$z(s) = F_l(P, K)w(s)$$

$$F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s)$$

# Commande $H_\infty$

## ❖ Le problème $H_\infty$ standard

$P(s)$  et  $\gamma > 0$  étant donnés, trouver  $K(s)$  qui:

- stabilise de manière interne le système boucle

- assure

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

# Commande $H_\infty$

- ❖ Solution du problème standard

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

# Commande $H_\infty$

## ❖ Hypothèses

Pour résoudre ce problème, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites

A1)  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable.

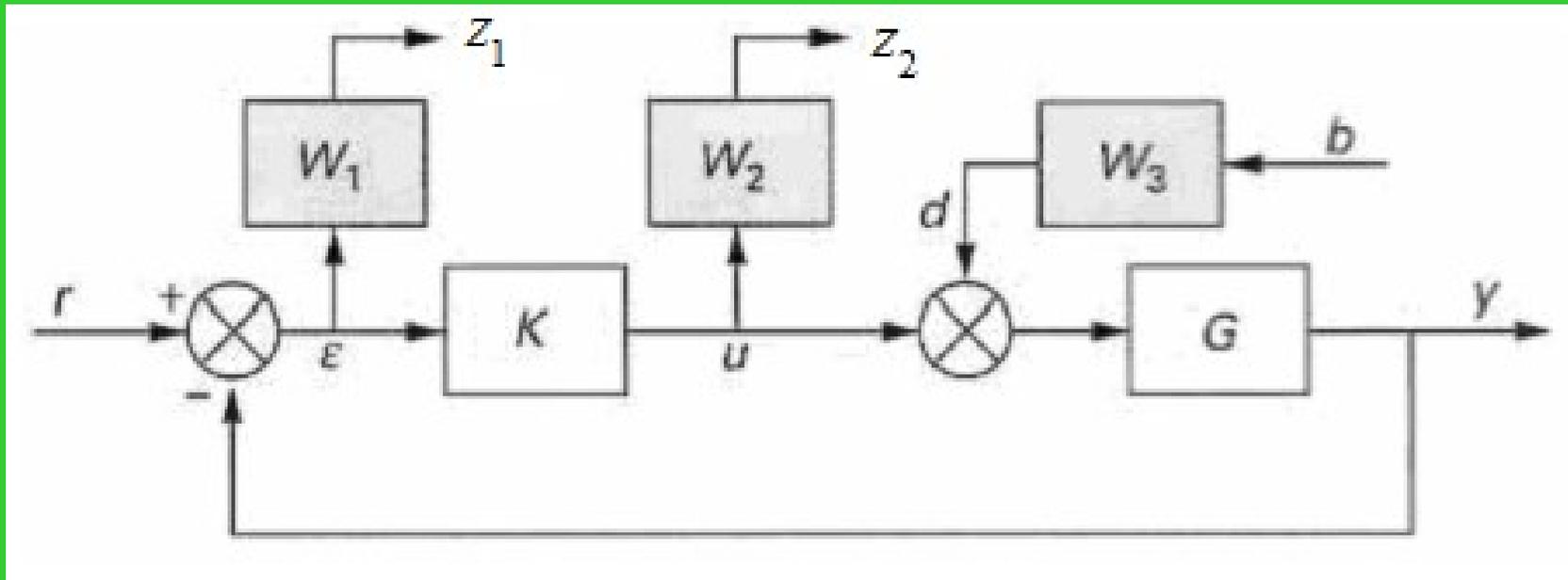
A2)  $\text{rang}(D_{12}) = m_2$  et  $\text{rang}(D_{21}) = p_2$

A3)  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

A4)  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

# Commande $H_\infty$

- ❖ Choix des fonctions de pondérations

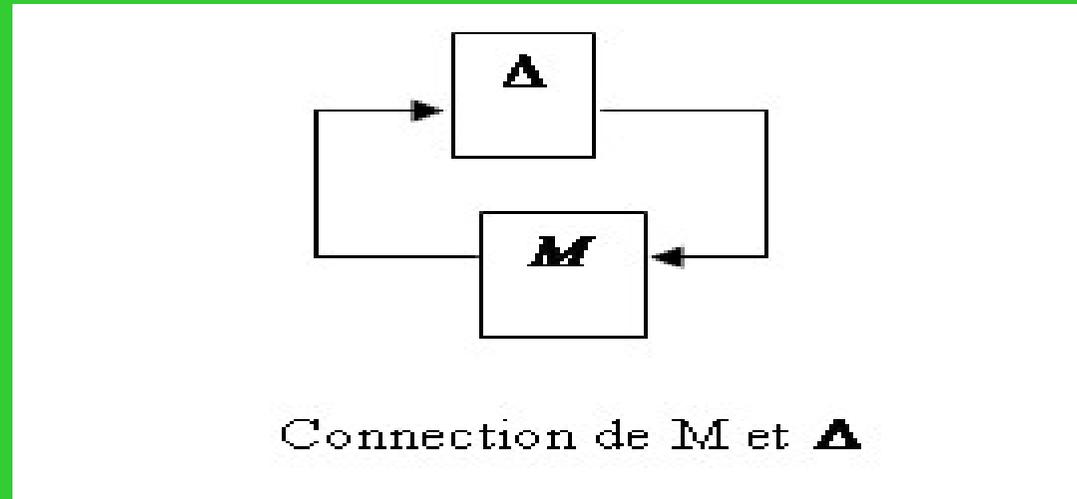


$$\begin{aligned}z_1(s) &= W_1(s)\varepsilon(s) \\z_2(s) &= W_2(s)u(s) \\d(s) &= W_3(s)b(s)\end{aligned}$$

$$\left\| \begin{array}{cc} W_1(s)S(s) & W_1(s)G(s)S(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S(s) & W_2(s)T(s)W_3(s) \end{array} \right\|_\infty < 1$$

# Commande $H_\infty$

- ❖ Le théorème du petit gain et les incertitudes de modèle



$$\|\Delta\|_\infty \leq \beta$$

et

$$\|M\|_\infty \leq 1/\beta$$

# Application à la commande de la machine asynchrone

# Application à la commande de la machine asynchrone

❖ les grandeur à asservir est

vitesse mécanique:

