



UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA 1  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Laboratoire d'Etude et de Recherche  
en Technologie Industrielle

Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du Diplôme de Master en  
Fabrication Mécanique et Productique

Cinématique Inverse d'un Robot sériel dédié au  
Domaine Médical

Proposé et encadré par :

Pr. A. ALLALI

Co.Prmoteur :

Dr.K. SARI

Réalisé par :

K. HADJI

M.S. OTMANE

## ملخص

تهدف الروبوتات الطبية إلى تحسين دقة الإجراء الطبي الجراحي مع الحفاظ على صلاحية الجراح في اتخاذ القرارات والسيطرة على العمل كونه يعتمد على تعاون وثيق بين الجراح والروبوت.

في الآونة الأخيرة ، ظهر أن الروبوتات يمكن أن تلعب دورا هاما في تطوير الجراحة مع بداية استخدام الروبوتات الصناعية المخصصة للاستخدام الطبي. إلى غاية إيجاد حلول لتصميم روبوتات مخصصة للمجالات الطبية يمكن تصنيف الروبوتات وفقا لثلاثة عناصر هيكلها , طريقتهم في الاستبعاد أو وفقا لمجال استخدامها. وعلى هذا النحو نجد : الروبوتات الطبية الجراحة كجراحة الأعصاب , جراحة العظام أو جراحة المناظير . ضف الى ذلك الجراحة عن بعد.

الروبوتات الطبية غير الجراحية و التي تمثل الروبوتات الآلية للموجات فوق الصوتية للتخدير تصنف أولا وفقا لطريقتهم في الاستبعاد إلى 3 أنواع الروبوتات المستقلة أو الشبه مستقلة ذاتيا أو بالإضافة إلى الروبوتات المتحكم بها عن بعد (الاسترشاد عن بعد) .ثانيا وفقا لهيكل الحركة و هي نوعان : الروبوتات الصناعية المخصصة للطب مثل جراحة الأعصاب والعظام وغيرها من الهياكل المكرسة في المجال الطبي ، مثل الجراحات المتحكم فيها عن بعد ليس المراد من الروبوتات الطبية أن تحل محل الطبيب ، بل إن عملها مكمل لعمل شاق أو لإعطاء أفضل دقة ، وخصوصا عندما يتعلق الأمر بإجراء تحقيق لتحديد المواقع من الموجات فوق الصوتية ، ومصدر إشعاعها لتنفيذ مهمة طبية عن بعد.

يستخدم CAD (التصميم بمساعدة الكمبيوتر) ليس فقط لتصميم والتحقق من النماذج في مجال الروبوتات، ولكن أيضا لمحاكاة الحركة، ومسارات، ومقارنة النتائج مع حساب نظري باستخدام Matlab.

يسمح بالتحقق من النتائج التي تم الحصول عليها من قبل البرامج اثنين Solid Works و Matlab2015/toolbox لنا لتعزيز النوعية وتبسيط الضوء على أهمية دراسة نموذج.

## RÉSUMÉ

La robotique médicale vise à améliorer la précision et la reproductibilité du geste médical tout en conservant au chirurgien ses prérogatives en matière de décision et de contrôle de l'action. Elle s'appuie sur une coopération étroite entre le chirurgien et le robot.

Plus récemment, il est apparu que la robotique pouvait jouer un rôle important dans le développement de la chirurgie en commençant par l'utilisation des robots industriels adaptés pour l'utilisation médicale. Jusqu'à trouver des solutions de conception robotique dédiée aux domaines médicaux.

On peut classer les robots selon leur structure, ou leur mode d'asservissement, ou selon leur domaine d'utilisation. Pour ce dernier, on cite deux types :

- La robotique médicale chirurgicale, ainsi que la Neurochirurgie, l'orthopédie, la chirurgie mini-invasive, et la télé-chirurgie.

- La robotique médicale non chirurgicale pour la télééchographie et l'anesthésie robotique.

La classification selon le mode d'asservissement est de 3 types, robot autonome, ou semi-autonome, guidé par l'humain et télé opéré (guidé à distance). Selon la structure cinématique, on distingue deux types : Les robots industriels adaptés pour la médecine, ainsi que la Neurochirurgie et l'orthopédie, d'autres structures sont dédiées au domaine médical, comme chirurgie mini-invasive, la télé opération, et la télémanipulation.

La C.A.O (la conception assistée par ordinateur) est utilisé non seulement pour la conception et la validation des prototypes dans le domaine de la robotique, mais aussi pour la simulation de mouvements, de trajectoires, et la comparaison des résultats avec le calcul théorique en utilisant le logiciel Matlab.

Les résultats obtenus par deux logiciels SolidWorks et Matlab2015/toolbox nous a permis de valoriser qualitativement et mettre en relief la pertinence de modèle étudié.

## ABSTRACT

Medical robotics designed to improve the accuracy and reproducibility of the medical procedure the surgeon while maintaining its prerogatives in decision and control of the action. It relies on close cooperation between the surgeon and the robot.

More recently, it appeared that robotics can play an important role in the development of surgery beginning with the use of industrial robots suitable for medical use. Until solution dedicated to medical robotic. (Until the solution has been dedicated to medical robotic)

Robots can be classified according to their structure or their mode of subjugation, or according to their field of use. For the latter, the two types: medical robotics surgery, such as, the neurosurgery, orthopedics, minimally invasive surgery, and tele-surgery.

The classification according to the servo mode is 3 types, autonomous robot, or semi-autonomous, guided by the human and operated TV (guided remotely). According to the kinematic structure, there are two types: Industrial robots suitable for medicine and neurosurgery and orthopedics, other structures are dedicated to the medical field, such as minimally invasive surgery, the TV operation and remote handling .

CAD (computer aided design) is used not only for the design and validation of prototypes in the field of robotics, but also for motion simulation, trajectories, and comparing the results with the theoretical calculation using Matlab.

The verification of the results obtained by two solid Works software and Matlab2015/toolbox allowed us to qualitatively enhance and highlight the relevance of studying model.

## **REMERCIEMENTS**

*Au terme de ce travail, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce projet et plus particulièrement (ALLAH) le tout puissant et le miséricordieux qui nous a offert le courage pour aboutir ce travail.*

*Nous tenons à remercier notre promoteur ALLALI .A. de nous avoir suggéré, conseillé et dirigé pour mener à bout ce travail et à nos parents pour leurs sacrifices et leurs soutiens.*

*Nos vifs remerciements vont également aux messieurs, Le Président de Jury et les membres du jury un grand remerciement à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant le cycle universitaire.*

*Enfin, que tous nos amis (es) soient assurés de notre profonde gratitude.*

**HADJI et OTMANE.**

## *DEDICACES*

*Allah nous recommande de mieux connaître le mérite et Les valeur qu'on doit apparents.*

*Je dédie mon travail en hommage à tous ceus qui m'ont aidé et soutenu : Ma mère, Mon père, Mes frères ainsi que toute ma famille.*

*Mes dédicaces s'adressent également avec une profonde gratitude à mes professeurs.*

*Mes dédicaces s'adressent aussi et à toutes mes amis.*

*Aussi, mes dédicaces s'adressent à toutes les étudiants de Génie Mécanique.*

*HADJI KHALED.*

## *DEDICACES*

*Allah nous recommande de mieux connaître le mérite et Les valeur qu'on doit apparents.*

*Je dédie mon travail en hommage à tous ceus qui m'ont aidé et soutenu : Ma mère, Mon père, Mes frères ainsi que toute ma famille.*

*Mes dédicaces s'adressent également avec une profonde gratitude à mes professeurs.*

*Mes dédicaces s'adressent aussi et à toutes mes amis.*

*Aussi, mes dédicaces s'adressent à toutes les étudiants de Génie Mécanique.*

*OTMANE MOHAMED SALAH EDDINE.*

# SOMMAIRE

---

REMERCIEMENTS.

DEDICACES.

RÉSUMÉ.

SOMMAIRE.

INDEX DES FIGURES ET DES TABLEAUX.

LISTE DES ABREVIATIONS.

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....1

## **CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES ROBOTS**

I.1 Introduction.....3

I.2. Origine du mot robot.....3

I.3. Histoire de la robotique .....4

I.4. Robot médical.....5

I.5. Histoire de la robotique médicale.....5

I.6. Classification des robots médicaux.....6

I.7. Les secteurs principaux d'application.....12

I.8. Marchés des robots.....12

I.9. Constituants d'un robot.....13

I.10. Boucle de décision.....13

I.11. Architecture des Robots.....14

I.12. Espace de travail.....20

I.13. Conclusion.....21

## **CHAPITRE II : MODELISATION DES ROBOTS MEDICAUX**

II.1. Introduction.....22

II.2. Définition d'un robot manipulateur.....22

II.3. Le système mécanique articulé (S.M.A.).....23

II.4. Organe terminal (O.T.).....23

II.5. Articulation.....23



# SOMMAIRE

---

II.6. Les Chaines Cinématiques.....	25
II.7. Notion sur les Liaisons et les degrés de liberté (d.d.l).....	25
II.8. Modélisation des robots.....	27
II.9. Conclusion.....	36

## **CHAPITRE III : PROBLEME CINEMATIQUE INVERSE**

III.1. Introduction.....	37
III.2. Cinématique inverse.....	37
III.3. Paramètres de Robot Médicale (3R).....	43
III.4. Conception de Robot.....	45
III.5. Calcul de modèle géométrique direct (MGD).....	46
III.6. Modèle géométrique inverse (MGI).....	49
III.7. Model Cinématique direct (MCD).....	52
III.8. Model Cinématique inverse(MCI).....	53
III.9. Modèle dynamique.....	54
III.10. Conclusion.....	57

## **CHAPITRE IV : Simulation et Interprétation des résultats**

IV.1. Introduction.....	58
IV.2 Manipulateur 2-R.....	58
IV.3. Trajectoire de manipulateur 3-R.....	61
IV.4 Conclusion.....	71
CONCLUSION GENERALE.....	72

Références Bibliographiques.

Annexes.

## Index des Figures et des Tableaux

---

<b>Figure I.1</b> : Schéma d'un robot et des liaisons rotoïdes et prismatiques.....	5
<b>Figure I.2</b> : Robot Unimate 1961.....	5
<b>Figure I.3</b> : Premier Robot Da Vinci Avril2011.....	5
<b>Figure I.4</b> : Robot de neurochirurgie (structure série).....	6
<b>Figure I.5</b> : Robot Rob scope (Structure Parallèle).....	6
<b>Figure I.6</b> : Robots chirurgicaux.....	7
<b>Figure I.7</b> : Robot Da Vinci.....	7
<b>Figure I.8</b> : Robot MAKO.....	8
<b>Figure I.9</b> : Robot ROBODOC .....	8
<b>Figure I.10</b> : Opération sur la crâne.....	8
<b>Figure I.11</b> : Robot ROSA.....	9
<b>Figure I.12</b> : Robot de la mini-invasive (Urologie).....	9
<b>Figure I.13</b> : Robot distance .....	10
<b>Figure I.14</b> : Robot MELODY .....	10
<b>Figure I.15</b> : Séance de Rééducation.....	11
<b>Figure I.16</b> : Robot LOKOMAT.....	11
<b>Figure I.17</b> : Répartition par domaine médicale sur une population de 70 robots.....	12
<b>Figure I.18</b> : Situation du Marché Mondiale de la Robotique Industrielle.....	12
<b>Figure I.19</b> : Eléments d'un Robot médicale .....	13
<b>Figure I.20</b> : Schéma représente un système bouclé d'articulation .....	13
<b>Figure I.21</b> : Fauteuil d'aide au diagnostic médical (Check Flash).....	14
<b>Figure I.22</b> : Différents type des Robots.....	15
<b>Figure I.23</b> : Robot a cinématique parallèle.....	15

## Index des Figures et des Tableaux

---

<b>Figure I.24</b> : Exemples d'architectures de robots planaires.....	16
<b>Figure I.25</b> : Manipulateurs à deux degrés de liberté.....	16
<b>Figure I.26</b> : Robot Delta à trois degrés de liberté.....	17
<b>Figure I.27</b> : Robot Delta à quatre degrés de liberté.....	17
<b>Figure I.28</b> : Contraintes de mobilité avec centre de rotation déporté.....	18
<b>Figure I.29</b> : Architecture de type SCARA.....	19
<b>Figure I.30</b> : Exemple d'utilisation d'un Robot a 7 ddl.....	19
<b>Figure I.31</b> : L'espace de travail.....	20
<b>Figure I.32</b> : Relations entre les différents systèmes de coordonnées.....	21
<b>Figure II.1</b> : Structure générale d'un bras manipulateur.....	22
<b>Figure II.2</b> : L'Organe terminal.....	23
<b>Figure II.3</b> : Schéma d'un robot et des liaisons rotoïdes et prismatique.....	24
<b>Figure II.4</b> : Articulation rotoïde.....	24
<b>Figure II.5</b> : Articulation prismatique.....	24
<b>Figure II.6</b> : Chaines cinématiques en boucle ouverte (a, b) et fermée (c).....	25
<b>Figure II.7</b> : Relation entre l'espace articulaire et l'espace des coordonnées cartésiennes de l'effecteur.....	27
<b>Figure II.8</b> : Système de Coordonnées et Paramètres de Denavit-Hartenberg.....	29

## Index des Figures et des Tableaux

---

<b>Figure III.1</b> : Bras manipulateur modifié pour arriver à la position désirée.....	37
<b>Figure III.2</b> : Configuration de bras pour obtenir le positionnement désiré et générée.....	37
<b>Figure III.3</b> : Configuration possible pour obtenir les ongles.....	38
<b>Figure III.4</b> : manipulateur plane 2-R.....	40
<b>Figure III.5</b> : Commandement de robot radiographie (orthopédie).....	43
<b>Figure III.6</b> : Colonne vertébrale.....	43
<b>Figure III.7</b> : Scanner SOMATOM.....	44
<b>Figure III.8</b> : Pièces de robot avant assemblage.....	45
<b>Figure III.9</b> : Vue d'ensemble du robot.....	45
<b>Figure III.10</b> : Angle formé par SOMATOM.....	49
<b>Figure III.11</b> : Schéma de variation d'angle.....	49
<b>Figure IV.1</b> Génération de trajectoire.....	58
<b>Figure IV.2.</b> Solution 1.....	59
<b>Figure IV.3.</b> Solution 2.....	59
<b>Figure IV.4.</b> Solution 3.....	60
<b>Figure IV.5.</b> Solution 4.....	60
<b>Figure IV.6</b> Le robot en position initiale.....	61
<b>Figure IV.7</b> Le robot en position a.....	61
<b>Figure IV.8</b> Le robot en position b.....	61
<b>Figure IV.9.</b> Rotation de $\theta$ .....	63
<b>Figure IV.10.</b> Variation de vitesse angulaire.....	63
<b>Figure IV.11</b> Variation d'accélération angulaire.....	64

## Index des Figures et des Tableaux

---

<b>Figure IV.12.</b> Variation des vecteurs position.....	64
<b>Figure IV.13.</b> Variation des vecteurs vitesse.....	65
<b>Figure IV.14.</b> Variation des vecteurs accélérations linéaires.....	65
<b>Figure IV.15</b> Variation de P.....	66
<b>Figure IV.16</b> graphe de K.....	66
<b>Figure IV.17</b> graphe de V.....	67
<b>Figure IV.18</b> graphe de Lagrange.....	67
<b>Tableau II.1</b> Rappel sur les liaisons simples.....	26
<b>Tableau III.1.</b> Paramètres de DH de Robot 2-R.....	40
<b>Tableau III.2</b> paramètres du robot 3-R.....	44
<b>Tableau III.3</b> des paramètres géométriques (D-H).....	46
<b>Tableau IV.1</b> Solutions Cinématiques Inverses.....	59
<b>Tableau IV .2.</b> Variation des coordonnées opérationnelles et articulées.....	62

## Liste des Abréviations

---

ISO : International Organization for Standardization.

DDL: Degré de liberté.

S.M.A : système mécanique articulé.

O.T : Organe terminal.

R : Rotoïde.

P : Prismatique.

M.G.D :Modèle géométrique direct.

D-H : Denavit-Hartenberg.

MGI : Modèle géométrique inverse.

MCD : Modèle cinématique directe.

MCI : Modèle cinématique inverse.

$\Gamma_i$  : Forces généralisées non conservatives.

### Introduction Générale

L'homme a toujours souhaité se libérer du travail dans ce qu'il a d'astreignant, de fatiguant et d'inintéressant. Les progrès que connues les technologies depuis un demi-siècle sont à même de répondre en bonne partie à son désir par l'intermédiaire de deux outils génériques, l'ordinateur pour les travaux mentaux et le robot pour les travaux physiques. Le premier a pris une certaine avance sur le second grâce à la découverte des semi-conducteurs, ces matériaux solides qui peuvent trier des informations sans mobilité mécanique. Le second est toujours tributaire de la vieille mécanique aux pièces fragiles, mobiles et au coût significatif.

Malgré son aspect récent, la robotique tire ses origines des civilisations les plus antiques. Il est peut-être même vrai que toutes les autres sciences ont existées juste pour permettre à la robotique de se développer, afin d'aider l'homme à créer cet « esclave » qui appliquera ses ordres au doigt, à l'œil et qui libérera à vie le travail.

Un système robotique est une machine mécatronique programmable disposant de moyens de perception, d'interprétation et d'action qui lui permettent d'agir sur un environnement physique. Il concerne plus particulièrement la robotique manufacturière, c'est-à-dire les robots manipulateurs destinés à des tâches de soudure, de serrage, découpage, d'assemblage, de manutention et d'emballage de conditionnement. L'objectif est de fournir un ensemble minimal de connaissances pour comprendre le fonctionnement d'un robot industriel de son comportement et son implantation.

Les robots industriels sont des systèmes automatisés qui sont commandés par un ordinateur comme partie intégrante de leur chaîne d'asservissement. Ils sont en général de type sériel et leur structure mobile étant une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un seul degré de liberté, pouvant se substituer à l'homme pour effectuer certaines opérations est capable d'en modifier d'elle-même le cycle en appréhendant son environnement.

Un des objets de base en robotique est de pouvoir déplacer des objets selon des trajectoires prescrites. Dans le but de réduire les volumes et de diminuer les masses des corps en mouvement, certains robots comportent une ou plusieurs boucles fermées formant chacune un polygone articulé.

Parmi les applications que nous mentionnons, il y a les robots utilisés dans de nombreux domaines, notamment celui de la médecine.

Le domaine médical est devenu aujourd'hui un des enjeux principaux des marchés économiques mondiaux. En effet, contrairement aux êtres humains ces systèmes automatiques peuvent répéter inlassablement des mouvements de façon précise, rapide et sans fatigue. En soulageant ainsi l'être humain de tâches répétitives en lui permettant de dépenser son énergie sur d'autres tâches plus importantes. C'est pourquoi naturellement les tâches nécessitant de la précision géométrique.

Le but n'est donc pas de remplacer l'être humain et d'éliminer des opportunités de travail, mais plutôt de l'aider dans ses tâches. Ainsi avec l'importante croissance de ces systèmes, la course à l'automatisation est devenue tellement rapide qu'il est impossible de citer toutes les applications possibles.

Le but de ce travail est la modélisation et la planification d'une trajectoire de mouvement d'un robot médical, Une conception a été simulée en utilisant deux logiciels MATLAB et SolidWorks.

Notre travail s'inscrit dans ce cadre et a pour but de présenter une étude globale d'un modèle de robot tout en partant de son schéma cinématique et en faisant sa modélisation géométrique, cinématique, dynamique, et la simulation.

Ce mémoire commence par une introduction générale et s'articule autour de quatre chapitres :

**Le chapitre 1 :** L'origine et l'historique de la robotique médicale et résume toutes les notions nécessaires à la compréhension du domaine de la robotique «**Définition d'un robot, Composition d'un robot ...** » ainsi que quelques notions sur les différentes architectures utilisés.

**Le chapitre 2 :** Modélisation cinématique et dynamique et géométrique d'un bras manipulateur:

La modélisation de robot médical de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate, Une description de leur morphologie et de plusieurs méthodes.

Calcul du modèle géométrique directe et inverse (MGD et MGI).

Modèle Cinématique directe et inverse (MCD et MCI).

**Le chapitre 3 :** Problème cinématique inverse ainsi la conception et l'étude de notre robot

**Le chapitre 4 :** Simulation et interprétation des résultats et il se termine par une conclusion générale.



## **I.1. Introduction**

La robotique est considérée comme un des grands axes de progrès scientifiques et techniques. Elle consiste à l'automatisation de nombreux secteurs de l'activité humaine par exemple, d'augmenter la productivité dans les entreprises, de stimuler la compétitivité entre eux et surtout pour pouvoir travailler dans des zones à haut risques (espace, démantèlement nucléaire,...etc.).

Le secteur d'activité des systèmes robotiques s'est élargi de façon importante particulière dans le domaine médical.

Le robot médical doit avoir de bonnes capacités de parcourabilité et de manipulabilité dans son espace de travail obligatoire. Pour le suivi du geste médical, Les structures se sont développées, diversifiées pour répondre aux besoins et contraintes importantes du domaine médical, d'où ils sont largement répondus dans le milieu industriel.

Dans ce chapitre nous donnons un bref historique sur l'évolution de la robotique médicale, on propose les définitions et les notions nécessaires à l'étude des robots d'une manière générale, leur classification et les différentes architectures utilisées.

## **I.2. Origine du mot robot**

Le terme de « robot » est dérivé du Tchèque robota (travail), est apparu pour la première fois en 1920 dans la pièce de théâtre de Karel Capek dans laquelle un androïde conçu par un savant était capable d'accomplir tous les travaux. [1]

### **I.2.1. Définition d'un robot**

Appareil automatique capable de manipuler des objets ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe, modifiable ou adaptable. [2]

Etant donné les développements rapides de la robotique, Nous nous contentons de citer la définition de la norme ISO et celle la fédération internationale de la robotique.

La norme ISO 8373 robots et composants robotiques définient le robot comme étant « Un mécanisme programmable actionné sur au moins deux axes avec un degré d'autonomie, se déplaçant dans son environnement pour exécuter des tâches prévues.»

Le Federation international de la robotique définit le robot comme étant « A robot is an actuated mechanism programmable in two or more axes with a degree of autonomy, moving within its environment to perform intended tasks ».

### **I.2.2. Définition de la robotique**

La branche de la technologie qui traite la conception, la construction, l'exploitation et l'application des robots. [3]

La robotique est une activité multidisciplinaire visant l'étude de la conception et la construction de robots ou plus simplement de machines automatiques. Sa pratique réunit des savoir-faire des techniques, des connaissances scientifiques dans les domaines de l'électronique, de l'informatique et de la mécanique.

### **I.3. Histoire de la robotique**

De l'Homme préhistorique qui s'empessa d'inventer des extensions technologiques de ses membres afin de faciliter son travail.

Un des rêves essentiels de l'homme est de créer une machine intelligente à son image. Ce rêve fait désormais partie de la réalité frappante de notre monde.

- Seconde Guerre Mondiale: développement des servomécanismes.
- Années 1950 : Développement de manipulateurs « maître-esclave ».

Contrôlés à distance pour manipuler des substances radioactives.

- 1956: C. Devol introduit un brevet délivré en 1961 intitulé «Dispositif articulé programmé du transfert».
- 1961: Les travaux de Devol et d'Engelberger conduisent au premier robot industriel construit par la société Unimation Inc. Le point clé du système est d'utiliser un ordinateur en conjonction avec un manipulateur.
- Unimation Inc. délivre 66 machines entre 1966 et 1971.
- 1968-1969: Début de recherches intensives sur les robots contrôlés par ordinateur, par exemple au MIT (Boston arm) et à San Francisco (Stanford arm).
- 1971: Création de la JIRA au Japon.
- 1975: Création de la RIA aux USA.
- 1974: Joe Engelberger prévoit un chiffre d'affaires de 3 milliards de \$ en robotique.
- 1990: Prévisions réalisées, mais ... 70% du marché est contrôlé par le Japon.

Les progrès en sciences cognitives et ceux réalisés dans la compréhension du vivant ouvrent également la porte à de nouvelles avancées sur les capacités d'apprentissage et d'intelligence d'entités artificielles, Ces applications de la robotique de service sont très larges car elles peuvent couvrir des domaines très variés du monde professionnel (agriculture, médical, nettoyage.) et du monde grand public (jeux, éducation). [4]

#### I.4. Robot médical

Le robot porte-instrument est un type de robot médical qu'il s'agisse d'une aiguille, d'une sonde ou d'un endoscope, l'idée de ce genre de robots est d'aider le praticien pour une opération en portant l'instrument à sa place. C'est d'ailleurs à l'aide d'un robot industriel anthropomorphe (**Fig. I.1**) que la première application chirurgicale robotisée a eu lieu en 1985 pour effectuer une opération de neurochirurgie.

