

Cours de Mathématiques

MP-MP*

Jean VOEDTS

ellipses

Ce livre est un outil de référence, en mathématiques, pour les étudiants des classes préparatoires de seconde année des filières MP-MP*.

S'appuyant sur de nombreuses années d'enseignement dans la filière MP*, l'auteur couvre ici l'ensemble du programme développé durant l'année de spéciales avec un souci élevé de clarté et de rigueur. L'étudiant pourra se référer en permanence aux définitions et retrouver les démonstrations précises des théorèmes du cours. De nombreux exemples, contre-exemples et exercices illustrent par ailleurs les résultats du cours.

Les étudiants de DEUG, Licence, ou les candidats au CAPES et à l'Agrégation de mathématiques pourront aussi s'appuyer avec profit sur cet ouvrage.

illustration de couverture :
Hans Holbein, *Les Ambassadeurs* (détail).



ISBN 2-7298-0666-0

TABLE DES MATIÈRES

1	Espaces vectoriels	1
1-1	Structure d'espace vectoriel	1
1-1.1	Notion de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel	1
1-1.2	Règles de calcul dans un espace vectoriel	2
1-1.3	Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs	3
1-1.4	Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels	5
1-2	Sous-espace vectoriel	5
1-2.1	Définition	5
1-2.2	Intersection de s.e.v. Sous-espace engendré par une famille	6
1-2.3	Familles équivalentes	8
1-2.4	Somme de sous-espaces vectoriels	9
1-3	Dépendance et indépendance linéaire	9
1-3.1	Famille libre, famille liée	9
1-3.2	Relations de liaison	10
1-3.3	Indépendance linéaire dans des espaces fonctionnels	11
1-3.4	Base d'un espace. Coordonnées d'un vecteur	12
1-3.5	Exemple : Fonctions polynômes	14
1-3.6	Sous-espaces indépendants	15
1-3.7	Sous-espaces supplémentaires	19
1-3.8	Projecteurs	21
1-4	Espaces vectoriels de dimension finie	22
1-4.1	Résultat préliminaire	22
1-4.2	Existence de bases, dimension	23
1-4.3	Dimension d'un s.e.v, rang d'un système de vecteurs	25
1-4.4	Application aux sous-espaces supplémentaires	27
1-4.5	Dimension d'une somme, d'un produit	27
1-4.6	Restriction du corps des scalaires	29
1-5	Exercices	30
2	Applications linéaires	31
2-1	Généralités	31
2-1.1	Définition, exemples	31
2-1.2	Espaces isomorphes	32
2-1.3	Définition d'un morphisme	33
2-1.4	"Recollement" linéaire d'applications linéaires	34
2-1.5	Images directes et réciproques	35
2-1.6	Codimension d'un sous-espace. Hyperplan	37

2-1.7	Equation linéaire. Sous-espace affine	38
2-1.8	Théorème fondamental d'isomorphisme	40
2-2	Calculs sur les morphismes	40
2-2.1	Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$	40
2-2.2	Propriétés de la composition des morphismes	41
2-2.3	Structure d'algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})$	42
2-2.4	Exercice : centre de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{E})$	44
2-2.5	Groupe linéaire $\mathcal{GL}(\mathbb{E})$	44
2-2.6	Projecteurs et involutions	45
2-2.7	Exercices : "théorèmes" de factorisation	47
2-3	Morphismes et dimension finie	48
2-3.1	Rang d'un morphisme	48
2-3.2	Théorème du rang	50
2-3.3	Dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$	51
2-3.4	Cas particulier de l'espace dual	53
2-4	Exercices	54
3	Dualité	57
3-1	Espace dual, formes linéaires	57
3-1.1	Crochet de dualité	57
3-1.2	Equation d'un hyperplan vectoriel	59
3-2	Etude du rang d'une famille finie de formes	61
3-2.1	Condition d'indépendance de p formes linéaires	61
3-2.2	Interpolation de Lagrange	63
3-2.3	Rang d'une famille finie de formes linéaires	65
3-2.4	Intersection d'une famille finie d'hyperplans	65
3-2.5	Faisceau (linéaires) d'hyperplans	67
3-2.6	Bases duales	70
3-3	Dimension finie : Rang d'une famille et équations d'un s.e.v	71
3-3.1	Rang d'un système fini de vecteurs et dualité	71
3-3.2	Equations d'un s.e.v., d'un sous-espace affine	73
3-4	Exercices	75
4	Calcul matriciel	77
4-1	Opérations sur les matrices. Matrice d'un morphisme	77
4-1.1	Espace $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$	77
4-1.2	Matrice associée à un morphisme	78
4-1.3	Coordonnées de l'image d'un vecteur	79
4-1.4	Morphisme canoniquement associé à une matrice	80
4-1.5	Produit matriciel	81
4-1.6	Transposition	82
4-1.7	Rang d'une matrice	83
4-1.8	Algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	84
4-2	Changements de bases	89
4-2.1	Matrice de passage	89
4-2.2	Changement de coordonnées d'un vecteur	90
4-2.3	Changement de la matrice d'un morphisme. Matrices équivalentes	91

