

MANUEL

Jean-Marie MONIER

COURS DE  
MATHÉMATIQUES

Maths sup-Analyse 1

*l'intégrale*

# Table des matières du tome 1

## Première partie – Cours

Chapitre 1. – Les nombres réels	1
<b>1.1.</b> Préambule	1
<b>1.2.</b> Corps commutatifs totalement ordonnés	2
1.2.1. Définition	2
1.2.2. Majorant, plus grand élément	3
1.2.3. Borne supérieure	3
1.2.4. Isomorphismes de corps commutatifs totalement ordonnés	4
<b>1.3.</b> Nombre réels	4
1.3.1. Existence et unicité de $\mathbb{R}$	4
1.3.2. Propriétés élémentaires des nombres réels	5
1.3.3. Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$	11
<b>1.4.</b> Droite numérique achevée $\mathbb{R}$	18
Compléments	19
Chapitre 2. – Les nombres complexes	21
<b>2.1.</b> Préambule	21
<b>2.2.</b> Corps des nombres complexes	21
2.2.1. Définition	21
2.2.2. Conjugaison, partie réelle, partie imaginaire	23
2.2.3. Module	25
2.2.4. Arguments	27
<b>2.3.</b> Interprétation géométrique des nombres complexes	28
2.3.1. Plan complexe	28
2.3.2. Interprétation géométrique de l'addition dans $\mathbb{C}$	29
2.3.3. Interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$	29
2.3.4. Applications $z \mapsto az + b$	30
2.3.5. CNS d'alignement de trois points du plan complexe	30
2.3.6. CNS de cocyclicité ou alignement de quatre points du plan complexe	31
<b>2.4.</b> Puissances et racines	31
2.4.1. Exponentielle d'un imaginaire pur	31
2.4.2. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul	32

2.4.3. Racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	3
2.4.4. Groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	3
<b>2.5. Applications trigonométriques des nombres complexes</b>	3
2.5.1. Développement de $\cos n\theta$ , $\sin n\theta$ , $\tan n\theta$	3
2.5.2. Linéarisation de $\cos^p \theta$ , $\sin^p \theta$ , $\cos^p \theta \sin^q \theta$	3
Compléments	3
<b>Chapitre 3. – Suites numériques</b>	4
<b>3.1. Convergence, divergence</b>	4
3.1.1. Définitions	4
3.1.2. Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes	4
3.1.3. Propriétés algébriques des suites convergentes	4
3.1.4. Exemples élémentaires de suites	5
<b>3.2. Monotonie</b>	5
3.2.1. Suites réelles monotones	5
3.2.2. Suites adjacentes	6
<b>3.3. Suites de Cauchy dans <math>\mathbb{K}</math></b>	6
<b>3.4. Suites extraites, valeurs d'adhérence</b>	6
<b>3.5. Quelques types usuels de suites</b>	7
3.5.1. Suites récurrentes affines du 1 <sup>er</sup> ordre à coefficients constants	7
3.5.2. Suites récurrentes linéaires du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants	7
3.5.3. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$	7
Compléments	8
<b>Chapitre 4. – Topologie de <math>\mathbb{R}</math></b>	8
<b>4.1. Vocabulaire de la topologie dans <math>\mathbb{R}</math></b>	8
4.1.1. Distance usuelle dans $\mathbb{R}$	8
4.1.2. Boules ouvertes, boules fermées	8
4.1.3. Parties bornées, diamètre	8
4.1.4. Voisinages	8
4.1.5. Parties ouvertes de $\mathbb{R}$	9
4.1.6. Parties fermées de $\mathbb{R}$	9
4.1.7. Intérieur, adhérence, frontière	9
4.1.8. Distance d'un point à une partie non-vide de $\mathbb{R}$	9
4.1.9. Points isolés, points d'accumulation	9
<b>4.2. Compacité</b>	9
4.2.1. Théorème de Borel-Lebesgue	9
4.2.2. Théorème de Bolzano-Weierstrass	10