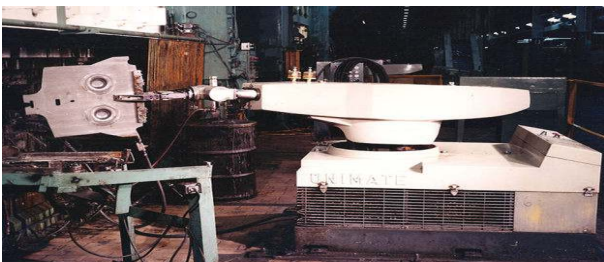


**Figure I.1** Robot anthropomorphe médicale.

#### I.5. Histoire de la robotique médicale

Après la robotique industrielle et la robotique d'intervention, une troisième orientation est apparue avec les progrès en miniaturisation, microélectronique et micromécanique et les nouvelles capacités des systèmes de traitement de l'information et de communication qui ont créé les conditions technologiques favorables au développement de robots.

- 1970 La robotique médicale est une technologie nouvelle qui a apparue à la fin des années, les premiers robots médocochirurgicaux qui ont été évalué.
- En 1978 la société Unimation a développé le robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly). [5]
- A la fin des années 1980 étaient principalement conçus et adaptés aux besoins médicaux particuliers. Les structures se sont développées et diversifiées pour répondre aux besoins et contrainte importante du domaine médicale, d'où ils sont largement répondues dans le milieu industriel.
- Aujourd'hui et futur : Systèmes robotiques de la troisième génération : Robots spécialement conçus pour de nouveaux gestes médicaux chirurgicaux difficiles à réaliser autrement.



**Figure I.2** Robot Unimate 1961.



**Figure I.3** Robot Da Vinci Avril 2011.

## I.6. Classification des robots médicaux

Le robot que le chirurgien utilise aujourd'hui pour opérer n'est bien sûr pas autonome. Son contrôle est néanmoins déporté : les commandes sont transmises au robot, non plus par l'intermédiaire de quelques pantographes mécaniques, mais par l'intermédiaire d'une « armoire de commande » effectuant des traitements numériques capables de transformer les mouvements du chirurgien en consignes à appliquer sur les moteurs du robot et les instruments de chirurgie qui l'équipent.

### a. Les structures Séries

Il permet de positionner très précisément l'instrument chirurgical. Ce robot a une particularité puisqu'il est stéréotaxique : c'est-à-dire qu'il se positionne par rapport à un casque fixé sur le patient, en l'occurrence ici, son crâne. [6]

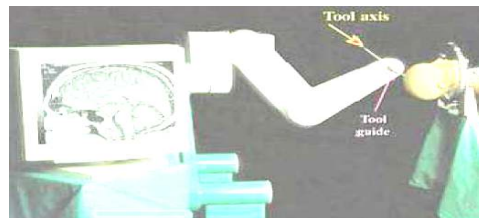


Figure I.4 Robot de neurochirurgie (structure série).

### b. Les structures parallèles :

Cette architecture cinématique est peu commune en robotique médicale, due à son faible espace de travail. Les robots parallèles ont de nombreuses applications lorsqu'il est nécessaire d'obtenir simultanément une bonne précision absolue et une rigidité suffisante.



Figure I.5 Robot Rob scope (Structure Parallèle).

### I.6.1. Robot chirurgical

Les robots chirurgicaux permettent aujourd'hui des gestes opératoires plus précis, donc permettent d'éviter des conséquences ou séquelles dangereuse pour le patient.

Aujourd'hui la mode est aux robots chirurgicaux, en effet ils sont de en plus en plus dans les hôpitaux. Leurs applications sont déjà nombreuses et ont permis d'importantes avancées.



**Figure I.6** Robots chirurgicaux.

#### I.6.1.1. Les Robots télémanipulateurs

Un télémanipulateur est un bras robotisé commandé à distance par un opérateur qui, posté derrière un vitrage de protection ou un écran de contrôle, peut travailler sur des produits radioactifs tout en restant à l'abri des rayonnements.

Da Vinci est composé d'une console pour le chirurgien, d'un bras chirurgical multi-effecteur et de différent outil. Les images sont perçues en 3D, Le chirurgien est assis à la console et par l'intermédiaire d'une interface il manipule les outils. [7]



**Figure I.7** Robot DaVinci.

### I.6.1.2. Les Robots d'orthopédie

Dans cette spécialité, le chirurgien utilise des outils pour scier, percer et fraiser. l'arthroplastie (réfection chirurgicale d'une articulation) du genou par mise en place d'une prothèse nécessite la découpe du tibia et du fémur selon plusieurs plans.

Les premiers robots pour l'orthopédie sont des robots industriels modifiés pour répondre à l'application médicale. En 1991, le robot ROBODOC, est conçu avec une architecture industrielle de type SCARA.

Le robot chirurgical MAKO est spécialisé dans la chirurgie orthopédique et composé d'une base mobile et d'un système optique utilisé pour recalibrer le robot sur les os.

Le chirurgien comanipule le robot (à droite de l'image), avec une main placée sur l'instrument et une sur un corps intermédiaire. Cette seconde main peut servir à reconfigurer le robot sans bouger l'instrument, bénéficiant en cela de la redondance cinématique du robot. [7]



Figure I.8 Robot MAKO.

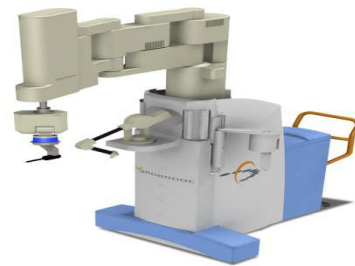


Figure I.9 Robot ROBODOC.

### I.6.1.3. Les Robots de la Neurochirurgie

Spécialisation de la chirurgie qui se consacre au diagnostic et aux opérations des maladies du système et des centres nerveux (par exemple une tumeur cérébrale).

Pointage laser sur le visage de la patiente avec le robot de stéréotaxie par le chirurgien pour mise en corrélation des trajectoires du robot avec la patiente.

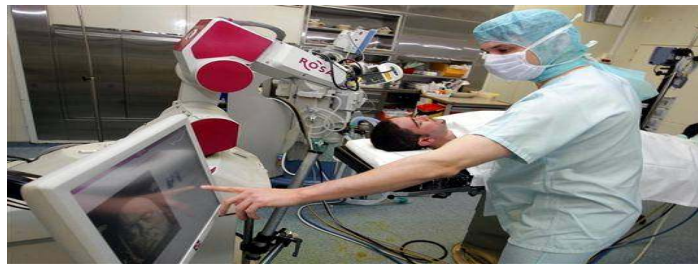


Figure I.10 Opération sur la crâne.



Le dispositif ROSA 'Brain' présente plusieurs caractéristiques techniques comme le bras robotisé permettant une grande liberté dans le choix des trajectoires, capacités haptiques qui confèrent au neurochirurgien la possibilité de guider les instruments manuellement dans les limites établies lors de la planification, assiste les professionnels de santé dans le cadre d'interventions chirurgicales neurologiques à crâne ouvert, l'épilepsie, la maladie de Parkinson, la dystonie généralisée, le cavernome et l'hydrocéphalie.

ROSA 'Brain' a été utilisé dans plus de 1 100 opérations, Le robot a fait l'objet d'un grand nombre de publications scientifiques. [8]

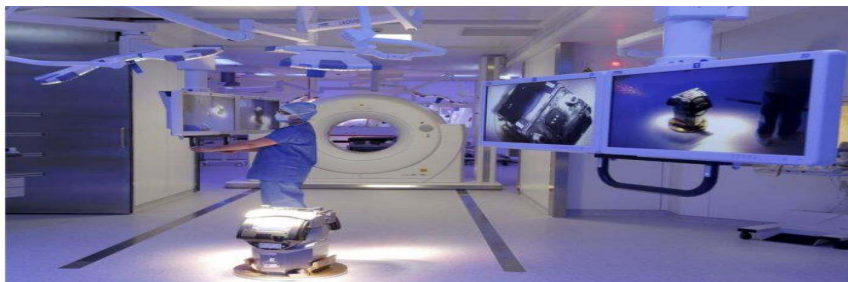


**Figure I.11** Robot ROSA.

#### **I.6.1.4. Les Robots de la mini-invasive**

La chirurgie mini-invasive est une technique chirurgicale limitant le traumatisme opératoire. Elle permet au chirurgien d'atteindre sa cible par les incisions de l'ordre du centimètre grâce à l'utilisation d'instruments couplés à un système d'imagerie vidéo.

On parle d'arthroscopie lorsque l'intervention intéresse une articulation, de laparoscopie ou coelioscopie, lorsque l'intervention se situe au niveau de la cavité abdominale, de thoracoscopie au niveau du thorax.



**Figure I.12** Robot de la mini-invasive (Urologie).

Ses avantages par rapport à la chirurgie traditionnelle sont intéressants :

- Diminution de la douleur.
- Diminution du saignement per-opératoire.
- Récupération plus rapide, reprise plus rapide des activités.
- Réduction de la durée d'hospitalisation permettant très souvent l'intervention en chirurgie en ambulatoire. [9,10 et 11]

## I.6.2. Robot non Chirurgical

### I.6.2.1. Robots de la Télé – échographie

Ce nouveau système télé-échographie permet à un médecin vasculaire situé à oran de pratiquer devant sur son ordinateur des examens à distance en toute facilité et sécurisé sur un patient à alger. A l'aide d'un bras à retour d'effort ,le medecin pilote une sonde échographie robotisée qui en temps réel, lui trasmet à la fois les images médicales réalisées au fur et à mesure et les sensatios fines du toucher ( la sonde qui se déplace sur le corps du patient ).[12]

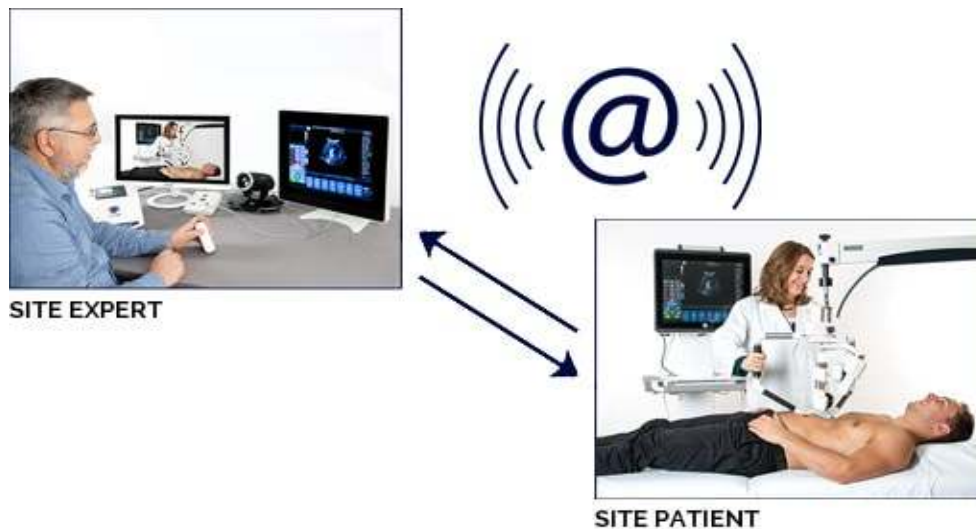


Figure I.13 Robot distance.

Le système d'échographie à distance MELODY permet de répondre aux problématiques grandissantes de désertification médicale en apportant la capacité de réaliser un examen d'échographie sans la présence d'un expert sur le site patient.[13]



Figure I.14 Robot MELODY.



### I.6.2.2. Robots de la Rééducation

La rééducation robotisée c'est L'apport thérapeutique des outils de rééducation robotisée est aujourd'hui reconnu pour les personnes ayant subi un accident vasculaire cérébral, un traumatisme crânien, ou atteints d'autres pathologies ou lésions neurologiques.



**Figure I.15** Séance de Rééducation.

Ils offrent une assistance adaptée aux capacités du patient pour :

- Améliorer la fonction du membre supérieur ou de la marche.
- Ils permettent des protocoles aux séances plus longues.
- Assiste et soulage physiquement le thérapeute dans l'objectif de « faire faire » au patient et de solliciter au maximum son potentiel de récupération.
- facilitent et guident la neuroplasticité (l'intensité , la motivation, l'attention etc...).

Le LOKOMAT exosquelette de membres inférieurs électro mécanisé, dispose des capacités les plus avancées en matière de thérapie locomotrice robotisée. Ce système robotisé d'entraînement à la marche permet une thérapie locomotrice efficace et motivante pour les patients, qu'ils souffrent de déficits à la marche à la suite d'un AVC, de lésions de la moelle épinière, de paralysie cérébrale. [14]



**Figure I.16** Robot LOKOMAT.

### I.7. Les secteurs principaux d'application

Les robots commencent à être de plus en plus dans le domaine médical, qu'il s'agisse de simples Echographies ou d'opérations chirurgicales délicates comme Neurochirurgie, Orthopédie...

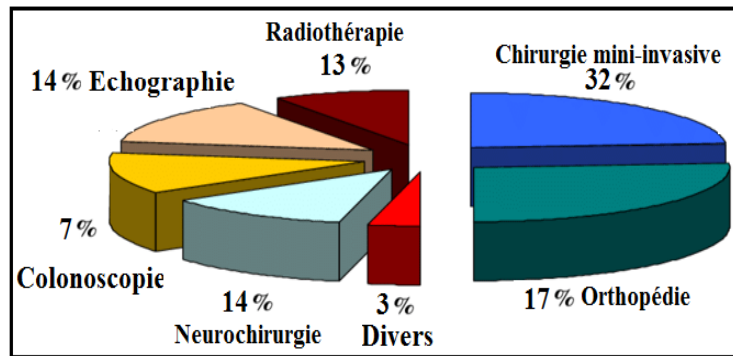


Figure I.17 Répartition par domaine médicale sur 70 robots.

### I.8. Marchés des robots

Le nombre des robots industriels opérationnels est estimé à 1.828.000 unités à fin 2016. Ce nombre atteindra 3.053 000 unités en 2020, soit un taux de croissance de 14% entre 2018 et 2020.

La robotique médicale représente 40% du marché professionnel, avec 20% de croissance annuelle. Estimé à 3,2 milliards de dollars en 2012, le marché devrait s'approcher des 19 milliards de dollars en 2019.

À l'heure actuelle, la robotique médicale évolue dans le sens de la micro-robotique, voir de la nano-robotique, ainsi que de la robotique médicale magnétique (comme l'entreprise suisse Magnebotix). [15]

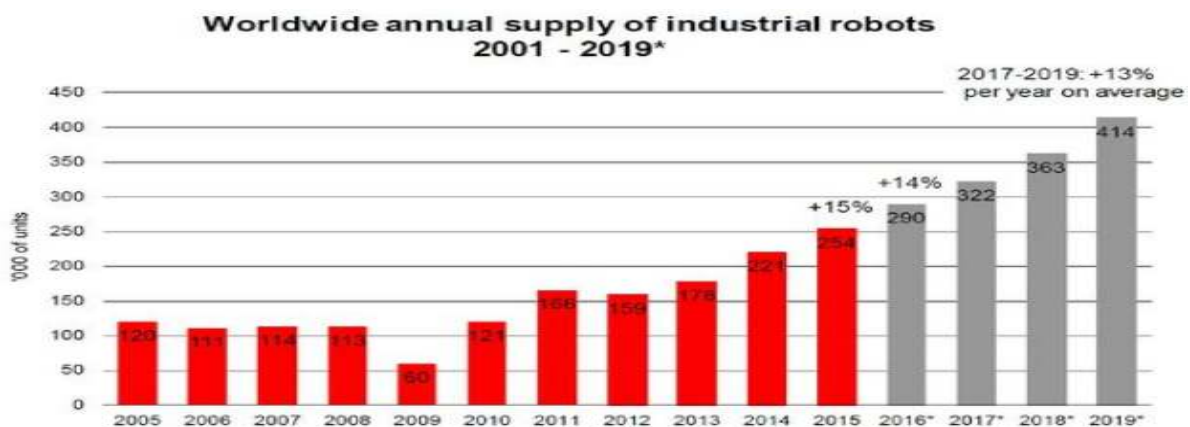
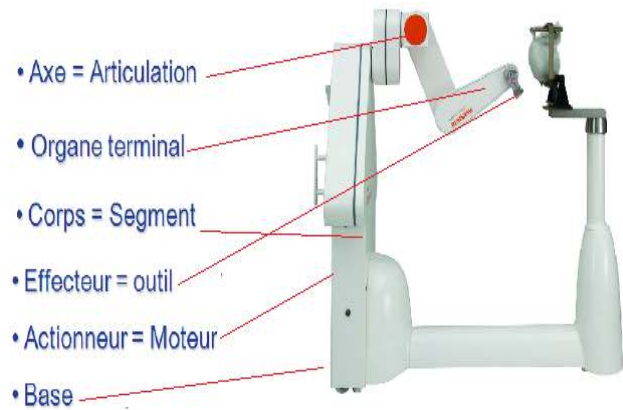


Figure I.18 Situation du Marché Mondiale de la Robotique Industrielle.

### I.9. Constituants d'un robot

Un robot est constitué des éléments suivants:

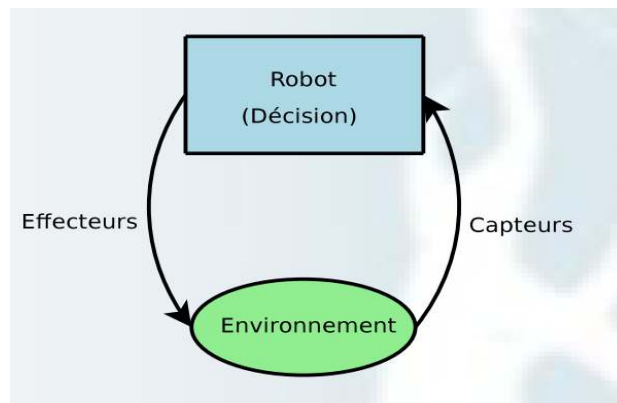
- Axe = Articulation.
- Organe terminal.
- Corps = Segment.
- Effecteur = outil.
- Actionneur = Moteur.
- Base.



**Figure I.19** Eléments d'un Robot médicale.

### I.10. Boucle de décision

Un robot est capable d'extraire de l'information à partir de son environnement et d'utiliser ses connaissances pour décider comment agir est équipé de capteurs et d'effecteurs avec un système bouclé d'articulation dont le fonctionnement peut être décrit par le schéma très général (précision-décision-action). Représentant par le schéma suivant :



**Figure I.20** Schéma représente un système bouclé d'articulation.

Le robot peut agir sur ses mouvements et son environnement à l'aide de ses actionneurs. Pour réagir de façon adaptée, le robot doit percevoir des informations sur lui-même et sur son environnement par l'intermédiaire de capteurs. On distingue généralement :

- **Les capteurs proprioceptifs** : Mesurent l'état du robot lui-même qui renseigne sur son état interne (capteurs de position, forces, intensités etc..).
- **Les capteurs extéroceptifs** : l'informent sur son environnement (capteur de température, télémètre, boussole, détecteur de chaleur et de lumière, utilisation de la vision pour localiser des objets etc..).

En fonction des informations qu'il reçoit, le robot doit prendre une décision pour accomplir sa tâche (atteindre une destination, maintenir une force, éviter des obstacles, etc.) [16]

Autres composantes :

De nombreuses autres composantes peuvent être présentes, selon le type de robot considéré :

- Périphériques de stockage (stocker des programmes, des informations sur l'environnement..).
- Interfaces de communication (écran, wifi, ...).
- Unité d'alimentation (batterie, panneaux solaire, ...).



**Figure I.21** Fauteuil d'aide au diagnostic médical (Check Flash).

### I.11. Architecture des Robots

Un ingénieur dénommé 'Pollard' fut le premier à déposer un brevet de mécanisme pour peindre automatiquement les carrosseries de voitures en 1938. C'est la première idée de robot industriel (à structure parallèle).

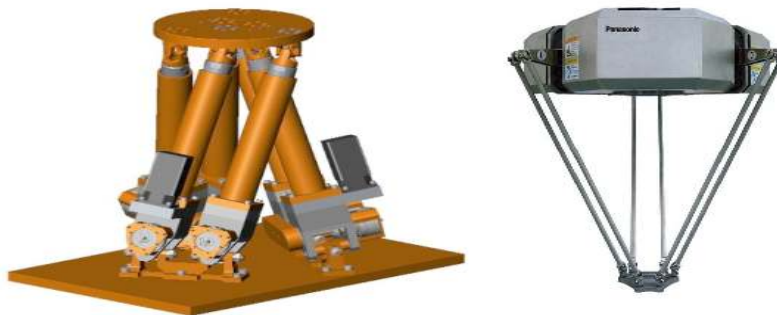
Le concept ne put aboutir faute de moyens électroniques et informatiques adéquats pour le commander. Le mécanisme (que l'on nomme maintenant Tripode) comprenait trois chaînes cinématiques, Les mobilités d'orientations étaient assurées par un poignet à trois degrés de liberté en série avec la structure parallèle. [17]



**Figure I.22** Différents type des Robots.

### I.11.1. Architecture à cinématique parallèle

Les Architecture à cinématique parallèle ont des avantages en termes de raideur, précision, vitesse et accélération , un bon rapport « poids/charge » beaucoup de parties semblables, de très bonnes capacités dynamiques et la possibilité à être utilisés pour le contrôle d'effort. [18]



**Figure I.23** Robot a cinématique parallèle.

Pratiquement on distingue deux classes des robots parallèles, les robots planaires et les robots spatiaux :

#### I.11.1.1. Les Robots parallèles planaires

Un robot planaire est constitué généralement d'une plate-forme, comportant trois degrés de liberté, deux translations et une rotation autour de la normale au plan de la plateforme.

Nous recherchons une structure de robot pleinement parallèle, donc possédant trois chaînes cinématiques indépendantes motorisées par trois actionneurs. Chacune de ces chaînes devant être liées à la fois au sol et à la plate-forme mobile, nous aurons donc trois points d'attache au sol et sur la plate-forme mobile. On peut donc considérer sans perte de généralités une plate-forme triangulaire. [19]

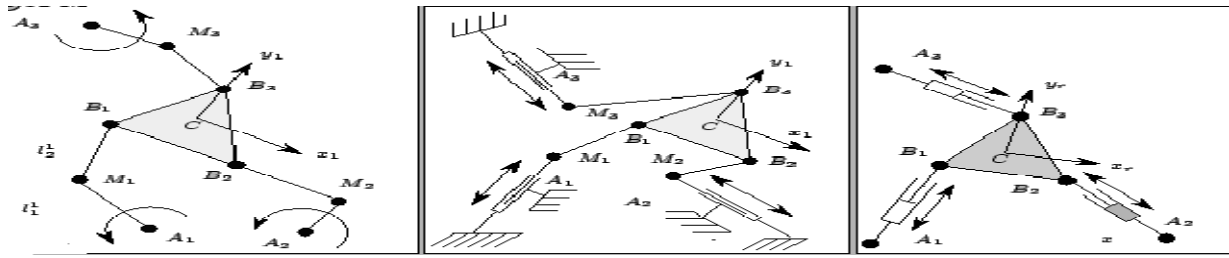


Figure I.24 Exemples d'architectures de robots planaires.

### I.11.1.2. Les robots parallèles spatiaux

Dans les robots parallèles spatiaux, la plate-forme et la base sont reliées entre elles par des chaînes cinématiques assurant trois ou six degrés de liberté à la plate-forme.

Le plus connu des robots à trois degrés de liberté en translation est le Delta développé initialement à L'Ecole Polytechnique de Lausanne par l'équipe du Pr Clavel Et le plus connu pour les robots parallèles à six degrés de liberté est la plate-forme de Gough- Stewart [20], [21] appartient à la famille des hexapodes.

Elle est aujourd'hui connue sous le nom de plate-forme de Stewart. Merlet décrit trois concepts de structures à six degrés de liberté avec base et une plate-forme reliée entre elles par six actionneurs linéaires.

### I.11.2. Robots parallèles existants

#### I.11.2.1. Robots parallèles à deux degrés de liberté

Les robots parallèles à deux degrés de liberté sont utilisés pour le pick-and-place (prise et pose d'un objet) et sont des mécanismes capables de réaliser deux translations (Figure I.25).

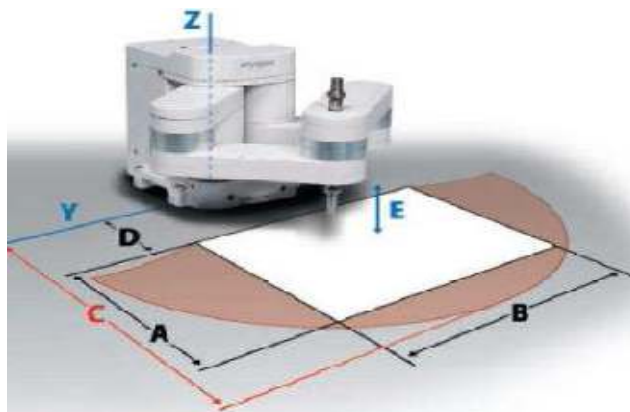


Figure I.25 Manipulateurs à deux degrés de liberté.



### I.11.2.2. Robots parallèles à trois degrés de liberté

Les robots parallèles à trois degrés de liberté en translation présentent un intérêt important pour les opérations de transfert. En conséquence différents prototypes ont été proposés. Le plus utilisé a été développé initialement à l'Ecole Polytechnique de Lausanne et est commercialisé sous le nom " Delta " par la société Demaure (Figure I.26).

