

l'intégrale

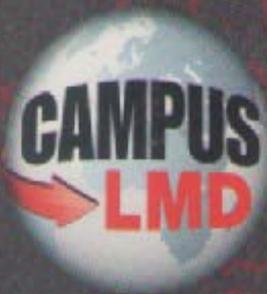
Julien Freslon
Jérôme Poineau
Daniel Fredon
Claude Morin

Mathématiques

Exercices incontournables

MP

- Les exercices incontournables du programme
- Les méthodes de résolution étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Les corrigés détaillés



DUNOD

Table des matières

1 Algèbre générale	3
Exercice 1.1 : Résolution d'un système	3
Exercice 1.2 : Configuration géométrique	3
Exercice 1.3 : Utilisation d'une base non canonique de $\mathbb{R}_n[X]$	5
Exercice 1.4 : Dés pipés et polynômes	6
Exercice 1.5 : Retrouver la fraction rationnelle	7
Exercice 1.6 : Groupe engendré par deux éléments	7
Exercice 1.7 : Radical d'un idéal	8
Exercice 1.8 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$	10
Exercice 1.9 : Une congruence	12
Exercice 1.10 : Calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	13
Exercice 1.11 : Lemme chinois et application	15
Exercice 1.12 : Nombres de Fermat	16
Exercice 1.13 : Une propriété du groupe symétrique	17
Exercice 1.14 : Système de générateurs du groupe orthogonal	17
2 Algèbre linéaire	21
Exercice 2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes	21
Exercice 2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions	25
Exercice 2.3 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes	28
Exercice 2.4 : Diagonalisation	31
Exercice 2.5 : Réduction	35
Exercice 2.6 : Réduction d'une matrice d'ordre 3	38
Exercice 2.7 : Trigonalisation	42
Exercice 2.8 : Réduction d'une matrice à paramètres	46
Exercice 2.9 : Diagonalisation simultanée	48
Exercice 2.10 : Réduction des matrices de trace nulle	50
Exercice 2.11 : Formes linéaires et base antéduale	53
Exercice 2.12 : Formes linéaires et hyperplans	56
Exercice 2.13 : Théorème de Cayley-Hamilton	60
Exercice 2.14 : Décomposition de Dunford	66
3 Algèbre bilinéaire	75
Exercice 3.1 : Noyaux, images et adjoint	75
Exercice 3.2 : Exemple de matrice définie positive	77
Exercice 3.3 : Construction de matrices positives	79

Exercice 3.4 :	Endomorphisme normal	80
Exercice 3.5 :	Une inégalité sur le déterminant d'une matrice symétrique	83
Exercice 3.6 :	Racine carrée d'une matrice définie positive	86
Exercice 3.7 :	Décomposition polaire	88
Exercice 3.8 :	Congruence simultanée et inégalités sur les déterminants	89
4	Espaces vectoriels normés	93
Exercice 4.1 :	Réunion et intersection de boules	93
Exercice 4.2 :	Boule unité	94
Exercice 4.3 :	Comparaison de normes	94
Exercice 4.4 :	Normes équivalentes	96
Exercice 4.5 :	Partie dense dans un ensemble de matrices	98
Exercice 4.6 :	Partie dense dans un ensemble de polynômes	99
Exercice 4.7 :	Fonction continue	100
Exercice 4.8 :	Application linéaire non continue	100
Exercice 4.9 :	Fonction uniformément continue	101
Exercice 4.10 :	Applications linéaires non continues	102
Exercice 4.11 :	Norme subordonnée	104
Exercice 4.12 :	Compacité du groupe des matrices orthogonales	105
Exercice 4.13 :	Un fermé borné non compact	106
Exercice 4.14 :	Somme d'un compact et d'un fermé	106
Exercice 4.15 :	Suites de Cauchy	107
Exercice 4.16 :	Espaces complets	109
5	Séries numériques	111
Exercice 5.1 :	Nature de séries	111
Exercice 5.2 :	Nature de séries II	116
Exercice 5.3 :	Quelques calculs explicites de sommes de séries	122
Exercice 5.4 :	Formule de Stirling	127
Exercice 5.5 :	Séparation des termes pairs et impairs	130
Exercice 5.6 :	Convergence et développement asymptotique	133
Exercice 5.7 :	Un critère de convergence	135
Exercice 5.8 :	Convergence et monotonie	139
Exercice 5.9 :	Équivalents et restes de séries	142
Exercice 5.10 :	Convergence de série et intégrabilité	151
Exercice 5.11 :	Transformation d'Abel	159
Exercice 5.12 :	Produits infinis	163
6	Suites et séries de fonctions	167
Exercice 6.1 :	Convergence uniforme d'une suite de fonctions I	167
Exercice 6.2 :	Convergence uniforme d'une suite de fonctions II	169
Exercice 6.3 :	Convergence uniforme d'une série de fonctions	171
Exercice 6.4 :	Fonction ζ de Riemann	174
Exercice 6.5 :	Régularité d'une série de fonctions	180
Exercice 6.6 :	Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions	183
Exercice 6.7 :	Intégration et convergence uniforme	188