<b>Chapitre 5. – Fonctions réelles d'une variable réelle</b>	<b>103</b>
<b>5.1. Algèbre des fonctions</b>	<b>103</b>
5.1.1. Algèbre $\mathbb{R}^X$	103
5.1.2. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}^X$	105
5.1.3. Parité	107
5.1.4. Périodicité	108
5.1.5. Applications en escalier sur un segment	110
5.1.6. Applications polynômiales, applications rationnelles	111
5.1.7. Monotonie	111
5.1.8. Applications majorées, minorées, bornées	113
<b>5.2. Limites</b>	<b>116</b>
5.2.1. Voisinages et adhérence dans $\mathbb{R}$	116
5.2.2. Notion de limite	116
5.2.3. Ordre et limite	121
5.2.4. Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite	123
5.2.5. Cas des fonctions monotones	126
<b>5.3. Continuité</b>	<b>129</b>
5.3.1. Définitions	129
5.3.2. Opérations algébriques sur les applications continues	132
5.3.3. Continuité sur un intervalle	134
5.3.4. Continuité sur un compact	137
5.3.5. Application réciproque	138
5.3.6. Continuité uniforme	141
5.3.7. Applications lipschitziennes	143
<b>Chapitre 6. – Dérivation</b>	<b>147</b>
<b>6.1. Dérivées</b>	<b>147</b>
6.1.1. Dérivée en un point	147
6.1.2. Propriétés algébriques des fonctions dérivables en un point	151
6.1.3. Application dérivée	155
6.1.4. Dérivées successives	157
6.1.5. Classe d'une fonction	160
6.1.6. Différentielle	162
<b>6.2. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis</b>	<b>163</b>
6.2.1. Théorème de Rolle	163
6.2.2. Théorème des accroissements finis	165
<b>6.3. Variations des fonctions</b>	<b>168</b>
6.3.1. Etude de la monotonie pour une fonction dérivable	168
6.3.2. Etude des extremums pour une fonction dérivable	173

<b>6.4.</b>	Fonctions convexes	175
6.4.1.	Définition	175
6.4.2.	Utilisation de dérivées dans l'étude de la convexité	179
6.4.3.	Inégalités de convexité	182

## Chapitre 7. – Intégration 185

<b>7.1.</b>	Intégration des applications en escalier sur un segment	185
7.1.1.	Algèbre des applications en escalier sur un segment	185
7.1.2.	Intégrale d'une application en escalier sur un segment	187
<b>7.2.</b>	Suites d'applications (1 <sup>re</sup> étude)	189
7.2.1.	Convergence simple, convergence uniforme	189
7.2.2.	Approximation uniforme d'une application continue sur un segment par des applications en escalier	194
7.2.3.	Approximation uniforme d'une application continue sur un segment par des applications affines par morceaux et continues	196
<b>7.3.</b>	Intégration des applications continues par morceaux sur un segment	199
7.3.1.	Algèbre des applications continues par morceaux sur un segment	199
7.3.2.	Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment	199
7.3.3.	Propriétés algébriques	199
7.3.4.	Propriétés relatives à l'ordre	200
7.3.5.	Relation de Chasles	200
7.3.6.	Sommes de Riemann	200
<b>7.4.</b>	Intégration et dérivation	200
7.4.1.	Intégrale fonction de la borne d'en haut	200
7.4.2.	Primitives	210
7.4.3.	Changement de variable	210
7.4.4.	Intégration par parties	210
7.4.5.	Formule de Taylor avec reste intégral	210

### **Deuxième partie** **Indications et réponses des exercices**

Chap. 1, 221; Chap. 2, 239; Chap. 3, 251; Chap. 4, 275; Chap. 5, 277;  
Chap. 6, 285; Chap. 7, 303.