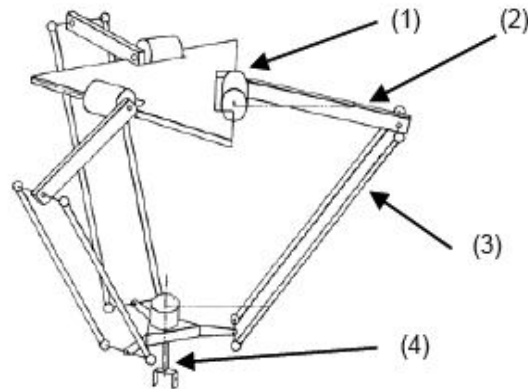


Figure I.26 Robot Delta à trois degrés de liberté.

### I.11.2.3. Robots parallèles à quatre degrés de liberté

Afin de répondre aux besoins des applications de manipulation d'objets, l'architecture delta, originalement pourvue de trois degrés de liberté, fut modifiée afin d'y ajouter une quatrième mobilité. Ainsi, la rotation est obtenue en ajoutant une liaison rotoïde à la plateforme dont la rotation est commandée à l'aide d'une chaîne cinématique de type RUPU (Figure I.27).

Cette "patte télescopique" permet de réaliser une rotation illimitée, mais a l'inconvénient majeur de limiter les performances dynamiques du Delta ainsi modifié, et ce, D'autant plus pour des robots de grande taille.

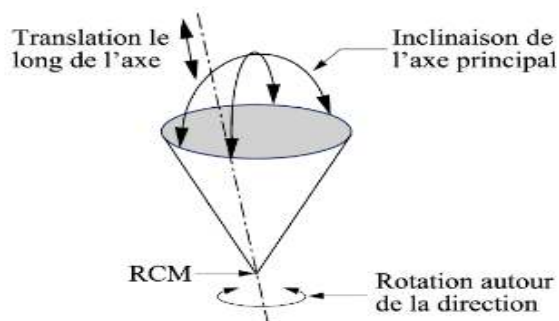


Figure I.27 : Robot Delta à quatre degrés de liberté.

### I.11.3. Architecture cinématiques avec centre de rotation déporté

Parmi les tache chirurgicales, beaucoup d'entre Architectures cinématiques avec centre de rotation déporté. Dans les procédures d'accès percutané, une aiguille est initialement placée avec sa pointe en contact avec le point d'entrée sur la peau puis orientée autour du point de pivot pour viser la cible.

En échographie également, la sonde est positionnée en regard de l'organe à explorer puis orientée autour du point de contact avec la peau. Cette analyse a ainsi conduit au développement de mécanismes qui découplent les mouvements de rotation et de translation des outils en un point virtuel situé à une distance définie de la structure mécanique du robot.[22]



**Figure I.28** Contraintes de mobilité avec centre de rotation déporté.

### I.11.4. Architecture de type SCARA

La SCARA (4 ddl) est largement exploitée pour constituer le porteur de robots médicaux. Un poignet dédié classiquement à 3 articulations rotoïdes, vient compléter les mobilités du SCARA.

L'espace de travail est approximativement un « cylindre plat » qui convient bien aux interventions sur un corps humain, allongé sur une table d'opération. Les effets de la gravité sont plus faciles à prendre en compte qu'avec la solution anthropomorphe ; la commande en position, du fait de la simplicité cinématique, ne constitue pas, en général, un problème délicat à surmonter. [22]



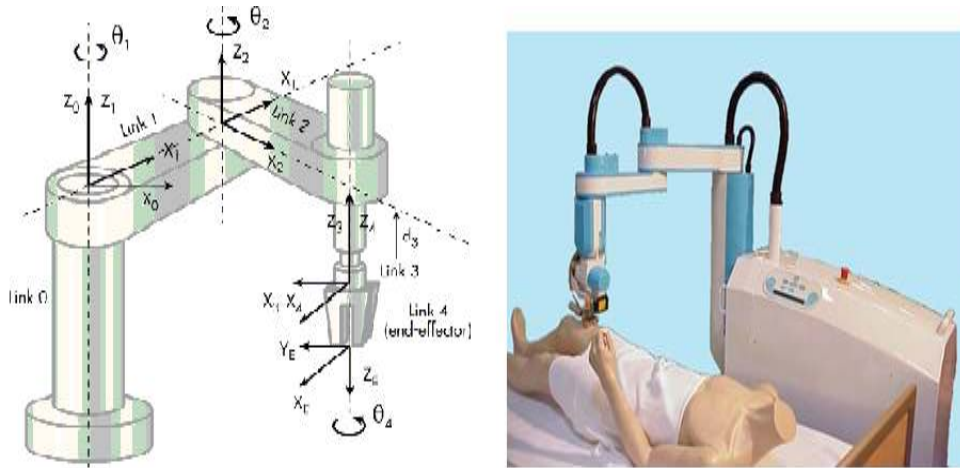


Figure I.29 Architecture de type SCARA.

**I .11.5. Robots à architecture redondante**

On appelle robots redondants les robots qui possèdent plus de DDL que de dimensions de travail Par exemple, dans un espace 3D, il existe six dimensions de travail, trois positions et trois orientations, donc tous les robots avec sept DDL ou plus sont considérés redondants.

Cette redondance amène une flexibilité mathématique au niveau de la résolution des équations de cinématique inverse, puisque le système devient alors sous-contraint, c’est-à-dire que ses six contraintes (orientations et positions) peuvent être résolues avec sept variables, ce qui mène à un nombre plus grand, pouvant même aller jusqu’à l’infini de solutions pour la cinématique inverse.

Pour un robot redondant à  $n + 6$  DDL, ces  $n$  variables supplémentaires peuvent alors permettre de résoudre la cinématique inverse avec jusqu’à  $n$  contraintes supplémentaires, par exemple pour faire de l’évitement d’obstacles.[23]

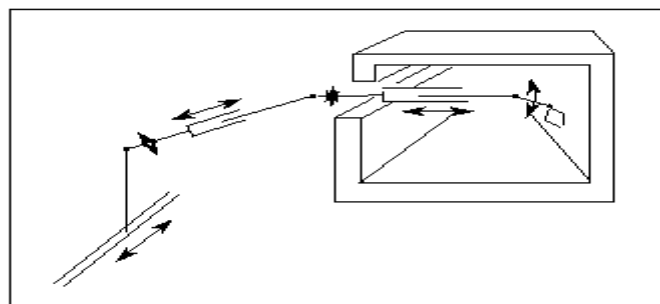


Figure I.30 Exemple d'utilisation d'un Robot a 7 ddl.

### I.11.6. Robots hybrides

La définition exacte d'un mécanisme hybride est évasive. Dans cette classification nous considérons comme hybride un mécanisme qui comporte plusieurs chaînes cinématiques reliant le bâti à l'organe terminal et dont une des chaînes au moins comporte plus d'un actionneur. Parmi les machines hybrides que l'on a cataloguées, on peut distinguer trois catégories :

- les mécanismes à porteur parallèle et poignet série.
- les mécanismes à porteur série et poignet parallèle.
- les autres mécanismes hybrides.

### I.12. Espace de travail

Une des caractéristiques importantes du robot est son espace de travail, l'espace physique engendré par un point de l'organe terminal lorsque le robot est en mouvement (évolution relative aux variables articulaires).

Il est habituellement représenté par deux sections perpendiculaires choisies en fonction du type du robot manipulateur.

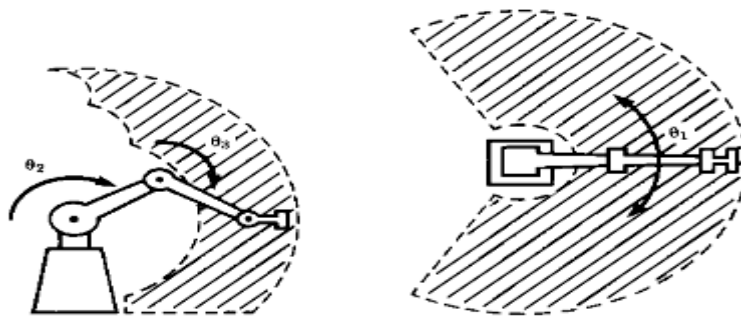
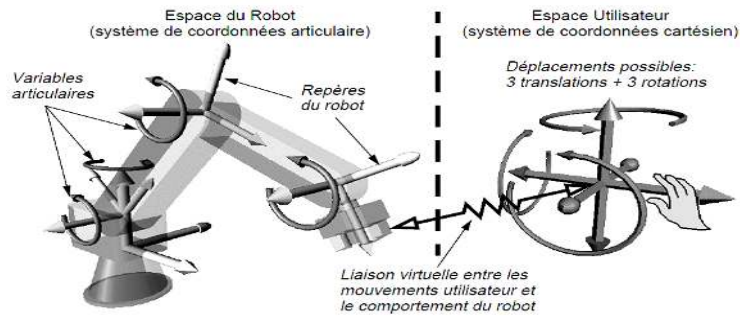


Figure I.31 L'espace de travail.

On définit aussi deux types d'espace relatif au robot :

- L'espace articulaire : c'est celui dans lequel est on utilise des variables articulaires.
- L'espace opérationnel : c'est celui dans lequel est on utilise des coordonnées cartésiennes, sphérique ou cylindrique et autres particularités de robots.
- Coordonnées opérationnelles : on appelle coordonnées opérationnelles, les paramètres de configuration de l'effecteur lorsque ceux-ci sont indépendants. Le nombre de coordonnées opérationnelles est uniquement lié à la structure mécanique de système.[24 et 25]



**Figure I.32** Relations entre les différents systèmes de coordonnées. [26]

## I.12. Conclusion

La robotique médicale offre et promet un potentiel immense pour améliorer la précision et le travail du personnel médical au cours de diverses procédures.

Afin d'aborder un sujet de recherche dans le domaine de la robotique, il est important de résumer toutes les notions de base nécessaires à la compréhension de ce domaine comme l'origine et l'histoire de la robotique médicale, les compositions d'un robot médicale ainsi ces Classification et différent architecture.

## II.1. Introduction

D'une manière classique, la configuration d'un système mécanique est connue quand la position de tous ses points dans  $R_0$  est connue.

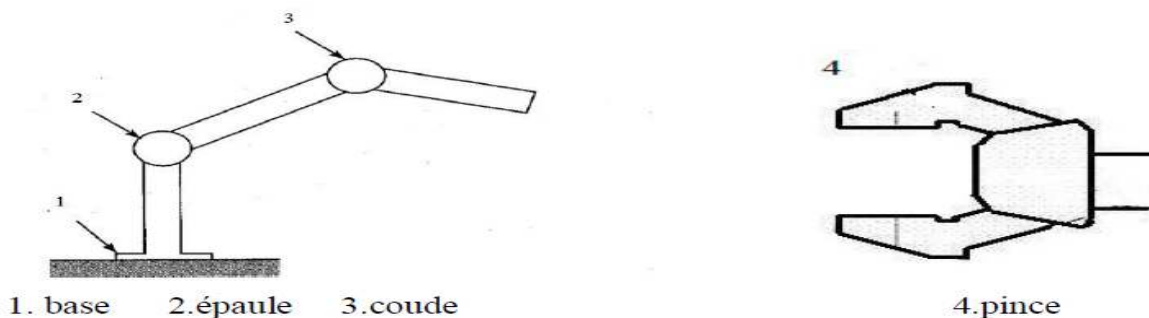
Dans ce chapitre, nous présentons des notions de base sur la robotique et les différents modèles utilisés, nous introduisons brièvement les modèles géométriques direct et inverse qui donnent les différentes relations entre les grandeurs articulaires d'un robot manipulateur et la position et l'orientation de son organe terminal dans l'espace cartésien.

De même, nous présentons le modèle dynamique qui exprime une équation mathématique qui donne la relation entre les (couples et/ou les moments) appliqués aux actionneurs et les positions, les vitesses et les accélérations articulaires, ainsi que les modèles cinématiques direct et inverse du premier et second ordre qui fournissent les relations entre vitesses et accélérations de l'espace articulaire et l'espace cartésien.

## II.2. Définition d'un robot manipulateur

Un robot manipulateur est constitué généralement par deux sous-ensembles distincts :

Un organe terminal qui est le dispositif destiné à manipuler des objets, et une structure mécanique articulée (SMA), constituée d'un ensemble de solides reliés entre eux, généralement les uns à la suite des autres où chaque solide est mobile par rapport au précédent. Cette mobilité s'exprime en termes de degrés de liberté (d.d.l) qui est par définition le nombre de mouvements indépendants possibles d'un solide par rapport au solide qui lui est directement relié.[27]



**Figure II.1** Structure générale d'un bras manipulateur.

### II.3. Le système mécanique articulé (S.M.A.)

Une structure mécanique articulée peut être représentée par une architecture composée de plusieurs chaînes de corps rigides assemblés par des liaisons appelées articulations. Les chaînes peuvent être dites soit ouvertes ou en série dans les quelles tous les corps ont au plus deux liaisons, ou bien arborescentes où au moins l'un des corps a plus de deux liaisons. Les chaînes peuvent aussi être fermées dans les quelles l'organe terminal est relié à la base du mécanisme par l'intermédiaire de plusieurs chaînes. [27]

### II.4. Organe terminal (O.T)

C'est un dispositif d'interaction fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique, il regroupe les procédés destinés à manipuler des objets, ou à les transformer, il s'agit donc d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement.

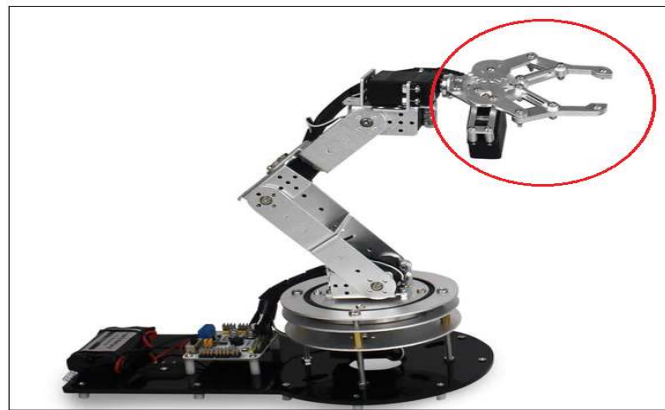


Figure II.2 L'Organe terminal.

### II.5. Articulation

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit  $m$  le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation.

La mobilité d'une articulation est telle que :

- Articulation de rotation (R) possède 1 d.d.l. permettant la rotation autour de son axe.
- Articulation prismatique (P) possède 1 d.d.l. de translation le long de son axe.
- Articulation cylindrique (C) possède 2 d.d.l. qui permettent la rotation et translation suivant son axe.
- Articulation "Screw" (S) possède 1 d.d.l. correspondant à un mouvement d'une vis la translation relative est reliée à la rotation par l'intermédiaire du pas.

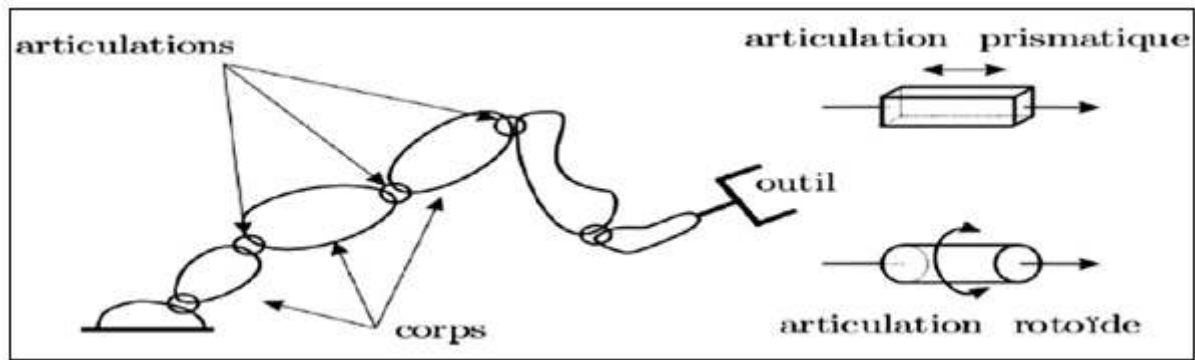


Figure II.3 Schéma d'un robot et des liaisons rotoïdes et prismatiques.

**II.5.1. Articulation Rotoïde (R)**

Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée R, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe. [28]

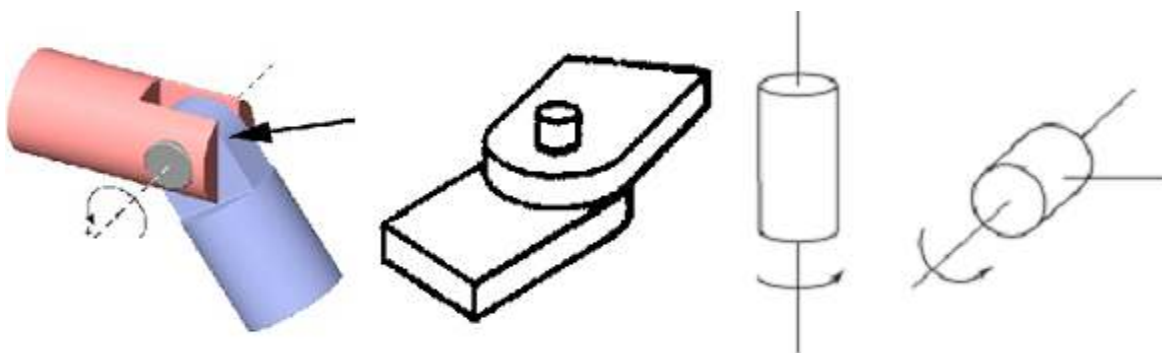


Figure II.4 Articulation rotoïde.

**II.5.2. Articulation Prismatique (P)**

Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe. [28]

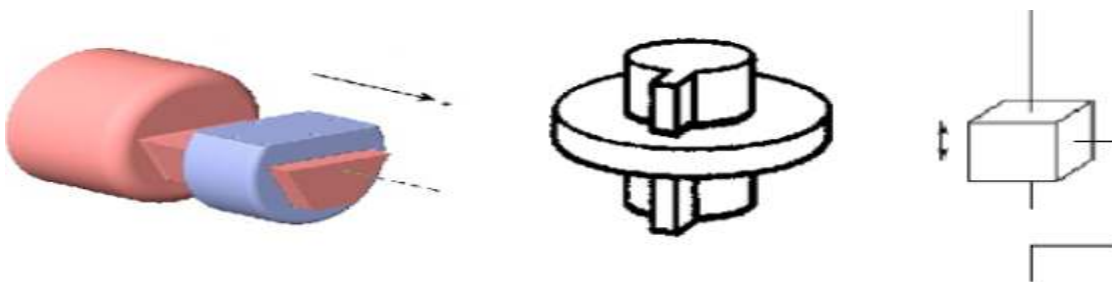


Figure II.5 Articulation prismatique.

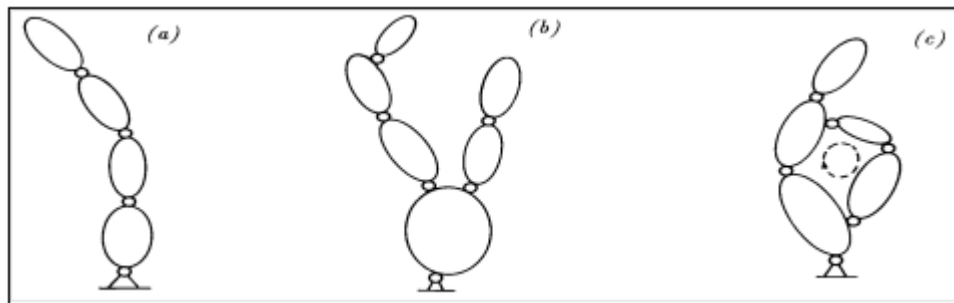
## II.6. Les Chaines Cinématiques

Une chaîne cinématique sera définie par une succession d'articulations rotatives ou prismatiques. Pour un bras manipulateur, on ne considère ici que les systèmes mécaniques composés de chaînes cinématiques poly articulées ouvertes appelés bras manipulateurs série, ou fermée pour les bras manipulateurs parallèles.

On montre deux structures les plus répandues dans l'industrie :

- Les bras manipulateurs de type anthropomorphe, à six liaisons rotatives, d'usage général.
- Les bras manipulateurs de type SCARA, qui sont fréquemment utilisés dans les cellules de production pour les opérations de palettisation.

On supposera par la suite les bras manipulateurs constitués de  $n$  corps mobiles, Supposés parfaitement rigides reliés entre eux par  $n$  liaisons rotatives et/ou prismatiques formant une structure de chaîne simple.[29]



**Figure II.6** Chaines cinématiques en boucle ouverte (a, b) et fermée (c).

## II.7. Notion sur les Liaisons et les degrés de liberté ( d.d.l )

Une liaison entre 2 solides indéformables (en théorie) limite le d.d.l. d'un solide par rapport à l'autre. On appelle d.d.l. de la liaison le nombre de paramètres indépendants permettant de définir la localisation (position et orientation) d'un solide par rapport à l'autre dans tout déplacement (compatible avec la liaison).[30 et 31]



Tableau II.1 Rappel sur les liaisons simples.

DDL	Désignation	Représentation en 3D	Schématisation		Torseur cinématique
			spatiale	plane	
0	Liaison encastrement				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
1	Liaison pivot				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
1	Liaison glissière				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} 0 & v_x & v_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
1	Liaison hélicoïdale				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & v_x & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
2	Liaison pivot glissant				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & v_x & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
3	Liaison sphérique (rotule)				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & 0 \\ \omega_y & v_y & 0 \\ \omega_z & v_z & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
2	Liaison sphérique à doigt				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & 0 \\ \omega_y & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
3	Liaison appui plan				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & 0 \\ 0 & v_y & v_z \\ 0 & v_x & v_z \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
4	Liaison sphère cylindre (linéaire annulaire)				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & v_x & v_z \\ \omega_y & v_y & 0 & 0 \\ \omega_z & v_z & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
4	Liaison arête plan (cylindre plan ou linéaire rectiligne)				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & 0 \\ \omega_y & v_y & v_y & v_z \\ 0 & v_x & v_x & v_z \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$
5	Liaison sphère plan (ponctuelle)				$T_c (1/2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x & 0 \\ \omega_y & v_y & v_y & v_z \\ \omega_z & v_z & v_x & v_z \end{Bmatrix}_{n(x,y,z)}$



## II.8. Modélisation des robots

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

Les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot).

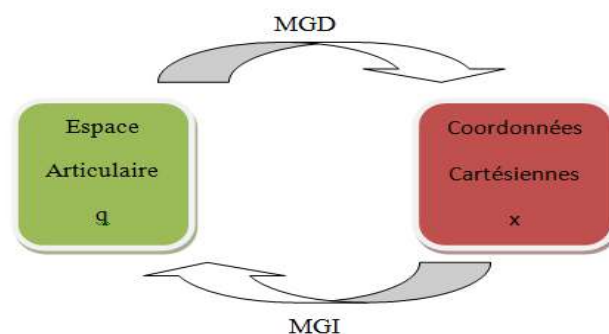
Parmi ces modèles, on distingue :

- **Les modèles géométriques direct et inverse** qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme et inversement.
- **Les modèles cinématiques direct et inverse** qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction de la vitesse articulaire et inversement. Définir les différentes tâches d'un robot réclame de pouvoir positionner l'organe terminal par rapport à un repère de référence.
- **Les modèles dynamiques** définissent les "équations du mouvement du robot qui Permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et Positions, vitesses et accélérations.

### II.8.1. Modèle Géométrique

La première interrogation face à un robot est "comment calculer sa position" Plus précisément : "où va se trouver l'outil du robot si chaque articulation possède tel angle (moteur rotatif) ou allongement (actionneur linéaire).

Le modèle géométrique du robot (qu'il soit direct ou inverse) est utile car il apporte une vision "globale" du comportement d'un robot. [32 et 33]



**Figure II.7** Relation entre l'espace articulaire et l'espace des coordonnées cartésiennes de l'effecteur.

### II.8.1.1. Modèle géométrique direct (M.G.D)

C'est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Ces variables sont définies par la matrice un colonne  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ . La situation de l'organe terminal est définie par la matrice un colonne formée de  $m$  coordonnées, telle que :

$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in R^n$ : Vecteur des variables articulaires.

$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in R^m$ : Vecteur des variables opérationnelles,  $m \leq n$ .

Où

$$x = f(q) \quad (\text{II.1})$$

Par exemple, si le manipulateur se déplace dans l'espace on pose  $m=6$  (3 coordonnées pour la position et 3 coordonnées pour la rotation). S'il se déplace dans un plan on pose  $m=2$  et si en plus, on est concerné par la rotation on pose  $m=3$ .

Le modèle géométrique direct est construit à partir de la modélisation de **Denavit- Hartenberg** modifiés qui place un repère sur chaque articulation. C'est la technique la plus répandue pour décrire la géométrie des chaînes cinématiques sérielles. [34]

L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet d'exprimer le passage entre deux repères en utilisant un nombre minimum de paramètres appelés paramètres géométriques.