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) = C_{em}(t) - C_r(t)$$

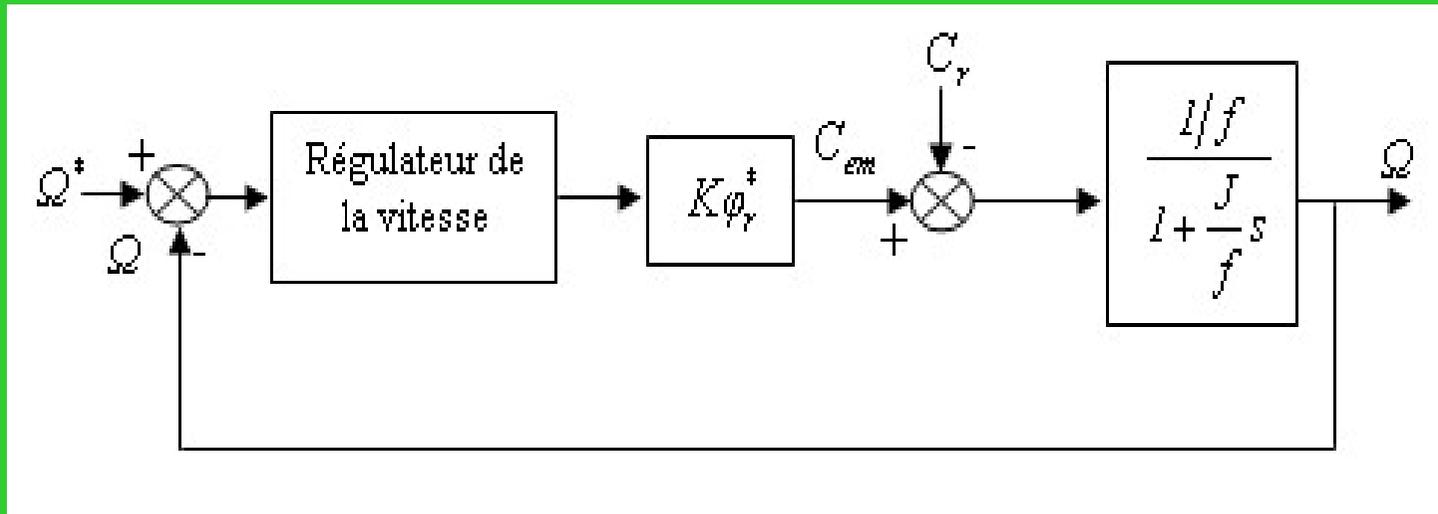
couple électromagnétique:

$$C_{em}(t) = p \frac{L_m}{L_r} (\varphi_{dr}(t) i_{qs}(t) - \varphi_{qr}(t) i_{ds}(t))$$

orientation du flux rotorique:

$$\varphi_{dr}(t) = \varphi_r(t) \quad \text{et} \quad \varphi_{qr}(t) = 0$$

# Application à la commande de la machine asynchrone

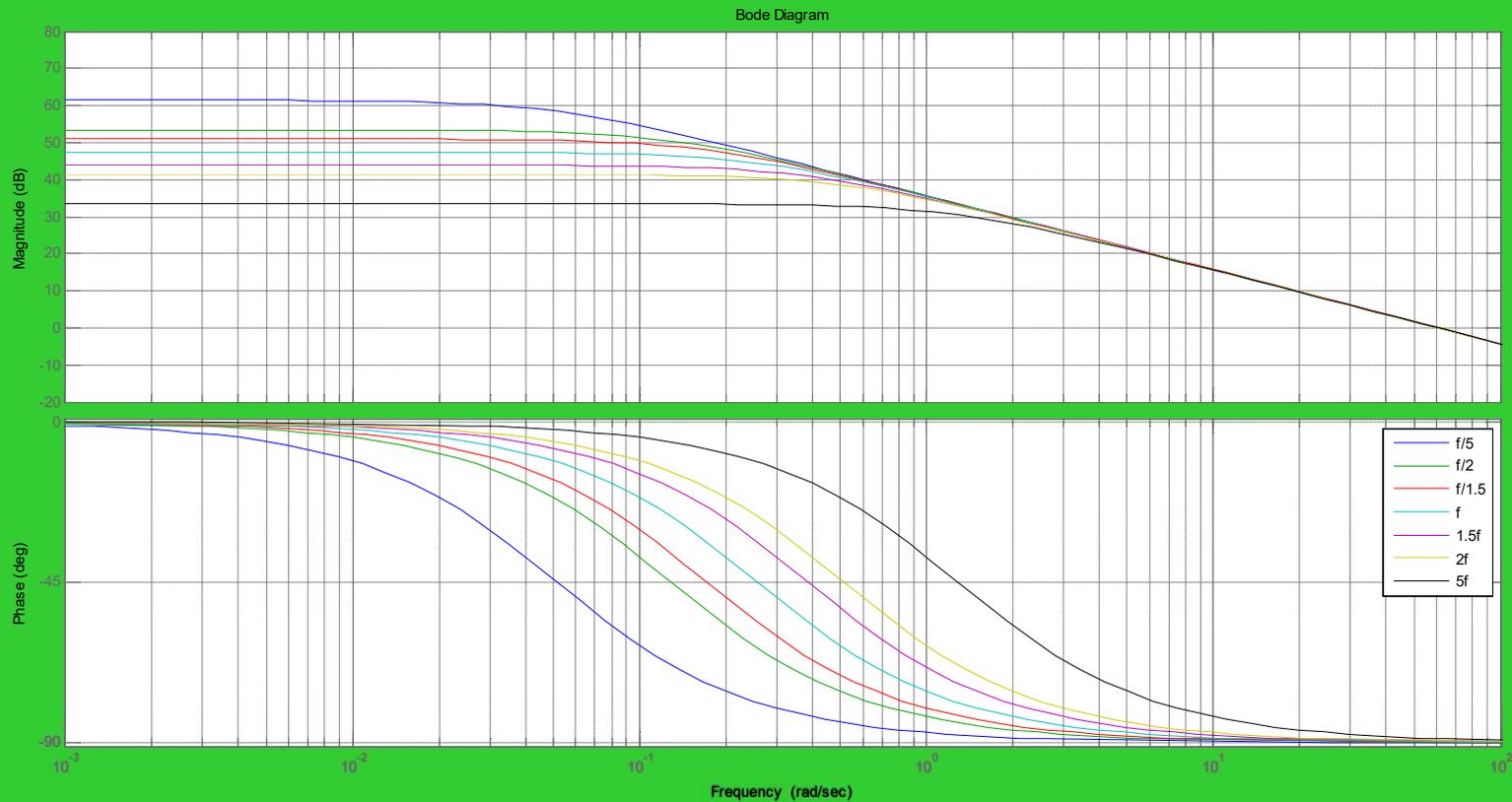


**Boucle de régulation de la vitesse**

**modèle:**

$$G(s) = \frac{K\phi_r^*/f}{1 + \frac{J}{f}s} = \frac{G_s}{1 + Ts} = \frac{235.4}{1 + 3.875s}$$

# Application à la commande de la machine asynchrone



Diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  pour différentes valeurs de  $f$ .

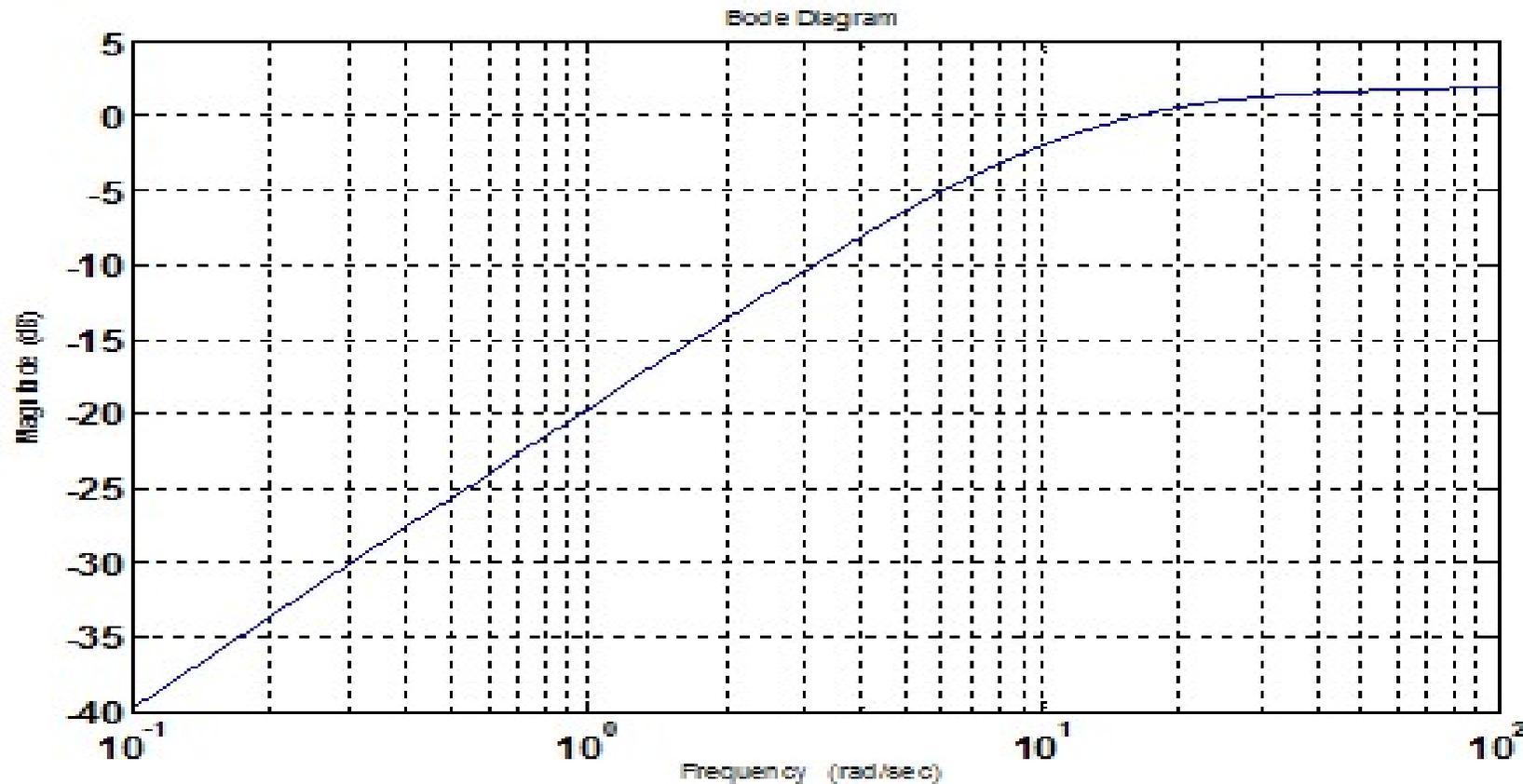
# Application à la commande de la machine asynchrone