Index des notations	32
Index alphabétique	32

# Table des matières du tome 2

## Première partie – Cours

Chapitre 8. – Fonctions usuelles	1
<b>8.1.</b> Logarithme népérien	1
<b>8.2.</b> Exponentielle	3
<b>8.3.</b> Logarithmes et exponentielles de base $a$	4
8.3.1. Logarithme de base $a$	4
8.3.2. Exponentielle de base $a$	6
<b>8.4.</b> Puissances	8
<b>8.5.</b> Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielle	10
<b>8.6.</b> Fonctions hyperboliques directes	11
<b>8.7.</b> Fonctions hyperboliques réciproques	15
8.7.1. Argsh	15
8.7.2. Argch	16
8.7.3. Argth	17
8.7.4. Argcoth	18
<b>8.8.</b> Fonctions circulaires directes	20
<b>8.9.</b> Fonctions circulaires réciproques	25
8.9.1. Arcsin	25
8.9.2. Arccos	26
8.9.3. Arctan	27
<b>8.10</b> Exponentielle complexe	31
Compléments	32
Chapitre 9. – Comparaison locale des fonctions	35
<b>9.1.</b> Prépondérance, domination	35
9.1.1. Définitions	35
9.1.2. Opérations relatives à la prépondérance et à la domination	37
9.1.3. Exemples usuels	39
<b>9.2.</b> Equivalence	39
9.2.1. Définition	39

- 9.2.2. Opérations relatives à l'équivalence
- 9.2.3. Equivalents usuels
- 9.2.4. Exemples d'utilisation d'équivalents

**9.3. Développements limités**

- 9.3.1. Généralités
- 9.3.2. Le théorème de Taylor-Young
- 9.3.3. Dérivation et primitivation pour un  $DL(0)$
- 9.3.4. Opérations sur les fonctions admettant un  $DL_n(0)$
- 9.3.5. Exemples d'utilisation de développements limités

**9.4. Notion de développement asymptotique**

- 9.4.1. Développement asymptotique dans l'échelle des  $x \mapsto x^n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$
- 9.4.2. Développement asymptotique dans l'échelle des  $x \mapsto x^\alpha$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$
- 9.4.3. Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles

**9.5. Etude pratique d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , représentation graphique**

**Chapitre 10. – Calculs de primitives**

**10.1. Préambule**

**10.2. Changement de variable**

**10.3. Primitivation par parties**

**10.4. Liste des primitives usuelles**

**10.5. Primitivation des fonctions rationnelles**

**10.6. Primitivation de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles**

- 10.6.1. Fonctions rationnelles en  $\sin x$  et  $\cos x$
- 10.6.2. Fonctions rationnelles en  $\operatorname{sh} x$  et  $\operatorname{ch} x$
- 10.6.3. Fonctions rationnelles en  $e^{\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$
- 10.6.4. Fonctions rationnelles en  $x$  et  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- 10.6.5. Fonctions rationnelles en  $x$  et  $\sqrt{ax^2+bx+c}$

**Chapitre 11. – Intégrales généralisées  
(1<sup>re</sup> étude)**

**11.1. Convergence, divergence d'une intégrale généralisée**

- 11.1.1. Définitions
- 11.1.2. Propriétés algébriques

10

10

10

10

11.1.3. Propriétés relatives à l'ordre	104
11.1.4. Exemples fondamentaux	105
<b>11.2.</b> Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$	107
<b>11.3.</b> Convergence absolue	113
<b>11.4.</b> Procédés de transformation d'intégrales généralisées	115
11.4.1. Changement de variable	115
11.4.2. Intégration par parties	116
<b>11.5.</b> Intégrales doublement généralisées	119
<b>Chapitre 12. – Equations différentielles (1<sup>re</sup> étude)</b>	123
<b>12.1.</b> Equations différentielles linéaires du premier ordre	123
12.1.1. Généralités	123
12.1.2. Résolution de l'équation sans second membre	124
12.1.3. Résolution de l'équation avec second membre	127
<b>12.2.</b> Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme	134
12.2.1. Généralités	134
12.2.2. Résolution de l'équation sans second membre	135
12.2.3. Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme	138
<b>12.3.</b> Exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du premier ordre	143
12.3.1. Généralités	143
12.3.2. Equations différentielles à variables séparables	145
12.3.3. Equations homogènes	147
12.3.4. Equations de Bernoulli	149
12.3.5. Equations de Riccati	150
12.3.6. Equations incomplètes en $x$	151
12.3.7. Equations incomplètes en $y$	152
12.3.8. Equations de Lagrange et de Clairaut	154
<b>Chapitre 13. – Fonctions de plusieurs variables réelles (1<sup>re</sup> étude)</b>	155
<b>13.1.</b> Topologie de $\mathbb{R}^n$	155
13.1.1. Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$	155
13.1.2. Voisinages	159