#### II.8.1.1.1. Convention de Denavit-Hartenberg

Méthodologie à suivre pour décrire les robots à structure ouverte simples. Une structure ouverte simple est composée de  $n+1$  corps. Notes  $C_0, \dots, C_n$  et de  $n$  articulations le corps  $C_0$  désigne la base du Robot et le corps  $C_n$  le corps qui porte l'organe terminal.

L'articulation  $j$  connecte les corps  $C_j$  au corps  $C_{j-1}$ .

##### a. Paramètres de Denavit-Hartenberg

Revenons au calcul des matrices de passage successives  $A^{i-1,i}$  ou  $T^{i-1,i}$ . On recherche un paramétrage des liaisons tel que les matrices de passage aient toutes la même forme latérale ce qui facilitera grandement les calculs. Ce paramétrage introduit par Denavit et Hartenberg dans les années 50 pour l'étude systématique des chaînes cinématiques, a été quelque peu adapté et la définition de ce paramétrage donnée ici est celle de W. Khalil. [35]

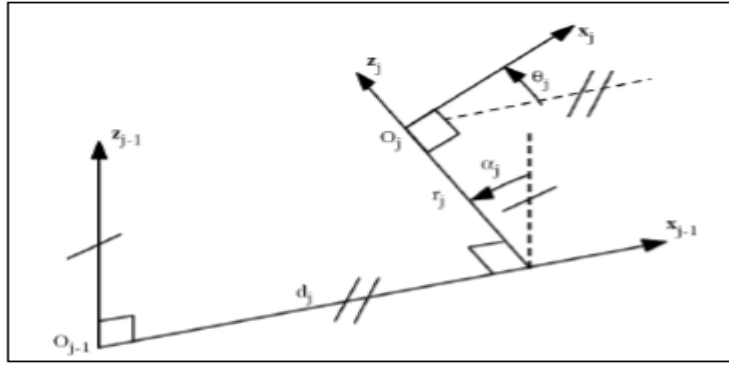


Figure II.8 Système de Coordonnées et Paramètres de Denavit-Hartenberg.

**b. Convention et définition**

- $\alpha_i$  : angle entre les axe  $z_{i-1}$  et  $z_i$  correspondant à une rotation autour de l'axe  $x_{i-1}$ .
- $d_i$  : distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  le long de  $x_{i-1}$ .
- $\theta_i$  : angle entre les axes  $x_{i-1}$  et  $x_i$  et qui correspond à une rotation autour de l'axe  $z_i$ .
- $r_i$  : distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  le long de  $z_j$ .
- La variable articulaire  $q_i$  associée à la  $i$ ème articulation est donnée par :

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i r_i \tag{II . 2}$$

$\sigma_i$  est une variable booléenne qui exprime une articulation rotoïde ou prismatique :

$\sigma_i = 1$  si l'articulation  $i$  est rotoïde.

$\sigma_i = 0$  si l'articulation est prismatique.

La matrice de transformation définissant le repère  $R_i$  dans le repère  $R_{i-1}$  est donnée par

$$T_i^{i-1} = Rot(x_{i-1}, \alpha_i) Trans(x_{i-1}, d_i) Rot(z_i, \theta_i) Trans(z_i, r_i) \tag{II . 3}$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & d_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -r_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & r_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si la structure est **ouverte simple** ou **arborescente**, le calcul de  $x$  implique celui de l'organe terminal.

- Si la structure est **fermée**, il faut ajouter les relations liant les variables articulaires pour la fermeture de chaîne.

Le calcul du **M.G.D** consiste donc à exprimer la position du point  $O_n$  et l'orientation du repère  $R_n$  lié à l'O.T, en fonction de sa configuration. Il faut pour cela multiplier les matrices de passage homogènes successives reliant le repère  $R_0$  lié au bâti au repère  $R_n$  lié à l'O.T.

### II.8.1.2. Modèle géométrique inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse consiste à utiliser les coordonnées articulaires pour calculer les coordonnées opérationnelles (positions désirées de l'organe terminal).c'est l'inverse du MGD :

$$q=f^{-1}(x) \quad (\text{II. 4})$$

La résolubilité du MGI, c'est-à-dire l'existence d'un nombre fini de solutions est fondamentale en matière de conception. Supposons que la situation  $x$  d'un bras à  $n$  liaisons soit exprimée par un nombre  $m$  minimal de paramètres. Supposons par ailleurs que  $x$  soit une situation accessible par le bras, c'est-à-dire que la situation appartient à l'espace de travail. Alors (dans la majorité des cas) :

– si  $n < m$ , il n'existe pas de solution au **MGI**.

– si  $n = m$ , il existe un nombre fini de solutions en dehors de certaines configurations.

Appelées configurations singulières.

– si  $n > m$ , il existe une infinité de solutions.

On sait que dans les cas où  $n < 6$  les bras manipulateurs sont tous solubles, c'est-à-dire qu'il existe une solution connue au MGI. C'est aussi le cas de la plupart des structures à six liaisons, notamment celles possédant un poignet sphérique (trois dernières liaisons rotoïdes concourantes). En fin, seul le calcul du MGI permet de connaître le nombre de Solutions.[34]

### II.8.1.2.1. La méthode de Paul

La méthode consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation par les matrices  ${}^i T_{i-1}$  pour  $i$  variant de 1 à  $n$ .

Cette opération permet d'isoler et d'identifier l'une après l'autre, les variables articulaires.

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène à pour expression :

$${}^0 T_n = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-2} T_{n-1} \cdot {}^{n-1} T_n \quad (\text{II. 5})$$

La méthode de **Paul** permet la détermination de  $q_1$ , puis  $q_2$  et ainsi de suite jusqu'à  $q_n$ . Il s'agit de déplacer l'une après l'autre chacune des variables articulaires ( $q_1 \dots q_n$ ) dans le membre de gauche de l'équation. Pour cela, on multiplie par  ${}^i T_{i-1}$  (en prenant successivement ( $i = 1 \dots n - 1$ ) de part et d'autre dans l'équation.

### II.8.2. Modèle cinématique

Le modèle cinématique est littéralement, un modèle des vitesses. Il exprime les relations entre les vitesses articulaires de chaque joint et les vitesses cartésiennes d'un point de la chaîne cinématique, généralement l'organe terminal.

Il permet donc non seulement de compléter éventuellement le modèle géométrique en tenant compte des vitesses, mais aussi de remplacer le modèle géométrique : en agissant par accroissements successifs, on peut se déplacer d'un point donné à un autre.

Il est donc une linéarisation du système d'équations non linéaire représentant le modèle géométrique. Par conséquent, on peut toujours facilement obtenir les transformations inverses puisqu'elles proviennent de l'inversion d'un problème linéaire. [36 et 37]

#### II.8.2.1 Modèle cinématique directe (MCD) [38]

Il décrit les variables élémentaires des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires :

$$dx = J(q) dq \quad (\text{II. 6})$$

Le terme  $J(q)$  désigne la jacobine (matrice de dimension  $m \times n$ ) :

$$J(q) = \frac{\partial X}{\partial q} \quad (\text{II. 7})$$

Ce modèle permet de déterminer par itération les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires. Si on remplace le calcul différentiel par le calcul des dérivées par rapport au temps, le MCD devient :

$$\dot{X} = J(q) \dot{q} \quad (\text{II.8})$$

Ou :  $\dot{X}$  représente les vitesses opérationnelles et  $\dot{q}$  les vitesses articulaires. Sous forme matricielle, l'équation devient :

$$\dot{X} = [J_{ij}] \cdot [\dot{q}] \quad (\text{II.9})$$

Ou :

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_j} \quad (\text{II.10})$$

Avec :  $i = (1, \dots, m)$  et  $j = (1, \dots, n)$

### II.8.2.2 Modèle cinématique inverse (MCI)

A partir d'une configuration  $q$ , on calcule la différentielle articulaire  $dq$  pour satisfaire une différentielle des coordonnées opérationnelles  $dx$  imposés. si les différentielles sont remplacées par les dérivées par rapport au temps, on constitue le modèle cinématique inverse.

$$[\dot{q}] = [J_{ij}]^{-1} [\dot{X}] \quad (\text{II.11})$$

Pour obtenir le modèle différentiel inverse, on peut soit dériver le modèle géométrique inverse (PAUL) (méthode analytique) soit inverser le modèle différentiel direct d'une manière plus générale (résolution analytique ou numérique). [39 et 40]

### II.8.3. Modèle Dynamique

Elle exprime une équation mathématique qui donne la relation entre les (couples et/ou les moments) appliqués aux actionneurs et les positions, les vitesses et les accélérations articulaires. Elle est de la forme :

$$\Gamma = g(q, \dot{q}, \ddot{q}, F) \quad (\text{II.12})$$

Conventionnellement, on dira que la relation (2) représente le modèle dynamique inverse ou tout simplement le modèle dynamique. Alors le modèle dynamique direct est celui qui exprime les accélérations en fonction des positions, des vitesses et des couples des actionneurs. [36]

$$\ddot{q} = h(q, \dot{q}, \Gamma, F) \quad (\text{II. 13})$$

Pour obtenir le modèle dynamique des robots, on dispose de deux formalismes qui sont les plus souvent utilisés, il s'agit de :

- Formalisme de LAGRANGE,
- Formalisme de NEWTON-EULER

#### a. Formalisme de LAGRANGE :

Il décrit les équations en termes de travail et d'énergie du système qui donne ce qui suit quand l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul.

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} \quad (\text{II. 14})$$

Avec :  $i = (1, \dots, n)$ .

L est la fonction de LAGRANGE égale à la différence entre l'énergie cinétique totale (E) et l'énergie potentielle totale (U) du système. L'expression de l'énergie cinétique est :

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (\text{II. 15})$$

A : matrice d'inertie du robot d'éléments génériques  $A_{ij}$ .

$A_{ij}$  : sont fonction des variables articulaires q.

Avec :  $i = (1, \dots, n)$  et  $j = (1, \dots, n)$ .

Le lagrangien s'écrit :

$$L = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} - V \quad (\text{II. 16})$$

Comme l'énergie potentielle est aussi fonction des variables articulaires q, alors, d'après l'équation (II. 16) et après dérivation, on obtient :

$$\Gamma_i = [A_{i1}, \dots, A_{in}] \ddot{q} + \dot{q}^T \left[ \frac{\partial A_{i1}}{\partial q}, \dots, \frac{\partial A_{in}}{\partial q} \right] \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] \dot{q} + \frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (\text{II. 17})$$

Ou encore :

$$\Gamma_i = [A_{i1}\ddot{q}_1 + \dots + A_{in}\ddot{q}_n] + [B_i^{12}q_1\dot{q}_2 + \dots + B_i^{1n}q_1\dot{q}_n + B_i^{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \dots + B_i^{(n-1)n}q_{n-1}\dot{q}_n] + [C_{i1}\dot{q}_1^2 + \dots + C_{in}\dot{q}_n^2] + Q_i \quad (\text{II. 18}).$$

Elle s'écrit sous la forme matricielle de la manière suivante :

$$\Gamma = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + Q \quad (\text{II. 19})$$

$B$  : matrice de terme de Coriolis d'éléments génériques  $B_i^{jk}$  de dimension  $[n \times n (n-1)/2]$

$C$  : matrice de termes centrifuges d'éléments génériques  $C_{ij}$  de dimension  $(n \times n)$

$$\dot{q}\dot{q} = [\dot{q}_1\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n, \dot{q}_2\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n]^T \quad (\text{II. 20})$$

$$\dot{q}^2 = (\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dots, \dot{q}_n^2)^T \quad (\text{II. 21})$$

$$\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n)^T \quad (\text{II. 22})$$

$Q = [Q_1, \dots, Q_n]^T$  : vecteur des forces de gravite.

On identifier les expressions des équations.

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (\text{II. 23})$$

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \quad (\text{II. 24})$$

$$Q_i = \frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (\text{II. 25})$$

Ou  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $Q$  représentent les coefficients dynamiques du robot qui sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Avec les équations d'un système mécanique articulé, on forme un système de  $n$  équations différentielles couplées, non linéaires et du second ordre.



### b. Formalisme de NEWTON-EULER

Il est adapté à la construction du modèle dynamique inverse. Il permet le dimensionnement de la structure et des actionneurs. Le caractère itératif de ce formalisme réduit le temps de calcul par rapport au formalisme de LAGRANGE. Il est basé sur une double récurrence : une récurrence avant la base du robot vers l'effecteur en utilisant la formule de composition pour calculer les vitesses et accélérations. Donc, le torseur dynamique et une récurrence arrière de l'effecteur vers la base pour calculer les couples des actionneurs en exprimant le bilan des efforts pour chaque corps. La composition des vitesses donne :

$$\omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j a_j \quad (\text{II.26})$$

$$v_j = v_{j-1} + \omega_{j-1} \wedge L_j + \sigma_j \dot{q}_j a_j \quad (\text{II.27})$$

On dérive ces deux (02) expressions par rapport au temps pour obtenir la composition des accélérations :

$$\dot{\omega}_j = \dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \left( \ddot{q}_j a_j + \omega_{j-1} \wedge \dot{q}_j a_j \right) \quad (\text{II.28})$$

$$\dot{v}_j = \dot{v}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \wedge L_j + \omega_{j-1} \wedge \left( \omega_{j-1} \wedge L_j + \sigma_j \dot{q}_j a_j \right) + \sigma_j \left( \ddot{q}_j a_j + \omega_{j-1} \wedge \dot{q}_j a_j \right) \quad (\text{II.29})$$

On arrange l'expression (II.28) comme suit :

$$\dot{v}_j = \dot{v}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \wedge L_j + \omega_{j-1} \wedge \left( \omega_{j-1} \wedge L_j \right) + \sigma_j \left( \ddot{q}_j a_j + 2\omega_{j-1} \wedge \dot{q}_j a_j \right) \quad (\text{II.30})$$

On peut utiliser cette dernière expression pour déterminer la vitesse du centre de gravité :

$$\dot{v}_{Gj} = \dot{v}_j + \omega_j \wedge \left( \omega_j \wedge S_j \right) \quad (\text{II.31})$$

Ce qui permet d'obtenir le torseur dynamique :

$$F_j = m_j \dot{v}_{Gj} \quad (\text{II.32})$$

$$N_j = \tau_j \dot{\omega}_j + \omega_j \wedge \left( \tau_j \wedge \omega_j \right) \quad (\text{II.33})$$

$F_j$  et  $N_j$  : représentent respectivement la somme totale des forces extérieures et la somme totale des moments extérieures. On initialise la récurrence par :

$$\dot{\omega}_0 = 0, \quad \omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{v}_0 = 0$$

## II.9. Conclusion

Afin de procéder à la conception, la simulation ou la commande des robots, on dispose de trois modèles utilisés d'une manière individuelle ou combinée pour réaliser le travail voulu.

Ces modèles sont :

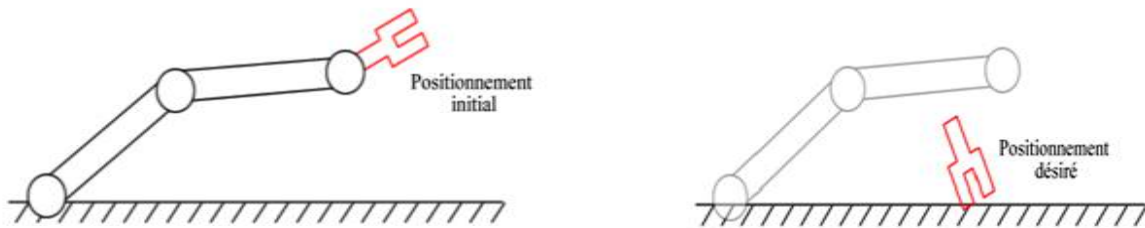
- Le modèle géométrique (direct et inverse).
- Le modèle différentiel ou cinématique (direct et inverse).
- Le modèle dynamique.

### III.1. Introduction

Un problème de cinématique inverse revient donc à trouver une configuration d'articulations dans le squelette permettant de positionner une articulation selon une orientation et une translation définie.

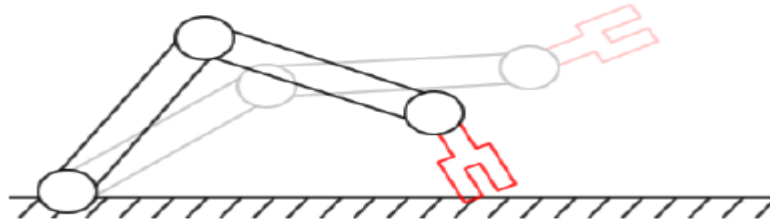
En cinématique inverse on positionne une articulation sans se soucier des parents. Elle s'occupe de générer la configuration des joints parents requise pour obtenir le positionnement désiré.

- L'articulation qu'on tente de positionner sera appelée "articulation cible".
- Le positionnement de l'articulation cible comprend sa position et son orientation.



**Figure III.1** Bras manipulateur modifié pour arriver à la position désirée.

Pour trouver une configuration d'articulation pour obtenir le positionnement désiré de l'articulation cible est appelé la résolution du système de cinématique inverse.



**Figure III.2** Configuration de bras pour obtenir le positionnement désiré et générée.

### III.2. Cinématique inverse

Les problèmes cinématiques apparaissent dans le contexte de la description de robots en termes de position et d'orientation. Spécifiquement, ils concernent la conversion de coordonnées, entre le cas où nous sommes dans l'espace des articulations, des moteurs, et celui où nous raisonnons dans des repères cartésiens, en coordonnées spatiales.

Le problème de la cinématique inverse des robots peut être résolu par plusieurs méthodes telles que :

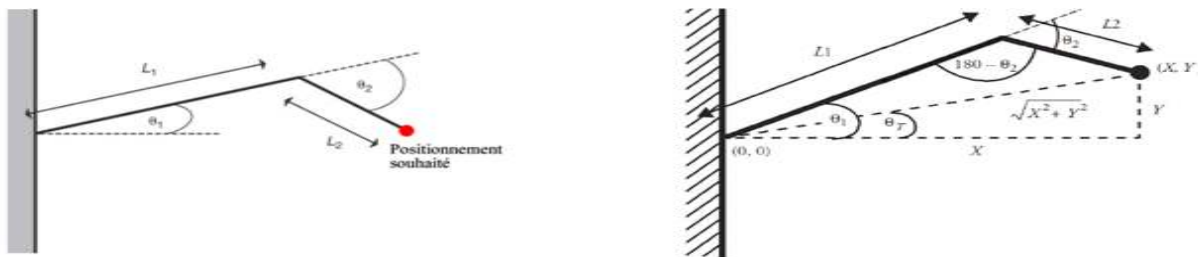
- Méthode Analytiquement
- Utilisation du Jacobien (Jacobien inverse)
- Méthode Algébrique

### III.2.1. Solution Analytique

Bien qu'on dispose d'équations liant les variables articulaires et les éléments de la matrice du bras, la solution analytique est délicate pour plusieurs raisons:

- Équations transcendantes
- Solutions multiples possibles
- Dégénérescence possible (par exemple axes alignés).
- Absence de solution ou solutions en nombre infini.
- Consiste à prendre le système et à le modéliser à l'aide d'un système d'équation.

Certaines des variables du système d'équation sont les On résout le système pour trouver les valeurs des variables d'articulation et on obtient ainsi la configuration de ces dernières. [34]



**Figure III.3** Configuration possible pour obtenir les angles.

On peut générer des équations et trouver nos angles :

$$\cos(\theta_T) = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad (\text{III.1})$$

$$\theta_T = \cos^{-1} \left( \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \right)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_T) = \frac{L1^2 + X^2 + Y^2 - L2^2}{2 \cdot L1 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (\text{III.2})$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left( \frac{L1^2 + X^2 + Y^2 - L2^2}{2 \cdot L1 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}} \right) + \theta_T$$

$$\cos(180 - \theta_2) = \frac{L1^2 + L2^2 - (X^2 + Y^2)}{2 \cdot L1 \cdot L2} \quad (\text{III.3})$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left( \frac{L1^2 + L2^2 - (X^2 + Y^2)}{2 \cdot L1 \cdot L2} \right)$$

La méthode analytique permet de trouver des résultats pour un système simple, Cependant dans le cas d'un système plus complexe (plus d'articulations) où dans le cas où on souhaite fournir une méthode fonctionnant pour tous les systèmes, la méthode analytique n'est pas adaptée est elle devient rapidement très lourde donc on doit recommencer si les articulations changent.

### III.2.2 Utilisation du Jacobien

On peut cependant déterminer la solution au système de façon itérative en utilisant un Jacobien. D'un point de vue de cinématique inverse, le Jacobien met en relation la variation de l'articulation cible en fonction de la variation des variables d'articulation.

Il existe quelques cas particuliers qui peuvent poser problème dans un Jacobien :

#### a. Singularités dans le système

- Peut générer une matrice singulière qui n'est plus inversible.
- Peut générer une matrice presque singulière, qui va souffrir des imprécisions numériques de l'ordinateur lors de l'inversion, puisqu'on touche à des chiffres très près de 0.
- Se remarque habituellement lorsque plusieurs articulations sont parfaitement alignées (diamétralement opposées ou repliées sur elles-mêmes).

#### b. Systèmes sur-contraints

- Système où le positionnement final d'une articulation cible ne peut être atteint avec les arcs/articulations à notre disposition, à cause des contraintes d'articulations, d'une distance ou d'un objectif inaccessible ou d'une simplicité trop grande du système pour le mouvement requis.

Parmi **les avantages** du Jacobien :

- Permet d'obtenir une solution ayant une précision contrôlable. ( plus les incréments sont petits, plus la solution sera précise).
- Facile à implémenter.
- On connaît la "forme" de chaque articulation au sein du Jacobien, il faut seulement "plugger" les chiffres dans chaque.
- Requiert une inversion/multiplication de matrice, opérations simples et rapides à effectuer.

### III.2.3. Solution Approche Algébrique

Dans plusieurs applications commerciales, la performance plutôt que la précision est un facteur plus déterminant dans la résolution d'un système de cinématique inverse.

Pour répondre à de telles conditions, cette méthode est plus flexible et reposant moins sur le calcul numérique que la méthode du Jacobien inverse.

#### III.2.3.1. Exemple manipulateur plan 2R

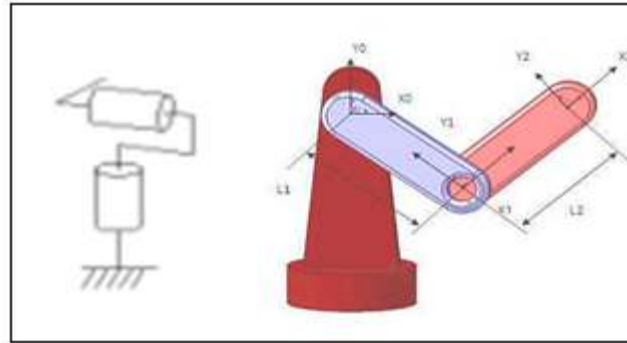


Figure III.4 manipulateur plane 2-R.

Pour obtenir le modèle cinématique, nous avons considéré Denavit-Hartenberg(D-H), dont les paramètres sont répertoriés au tableau III.1.

Tableau III.1. Paramètres de DH de Robot 2-R

Lien	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\theta_1$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2$

On peut trouver ci la matrice de transformation d'une image à par substitution directe des paramètres DH. Présenter la rotation entre les deux.  ${}^0i o_{i-1} R_{i-1,i} R_{i-1}$  et  $R_i P_{i-1,i}$

Pour le premier lien :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.4)$$

Le deuxième lien :

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.5)$$

$${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

On a:

$$\begin{cases} P_x = l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ P_y = l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ P_z = 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Solution Approche Algébrique:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{bmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos\theta_2 \quad (\text{III.8})$$

Nous avons alors:

$$\cos\theta_2 = \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$\theta_2 = \pm \cos^{-1} \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (\text{III.9})$$

$$x = (l_1 + l_2 c_2) \cos\theta_1 - l_2 s_2 \sin\theta_1$$

$$y = (l_1 + l_2 c_2) \sin\theta_1 + l_2 s_2 \cos\theta_1$$

Il est connu que :

$$a \cos\theta + b \sin\theta = c$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c}{\mp \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} - \tan^{-1} \frac{a}{b} \quad (\text{III.10})$$

Nous considérons que l'une des équations :

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 - y^2}} \pm \tan^{-1} \frac{a_2 s_2}{a_1 + a_2 c_2} \quad (\text{III.11})$$

$$(x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos\theta_2) \quad (\text{III.12})$$

On a :

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x} \pm \tan^{-1} \frac{l_2 \sin\theta_2}{l_1 + l_2 \cos\theta_2}$$

$$\theta_2 = \pm \cos^{-1} \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

Cette application va porter la comparaison géométrique pendant le mouvement du robot 2-R

Avec :  $l_1 = l_2 = 0.25\text{m}$

Ce point de pointe est censé se déplacer sur une ligne donnée :

$$Y = -0.25998X + 0.3705 \quad (\text{III.22})$$

Entre P1 et P2 en 10 sec

$$X_{P_1} = 0.41122 \quad Y_{P_1} = 0.26359$$

$$X_{P_2} = -0.0282 \quad Y_{P_2} = 0.37783$$

Définissant un chemin cube de repos à repos pour X, on détermine le chemin cartésien du point de pointe :

$$X = 0.41122 - 0.0131826t^2 + 0.00087884t^3 \quad (\text{III.13})$$

$$Y = -0.00022848t^3 + 0.003427t^2 + 0.26359 \quad (\text{III.14})$$

En utilisant l'approche solution algébrique pour résoudre la cinématique inverse nous donne quatre solutions:

$$\text{Solution 1} \begin{cases} \theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{l_2 \sin \theta_2}{l_1 + l_2 \cos \theta_2} \\ \theta_2 = -\cos^{-1} \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Solution 2} \begin{cases} \theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \tan^{-1} \frac{l_2 \sin \theta_2}{l_1 + l_2 \cos \theta_2} \\ \theta_2 = +\cos^{-1} \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

$$\text{Solution 3} \begin{cases} \theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{l_2 \sin \theta_2}{l_1 + l_2 \cos \theta_2} \\ \theta_2 = +\cos^{-1} \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

$$\text{Solution 4} \begin{cases} \theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \tan^{-1} \frac{l_2 \sin \theta_2}{l_1 + l_2 \cos \theta_2} \\ \theta_2 = -\cos^{-1} \frac{X^2 + Y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$



### III.3. Paramètres de Robot Médical (3R)

Dans ce projet nous avons proposés un modèle d'un robot médicale RRR qui fait la radiographie (orthopédie) au niveau de corps humain pour la colonne vertébrale.