4-2.4	Changement de la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables	93
4-3	Calcul matriciel par blocs	96
4-3.1	Matrice d'applications linéaires	96
4-3.2	Matrice d'applications linéaires associée à un composé de morphismes	97
4-3.3	Exemple d'utilisation	98
4-4	Déterminants	99
4-4.1	Applications multilinéaires symétriques et antisymétriques	99
4-4.2	Définition et propriétés des déterminants	103
4-4.3	Déterminant d'un endomorphisme	110
4-4.4	Exemples de calculs de déterminants	111
4-4.5	Applications des déterminants	117
4-5	Application aux systèmes d'équations linéaires	119
4-5.1	Trois interprétations possibles d'un système	120
4-5.2	Utilisation de déterminants	122
4-6	Opérations élémentaires	124
4-6.1	Matrices élémentaires	124
4-6.2	Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice	125
4-6.3	Lemme du pivot de Gauss	127
4-6.4	Applications	128
4-6.5	Exercice : générateurs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$	132
4-7	Exercices	134
5	Polynômes, réduction des endomorphismes	137
5-1	Arithmétique des polynômes	137
5-1.1	Idéal d'un anneau commutatif	137
5-1.2	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$	142
5-2	Calculs polynomiaux dans une algèbre	149
5-2.1	Morphisme $P \mapsto P(a)$. Algèbre $\mathbb{K}[a]$	149
5-2.2	Idéal annulateur	150
5-2.3	Polynômes d'endomorphismes et matrices	154
5-2.4	Cas d'une algèbre intègre	155
5-3	Sous-espace stable par un endomorphisme	155
5-3.1	Endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable	156
5-3.2	Théorème de décomposition des noyaux	158
5-4	Valeurs propres, vecteurs propres	160
5-4.1	Valeur propre, sous-espace propre associé	160
5-4.2	Cas de la dimension finie : polynôme caractéristique	165
5-5	Diagonalisation	171
5-5.1	Endomorphismes et matrices diagonalisables	171
5-5.2	Applications de la notion de diagonalisation	179
5-6	Trigonalisation	182
5-6.1	Endomorphismes, matrices trigonalisables	182
5-6.2	Pratique de la trigonalisation	184
5-6.3	Compléments	187
5-7	Etude des suites récurrentes linéaires à coefficients constants	192

5-7.1	Suites récurrentes linéaires	192
5-7.2	Ecriture matricielle. Suites géométriques solutions	193
5-7.3	Cas général	195
5-7.4	Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	197
5-8	Exercices	198
6	Espaces normés : suites et topologie	203
6-1	Suites réelles et complexes	203
6-1.1	Borne supérieure	203
6-1.2	Convergence d'une suite réelle	204
6-1.3	Valeur d'adhérence d'une suite réelle	205
6-1.4	Suites de Cauchy	208
6-1.5	Extension aux suites complexes	209
6-2	Norme sur un espace vectoriel. Distance associée	210
6-2.1	Norme et distance	210
6-2.2	Boules et sphères	212
6-2.3	Parties bornées, diamètre	213
6-2.4	Distance d'un point à une partie	215
6-2.5	Norme induite sur un sev. Distance induite sur une partie	215
6-2.6	Produit d'une famille finie d'espaces normés	216
6-3	Suites d'un espace normé : convergence, valeurs d'adhérence	216
6-3.1	Convergence d'une suite	216
6-3.2	Comparaison de deux normes	218
6-3.3	Valeur d'adhérence d'une suite	220
6-4	Topologie d'un espace normé	221
6-4.1	Voisinages d'un point	221
6-4.2	Ouverts d'un espace normé	222
6-4.3	Fermés d'un espace normé	223
6-4.4	Point adhérent, adhérence	223
6-4.5	Caractérisation séquentielle de l'adhérence, des parties fermées	225
6-4.6	Partie dense	226
6-4.7	Intérieur, frontière	228
6-4.8	Topologie induite sur une partie	229
6-5	Suites de Cauchy, espaces complets	231
6-5.1	Suites de Cauchy	231
6-5.2	Espace de Banach	232
6-5.3	Partie complète	233
6-6	Exercices	234
7	Continuité et Compacité	237
7-1	Limite et continuité	237
7-1.1	Limite et continuité en un point	237
7-1.2	Généralisation de la définition	238
7-1.3	Caractérisation séquentielle	239
7-1.4	Utilisation d'espaces complets	242
7-1.5	Continuité globale	242
7-1.6	Exemple d'utilisation de la continuité	243