13.1.3.	Parties ouvertes, parties fermées, adhérence	15
13.1.4.	Suites dans $\mathbb{R}^n$	16
<b>13.2.</b>	<b>Limite, continuité</b>	16
13.2.1.	Généralités	16
13.2.2.	Continuité partielle	16
<b>13.3.</b>	<b>Dérivées partielles premières</b>	16
13.3.1.	Définitions	16
13.3.2.	Applications de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$	16
<b>13.4.</b>	<b>Dérivées partielles successives</b>	17
13.4.1.	Généralités	17
13.4.2.	Applications de classe $C^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$	17
13.4.3.	Interversion des dérivations	17
<b>13.5.</b>	<b>Extremums des fonctions numériques de deux ou trois variables réelles</b>	18
13.5.1.	Définitions	18
13.5.2.	Etude à l'ordre 1	18
13.5.3.	Extremums globaux	18
<b>13.6.</b>	<b>Fonctions implicites</b>	18
13.6.1.	Le problème des fonctions implicites	18
13.6.2.	Cas de deux variables réelles liées par une relation	18
13.6.3.	Cas de trois variables réelles liées par une relation	19
<b>13.7.</b>	<b>Formes différentielles</b>	19
13.7.1.	Définitions	19
13.7.2.	Formes différentielles exactes	19
13.7.3.	Formes différentielles fermées	19
13.7.4.	Plan d'étude d'une forme différentielle, exemples	19
13.7.5.	Application à certaines équations différentielles du premier ordre	20
<b>13.8.</b>	<b>Analyse vectorielle</b>	20
13.8.1.	Définitions	20
13.8.2.	Formules d'analyse vectorielle	20
13.8.3.	Potentiel scalaire	20
<b>Chapitre 14. – Compléments de calcul intégral (1<sup>re</sup> étude)</b>		20
<b>14.1.</b>	<b>Intégrales curvilignes</b>	20
14.1.1.	Arcs orientés, courbes orientées	20
14.1.2.	Définition de l'intégrale curviligne	20
14.1.3.	Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne	21
14.1.4.	Intégrale curviligne et forme différentielle exacte	21

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1<sup>er</sup> cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement des professeurs.

Accompagné d'exercices corrigés nombreux et variés couvrant tout le programme, il s'adresse à ceux qui souhaitent confronter les théories enseignées à leur pratique.

Le tome 1 contient l'étude des **nombre réels et complexes**, les **suites numériques** et les **fonctions numériques d'une variable réelle** (**continuité, dérivation, intégration**), ce qui correspond à la première partie du programme de l'analyse en première année.

Le tome 2 contient l'étude des **fonctions usuelles**, la **comparaison locale**, les **primitives**, **intégrales généralisées**, **équations différentielles**, **fonctions de plusieurs variables** et les **compléments de calcul intégral**, ce qui correspond à la deuxième partie de l'analyse en première année.

*Jean-Marie Monier* est professeur en mathématiques spéciales au Lycée la Martinière-Monplaisir à Lyon. Il est l'auteur de cinq recueils d'exercices résolus de mathématiques (collection Dunod Université).

*J'intègre* c'est un objectif qui a donné son nom à une collection d'ouvrages d'entraînement pour les classes préparatoires aux grandes écoles.

Cette collection qui se décline pour les prépas commerciales, les prépas scientifiques et les langues comprend trois types de livres : des *manuels* pour l'acquisition des connaissances fondamentales, des livres *d'exercices et d'annales* régulièrement mis à jour pour la maîtrise des connaissances, et des séries de *QCM* pour l'évaluation et l'entraînement individuels.

Couverture : L'atelier Cerce