**Figure III.5** Commandement de robot radiographie (orthopédie).

La colonne vertébrale est une tige osseuse située à la partie postérieure du tronc, sur la ligne médiane, elle est à la fois flexible et résistante. On la désigne encore sous le nom plus commun de rachis ou colonne rachidienne.

Chez l'adulte, la colonne vertébrale présente habituellement une longueur de 72 à 75 cm.



**Figure III.6** Colonne vertébrale.

Notre robot est composé de trois (03) corps, notés  $C_1, \dots, C_3$  et de trois (03) articulations on rotation (3R). Le corps  $C_0$  désigne la base du robot et le corps  $C_3$  le corps qui porte l'organe terminal.

Les paramètres du robot sont résumés dans le tableau suivant :

**Tableau III.2** paramètres du robot 3-R .

$l_i$ : Distance en m.

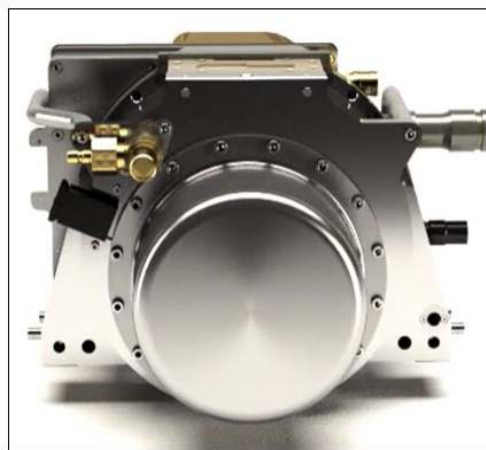
$m_i$  : masse en kg.

i	$l_i$ (m)	$m_i$ (Kg)
1	$l_1 = 0.5$	$m_1 = 6.38$
2	$l_2 = 0.5$	$m_2 = 6.38$
3	$l_3 = 0.20$	$m_3 = 2.32$

### III.3.1 Outil SOMATOM (OT)

Le SOMATOM Force utilise des combinaisons multiples, Il est équipé du tube à rayons X Vectron avec refroidissement direct de l'anode: la tension peut ainsi être réglée par paliers de 10 kV entre 70 et 150 kV ou choisie automatiquement par CARE kV en fonction de la forme du corps du patient et le type d'examen.

Avec une vitesse de couverture volumétrique allant jusqu'à **375 mm/s**, il est possible désormais d'effectuer un scan du thorax et de l'abdomen en une deux seconde seulement.[41]



**Figure III.7** Scanner SOMATOM.

### III.4. Conception de Robot

#### III.4.1. Conception Assistée Par Ordinateur (CAO)

La conception assistée par ordinateur (CAO) permet de créer une vue virtuelle d'un projet servant de maquette pour la simulation. Cette technique est très importante, compte tenue de l'enjeu économique et financier de certains projets, elle est aussi utilisée pour réaliser des séquences cinématographiques qu'il serait impossible ou trop onéreux de tourner véritablement.

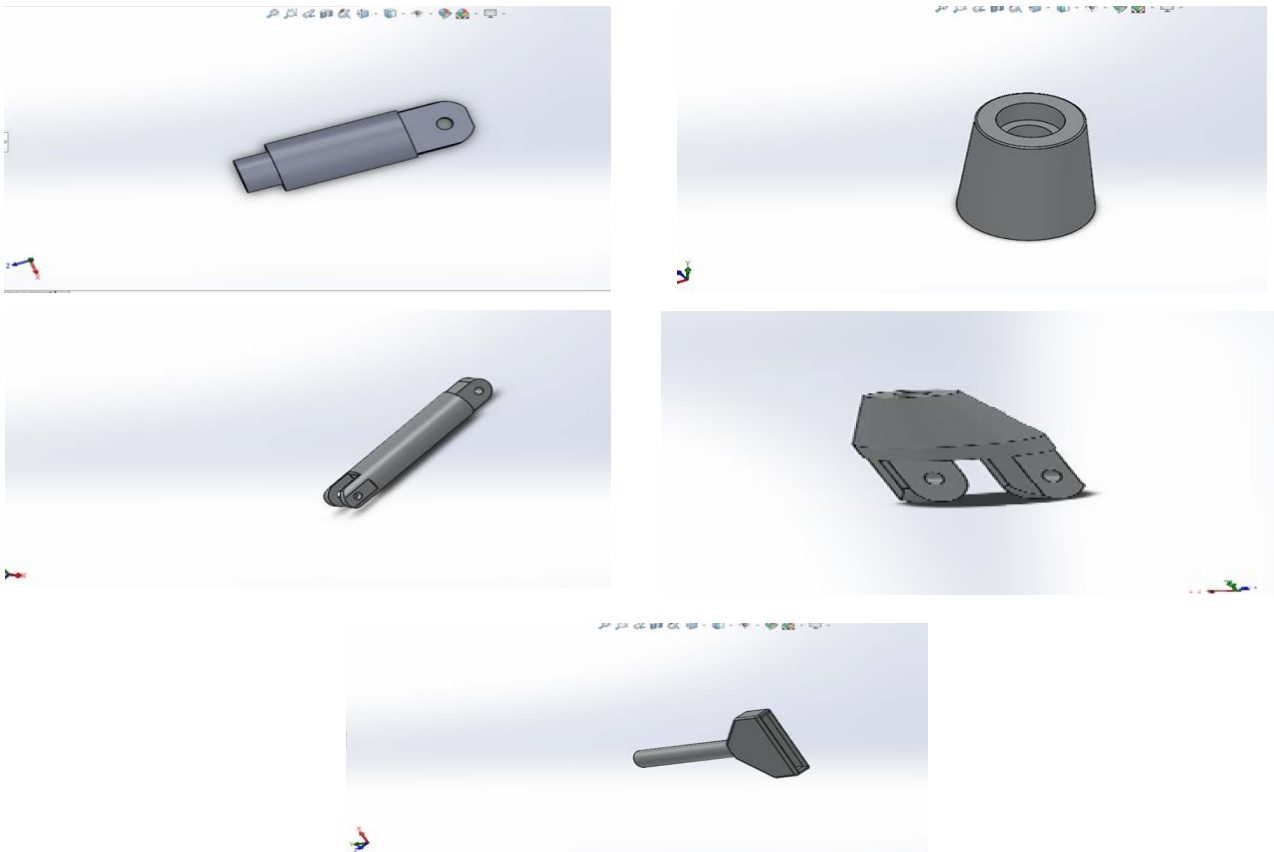


Figure III.8 Pièces de robot avant assemblage.

Assemblage :

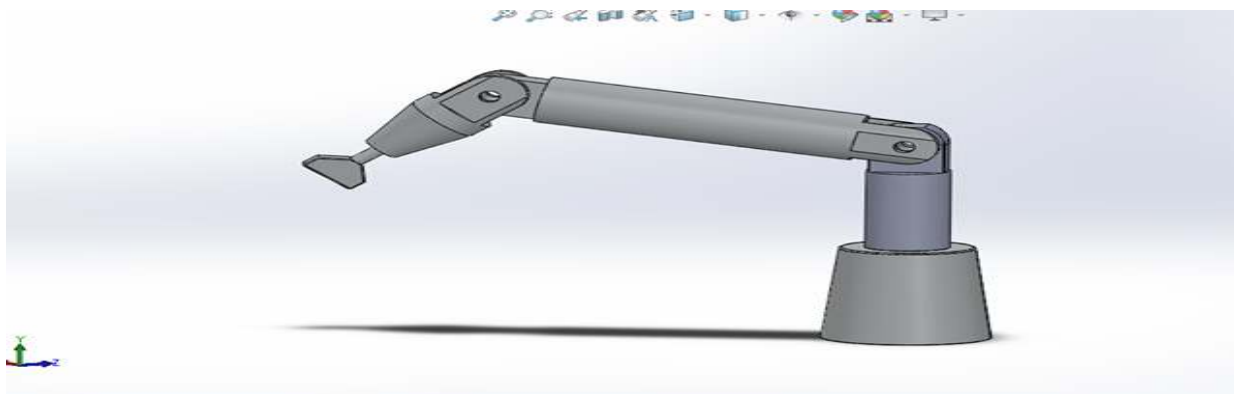


Figure III.9 Vue d'ensemble du robot.

### III.5. Calcul de modèle géométrique direct (MGD)

La détermination du modèle géométrique direct (MGD) consiste à trouver la transformation  $T_3^0$  qui permet de décrire la situation du repère final par rapport au repère de base choisi. Pour cela, on doit calculer les matrices de transformation élémentaires ( $T_i^{i-1}$ ), pour  $i$  variant de 0 à 3 puis on effectue le produit matriciel de toutes les matrices.

**Tableau III.3** Paramètres géométriques (D-H).

$i$	$\sigma_i$	$\alpha_i$	$\theta_i$	$d_i$	$ri$
1	0	0	$\theta_1$	0	0
2	0	0	$\theta_2$	0	0
3	0	0	$\theta_3$	$l_2$	0
E		0	0	0	$lE$

$d_i$  : Distance.

$\sigma_i=0$  si liaison de rotation.

$\sigma_i=1$  si liaison de translation.

$$L_E = l_3 + l(OT) + D$$

$\theta_i$  : Angle représente les axes des rotations.

$lE$  : Outil terminale avec une distance entre outil et la table est de 500mm.

Le paramètre articulaire  $q_i$  de la liaison sera  $\theta_i$  et  $\alpha_i$  si liaison de rotation ou  $a_i$  et  $d_i$  liaison de translation. Introduisant la variable booléenne  $\sigma_i$  définie par :

$\sigma_i=0$  si liaison de rotation

$\sigma_i=1$  si liaison de translation

### III.5.1 Calcul des matrices de passages élémentaires

A partir du tableau des paramètres géométriques du robot et en utilisant la matrice de transformation générale, on trouve :

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} [A] & \{P\} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -a_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & a_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & -d_i \cdot \cos(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & d_i \cdot \sin(\theta_i) \\ 0 & -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & -a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Pour simplifier l'écriture prendre :

$\theta_i$  : Angle représente les axes des rotations.

$$c_i = \cos(\theta_i) ; \quad s_i = \sin(\theta_i) ; \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j) ; \quad s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j).$$

Calcul les transformations homogènes :

1<sup>er</sup> passage :

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

2<sup>eme</sup> passage:

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

3<sup>eme</sup> passage:

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C3 & S3 & 0 & L_2 \\ -S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Avec la matrice outil :

$$T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_E \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

$$L_E = l_3 + l(OT) + D$$

Le passage globale  $T_j^i = T_3^0$

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_E$$

A l'aide programme MATLAB on détermine la matrice  $T_3^0$  :

La matrice  $T_1^0 \cdot T_2^1$

$$T_1^0 \cdot T_2^1 = \begin{bmatrix} C1.C2 & -C1.S2 & S1 & 0 \\ C2.S1 & -S1.S2 & -C1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

La matrice  $T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2$  :

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 = \begin{bmatrix} C23.C1 & -S23.C1 & S1 & L2.C1.C2 \\ C23.S1 & -S23.S1 & -C1 & L2.C2.S1 \\ S23 & C23 & 0 & L2.S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Passage globale :

$$T_G^0 = T_3^0 \cdot T_E = \begin{bmatrix} C23.C1 & -S23.C1 & S1 & lE.C23.C1 + L2.C1.C2 \\ C23.S1 & -S23.S1 & -C1 & lE.C23.S1 + L2.C2.S1 \\ S23 & C23 & 0 & lE.S23 + L2.S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Avec :  $L_2 = lE = 500$

$$T_G^0 = T_3^0 \cdot TE = \begin{bmatrix} C23.C1 & -S23.C1 & S1 & 500.C1.(C23 + C2) \\ C23.S1 & -S23.S1 & -C1 & 500.S1(C23 + C2) \\ S23 & C23 & 0 & 500.S23 + 500.S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.29)$$

$$T_G^0 = T_2^0 \cdot T_3^2 \cdot TE = \begin{bmatrix} s_x' & n_x' & a_x' & p_x' \\ s_y' & n_y' & a_y' & p_y' \\ s_z' & n_z' & a_z' & p_z' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.30)$$

La dernière colonne de la matrice de transformation homogène nous donne les coordonnées ( $p_x$ ) et ( $p_y$ ) de l'outil terminal (OT).

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500.C1.(C23 + C2) \\ 500.S1(C23 + C2) \\ 500.S23 + 500.S2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (III.31)$$

### III.6. Modèle géométrique inverse (MGI)

Le SOMATOM forme un angle de  $95^\circ$  donc :

$$\theta_3 = 90 - (95/2)$$

$$\theta_3 = 42.5^\circ$$

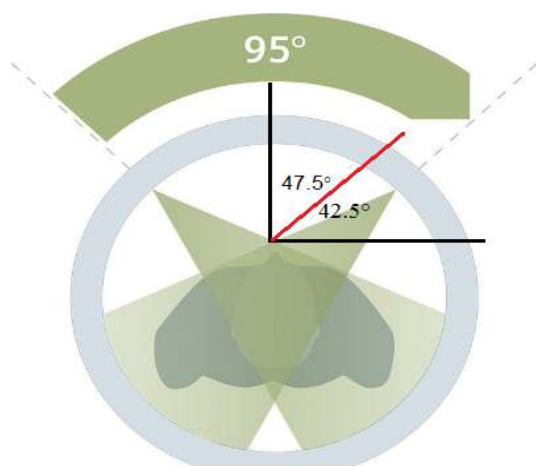


Figure III.10 Angle formé par SOMATOM.

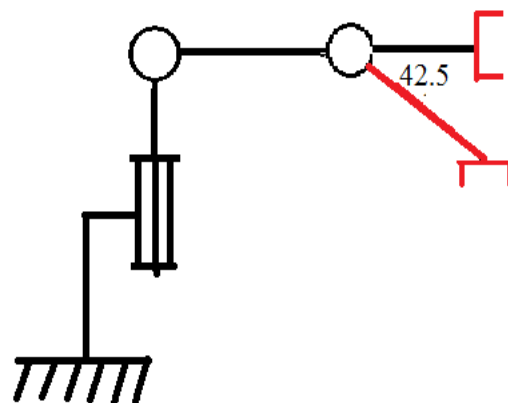


Figure III.11 Schéma de variation d'angle.

On utilisation de méthode de **Paul** on a :

$$U_0 = T_G^0 \cdot E \quad \text{Avec :}$$

$$E = (TE)^{-1}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x' & n_x' & a_x' & p_x' \\ s_y' & n_y' & a_y' & p_y' \\ s_z' & n_z' & a_z' & p_z' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -lE \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} C23.C1 & -S23.C1 & S1 & 500.C1.C2 \\ C23.S1 & -S23.S1 & -C1 & 500.C2.S1 \\ S23 & C23 & 0 & 500.S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_3^0 \quad (\text{III.32})$$

$$s_x = C23.C1 ; \quad s_y = C23.S1 ; \quad s_z = S23$$

$$n_x = -S23.C1 ; \quad n_y = -S23.S1 ; \quad n_z = C23$$

$$a_x = S1 ; \quad a_y = -C1 ; \quad a_z = 0$$

$$p_x = 500.C1.C2 ; \quad p_y = 500.C2.S1 ; \quad p_z = 500.S2$$

$$U_1 = (T_1^0)^{-1} \times U_0 = T_2^1 \cdot T_3^2$$

$$= (T_1^0)^{-1} \times \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B1 & E1 & D1 & H1 \\ B2 & E2 & D2 & H2 \\ B3 & E3 & D3 & H3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_2^1 \cdot T_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} s_x.c1 - s_y.s1 & n_x.c1 - n_y.s1 & a_x.c1 - a_y.s1 & p_x.c1 - p_y.s1 \\ s_y.c1 - s_x.s1 & n_y.c1 - n_y.s1 & a_y.c1 - a_y.s1 & p_y.c1 - p_x.s1 \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C23.C1 & -S23.C1 & S1 & 500.C2 \\ C23.S1 & -S23.S1 & -C1 & 0 \\ S23 & C23 & 0 & 500.S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

$$B1 = s_x.c1 - s_y.s1 ; \quad B2 = s_y.c1 - s_x.s1 ; \quad B3 = s_z$$

$$E1 = n_x.c1 - n_y.s1 ; \quad E2 = n_y.c1 - n_y.s1 ; \quad E3 = n_z$$

$$D1 = a_x.c1 - a_y.s1 ; \quad D2 = a_y.c1 - a_y.s1 ; \quad D3 = a_z$$

$$H1 = p_x.C1 + p_y.S1 = 500.C2 \quad H2 = p_x.C1 - p_y.S1 \quad (\text{III.34})$$

$$H3 = p_z = 500.S2$$



De (III.34) :

$$p_x \cdot C1 - p_y \cdot S1 = 0$$

$$\frac{S1}{C1} = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\tan 1 = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{p_y}{p_x} \right)$$

$$U_2 = (T_2^1)^{-1} \times U_1 = (T_2^1)^{-1} \times \begin{bmatrix} B1 & E1 & D1 & H1 \\ B2 & E2 & D2 & H2 \\ B3 & E3 & D3 & H3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bx & Ex & Dx & Hx \\ By & Ey & Dy & Hy \\ Bz & Ez & Dz & Hz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_3^2$$

$$Bx = C3 ; \quad By = -S3 ; \quad Bz = 0$$

$$Ex = S3 ; \quad Ey = C3 ; \quad Ez = 0$$

$$Dx = 0 ; \quad Dy = 0 ; \quad Dz = 1$$

$$Hx = p_z \cdot s_2 + (p_x \cdot c_1 + p_y \cdot s_1) \cdot c_2 = L_2$$

$$Hy = p_z \cdot c_2 - (p_x \cdot c_1 + p_y \cdot s_1) \cdot s_2 = 0$$

$$Hz = p_x \cdot s_1 - p_y \cdot c_1 = 0$$

on pose :

$$B = (p_x \cdot c_1 + p_y \cdot s_1)$$

$$Hy = p_z \cdot c_2 - (p_x \cdot c_1 + p_y \cdot s_1) \cdot s_2 = 0 \tag{III.35}$$

$$c_2 = B \cdot \frac{s_2}{p_z} \tag{III.36}$$

on remplace (III.36) dans (III.35) :

$$p_z \cdot s_2 + B \cdot B \cdot s_2 / p_z = L_2$$

$$s_2 = (L_2 \cdot p_z) / (B^2 + p_z^2)$$

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{L_2 \cdot P_z}{(B^2 + p_z^2)} \right)$$

**III.7. Model Cinématique direct (MCD)**

Calcule de la matrice jacobine :

$$J(q) = \frac{\partial X}{\partial q}$$

$$\begin{bmatrix} -lE.S1.C23 - l.S1.C2 & lE.C1.S23 - lE.C1.C2 & lE.C1.S23 \\ l.C1.C23 + l.C1.C2 & -l3.S1.S23 - l.C1.C2 & -l.S1.S23 \\ 0 & l.C23 + l.C2 & l.C23 \end{bmatrix} \quad (III.37)$$

$$J11 = -lE.S1.C23 - l.S1.C2 \quad J12 = lE.C1.S23 - lE.C1.C2 \quad J13 = lE.C1.S23$$

$$J21 = l.C1.C23 + l.C1.C2 \quad J22 = -l3.S1.S23 - l.C1.C2 \quad J23 = -l.S1.S23$$

$$J31 = 0 \quad J32 = l.C23 + l.C2 \quad J33 = l.C23$$

On fait varier les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , afin de balayer la sonde ultrason le long du corps (vertèbre) humain tel que :

$$-90^\circ < \theta_1 < 90^\circ$$

$$0^\circ < \theta_2 < 60^\circ$$

$$\theta_3 = -42.5^\circ$$

On peut donc poser comme des conditions initiales, afin de déterminer la trajectoire en fonction de temps dans l'espace articulaire, les valeurs suivantes :

$$\theta_1(0) = -90^\circ \quad \dot{\theta}_1(0) = 0 \quad \ddot{\theta}_1(0) = 0$$

$$\theta_1(10) = 90^\circ \quad \dot{\theta}_1(10) = 0 \quad \ddot{\theta}_1(10) = 0$$

A partir d'une interpolation simple, on trouve la fonction polynomiale :

$$\theta_1(t) = 180 \left( -\frac{1}{2} + 0.01t^3 - 0.0015t^4 + 0.0001t^5 \right) \text{deg} \quad (III.38)$$

$$\theta_2(0) = -30^\circ \quad \theta_2(1) = 0^\circ$$

$$\theta_2(t) = 30(-1 + 3t - 3t^2 + t^3) \text{deg} \quad (III.39)$$

$$\theta_3(t) = -42.5 \quad (III.40)$$

### III.8. Model Cinématique inverse (MGI)

On va étudier le cas d'une trajectoire rectiligne (le robot doit faire un balayage de la sonde le long d'un corps humain (vertèbre) tel que

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J11 & J12 & J13 \\ J21 & J22 & J23 \\ J31 & J32 & J33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

$$\text{inverse} \begin{bmatrix} J11 & J12 & J13 \\ J21 & J22 & J23 \\ J31 & J32 & J33 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Il est possible de calculer la matrice Jacobienne par une méthode de calcul direct basée sur la relation entre les vitesses de translation et de rotation des différents solides (éléments) qui composent le système.