Les fonctions de pondération

$$W_1(s) = \frac{8 \times 10^5 s + 9.6 \times 10^6}{10^6 s + 9.6}$$

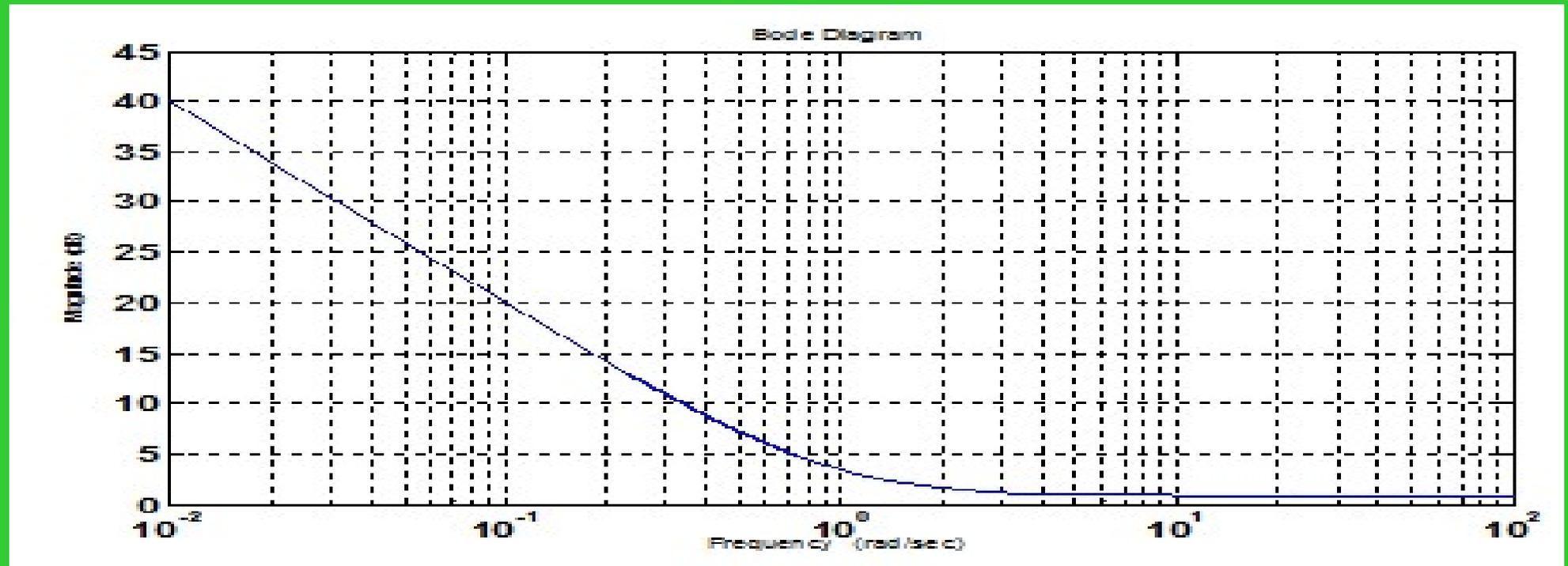
$$W_3(s) = \frac{4.2s}{1 + 4s}$$

# Application à la commande de la machine asynchrone



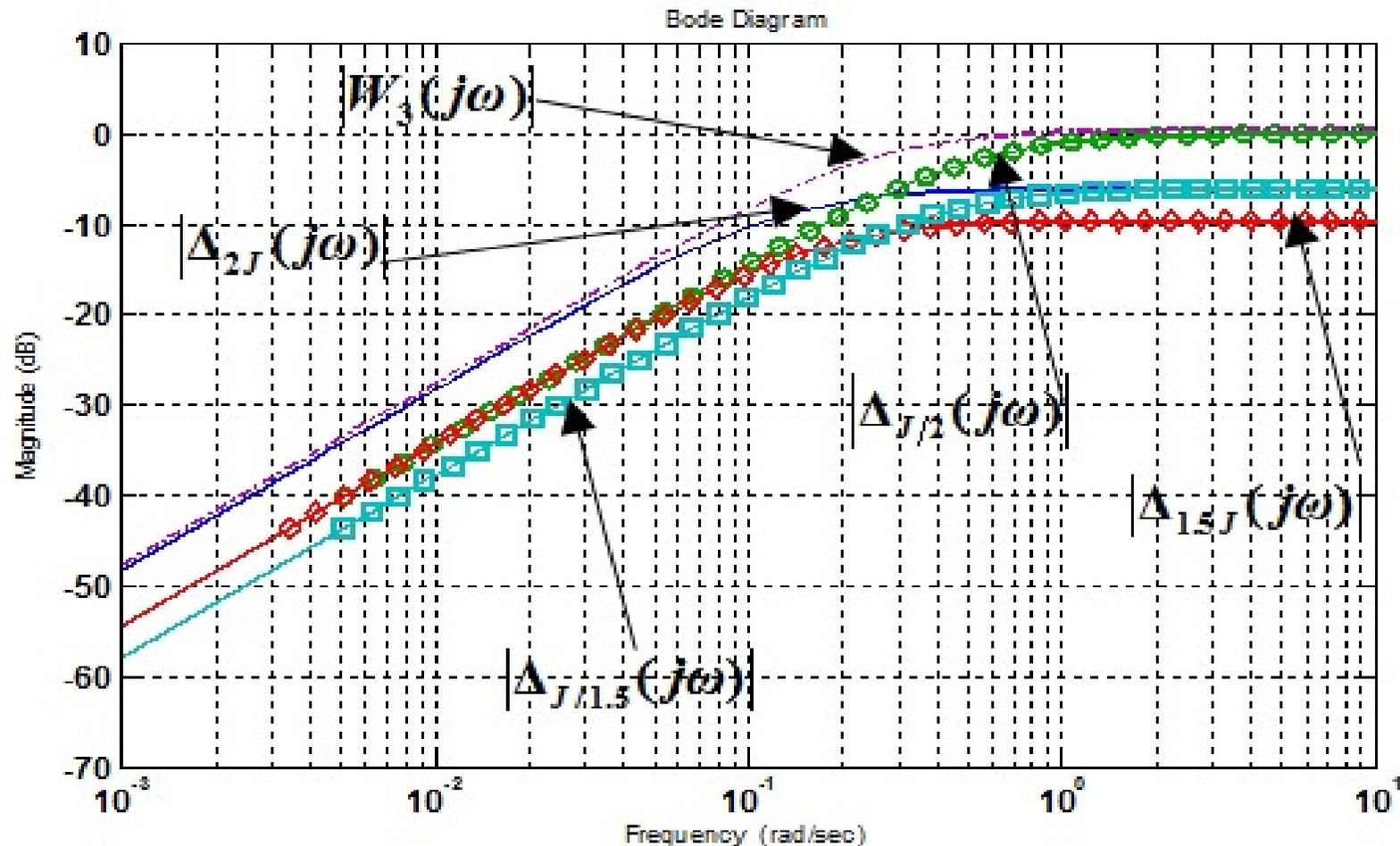
Module de  $1/W_1(j\omega)$

# Application à la commande de la machine asynchrone



Module de  $1/W_3(j\omega)$

# Application à la commande de la machine asynchrone



Modules du  $\Delta(j\omega)$  et  $W_3(j\omega)$

# Application à la commande de la machine asynchrone

Le correcteur est :