7-1.7	Notion d'homéomorphisme	244
7-2	Continuité uniforme	245
7-2.1	Continuité uniforme	245
7-2.2	Applications lipschitziennes	246
7-2.3	Théorème du point fixe	247
7-2.4	Exercice : prolongement d'une application uniformément continue	248
7-3	Convergence uniforme et continuité	249
7-3.1	Convergence simple, convergence uniforme	249
7-3.2	Continuité d'une limite uniforme	251
7-3.3	Théorème d'interversion des limites	252
7-4	Applications linéaires continues	253
7-4.1	Caractérisation de la continuité d'une application linéaire	253
7-4.2	Espace $\mathcal{L}_c(E, F)$	254
7-4.3	Applications bilinéaires continues	259
7-5	Compacité	260
7-5.1	Compacts d'un espace normé	260
7-5.2	Propriétés élémentaires	261
7-5.3	Compacts de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{K}^p$	262
7-5.4	Propriété de Borel-Lebesgue	263
7-5.5	Continuité et compacité	266
7-6	Espaces normés de dimension finie	268
7-6.1	Equivalence des normes	268
7-6.2	Continuité des applications linéaires	271
7-6.3	Norme matricielle subordonnée à des normes sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$	272
7-6.4	Complément : théorème de Riesz	276
7-7	Connexité par arcs	278
7-7.1	Théorème des valeurs intermédiaires : fonctions définies sur un intervalle	278
7-7.2	Connexité par arcs	279
7-8	Exercices	285
8	Fonctions d'une variable réelle	289
8-1	Fonctions monotones sur un intervalle	289
8-1.1	Définitions	289
8-1.2	Propriétés de continuité et monotonie	291
8-1.3	Homéomorphismes d'intervalles	293
8-1.4	Rappel : fonctions circulaires réciproques	294
8-1.5	Exercice : fonctions hyperboliques réciproques	297
8-2	Approximation uniforme sur un segment	300
8-2.1	Approximation par des fonctions en escalier	301
8-2.2	Approximation par des fonctions affines par morceaux	303
8-2.3	Approximation polynomiale	304
8-3	Comparaison de fonctions au voisinage d'un point	304
8-3.1	Cas des fonctions numériques	305
8-3.2	Généralisation aux fonctions vectorielles	314
8-4	Dérivabilité	316
8-4.1	Définition. Propriétés élémentaires	316