7	Intégration	195
	Exercice 7.1 : Un calcul d'intégrale I	195
	Exercice 7.2 : Un calcul d'intégrale II	198
	Exercice 7.3 : Changement de variable	202
	Exercice 7.4 : Calcul d'une intégrale à paramètre	203
	Exercice 7.5 : Fonction Γ d'Euler	208
	Exercice 7.6 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet	211
	Exercice 7.7 : Transformée de Laplace du sinus cardinal	217
	Exercice 7.8 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	218
	Exercice 7.9 : Une formule d'Euler	224
	Exercice 7.10 : Intégrale de Gauss	233
	Exercice 7.11 : Théorème de d'Alembert-Gauss	238
8	Séries de Fourier	245
	Exercice 8.1 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier I	247
	Exercice 8.2 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier II	250
	Exercice 8.3 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier III	253
	Exercice 8.4 : Relation de récurrence sur les coefficients de Fourier	258
	Exercice 8.5 : Expression d'une intégrale sous forme de série	261
	Exercice 8.6 : Inégalité de Wirtinger	263
9	Séries entières	273
	Exercice 9.1 : Calculs de sommes de séries numériques	273
	Exercice 9.2 : Calculs de rayons de convergence avec la règle de d'Alembert	274
	Exercice 9.3 : Calculs de rayons de convergence avec la définition	275
	Exercice 9.4 : Domaine de convergence	277
	Exercice 9.5 : Convergence et calcul de la somme	278
	Exercice 9.6 : Développement d'une fonction en série entière	279
	Exercice 9.7 : Avec une suite récurrente linéaire	281
	Exercice 9.8 : Convergence radiale	282
	Exercice 9.9 : Dénombrément	284
	Exercice 9.10 : Détermination d'une somme	286
	Exercice 9.11 : Conditions de continuité	287
	Exercice 9.12 : Un équivalent de la somme	290
	Exercice 9.13 : Limite du quotient de deux sommes	291
	Exercice 9.14 : Calcul de la somme d'une série numérique	292
10	Équations différentielles	295
	Exercice 10.1 : Variation de la constante ou des constantes ?	295
	Exercice 10.2 : Utilisation d'une solution « évidente »	297
	Exercice 10.3 : Utilisation d'un changement de variable	299
	Exercice 10.4 : Utilisation de séries entières (cas régulier)	300
	Exercice 10.5 : Utilisation de séries entières (cas singulier)	302
	Exercice 10.6 : Système différentiel d'ordre 2	305
	Exercice 10.7 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)	309
	Exercice 10.8 : Utilisation du Wronskien	312
	Exercice 10.9 : Équation différentielle autonome	314

11 Fonctions de plusieurs variables	317
Exercice 11.1 : Continuité d'une fonction	317
Exercice 11.2 : À propos du théorème de Schwarz	318
Exercice 11.3 : Différentiabilité d'une fonction	319
Exercice 11.4 : Une équation aux dérivées partielles	320
Exercice 11.5 : Équation des cordes vibrantes	321
Exercice 11.6 : Dérivée directionnelle	323
Exercice 11.7 : Étude d'une suite	324
Exercice 11.8 : Recherche d'extremums	326
Exercice 11.9 : Extremums sur un compact	328
Exercice 11.10 : Extremums sur un compact d'une fonction de n variables	329
Exercice 11.11 : Majoration	330
Exercice 11.12 : D'un extremum local à un extremum global	331
Exercice 11.13 : Détermination d'un facteur intégrant d'une forme différentielle	334
Exercice 11.14 : Calcul d'une intégrale curviligne	336
12 Courbes et surfaces	339
Exercice 12.1 : Droites tangentes et normales	339
Exercice 12.2 : Plans tangents à une surface	340
Exercice 12.3 : Intersection d'un cône et d'un plan	342
Exercice 12.4 : Équation d'un cylindre	343
Exercice 12.5 : Étude d'une quadrique	345
Exercice 12.6 : Variations sur les normes usuelles du plan	347
Exercice 12.7 : Surface engendrée par rotation	350
Exercice 12.8 : Quadrique dépendant d'un paramètre	352
Exercice 12.9 : Détermination d'un cône	353
Exercice 12.10 : Intersection d'une quadrique avec un plan et projection	355
Index	359