$$K(s) = \frac{1817s + 468.9}{s^2 + 6597s + 0.06333}$$

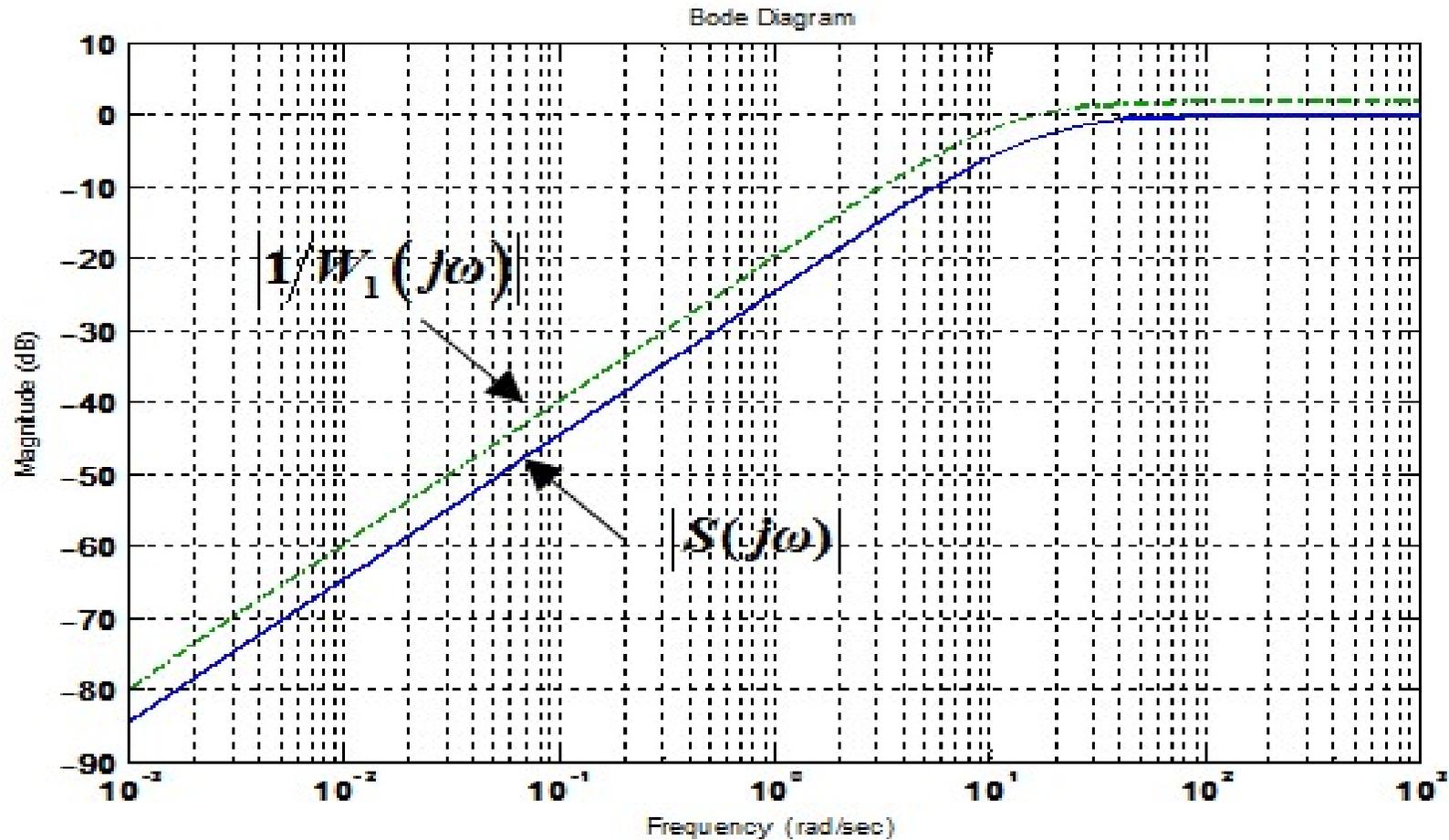
Avec

$$\gamma = 1.1530$$

# Application à la commande de la machine asynchrone