8-4.2	Calcul des dérivées	318
8-4.3	Dérivée d'ordre supérieur. Fonctions de classe C^p	324
8-5	Accroissements finis et applications	328
8-5.1	Cas des fonctions réelles	328
8-5.2	Cas des fonctions vectorielles	333
8-5.3	Applications des accroissements finis	335
8-6	Développements limités	338
8-6.1	Généralités	338
8-6.2	Développement limité et dérivabilité	341
8-6.3	"Intégration" d'un développement limité	342
8-6.4	Théorème de Taylor-Young	344
8-6.5	Opérations et développements limités	345
8-6.6	Développements asymptotiques	349
8-6.7	Applications des développements limités	351
8-7	Fonctions convexes	355
8-7.1	Définition, caractérisation	355
8-7.2	Continuité et dérivabilité	359
8-7.3	Inégalités de convexité	362
8-8	Suites réelles définies par une itération	364
8-8.1	Point fixe attractif, point fixe répulsif	365
8-8.2	Application au calcul numérique	369
8-9	Exercices	373
9	Séries dans un espace normé	377
9-1	Convergence d'une série	377
9-1.1	Série convergente	377
9-1.2	Condition nécessaire de convergence	380
9-1.3	Cas d'un espace complet	381
9-1.4	Relation suite $\longleftrightarrow$ série	382
9-1.5	Regroupements de termes	383
9-2	Séries à termes positifs	384
9-2.1	Résultat de base	385
9-2.2	Comparaison de séries à termes positifs	385
9-2.3	Comparaison à une intégrale	391
9-2.4	Sommation des relations de comparaison	394
9-2.5	Développement décimal d'un réel	400
9-3	Séries absolument convergentes	404
9-3.1	Définition	404
9-3.2	Utilisation	405
9-3.3	Majoration des restes	406
9-3.4	Exemple : inverse dans une algèbre de Banach	407
9-3.5	Espaces $l^1(\mathbb{N})$ et $l^2(\mathbb{N})$	408
9-3.6	Exercice prolongé	410
9-4	Séries semi-convergentes	411
9-4.1	Séries alternées	411
9-4.2	Méthode de décomposition	413
9-4.3	Exercice : transformation d'Abel	413
9-4.4	Non "commutativité"	416

9-5	Notions sur les familles sommables	417
9-5.1	Ensemble dénombrable	417
9-5.2	Famille sommable de réels positifs	419
9-5.3	Famille sommable de complexes	421
9-5.4	Suites doubles sommables	424
9-6	La fonction exponentielle	431
9-6.1	Fonction exponentielle complexe	431
9-6.2	Les fonctions circulaires	434
9-6.3	Exponentielle dans une algèbre de Banach	439
9-7	Exercices	444
10	Intégration sur un segment	449
10-1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	449
10-1.1	Intégrale d'une fonction en escalier	449
10-1.2	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	452
10-1.3	Intégrale fonction d'une de ses bornes	467
10-1.4	Calculs d'intégrales	470
10-2	Intégrales dépendant d'un paramètre	480
10-2.1	Intégrales à paramètres	480
10-2.2	Continuité	480
10-2.3	Dérivabilité	481
10-2.4	Théorème de Fubini élémentaire	484
10-3	Calculs de primitives	486
10-3.1	Primitives usuelles	486
10-3.2	Utilisation de la linéarité	487
10-3.3	Intégration par changement de variable	488
10-3.4	Intégration par parties	490
10-3.5	Intégration des fractions rationnelles	491
10-3.6	Intégrales se ramenant à des primitives de fractions rationnelles	493
10-4	Calculs approchés d'intégrales	502
10-4.1	Méthode des trapèzes	502
10-4.2	Méthode de Simpson	503
10-4.3	Accélération de convergence : méthode de Romberg	504
10-5	Exercices	507
11	Suites et séries de fonctions	511
11-1	Rappels : convergence simple et uniforme	511
11-1.1	Convergence simple	511
11-1.2	Convergence uniforme	513
11-1.3	Propriétés de la convergence uniforme	516
11-2	Cas des séries de fonctions	519
11-2.1	Convergence uniforme d'une série	519
11-2.2	Exemples	528
11-3	Séries entières	530
11-3.1	Rayon de convergence	530
11-3.2	Propriétés de la somme d'une série entière	540
11-3.3	Développements en série entière	548