Le mouvement entre  $q_i$  et  $q_f$  en fonction du temps  $t$  est décrit par l'équation suivante :

$$q(t) = q_i + r(t)D \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_f.$$

$$\text{Avec : } D = (q_f - q_i)$$

$$a(t) = a_0 + a_1.t^1 + a_2.t^2 + a_3.t^3 + a_4.t^4 + a_5.t^5 + a_n.t^n \dots, \quad (\text{III .40})$$

Interpolation polynomiale de degré cinq :

$$q(t) = x_i + \left( 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right) D \quad (\text{III .41})$$

$$a(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (\text{III .42})$$

on a :

$$p1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad p2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = x_i + \left( 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right) (x_f - x_i)$$

$$X(t) = 0.5$$

$$Y(t) = y_i + \left( 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right) (y_f - y_i)$$

$$Y(t) = 0.9375 \cdot t^3 - 0.703125 \cdot t^4 + 0.140625 \cdot t^5$$

$$Z(t) = z_i + \left( 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right) (z_f - z_i)$$

$$Z(t) = 0$$

$$dX(t) = 0$$

$$dZ(t) = 0.$$

$$dY(t) = 2.8125t^2 - 2.8125t^3 + 0.703125t^4$$

$$ddX(t) = 0; ddZ = 0.$$

$$ddY(t) = 5.625t - 8.4375t^2 + 2.8125t^3$$

### III.9. Modèle dynamique

En utilise méthodes classique (Lagrange) :

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = l_1/2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \tag{III.43}$$

$$V_1 = m_1 g l_1 / 2 \tag{III.44}$$

$$x_2 = l_2 \cos \theta_2 \quad y_2 = 0 \quad z_2 = l_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$\dot{x}_2 = -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad \dot{z}_2 = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$\dot{v}_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (\text{III.45})$$

$$V_2 = m_2 g \left( l_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 \right) \quad (\text{III.46})$$

$$x_3 = l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \quad y_3 = 0 \quad z_3 = l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3$$

$$\dot{x}_3 = -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \quad \dot{z}_3 = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3$$

$$\dot{v}_3^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{z}_3^2$$

$$\dot{v}_3^2 = (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + l_3^2 (\dot{\theta}_3)^2 + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 [(l_2 \dot{\theta}_2)^2 + l_3^2 (\dot{\theta}_3)^2 + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)] \quad (\text{III.47})$$

$$V_3 = m_3 g \left[ l_1 + l_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 \sin(\theta_3) \right] \quad (\text{III.48})$$

Calcul de  $K_T$  :

$$K_T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 [(l_2 \dot{\theta}_2)^2 + l_3^2 (\dot{\theta}_3)^2 + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)]$$

Calcul de  $V_T$  :

$$V_T = \frac{m_1 g l_1}{2} + m_2 g \left( l_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 \right) + m_3 g \left[ l_1 + l_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 \sin(\theta_3) \right] \quad (\text{III.49})$$

Lagrange :

$$L = (K_1 + K_2 + K_3) - (V_1 + V_2 + V_3) = K_T - V_T = \left( \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 [(l_2 \dot{\theta}_2)^2 + l_3^2 (\dot{\theta}_3)^2 + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)] \right) - \frac{m_1 g l_1}{2} - m_2 g \left( l_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 \right) - m_3 g \left[ l_1 + l_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 \sin(\theta_3) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = I_1 \ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (m_2 + m_3 l_2) l_2 \dot{\theta}_2 + 2l_2 l_3 (\dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = (m_2 + m_3 l_2) l_2 \ddot{\theta}_2 + 2l_2 l_3 (\ddot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -g l_2 \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) \cos \theta_2 - 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \tag{III.50}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = m_3 l_3^2 (\dot{\theta}_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = m_3 l_3^2 (\ddot{\theta}_3) + 2l_2 l_3 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -\frac{1}{2} m_3 g l_3 \cos(\theta_3) - 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) \tag{III.51}$$

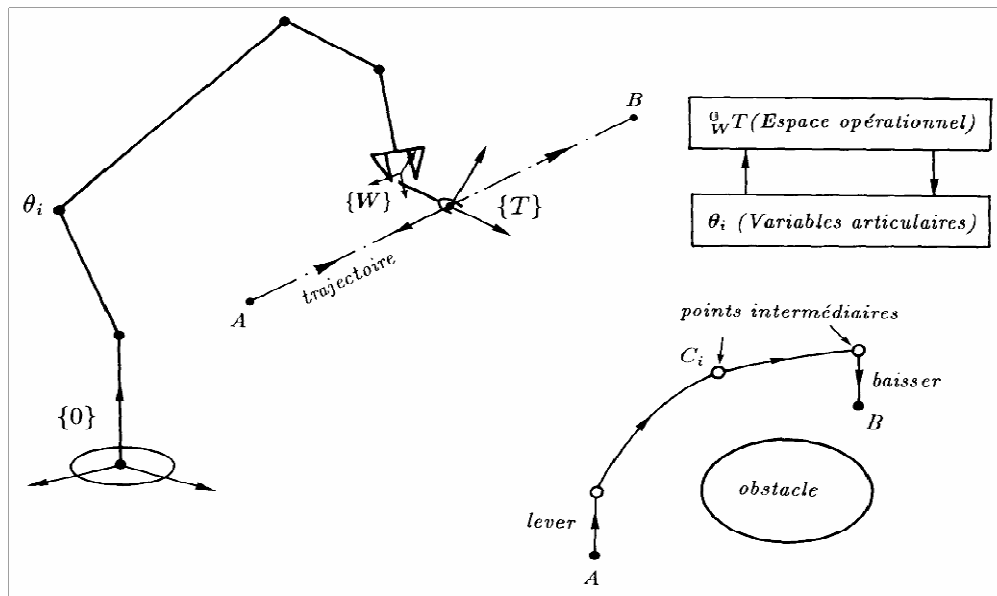
**III.10. Conclusion**

Il n'existe pas de solution générale pour le problème cinématique inverse. On va néanmoins considérer ici quelques situations représentatives, qui pourront inspirer l'ingénieur devant un nouveau futur robot.

### IV.1. Introduction

Pour effectuer une tâche dans l'espace opérationnel (**Figure IV.1**), il est nécessaire d'effectuer une trajectoire à l'intérieur de l'espace de travail.

Du point de vue manipulateur, ceci nous permet de définir l'évolution temporelle de la matrice de transformation homogène qui repère le poignet par rapport à la base de robots.



**Figure IV.1** Génération de trajectoire.

### IV.2 Manipulateur 2-R

Les quatre ensembles de valeurs d'angle de liaison donnée par les équations (III.15) à (III.18) résolvent le problème de cinématique inverse pour le manipulateur plane.

Nous allons vérifier les positions particulières pour le manipulateur plan dans chacune des solutions ci-dessus à l'aide de logiciels MATLAB / boîte à outils.



Tableau IV.1 Solutions Cinématiques Inverse.

Fois	Solution1		Solution2		solution3		Solution4		Position souhaitée	
	$\theta_1(deg)$	$\theta_2(deg)$	$\theta_1(deg)$	$\theta_2(deg)$	$\theta_1(deg)$	$\theta_2(deg)$	$\theta_1(deg)$	$\theta_2(deg)$	$p_x(m)$	$p_y(m)$
0	44,99	-24,68	44,99	24,68	20,31	24,68	20,31	-24,68	0,41	0,26
1	50,07	-32,59	50,07	32,59	17,47	32,59	17,47	-32,59	0,39	0,26
2	60,74	-47,47	60,74	47,47	13,26	47,47	13,26	-47,47	0,36	0,27
3	73,48	-62,27	73,48	62,27	11,20	62,27	11,20	-62,27	0,31	0,28
4	87,14	-74,64	87,14	74,64	12,50	74,64	12,50	-74,64	0,25	0,30
5	100,8 1	-83,32	100,81	83,32	17,49	83,32	17,49	-83,32	0,19	0,32
6	113,3 2	-87,71	113,32	87,71	25,60	87,71	25,60	-87,71	0,12	0,33
7	123,3 4	-88,09	123,34	88,09	35,25	88,09	35,25	-88,09	0,06	0,35
8	130,1 4	-85,77	130,14	85,77	44,37	85,77	44,37	-85,77	0,01	0,36
9	133,8 4	-82,83	133,84	82,83	51,01	82,83	51,01	-82,83	-0,01	0,37
dix	135,0 0	-81,47	135,00	81,47	53,53	81,47	53,53	-81,47	-0,02	0,37

Vérification des résultats par Matlab / Simulink

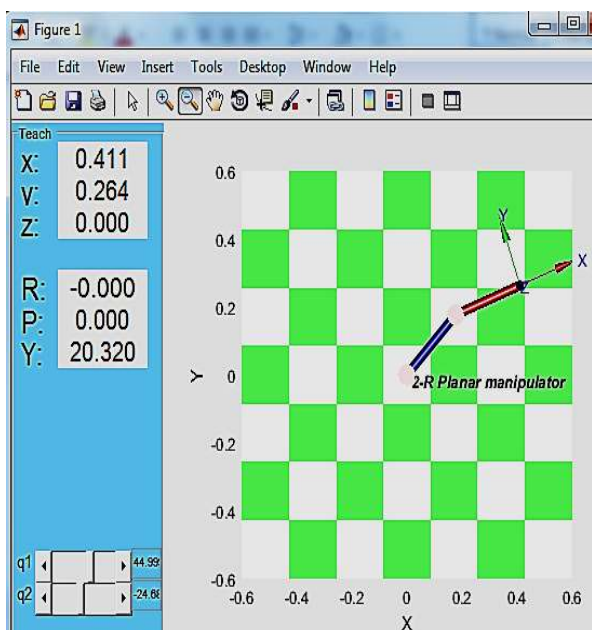


Figure IV.2. Solution 1.

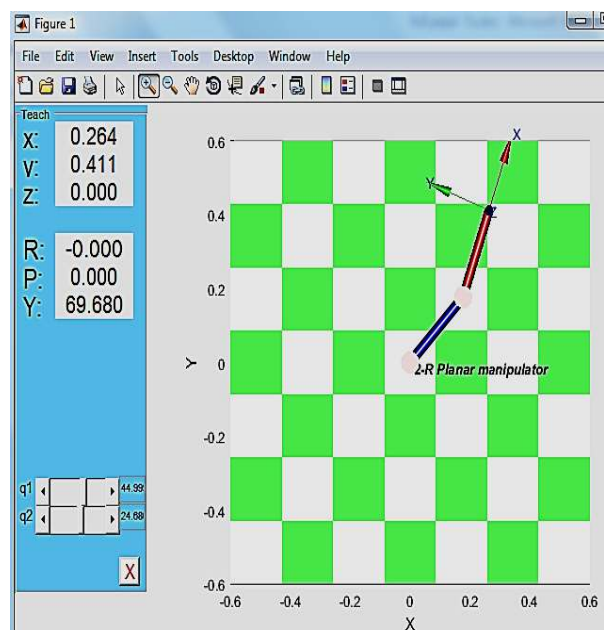


Figure IV.3. Solution 2.

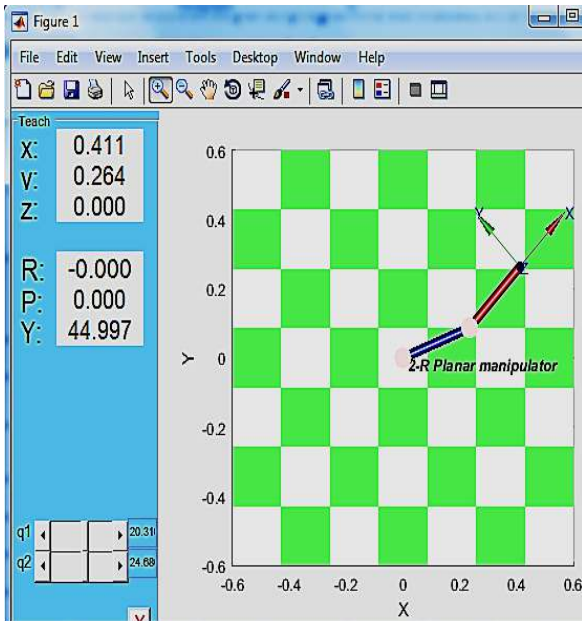


Figure IV.4. Solution 3.

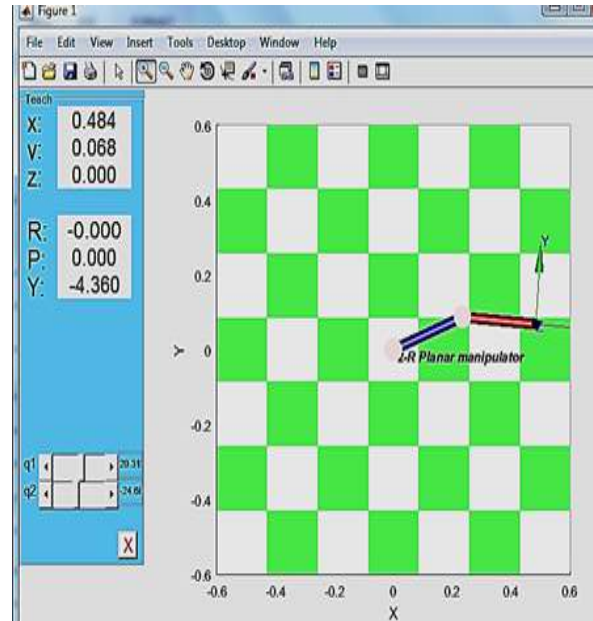


Figure IV.5. Solution 4.

Figure IV.2. Solution 1

$\theta_1 = 44.99 \text{deg}$   
 $\theta_2 = -24.68 \text{deg}$

$$p_x = 0.411m \quad p_y = 0.264m$$

Figure IV.3. Solution 2

$\theta_1 = 20.31 \text{deg}$   
 $\theta_2 = 24.68 \text{deg}$

$$p_x = 0.411m \quad p_y = 0.264m$$

Figure IV.4. Solution 3

$\theta_1 = 44.99 \text{deg}$   
 $\theta_2 = 24.68 \text{deg}$

$$p_x = 0.264m \quad p_y = 0.411m$$

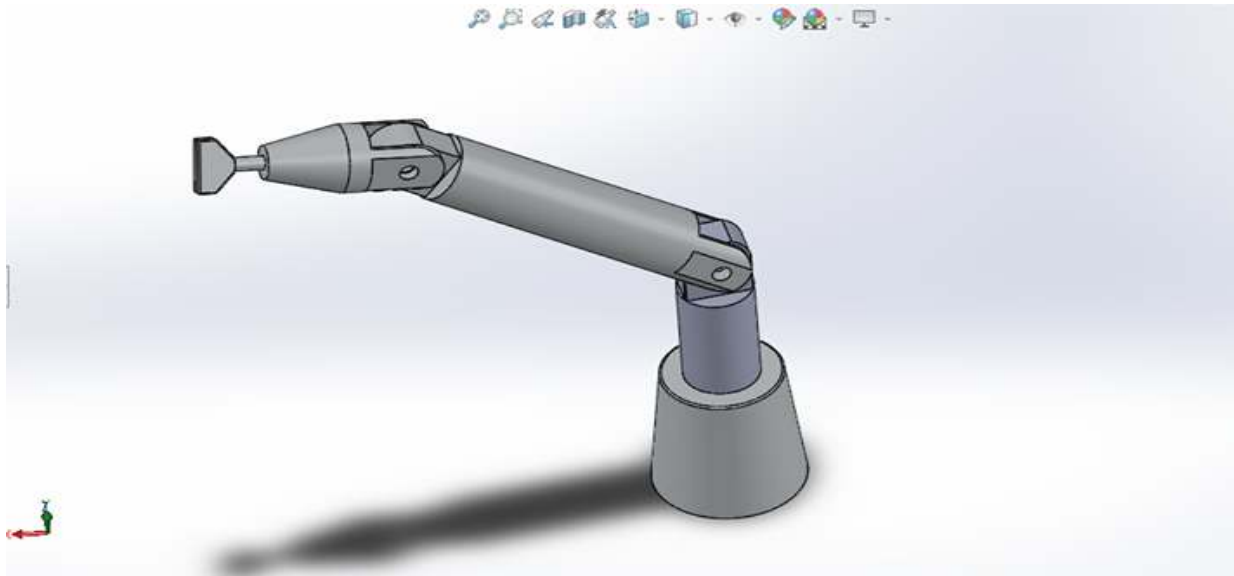
Figure IV.5 Solution 4

$\theta_1 = 20.31 \text{deg}$   
 $\theta_2 = -24.68 \text{deg}$

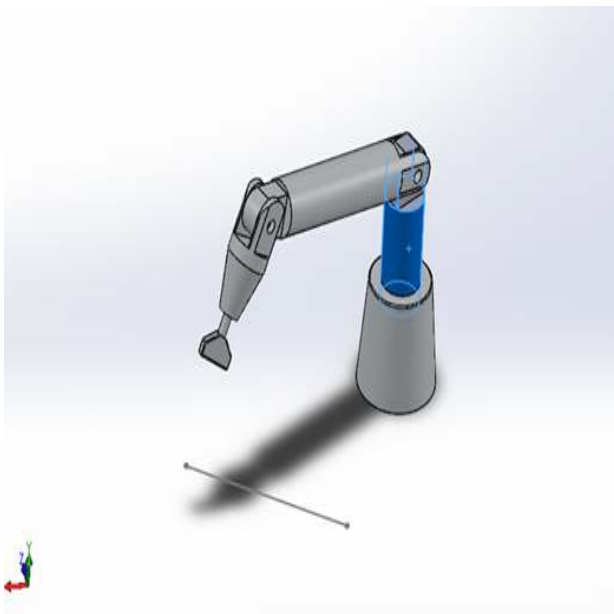
$$p_x = 0.484m \quad p_y = 0.068$$

### IV.3. Trajectoire de manipulateur 3-R

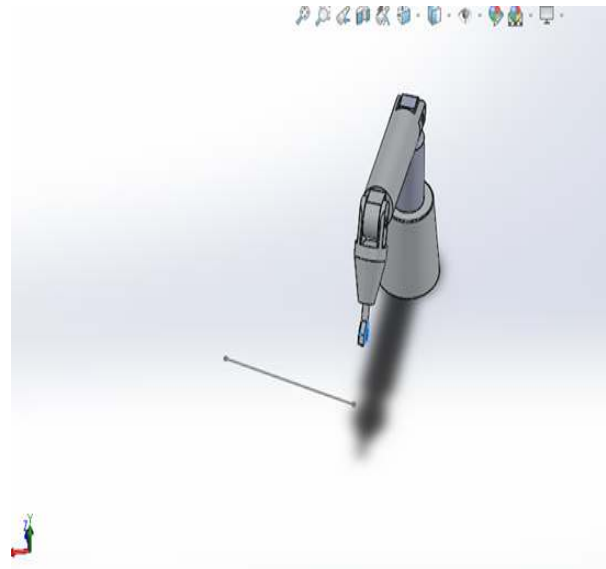
A l'aide du logiciel **SOLIDWORK** on abordé les figures suivantes :



**Figure IV.6** Le robot en position initiale.



**Figure IV.7** Le robot en position a.



**Figure IV.8** Le robot en position b.

A l'aide du logiciel Matlab on a abordé les résultats et les graphes suivantes :

**Tableau IV .2.** Variation des cordonnées opérationnelles et articulées.

Temps	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
t 1	-1.5708	-1.5439	-1.3885	-1.0568	-0.5682	0.0131	0.6007	1.1088	1.4746	1.6813	1.7802
t 2	-0.5236	-0.2681	-0.1131	-0.0335	-0.0042	0	0.0042	0.0335	0.1131	0.2681	0.5236
t 3	-0.1745	-0.1731	-0.1635	-0.1395	-0.0968	-0.0330	0.0524	0.1584	0.2818	0.4181	0.5609
px	0	0.0251	0.1773	0.4879	0.8407	0.9996	0.8243	0.4416	0.2507	-0.0238	-0.1306
py	-0.8160	-0.9339	-0.9616	-0.8640	-0.5367	0.0131	0.5647	0.8867	0.9539	0.8637	0.6521
pz	-0.5714	-0.3459	-0.1930	-0.1028	-0.0525	-0.0165	0.0304	0.1121	0.2488	0.4492	0.6920

Le temps [0.2] dans toutes les courbes :

$$0 \leq t \leq 2$$

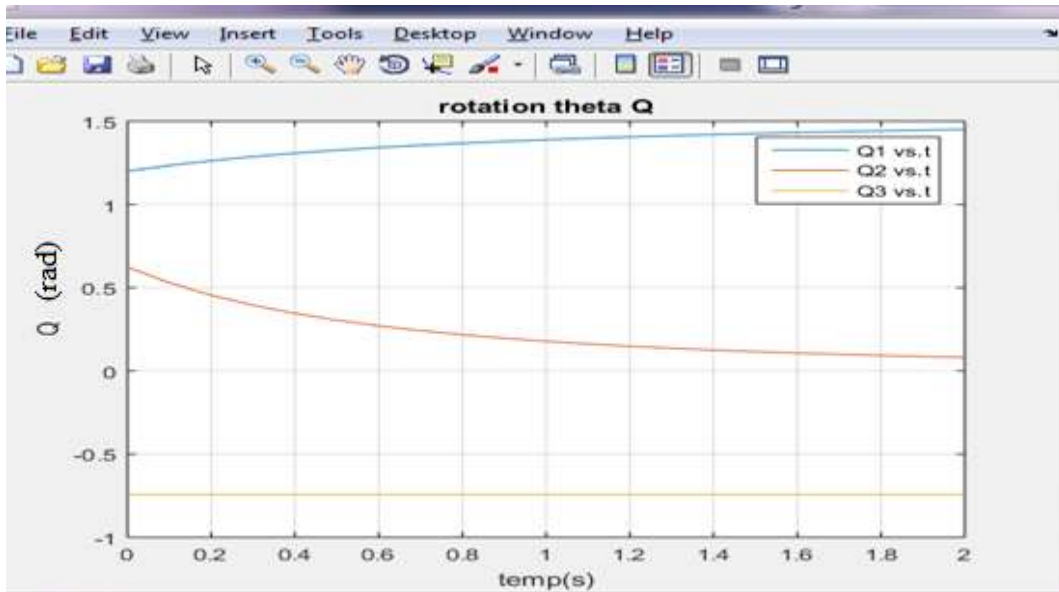


Figure IV.9. Rotation de thêta.

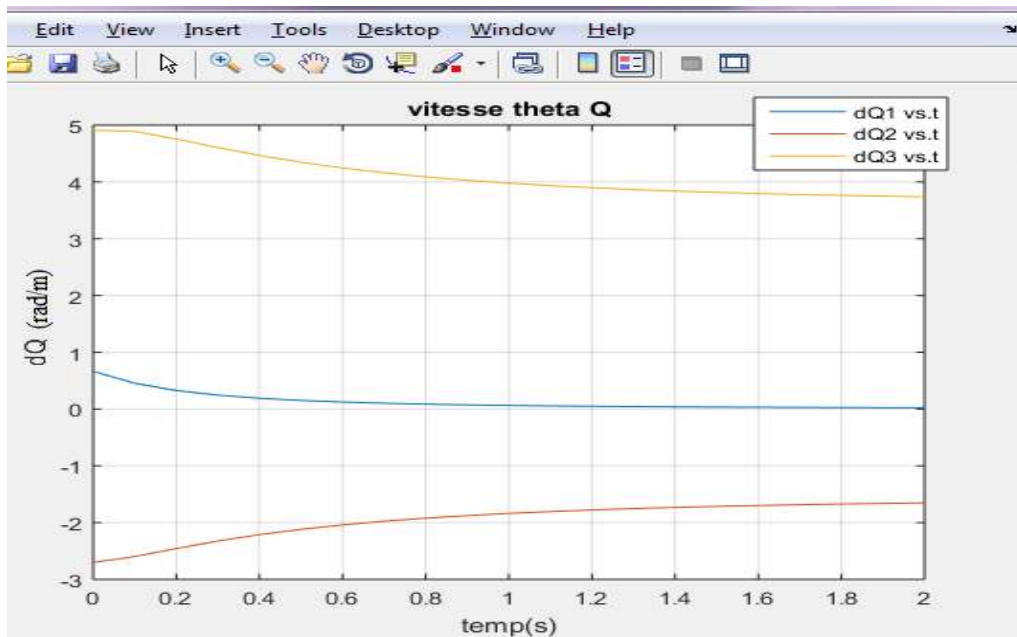


Figure IV.10. Variation de vitesse angulaire.

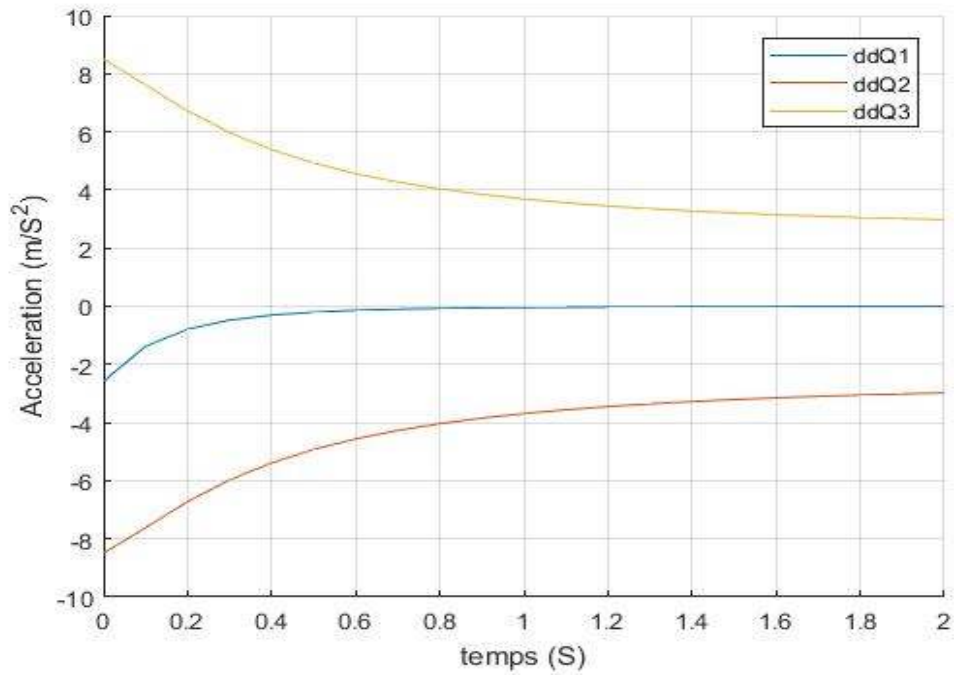


Figure IV.11 Variation d'accélération angulaire.