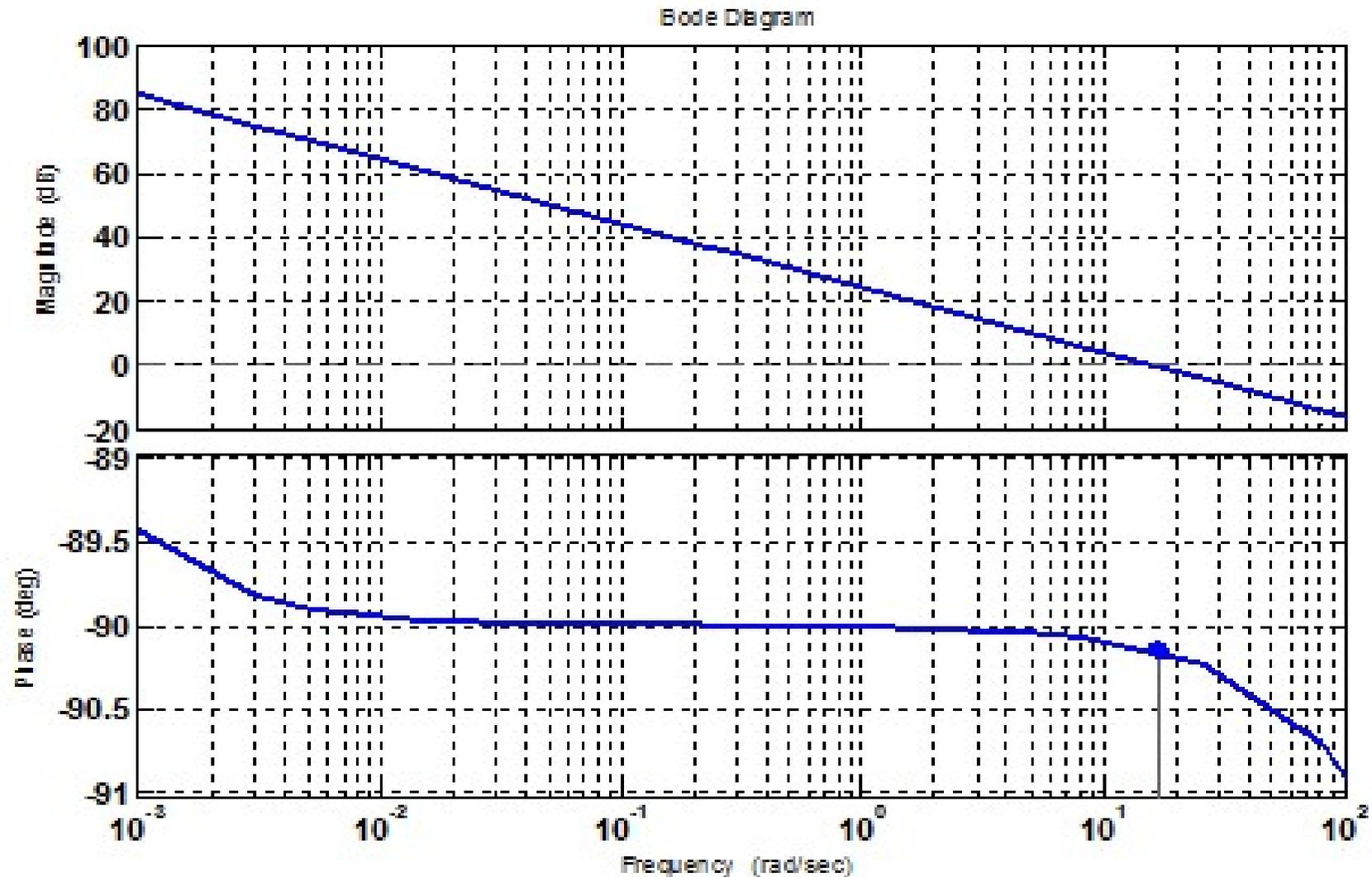
Le marge du module est

$$1/|S| = 0.9980 = M$$



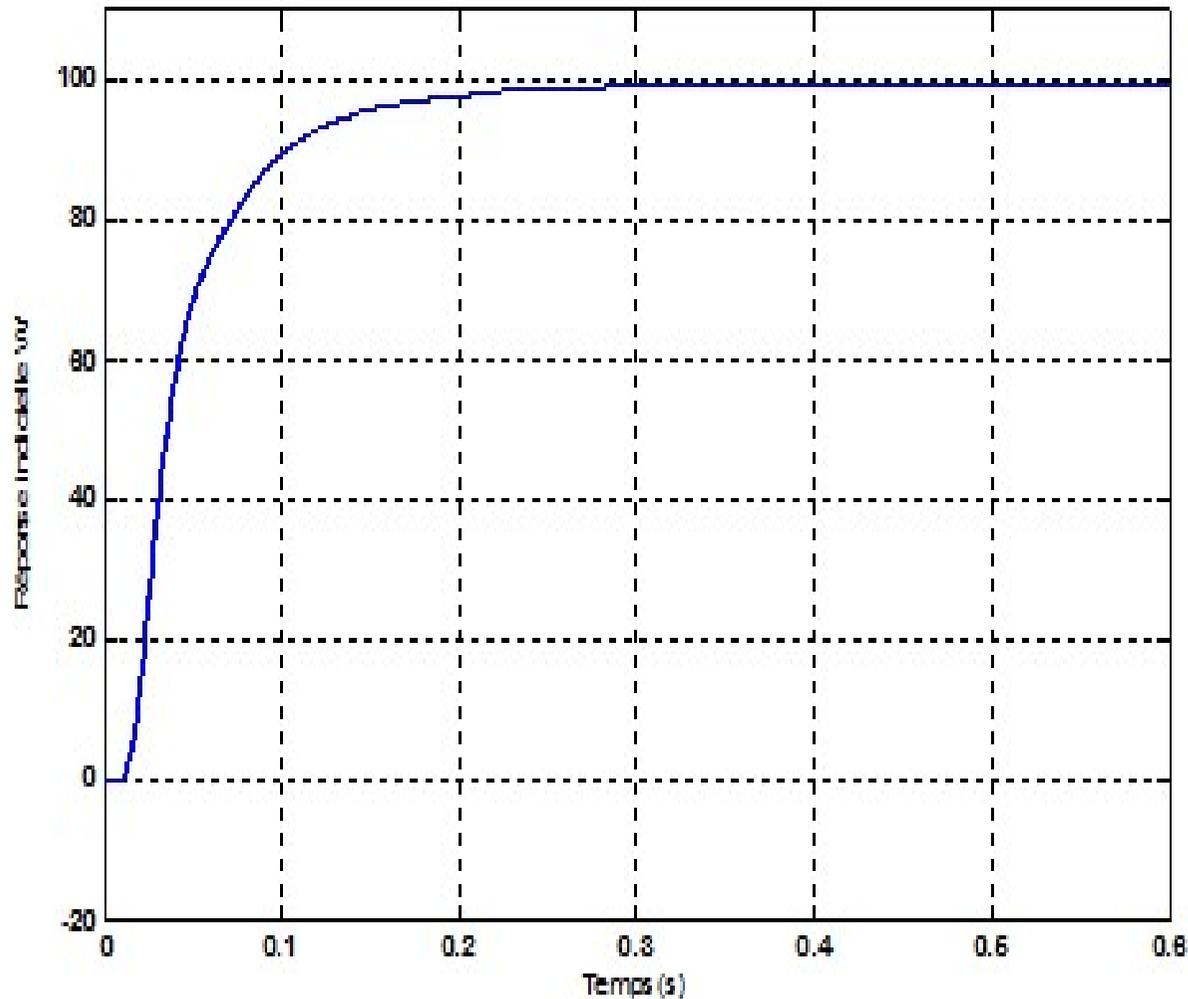
Les modules  $1/W_1(j\omega)$  et  $S(j\omega)$