11-3.4 Exemples d'utilisations des séries entières	558
11-4 Exercices	563
12 Intégration sur un intervalle quelconque	567
12-1 Fonctions intégrables positives	567
12-1.1 Définition et propriétés élémentaires	567
12-1.2 Caractérisation à l'aide d'une suite croissante de segments	569
12-1.3 Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration	570
12-1.4 Caractérisation de l'intégrabilité sur $[a, b[$	573
12-1.5 Utilisation de critères de comparaison	574
12-1.6 "Intégration" des relations de comparaison	576
12-1.7 Théorème de convergence monotone	577
12-1.8 Exercices d'application	582
12-1.9 Intégration terme à terme d'une série de fonctions positives	582
12-2 Fonctions complexes intégrables	583
12-2.1 Intégrale d'une fonction complexe	583
12-2.2 Formule de changement de variable	587
12-2.3 Intégration des relations de comparaison	587
12-2.4 Convergence en moyenne, en moyenne quadratique	588
12-3 Les théorèmes de convergence. Intégrales à paramètres	591
12-3.1 Théorème de convergence monotone	591
12-3.2 Théorème de convergence dominée	591
12-3.3 Intégration terme à terme d'une série de fonctions	592
12-3.4 Intégrales dépendant d'un paramètre	594
12-3.5 La fonction Γ	596
12-4 Intégrales impropres	597
12-5 Relation série-intégrale	599
12-5.1 Cas de fonctions positives	599
12-5.2 Cas de fonctions complexes	600
12-5.3 Utilisation de la relation de Chasles	601
12-6 Compléments : transformations de Fourier et Laplace	602
12-6.1 Transformation de Fourier	602
12-6.2 Transformation de Laplace	604
12-6.3 Produit de convolution : un procédé de régularisation	605
12-7 Exercices	607
13 Formes quadratiques sur un espace réel	611
13-1 Formes bilinéaires et formes quadratiques	611
13-1.1 Définitions	611
13-1.2 Forme quadratique positive, définie positive	614
13-2 Formes quadratiques en dimension finie	617
13-2.1 Matrice d'une forme bilinéaire dans une base	617
13-2.2 Expression d'une forme quadratique dans une base en dimension finie	621
13-2.3 Interprétation de la matrice d'une forme quadratique	623
13-3 Réduction d'une forme quadratique et signature	625
13-3.1 Réduction d'une forme quadratique	626

13-3.2	Ecriture d'une forme quadratique à l'aide de carrés de formes linéaires	627
13-3.3	Méthode de Gauss	628
13-3.4	Signature d'une forme quadratique	631
13-3.5	Matrices symétriques positives, définies positives	634
13-3.6	Bases orthonormales pour une forme quadratique définie positive	635
13-4	Exercices	636
14	Espaces préhilbertiens réels. Espaces euclidiens	639
14-1	Généralités	639
14-1.1	Espace préhilbertien	639
14-1.2	Orthogonalité	642
14-1.3	Cas de la dimension finie	645
14-2	Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie	649
14-2.1	Meilleure approximation par un élément d'un sous-espace	650
14-2.2	Cas d'un sous-espace de dimension finie	651
14-2.3	Orthogonalisation de Gram-Schmidt	654
14-2.4	Inégalité de Bessel	658
14-2.5	Complément : projection sur un convexe complet	660
14-3	Endomorphismes d'un espace euclidien	661
14-3.1	Adjoint d'un endomorphisme	661
14-3.2	Automorphismes orthogonaux	667
14-3.3	Réduction des endomorphismes symétriques	674
14-3.4	Formes quadratiques sur un espace euclidien	677
14-3.5	Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs	680
14-3.6	Etude des automorphismes orthogonaux	684
14-4	Rappels : produit mixte et produit vectoriel	690
14-4.1	Produit mixte	690
14-4.2	Exercice : déterminants de Gram	691
14-4.3	Produit vectoriel	692
14-5	Complément : utilisation de polynômes orthogonaux	697
14-6	Exercices	701
15	Espaces préhilbertiens complexes et hermitiens	705
15-1	Espace préhilbertien complexe	705
15-1.1	Application semilinéaire	705
15-1.2	Produit scalaire	706
15-1.3	Projection orthogonale	709
15-1.4	Bases orthonormales en dimension finie	709
15-2	Espaces hermitiens	711
15-2.1	Calculs dans une base	711
15-2.2	Adjoint d'un endomorphisme	714
15-2.3	Automorphismes et matrices unitaires	716
15-2.4	Endomorphismes auto-adjoints	719
15-3	Exercices	722