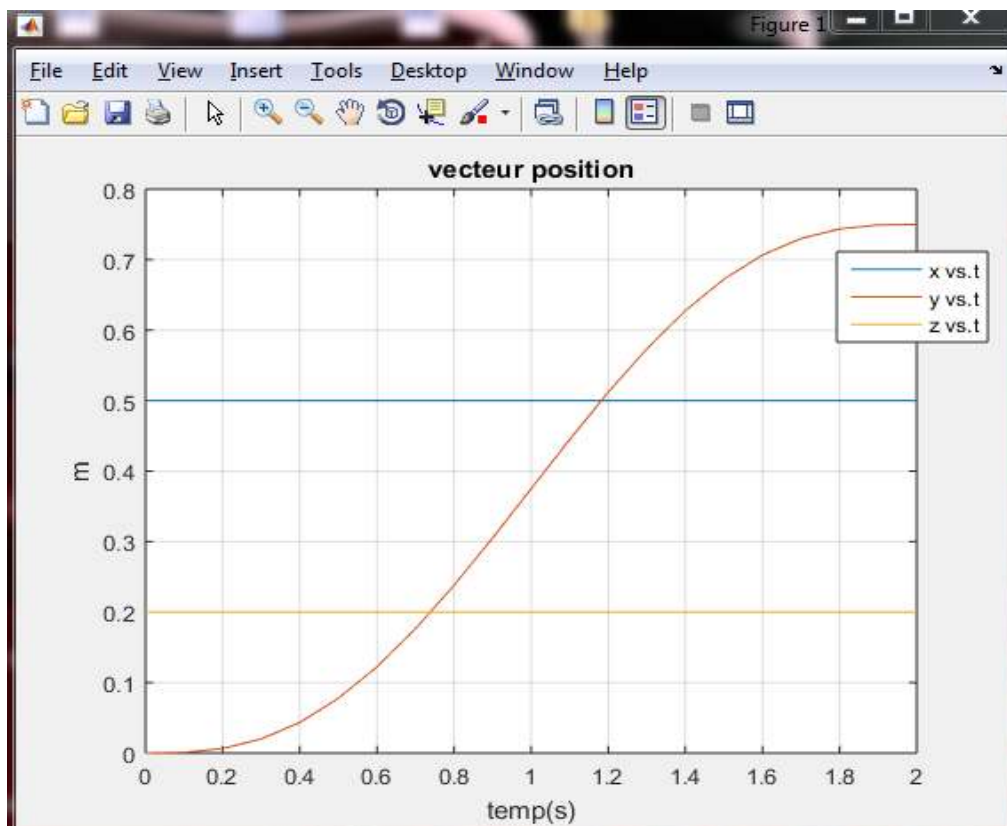


Figure IV.12. Variation de vecteur position.

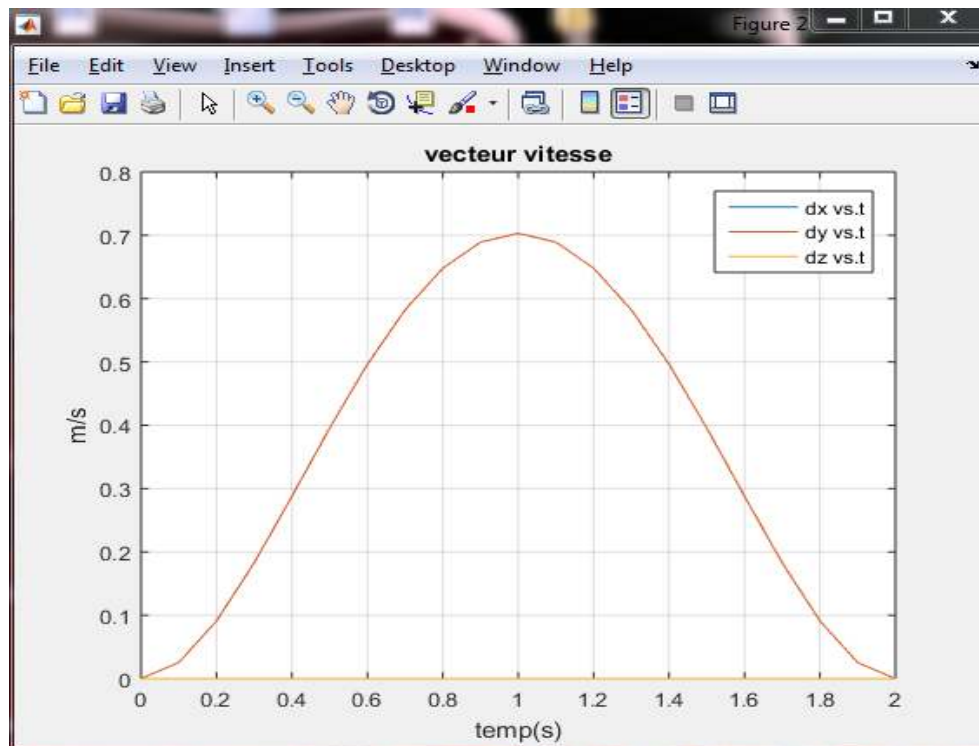


Figure IV.13. Variation de vecteur vitesse.

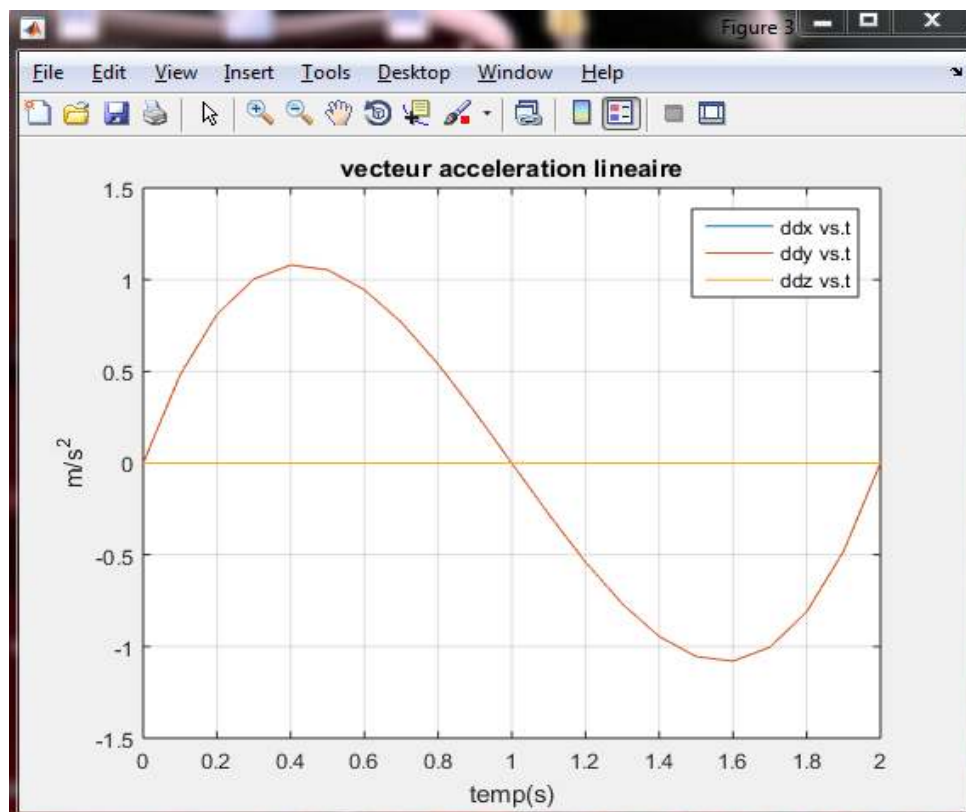


Figure IV.14. Variation des vecteurs accélérations linéaires.



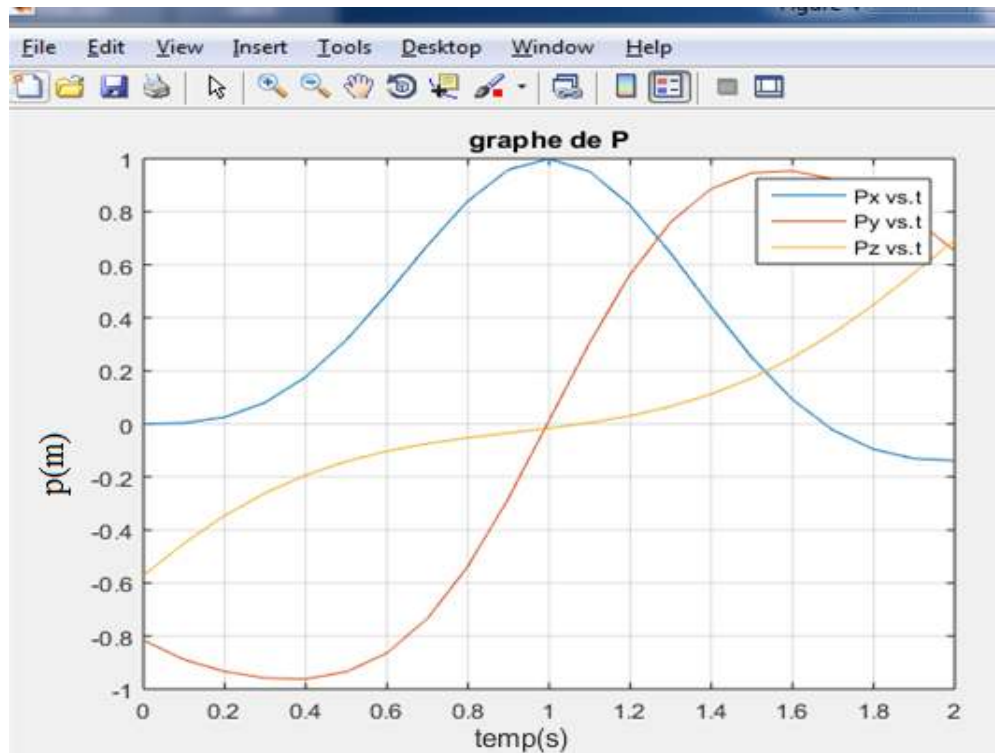


Figure IV.15 Variation de P.

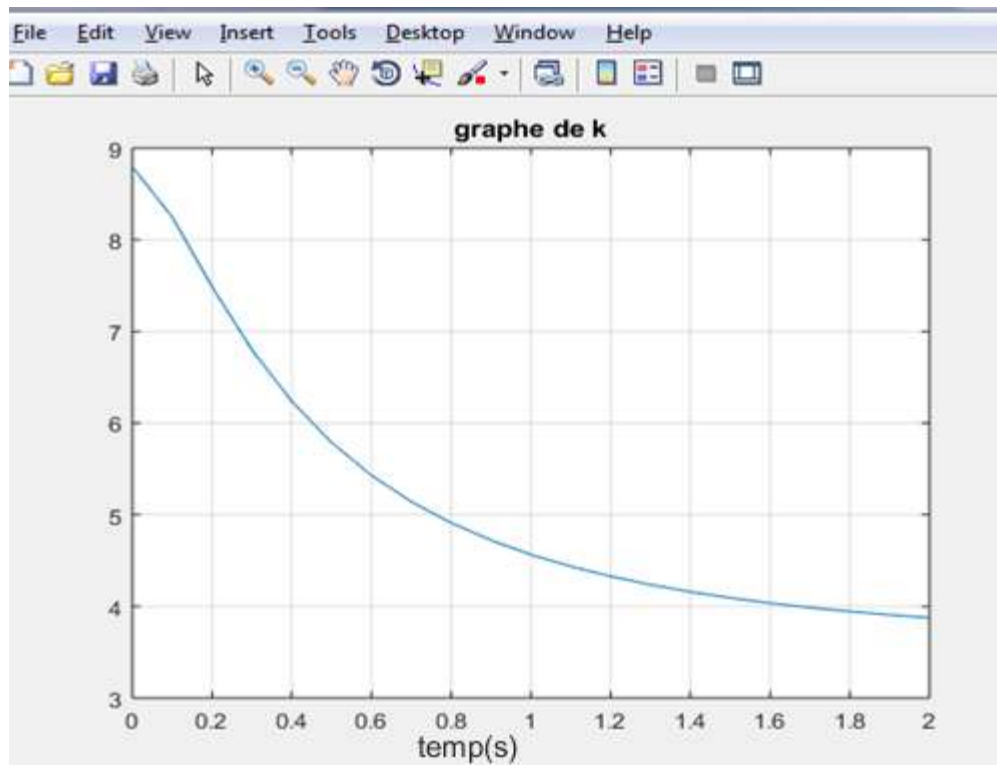


Figure IV.16 graphe de K



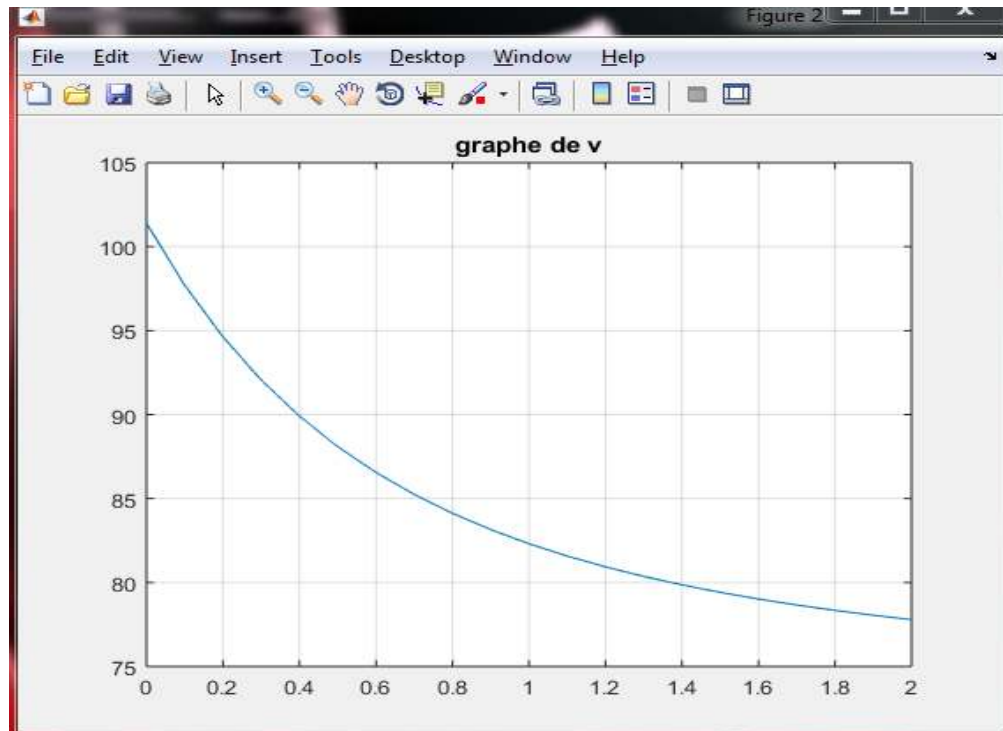


Figure IV.17 graphe de v

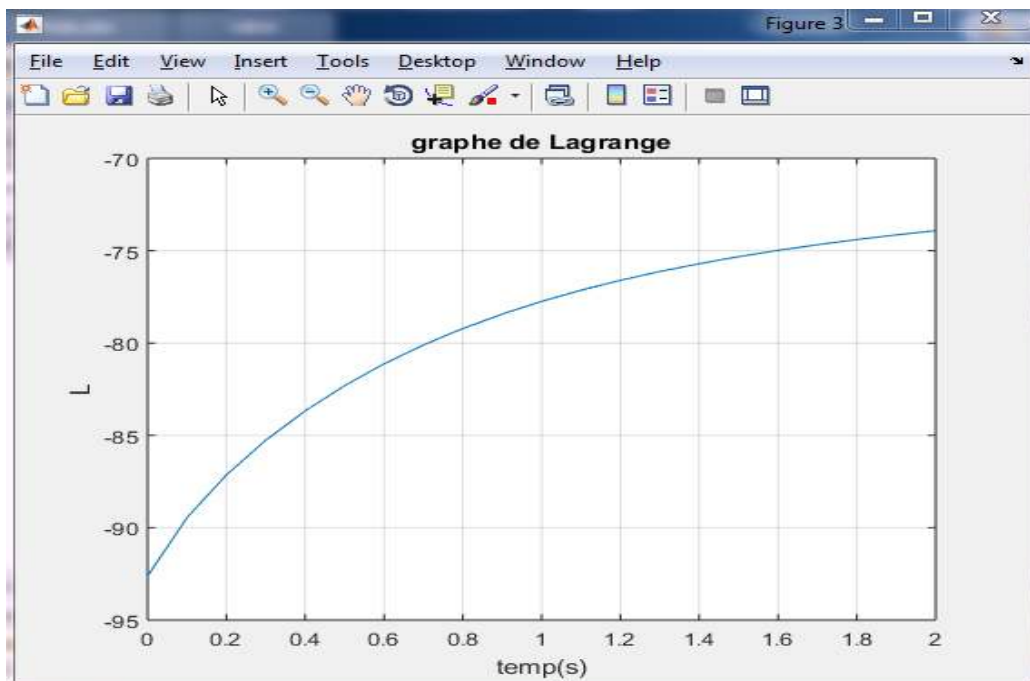


Figure IV.18 graphe de Lagrange.

### IV.3.1 Interprétations des résultats

Un programme de simulation a été finalisé qui englobe les différentes étapes de l'étude. Dans La partie géométrique illustrée par les différentes courbes de position de ce robot (**Figure IV.7**). (**Figure IV.8**).

Un régime adéquat de fonctionnement du robot a été indiqué, dont la partie cinématique (**Figure IV.9**). (**Figure IV.10**) et (**Figure IV.11**).

Le temps [0:2] dans toute les courbes  $0 \leq t \leq 2$  avec :

$$Q1=\theta_1 \quad Q2=\theta_2 \quad Q3=\theta_3$$

**Figure IV.9** : Rotation de  $\theta$

Q 1 vs t : [0 :2] : la courbe augmente de 1.2 jusqu'à 1.45.

Q 2 vs t : [0 : 2] : la courbe diminue de 0.62 jusqu'à 0.08.

Q 3 vs t : [0 :2] : stabilisation en -0.75.

**Figure IV 10** : Variation de vitesse angulaire :

dQ 1 vs t : [0 :2] la courbe de diminue 0.65 jusqu'à 0.

dQ 2 vs t : [0 :0.8] une augmentation de -2.7 jusqu'à -1.80.

dQ 3 vs t : [0 :2] : la courbe de diminue de 4.9 jusqu'à 3.75.

**Figure IV 11** : Variation d'accélération angulaire :

ddQ 1 vs t : [0 :1.2] : augmentation de -1.5 jusqu'à -0.1.

[1.2 : 2] : stabilisation de -0.1 jusqu'à 0.

ddQ 2 vs t : [0 :2] : augmentation de -8.5 jusqu'à -3.

ddQ 3 vs t : [0 :2] la courbe de diminue de 8.5 jusqu'à 3.

**Figure IV.12.** : Variation des vecteurs positions :

X vs t : [0 :2] : La courbe est stable à 0.5.

Y vs t : [0 :2] : la courbe Augmente de 0 jusqu'a 0.75.

Z vs t : [0 :2] : La courbe est stable à 0.2.

**Figure IV.13** :Variation du vecteur vitesse :

dx vs t : de [0 :2] (s) : la vitesse est nulle.

dy vs t : de [0 :1] (s) : la courbe Augmente de 0 jusqu'a 0.7.

de [1 :2] (s) : la courbe de diminue de 0.7 jusqu'à 0.

dz vs t : de [0 :2] (s) : la vitesse est nulle.

**Figure IV.14** : Variation des vecteurs accélérations linéaires :

ddx vs t : l'accélération est nulle.

ddy vs t : la courbe change d'une façon sinusoïdale avec un écart de 1.05.

ddz vs t : l'accélération est nulle.

**Figure IV.15** : Variation de P :

Px vs t : [0:2] : [0 :1] : Augmentation de 0 jusqu'à 1.

[1 ; 2] : Diminution 1 jusqu'à -0.15.

Py vs t : [0 ; 0.4] : Diminution de -0.81 jusqu'à -0.98

[0.4 ;1.6] : Augmentation de -0.98 jusqu'à 0.91.

[1.6 ;2] : Diminution de 0.91 jusqu'à 0.66.

Pz vs t : [0 ; 2] : Augmentation de -0.62 jusqu'à 0.67.

**Figure IV.16** : graphe de K :

[0 : 2] : Diminution de 8.80 jusqu'à 4.92

**Figure IV.17** :graphe de V

[0 :2] : Diminution de 101 jusqu'à 77.

**Figure IV.18** :graphe de Lagrange :

[0 :2] : Augmentation de -92 jusqu'a -74.2

#### IV.4. Conclusion

Solutions mathématiques pour problème cinématique inverse ne correspondent pas toujours à des solutions physiques. En d'autres termes, il existe des restrictions de lien physique pour tout manipulateur réel.

Vérification des résultats obtenus par le logiciel Matlab (toolbox), nous a permis de trouver les solutions du modèle étudié.

Cela pourrait facilement être généralisé à 3-R donc à un robot (Scara, Puma, etc.), ou même un mécanisme complexe en utilisant le logiciel.

## CONCLUSION GENERALE

Afin d'aborder un sujet de recherche dans le domaine de la robotique, il est nécessaire de résumer toutes les notions de base nécessaires à la compréhension de ce domaine.

Après avoir défini la robotique médicale, tout en détaillant son historique, ses classifications, et les différents domaines où les robots ont pris leurs places, de plus ils sont devenus de plus en plus indispensables pour le chirurgien afin de l'aider pour effectuer des tâches plus difficiles qui ont été quasiment impossibles à accomplir dans le passé, Indispensable pour le patient aussi pour avoir un meilleur soin médical et une rapidité de rétablissement.

Il est impossible de citer toutes les applications possibles. On a essayé d'en citer le maximum pour simplifier le domaine de la robotique médicale. Le but des applications citées dans notre travail de recherche est pour comprendre la contribution des robots dans la médecine.

Pour modéliser un système, c'est-à-dire gouverner ses sorties, il faut prévoir le comportement du système aux différentes excitations d'entrer qui pourront lui être appliquées, la démarche est de représenter le comportement du système sous forme d'un modèle qui s'appelle la modélisation, on recherche toujours le modèle le plus simple qui permet d'expliquer de manière satisfaisante le comportement du processus dans son domaine d'application, les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire. (Dans lequel est définie la configuration du robot).

La méthode analytique et algébrique permet de trouver des résultats pour un système simple, Cependant dans le cas d'un système plus complexe (plus d'articulations) On peut déterminer la solution au système de façon itérative en utilisant le Jacobien, car il Permet d'obtenir une solution ayant une précision contrôlable ( plus les incréments sont petits, plus la solution sera précise) ,Requiert une inversion ,multiplication de matrice et opérations simples et rapides à effectuer.

Le but des logiciels de conception est de donner une image quasi-réelle afin de trouver des solutions rapides pour un choix d'un mécanisme. Par ailleurs on peut l'utiliser pour simuler les mouvements souhaités par le robot, avant qu'il soit opérationnel sur le site.

# Bibliographies

---

- [1] ELEMENTS DE ROBOTIQUE .ASPECTS MECANIQUES Pierre DUYSINX Ingénierie des Véhicules Terrestres Département PROMETHE,(Productique, Mécanique et Thermodynamique).
- [2] « Robot », dans Dictionnaire de français Larousse, [En ligne].
- [3] « Robotics », dans English Oxford Living Dictionaries.[En ligne].  
<https://en.oxforddictionaries.com/definition/robotics>
- [4] Cours de robotique fondamentale DAVID DANAY.
- [5] Cinématique du PUMA 560 », dans *Polytechnique Montréal*. 2013. [En ligne]. Disponible :<http://www.proesseurs.polymtl.ca/luc.baron/index.php?id=210&lg=f>
- [6] Benjamin Maurin , « Conception et réalisation d'un robot d'insertion d'aiguille pour les procédures percutanées sous imageur scanner »Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg. 2005
- [7] ROBOTIQUE CHIRURGIACALE ,Encyclopoedia Universalis [en ligne],consulté le 26 mars 2019. URL : [http:// www.universalis.fr/encyclopedie /robotique-chirurgicale/](http://www.universalis.fr/encyclopedie/robotique-chirurgicale/).
- [8] Newsroom dans Chirurgie / Santé Avec les tags Medtech / innorobo 2013
- [9] Anthony R.Lanfranco, BAS, Andres E.Castellanos, MD, Jaydev P. Desai, PhD et William C.Meyers, MD « Chirurgie Robotique Une perspective actuelle »Du ministère de génie mécanique, Université Drexel à Philadelphie 2004.
- [10] Michel de Mathelin, « Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur(GMCAO) », Master ISTI – spécialité PARI – parcours IRMC, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg.année 2006.
- [11] Bernard BAYLE, « Contributions à la Commande et à la Conception des Systèmes de Manipulation » Applications en Robotique Médicale /Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université de Strasbourg Spécialité : Robotique.2009.
- [12] C.Novales, « Télé-échographie Robotisée ; Le projet européen OTELO et son premier démonstrateur OTELO1 », Laboratoire Vision & Robotique (LVR) Université d'Orléans France, 2003

## Bibliographies

---

[13] <http://timm-sante.com/equipements/equipements-tele-echographie/>

[14] La société MEDIMEX, à l'initiative de cette journée dédiée à l'utilisation des Technologies Robotiques en Rééducation Fonctionnelle, en partenariat avec l'hôpital Léon Bérard, vous donne rendez-vous le Vendredi 15 juin 2018 pour la 9ème édition des Rencontres Robotiques.