# Application à la commande de la machine asynchrone



Réponse en fréquences de  $L(s)$

# Application à la commande de la machine asynchrone

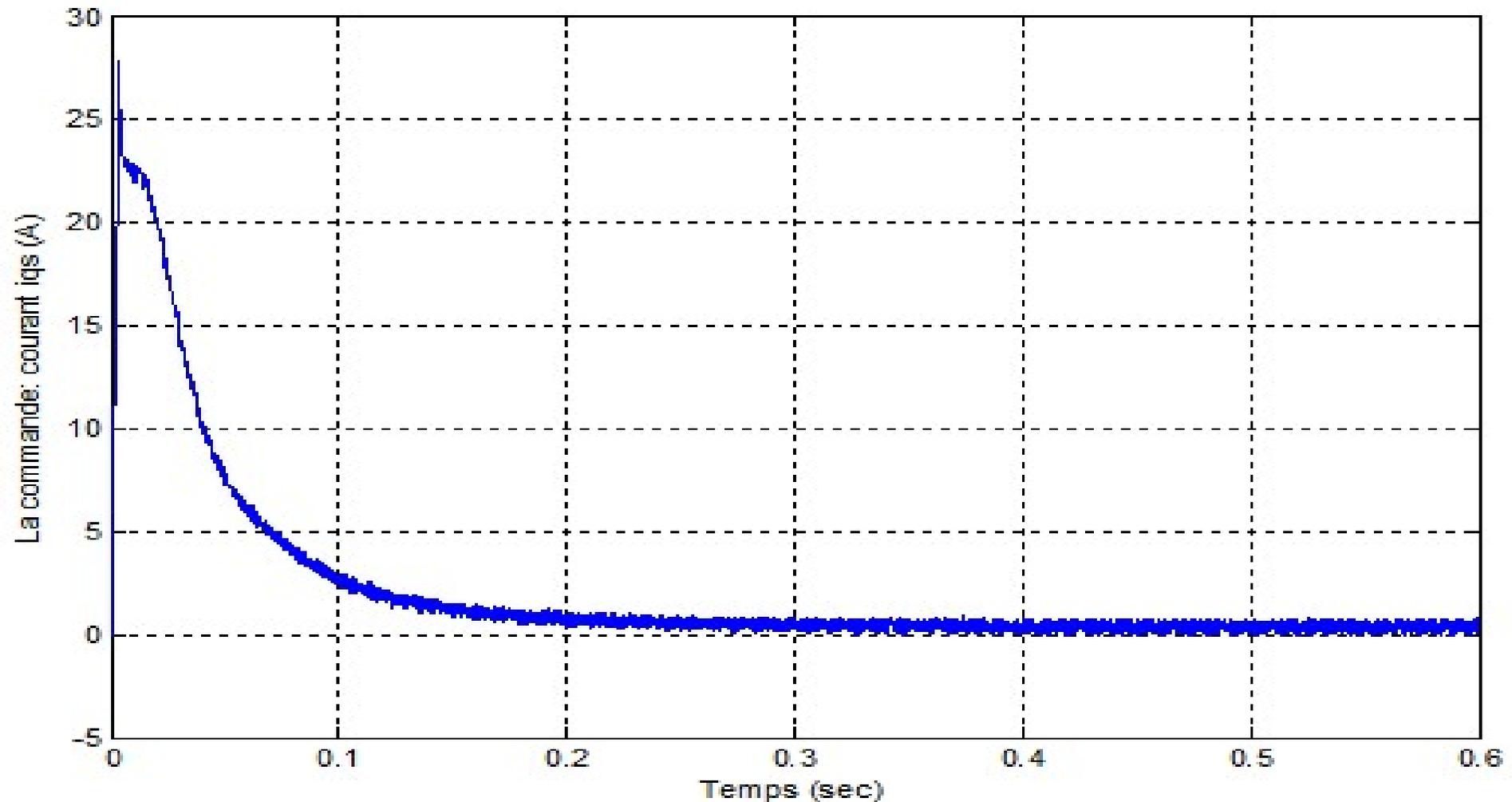


l'erreur statique est  
0.4382%

Temps de réponse  
est 0.4sec

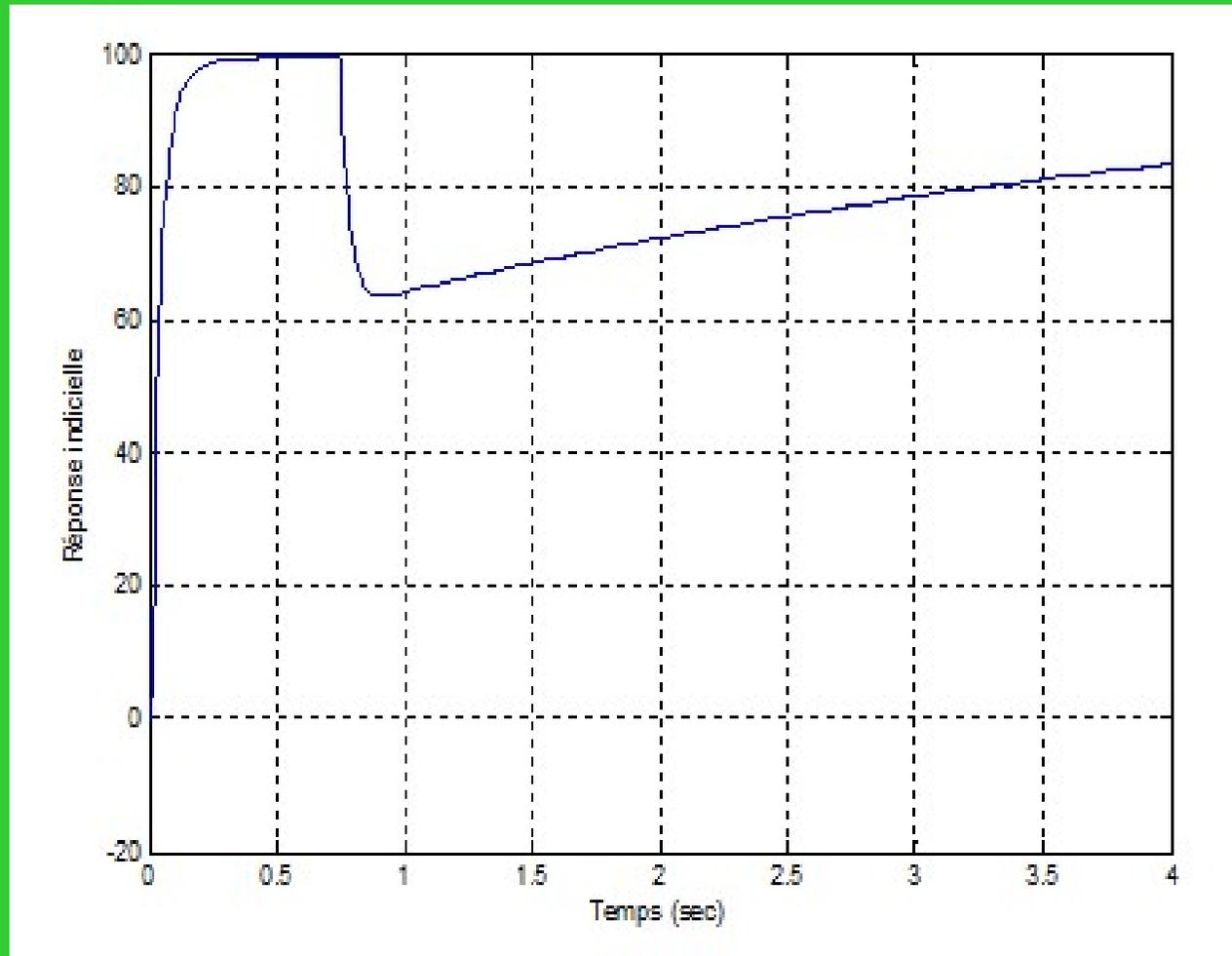
**Réponse indicielle**

# Application à la commande de la machine asynchrone



Signal de commande  $i_{qs}$

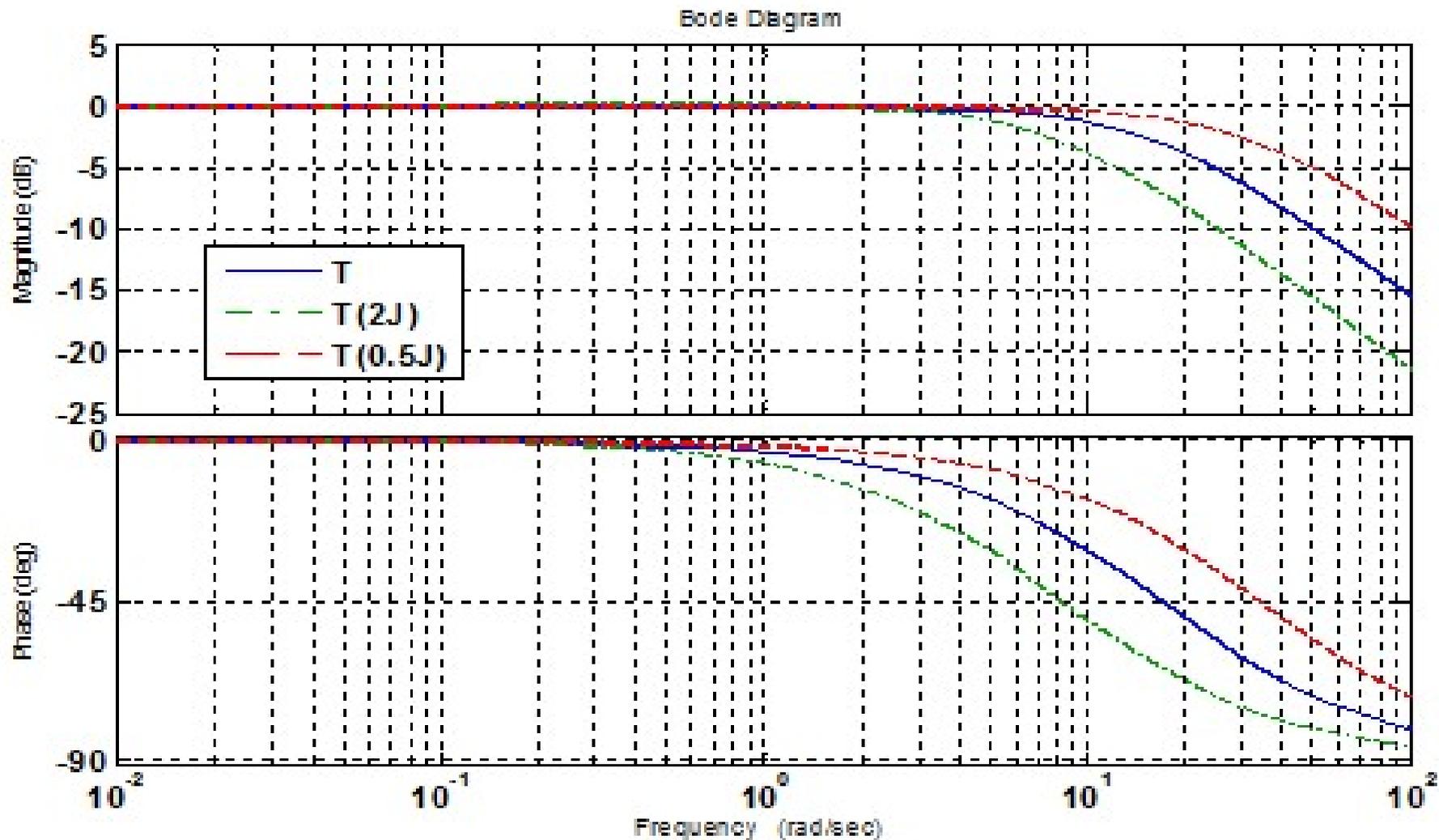
# Application à la commande de la machine asynchrone



Avec  $C_r = 8Nm$  à l'instant  $t=0.75sec$

Réponse indicielle avec perturbation en échelon

# Application à la commande de la machine asynchrone



Diagrammes de Bode des différentes formes de  $T(s)$

# Conclusion

- ❖ Nous avons essayé de la présenter d'une manière simple et claire pour permettre la compréhension de son fonctionnement.
- ❖ La synthèse  $H_\infty$  est bien adaptée pour résoudre ce type de problèmes et maintenir les performances exigées.

**Merci de votre  
attention**