16 Séries de Fourier	725
16-1 Coefficients de Fourier	725
16-1.1 Espaces fonctionnels	725
16-1.2 Coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique	728
16-1.3 Série de Fourier d'une fonction 2π-périodique	730
16-1.4 Détermination pratique des coefficients de Fourier	730
16-1.5 Coefficients de Fourier d'une série trigonométrique uniformément convergente	733
16-2 Convergence d'une série de Fourier	736
16-2.1 Noyau de Dirichlet	736
16-2.2 Théorème de Dirichlet	737
16-2.3 Théorèmes de Weierstrass	741
16-2.4 Deux exercices	743
16-2.5 Convergence en moyenne quadratique	745
16-2.6 Exercice : convolution des fonctions périodiques	747
16-2.7 Injectivité de la transformation de Fourier discrète	748
16-2.8 Cas des fonctions T-périodiques	748
16-2.9 Exemple d'utilisation	749
16-3 Exercices	751
17 Groupes. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	755
17-1 Structure de groupe	755
17-1.1 Groupe, morphisme de groupe	755
17-1.2 Sous-groupe	759
17-1.3 Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Groupes cycliques	765
17-2 Groupe opérant sur un ensemble	772
17-2.1 Définition	772
17-2.2 Opérations d'un groupe sur lui-même	773
17-2.3 Orbite d'un point	775
17-2.4 Quelques exemples d'applications	779
17-2.5 Rappels sur le groupe symétrique	781
17-3 Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	784
17-3.1 Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	784
17-3.2 Groupe des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	785
17-3.3 Applications	787
17-4 Exercices	794
18 Calcul différentiel en dimension finie	797
18-1 Différentiabilité. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	797
18-1.1 Dérivée selon un vecteur. Dérivées partielles dans une base	797
18-1.2 Différentiabilité en un point	802
18-1.3 Condition suffisante de différentiabilité. Caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$	807
18-2 Calcul des différentielles	812
18-2.1 Linéarité	812
18-2.2 Produit. Inverse d'une fonction numérique	812
18-2.3 Différentielle d'une composée	814
18-2.4 Différentielle d'une réciproque	823

18-2.5	Fonctions de classe C^k	826
18-3	Applications des différentielles	830
18-3.1	Inégalité des accroissements finis	830
18-3.2	Développement limité d'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2	833
18-3.3	Notion de C^k -difféomorphisme ($k \geq 1$)	841
18-3.4	Théorème des fonctions implicites	846
18-3.5	Exercice : caractérisation des fonctions homogènes	858
18-4	Exercices	859
19	Equations différentielles	863
19-1	Equations linéaires	863
19-1.1	Etude générale	863
19-1.2	Cas des équations à coefficients constants	880
19-1.3	Equations scalaires d'ordre 2	896
19-2	Equations non linéaires	908
19-2.1	Equations autonomes	908
19-2.2	Cas des équations non-autonomes	927
19-2.3	Exemples d'études	929
19-3	Exercices	939
20	Arcs paramétrés	943
20-1	Etude affine	943
20-1.1	Définitions	944
20-1.2	Indices fondamentaux	946
20-1.3	Branches infinies, asymptotes	959
20-1.4	Plan d'étude d'un arc en dimension 2	963
20-1.5	Cas des arcs plans définis en coordonnées polaires	966
20-1.6	Définition d'une courbe plane par équation ou par paramétrage	982
20-1.7	Courbes du second degré et coniques	985
20-2	Etude métrique	1000
20-2.1	Longueur d'un arc	1000
20-2.2	Courbure des arcs plans	1005
20-2.3	Calcul pratique de la courbure	1012
20-2.4	Cercle de courbure	1017
20-2.5	Développée d'un arc plan	1019
20-2.6	Courbure en dimension 3	1021
20-3	Exercices	1024
21	Surfaces	1027
21-1	Nappes paramétrées	1027
21-1.1	Définition	1027
21-1.2	Plan tangent en un point régulier	1029
21-1.3	Normale, orientation	1032
21-1.4	Exemples	1034
21-1.5	Définition par paramétrage et par équation	1038
21-2	Surfaces du second degré	1046

21-2.1	Définition	1046
21-2.2	Classification	1047
21-2.3	Intersection avec un plan affine	1053
21-2.4	Remarques	1054
21-3	Exercices	1060
22	Aide-mémoire de géométrie analytique	1063
23	Intégrales curvilignes, intégrales multiples	1073
23-1	Formes différentielles de degré 1	1073
23-1.1	Forme différentielle, champ de vecteurs	1073
23-1.2	Forme exacte, forme fermée	1078
23-1.3	Rotationnel, divergence, laplacien	1085
23-1.4	Exemples d'applications	1088
23-2	Intégrales doubles	1092
23-2.1	Compacts mesurables de $\mathbb{R}^2$	1092
23-2.2	Intégrale d'une fonction continue	1095
23-2.3	Calcul des intégrales doubles	1099
23-2.4	Extension aux intégrales triples et multiples	1108
23-3	Exercices	1110