[15] Principales sources utilisées : IFR – World Robotics 2012 ; Syrobo ; Xerfi – La robotique en France ; Wikipedia – Robotique industrielle ; WK-transport-Logistique.fr ; ParisTech Review – Robotique militaire ; Geek Mag – Les UAV et les UGV ; Rapport du MEITO – 11/07/2013 ; RT Flash – Les robots envahissent l'agriculture ; WinterGreen Research – Février 2014 ; Rapport de la DGE – 2013 ; Agence Nationale de la Santé et du Médicament ; Objetconnecte.net

[16] [imatigno.perso.info.unicaen.fr/L1robotique](http://imatigno.perso.info.unicaen.fr/L1robotique) Remerciements \_a Arnaud Canu et Nicolas Cote pour avoir fourni les documents a l'origine de ces transparents.

[17] V. E. Gough, « Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance », Proceedings Auto Div. Inst. Mech. Eng, 1956-1957.

[18] Philippe Poignet, Gérard Poisson « La conception de robots pour l'assistance aux gestes médicaux et chirurgicaux » Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier 2004

[19] J.P. Merlet, « les robots parallèles », Paris, Hermes Science Publishing, 367 p. (ISBN 978-2866015992) , 21 février 1997.

[20] AMOURI AMMAR « MODELISATION DYNAMIQUE D'UN ROBOT PARALLELE FORME DE PLUSIEURS MODULES EMPILES » INSTITUT DES SCIENCES TECHNOLOGIQUES. UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI D'OUM EL BOUAGHI D'AIN BEIDA

[21] Stéphane LITRICO « ASSISTANCE ROBOTIQUE A LA CHIRURGIE HYPOPHYSAIRE » DEA SIC Image Vision/Septembre 2001.

[22] J.Drake, « Computer and robotic assisted resection of brain tumours », Int, Conf. On Advanced Robotics (ICAR'91), pp. 888–892, Pise, Italie, 1991.



## Bibliographies

---

- [23] M. Michelin, P. Poignet, et E. Dombre. Dynamic task /posture decoupling for minimally invasive surgery motions. International Symposium on Experimental Robotics (ISER'04), june 2004.
- [24] ANALYSE CINÉMATIQUE DES ROBOTS PARALLÈLES THÈSE Présentée pour l'obtention du titre de DOCTEUR D'ÉTAT En Génie Mécanique Option : Construction Mécanique Par CHERFIA ABDELHAKIM.
- [25] Modélisation des Robots , Master Automatique S2 .Rédigé par Mme S.BORSALI.
- [26] Jacques GANGLOF « Mémoire Asservissements visuels et chirurgie robotisée » Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à diriger des recherches (Spécialité Robotique) / Université Louis Pasteur de Strasbourg École doctorale Sciences Pour l'Ingénieur. décembre 2000.
- [27] A. Cherfia, « Analyse Cinématique des Robots Parallèles », Thèse Docteur D'état, Département Génie mécanique, Université des Frères Mentouri, Constantine, Algérie 2008. [En ligne]. Disponible : <http://bu.umc.edu.dz/theses/gmecanique/CHE4851.pdf>
- [28] R. Gourdeau, ELE4203 — Robotique : Modélisation des Robots Manipulateurs, Département de génie électrique, Ecole Polytechnique de Montréal, 4 novembre 2010.
- [29] Théorie Générale des Systèmes Articules Introduction à la Robotique .André PREUMONT.
- [30] MEMOIRE DE MAGISTERE. Spécialité : Construction Mécanique. U de Blida : PROGRAMMATION DES ROBOTS INDUSTRIELS ET APPLICATION SUR LE ROBOT MANIPULATEUR [ALG.-M. O.-1] . Par :BENMISRA Abdelkader. Octobre 2007.
- [31] « Caractéristiques techniques des manipulateurs pneumatiques série partner EQUO », dans Dalmecc, (2013). <http://www.dalmecc.com/fr/manipulateurpartner-equo/>
- [32] S. MEGAHED « Définition des modèles géométrique, différentiel et dynamique directs et inverses des robots manipulateurs ayant une structure de chaîne cinématique simple- Application au robot manipulateur » TH 8 de la R.N.U.R...Toulouse, Décembre 1983.

## Bibliographies

---

[33] K. Raza , T. Aized Khan , N. Abbas, “Kinematic analysis and geometrical improvement of an industrial robotic arm” Journal of King Saud University - Engineering Sciences Volume 30, Issue 3, Pages 218-223, July 2018.

[34] W.Khalil et E. Dombre, *Modélisation identification et commande des robots*, 2<sup>e</sup>éd. Paris :Hermès Sciences, 1999.

[35] aspects fondamentaux modélisation mécanique CAO robotique commande J.p.lallmand S.saghloul 1994.

[36] J. Iqbal, R. ul Islam, and H. Khan,” Modeling and Analysis of a 6 DOF Robotic Arm Manipulator”, Canadian Journal on Electrical and Electronics Engineering Vol. 3, No. 6, July 2012.

[37] Lorenzo FLÜCKIGER « Interface pour le pilotage et l’analyse des robots basée sur un générateur de cinématiques » Thèse de doctorat des sciences. Lausanne, EPFL N° 1897 (1998).

[38] François Laudenbach, Calcul différentiel et intégral, *Éditions École Polytechnique*, 2000 (ISBN 978-2-73020724-9, lire en ligne [archive]), p. 48, Exemple 1 et p. 51, Proposition II.1.9 (et, pour une généralisation aux fonctions de classe  $C^f$ , p. 53), ou encore les paragraphes « Différentielles des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  » et « Condition suffisante de différentiabilité d'une fonction définie sur un produit » du chapitre sur la différentiabilité sur la Wikiversité.

[39] S. Kucuk , Z.Bingul,” Inverse kinematics solutions for industrial robot manipulators with offset wrists” Applied Mathematical Modelling,38(2014)1983,1999.

[40] SSerdar Kucuk and Zafer Bingul, “Robot Kinematics: Forward and Inverse Kinematics, Industrial Robotics: Theory, Modelling and Control”, Sam Cubero (Ed.), ISBN: 3-86611-285-8, 2006.

[41] [www.siemens-healthineers.com/fr-ch/computed-tomography/dual-source-ct/somatom-force/technical-specifications](http://www.siemens-healthineers.com/fr-ch/computed-tomography/dual-source-ct/somatom-force/technical-specifications).

[42] Anis SAHBANI « Planification de tâches de manipulation en robotique par des approches probabilistes » Mémoire de Doctorat. Université Paul Sabatier de Toulouse Février 2003.

# Annexes

---

```
Modelisation dun robot medicaux
%cinematique direct
```

```
clear all;
clc;
```

```
syms Q1 Q2 Q3
```

```
L1=500;
L2=500;
L3=200;
LE=500;
c1=cos(Q1);
s1=sin(Q1);
c2=cos(Q2);
s2=sin(Q2);
c3=cos(Q3);
s3=sin(Q3);
c12=cos(Q1+Q2);
s12=sin(Q1+Q2);
c23=cos(Q2+Q3);
s23=sin(Q2+Q3);
T01=[c1 -s1 0 0;s1 c1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
T10=inv(T01);
T12=[c2 -s2 0 0;0 0 -1 0;s2 c2 0 0;0 0 0 1];
T21=inv(T12);
T23=[c3 -s3 0 L2;s3 c3 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
T32=inv(T23);
T03=T01*T12*T23;
TE=[1 0 0 LE;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
E=inv(TE);
T=T03*TE;
```

```
z=simplify(T);
```

```
xi=500;
```

```
yi=0;
```

```
zi=200;
```

```
xf=500;
```

```
yf=750;
```

```
zf=200;
```

```
va=375;
```

```
D=750;
```

```
tf=D/va;
```

```
t=0:tf/20:tf;
```

```
for i=1:21
```

```
U0(:, :, i)=[cosd(-42.5) -sind(-42.5) 0 xi+(t(i)/tf)*(xf-xi);sind(-42.5)
cosd(-42.5) 0 yi+(t(i)/tf)*(yf-yi);0 0 1 zi+(t(i)/tf)*(zf-zi);0 0 0 1]*E;
```

```
ss(:, i)=U0(1:3, 1, i);
```

```
nn(:, i)=U0(1:3, 2, i);
```

```
aa(:, i)=U0(1:3, 3, i);
```

```
pp(:, i)=U0(1:3, 4, i);
```

```
end
```

```
for i=1:21
```

```
Q1(i)=atan2(pp(2, i), pp(1, i));
```

```
end
```

```
figure(1)
```

# Annexes

---

```
plot(t,Q1)
grid on
xlabel('t')
ylabel('Q1')
for i=1:21
    B(i)=pp(1,i)*cos(Q1(i))+pp(2,i)*sin(Q1(i));
    S2(i)=pp(3,i)*L2/(pp(3,i)^2+B(i)^2);
    Q2(i)=asin(S2(i));

end
figure(2)
plot(t,Q2)
grid on
xlabel('t')
ylabel('Q2')

for i=1:21
    Q3(i)=(pi/180)*(-42.5);
end
figure(3)
plot(t,Q3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('Q3')

figure(18)
plot(t,Q1,t,Q2,t,Q3)
legend('Q1 vs.t','Q2 vs.t','Q3 vs.t');
xlabel('temp(s)')
ylabel('Q')
grid on
title('rotation theta Q');

for i=1:21;
    J1(:,i)=[-500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q2(i))-
500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q1(i))*co
s(Q2(i));0];
end
for i=1:21
    J2(:,i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-
500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q2(i))];
end
for i=1:21
    J3(:,i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))];
end
for i=1:21
    J(:,i)=[J1(:,i),J2(:,i),J3(:,i)];
end
for i=1:21
    X(:,i)=[0;737;0];
    dQ(:,i)=inv(J(:,i))*X(:,i);
end
dQ1=dQ(1,:);
figure(4)
plot(t,dQ1)
grid on
xlabel('t')
ylabel('dQ1')
```

# Annexes

---

```
dQ2=dQ(2,:);
figure(5)
plot(t,dQ2)
grid on
xlabel('t')
ylabel('dQ2')

dQ3=dQ(3,:);
figure(6)
plot(t,dQ3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('dQ3')

figure(18)
plot(t,dQ1,t,dQ2,t,dQ3)
legend('dQ1 vs.t','dQ2 vs.t','dQ3 vs.t');
xlabel('temp(s)')
ylabel('dQ')
grid on
title('vitesse theta Q');

syms ddq1 ddq2 ddq3
for i=1:21
    R01(:,:,i)=[cos(Q1(i)) -sin(Q1(i)) 0 ;sin(Q1(i)) cos(Q1(i)) 0 ;0 0 1];
    P01(:,i)=[0;0;0];
    R10(:,:,i)=inv(R01(:,:,i));
    R12(:,:,i)=[cos(Q2(i)) -sin(Q2(i)) 0 ;0 0 -1 ;sin(Q2(i)) cos(Q2(i)) 0];
    P12(:,i)=[0;0;0];
    R21(:,:,i)=inv(R12(:,:,i));
    R23(:,:,i)=[cos(Q3(i)) -sin(Q3(i)) 0 ;sin(Q3(i)) cos(Q3(i)) 0 ;0 0 1];
    P23(:,i)=[L2;0;0];
    R32(:,:,i)=inv(R23(:,:,i));
end
a11=[0;0;1] ;a22=[0;0;1] ;a33=[0;0;1];
for i=1:21
    W00(:,i)=[0;0;0];
    dW00(:,i)=[0;0;0];
    dV00(:,i)=[0;0;0];
    W10(:,i)=R10(:,:,i)*W00(:,i);
    W11(:,i)=W10(:,i)+dQ1(i)*a11;
    dW11(:,i)=R10(:,:,i)*dW00(:,i)+ddq1*a11+cross(W10(:,i),(dQ1(i)*a11));
    U00(:,:,i)=[0 -dW00(3,i) dW00(2,i);dW00(3,i) 0 -dW00(1,i);-dW00(2,i)
dW00(1,i) 0]+[0 -W00(3,i) W00(2,i);W00(3,i) 0 -W00(1,i);-W00(2,i) W00(1,i)
0]^2;
    dV11(:,i)=R10(:,:,i)*(dV00(:,i)+U00(:,:,i)*P01(:,i));
end
for i=1:21
    W21(:,i)=R21(:,:,i)*W11(:,i);
    W22(:,i)=W21(:,i)+dQ2(i)*a22;
    dW22(:,i)=R21(:,:,i)*dW11(:,i)+ddq2*a22+cross(W21(:,i),(dQ2(i)*a22));
    U11(:,:,i)=[0 -dW11(3,i) dW11(2,i);dW11(3,i) 0 -dW11(1,i);-dW11(2,i)
dW11(1,i) 0]+[0 -W11(3,i) W11(2,i);W11(3,i) 0 -W11(1,i);-W11(2,i) W11(1,i)
0]^2;
    dV22(:,i)=R21(:,:,i)*(dV11(:,i)+U11(:,:,i)*P12(:,i));
end
for i=i:21
    W32(:,i)=R32(:,:,i)*W22(:,i);
    W33(:,i)=W32(:,i)+dQ3(i)*a33;
```

# Annexes

---

```
dW33(:,i)=R32(:, :, i)*dW22(:, i)+ddq3*a33+cross(W32(:, i), (dQ3(i)*a33));
U22(:, :, i)=[0 -dW22(3,i) dW22(2,i);dW22(3,i) 0 -dW22(1,i);-dW22(2,i)
dW22(1,i) 0]+[0 -W22(3,i) W22(2,i);W22(3,i) 0 -W22(1,i);-W22(2,i) W22(1,i)
0]^2;
dV33(:,i)=R32(:, :, i)*(dV22(:, i)+U22(:, :, i)*P23(:, i));
end
dVdW=[dV33;dW33];
```

```
ddQ1=ddQ(1, :);
```

```
figure(7)
plot(t, ddQ1)
grid on
xlabel('t')
ylabel('ddQ1')
```

```
ddQ2=ddQ(2, :);
```

```
figure(8)
plot(t, ddQ2)
grid on
xlabel('t')
ylabel('ddQ2')
```

```
ddQ3=ddQ(3, :);
```

```
figure(9)
plot(t, ddQ3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('ddQ3')
```

# Annexes

---

(px,py,pz)

```
clear all;
clc;
syms Q1 Q2 Q3

L1 =0.50;
L2 = 0.50 ;
L3 = 0.20;
    LE=0.5 ;
    va=0.375;
D=0.750;
tf=D/va;
t=0:tf/20:tf;

Q1=(33.7500*t.^5-168*t.^4+225*t.^3-90)*pi/180
dQ1=(168.75*t.^4-672*t.^3+675*t.^2)*pi/180;
ddQ1=(675*t.^3-2016*t.^2+1350*t)*pi/180;
Q2=30*(-1+3*t-3*t.^2+t.^3)*pi/180
dQ2=30*(3-6*t+3*t.^2)*pi/180;
ddQ2=30*(-6+6*t)*pi/180;
Q3=(-10 +11.111*t.^3 -3.0864*t.^4 +0.0823*t.^5)*pi/180
dQ3=( 33.333*t.^2 -12.3456*t.^3 +0.4115*t.^4 )*pi/180;
ddQ3=( 66.666*t -37.0272*t.^2 +1.646*t.^3 )*pi/180;

c1=cos(Q1);
s1=sin(Q1);
c2=cos(Q2);
s2=sin(Q2);
c3=cos(Q3);
s3=sin(Q3);
c12=cos(Q1+Q2);
s12=sin(Q1+Q2);
c23=cos(Q2+Q3);
s23=sin(Q2+Q3);

Px=LE.*c1.*c23 +L2.*c1.*c2
Py=LE.*s1.*c23 +L2.*s1.*c2
Pz=LE.*s23 +L2.*s2
P=LE.*c1.*c23 +L2.*c1.*c2;LE.*s1.*c23 +L2.*s1.*c2;LE.*s23 +L2.*s2

figure(1)
plot(t,Px)
grid on
title ('graph de Px')
figure(2)
plot(t,Py)
grid on
title ('graph de Py')
figure(3)
plot(t,Pz)
grid on
title ('graph de Pz')
figure(4)
plot(t,Px,t,Py,t,Pz)
legend('Px vs.t','Py vs.t','Pz vs.t');
grid on
title ('graphe de P')
```

# Annexes

---

## Cinématique inverse

```
clear all;
clc;

va=0.375;
D=0.750;
tf=D/va;
t=0:tf/20:tf;

x=0.50*t.^0 ;
y=0.9375*t.^3 -0.703125*t.^4 +0.140625*t.^5 ;
z=0.20*t.^0;
dx=0*t.^0;
dy=2.8125*t.^2 -2.8125*t.^3 +0.703125*t.^4;
dz=0*t.^0 ;
ddx=0*t.^0 ;
ddy=5.625*t -8.4375*t.^2 +2.8125*t.^3;
ddz=0*t.^0 ;

figure(1)
plot(t,x,t,y,t,z);
xlabel('temp(s)')
ylabel('m')
legend('x vs.t','y vs.t','z vs.t');
grid on
title ('vecteur position')

figure(2)

plot(t,dx,t,dy,t,dz);
xlabel('temp(s)')
ylabel('m/s')
legend('dx vs.t','dy vs.t','dz vs.t');
grid on
title ('vecteur vitesse')

figure(3)

plot(t,ddx,t,ddy,t,ddz);
xlabel('temp(s)')
ylabel('m/s^2')

legend('ddx vs.t','ddy vs.t','ddz vs.t');
grid on
title ('vecteur acceleration lineaire')
```



# Annexes

## Model dynamique

```
clear all;
clc;

syms Q1 Q2 Q3

L1=0.5;
L2=0.5;
L3=0.2;
LE=0.50 ;
m1=6.38;
m2=6.38;
m3=2.32;

xi=0.50;
yi=0;
zi=0.20;
xf=0.50;
yf=0.750;
zf=0.20;
va=0.375;
D=0.75;
tf=D/va;
t=0:tf/20:tf;
TE=[1 0 0 LE;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
E=inv(TE);
for i=1:21
    U0(:, :, i)=[cosd(-42.5) -sind(-42.5) 0 xi+(t(i)/tf)*(xf-xi);sind(-42.5)
cosd(-42.5) 0 yi+(t(i)/tf)*(yf-yi);0 0 1 zi+(t(i)/tf)*(zf-zi);0 0 0 1]*E;
    ss(:, i)=U0(1:3, 1, i);
    nn(:, i)=U0(1:3, 2, i);
    aa(:, i)=U0(1:3, 3, i);
    pp(:, i)=U0(1:3, 4, i);
end
for i=1:21
    Q1(i)=atan2(pp(2, i), pp(1, i));

end
for i=1:21
    B(i)=pp(1, i)*cos(Q1(i))+pp(2, i)*sin(Q1(i));
    S2(i)=pp(3, i)*L2/(pp(3, i)^2+B(i)^2);
    Q2(i)=asin(S2(i));

end

for i=1:21
    Q3(i)=(pi/180)*(-42.5);
end
for i=1:21;
    J1(:, i)=[-500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q2(i))-
500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q1(i))*co
s(Q2(i));0];
end
for i=1:21
    J2(:, i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-
500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q2(i))];
end
```

# Annexes

---

```
for i=1:21
    J3(:,i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))];
end
for i=1:21
    J(:, :, i)=[J1(:, i), J2(:, i), J3(:, i)];
end
for i=1:21
    X(:, i)=[0;737;0];
    dQ(:, i)=inv(J(:, :, i))*X(:, i);
end
dQ1=dQ(1, :);

dQ2=dQ(2, :);

dQ3=dQ(3, :);

k1=0.5*0.01*dQ1.^2;
k2=0.5*m2*0.2500*Q2.^2;
k3=0.5.*m3.*(0.2500*dQ2.^2 +0.2500.*(dQ3).^2 +2.*L2.*L3.*dQ3.*dQ2.*cos(Q2-
Q3));
k=k1+k2+k3
figure(1)
plot(t,k)
grid on
title ('graphe de k');
```

# Annexes

---

```
clear all;
clc;

syms Q1 Q2 Q3

L1=0.50;
L2=0.50;
L3=0.20;
LE=0.50;
m1=6.38;
m2=6.38;
m3=2.32;
g=9.81;
xi=0.50;
yi=0;
zi=0.20;
xf=0.50;
yf=0.75;
zf=0.20;
va=0.375;
D=0.75;
tf=D/va;
t=0:tf/20:tf;
TE=[1 0 0 LE;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
E=inv(TE);

for i=1:21
    U0(:, :, i)=[cosd(-42.5) -sind(-42.5) 0 xi+(t(i)/tf)*(xf-xi);sind(-42.5)
cosd(-42.5) 0 yi+(t(i)/tf)*(yf-yi);0 0 1 zi+(t(i)/tf)*(zf-zi);0 0 0 1]*E;
    ss(:, i)=U0(1:3, 1, i);
    nn(:, i)=U0(1:3, 2, i);
    aa(:, i)=U0(1:3, 3, i);
    pp(:, i)=U0(1:3, 4, i);
end
for i=1:21
    Q1(i)=atan2(pp(2, i), pp(1, i));

end
for i=1:21
    B(i)=pp(1, i)*cos(Q1(i))+pp(2, i)*sin(Q1(i));
    S2(i)=pp(3, i)*L2/(pp(3, i)^2+B(i)^2);
    Q2(i)=asin(S2(i));

end

for i=1:21
    Q3(i)=(pi/180)*(-42.5);
end
for i=1:21;
    J1(:, i)=[-500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q2(i))-
500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q1(i))*co
s(Q2(i));0];
end
for i=1:21
    J2(:, i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-
500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q2(i))];
end
for i=1:21
```

# Annexes

---

```
J3(:,i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))];
end
for i=1:21
    J(:, :, i)=[J1(:, i), J2(:, i), J3(:, i)];
end
for i=1:21
    X(:, i)=[0;737;0];
    dQ(:, i)=inv(J(:, :, i))*X(:, i);
end
dQ1=dQ(1, :);

dQ2=dQ(2, :);

dQ3=dQ(3, :);

v1= m1.*g.*L1/2;
v2=m2.*g.*(L1+0.5.*L2.*sin(Q2));
v3=m2.*g.*(L1+L2.*sin(Q2)+0.5.*L3.*sin(Q3));
v=v1+v2+v3
figure(2)
plot(t,v)
grid on
title ('graphe de v');
```

## Lagrange

```
clear all;
clc;

syms Q1 Q2 Q3

L1=0.5;
L2=0.5;
L3=0.2;
LE=0.50;
m1=6.38;
m2=6.38;
m3=2.32;
g=9.81;
xi=0.50;
yi=0;
zi=0.20;
xf=0.50;
yf=0.750;
zf=0.20;
va=0.375;
D=.750;
tf=D/va;
t=0:tf/20:tf;
TE=[1 0 0 LE;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
E=inv(TE);

for i=1:21
    U0(:, :, i)=[cosd(-42.5) -sind(-42.5) 0 xi+(t(i)/tf)*(xf-xi);sind(-42.5)
cosd(-42.5) 0 yi+(t(i)/tf)*(yf-yi);0 0 1 zi+(t(i)/tf)*(zf-zi);0 0 0 1]*E;
    ss(:, i)=U0(1:3, 1, i);
    nn(:, i)=U0(1:3, 2, i);
end
```

# Annexes

```
aa(:,i)=U0(1:3,3,i);
pp(:,i)=U0(1:3,4,i);
end
for i=1:21
    Q1(i)=atan2(pp(2,i),pp(1,i));

end
for i=1:21
    B(i)=pp(1,i)*cos(Q1(i))+pp(2,i)*sin(Q1(i));
    S2(i)=pp(3,i)*L2/(pp(3,i)^2+B(i)^2);
    Q2(i)=asin(S2(i));

end

for i=1:21
    Q3(i)=(pi/180)*(-42.5);
end
for i=1:21;
    J1(:,i)=[-500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q3(i))-
500*sin(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q1(i))*co
s(Q2(i));0];
end
for i=1:21
    J2(:,i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i))-
500*cos(Q1(i))*cos(Q2(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))+500*cos(Q2(i))];
end
for i=1:21
    J3(:,i)=[500*cos(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));-
500*sin(Q1(i))*sin(Q2(i)+Q3(i));500*cos(Q2(i)+Q3(i))];
end
for i=1:21
    J(:, :, i)=[J1(:,i),J2(:,i),J3(:,i)];
end
for i=1:21
    X(:,i)=[0;737;0];
    dQ(:,i)=inv(J(:, :, i))*X(:,i);
end
dQ1=dQ(1, :);

dQ2=dQ(2, :);

dQ3=dQ(3, :);

v1= m1.*g.*L1/2;
v2=m2.*g.*(L1+0.5.*L2.*sin(Q2));
v3=m2.*g.*(L1+L2.*sin(Q2)+0.5.*L3.*sin(Q3));
v=v1+v2+v3;
k1=0.5*0.01*dQ1.^2;
k2=0.5*m2*0.2500*Q2.^2;
k3=0.5.*m3.*(0.2500*dQ2.^2 +0.2500.*(dQ3).^2 +2.*L2.*L3.*dQ3.*dQ2.*cos(Q2-
Q3));
k=k1+k2+k3;
L=k-v;
figure(3)
plot(t,L)
xlabel('temp(s)')
ylabel('L')
grid on
title('graphe de Lagrange');
```