

Michel Rieutord

Une introduction à la dynamique des fluides

LMD

MANUEL DE COURS



 de boeck

physique

Table des matières

Chapitre 1 Les bases de la mécanique des fluides

1	Un bref historique	1
2	Le concept de fluide	2
2.1	Définitions	2
2.2	Les milieux continus	3
3	La cinématique des fluides	3
3.1	Notion de particule fluide	3
3.2	Description lagrangienne	4
3.3	Description eulerienne	4
3.4	Dérivée particulaire	4
3.5	Déformation d'un élément fluide	5
3.6	Les fluides incompressibles	8
3.7	Évolution d'une quantité intégrale entraînée par le fluide	8
3.8	Fonction de courant	10
4	Les lois du mouvement	10
4.1	Conservation de la masse	11
4.2	Conservation de la quantité de mouvement	13
4.3	Conservation de l'énergie	15
5	Les lois de comportement	17
5.1	La contrainte de pression	17
5.2	Le fluide parfait	18
5.3	Les fluides newtoniens	19
5.4	Autres lois de comportement *	26
6	Les relations thermodynamiques	33
6.1	Le gaz parfait	34
6.2	Les liquides	35
6.3	Le fluide barotrope	35

7	Les conditions aux limites	35
7.1	Sur le champ de vitesse	36
7.2	Sur la température	38
7.3	La tension superficielle	39
7.4	Les conditions initiales	40
8	Introduction au formalisme lagrangien *	41
8.1	Les équations du mouvement en variables lagrangiennes	41
8.2	Exemple d'application	43

Chapitre 2 La statique des fluides

1	Les équations de la statique	47
2	Équilibre dans un champ de gravitation	48
2.1	Théorème de Pascal	49
2.2	Atmosphères en équilibre	50
2.3	Liquide stratifié entre deux plaques horizontales	52
2.4	Masses fluides autogravitantes en rotation *	53
3	Propriétés de la résultante des forces de pression	57
3.1	Théorème d'Archimède	57
3.2	Centre de poussée	58
3.3	Poussée sur une paroi	59
4	Les équilibres régis par la tension superficielle	60
4.1	Quelques figures particulières	60
4.2	Équilibre d'un liquide mouillant un solide	61

Chapitre 3 Écoulement des fluides parfaits

1	Équations du mouvement	69
1.1	Rappels	69
1.2	Autres formes de l'équation d'Euler	70
2	Quelques propriétés du mouvement des fluides parfaits	70
2.1	Théorème de Bernoulli	71
2.2	Le champ de pression	72
2.3	Exemples d'application	72
2.4	Théorème de Kelvin	74
2.5	Influence de la compressibilité	76
3	Les écoulements irrotationnels	77
3.1	Définition	77
3.2	Rôle de la topologie pour un écoulement irrotationnel	78
3.3	Théorème de Lagrange	79
3.4	Théorème de l'énergie cinétique minimale *	80
3.5	Analogie électrostatique	81
3.6	Écoulement plan potentiel d'un fluide incompressible	81
3.7	Forces exercées par un fluide parfait	84

4	Les écoulements tourbillonnaires	91
4.1	La dynamique de la vorticité	91
4.2	Écoulement généré par une distribution de vorticité : analogie avec le magnétisme	93
4.3	Exemples d'écoulements tourbillonnaires	94

Chapitre 4 Écoulement des fluides visqueux incompressibles

1	Quelques propriétés générales	107
1.1	Rappel des équations du mouvement	107
1.2	Le transport par la viscosité	108
1.3	Loi de similitude	111
2	Les écoulements rampants	112
2.1	L'équation de Stokes	112
2.2	Principe variationnel *	113
2.3	Écoulement autour d'une sphère	115
2.4	Équation d'Osseen	118
2.5	Applications	119
3	La théorie de la couche limite	121
3.1	Fluides parfaits et fluides visqueux	121
3.2	Méthode de résolution	122
3.3	L'écoulement hors couche limite	123
3.4	L'écoulement dans la couche limite	124
3.5	Décollement de la couche limite	126
3.6	Exemple de couche limite laminaire : équation de Blasius	127
4	Quelques exemples classiques	129
4.1	Écoulements de Poiseuille	129
4.2	Pertes de charge dans une conduite	133
4.3	Écoulements autour d'un solide	135
5	Forces exercées sur un solide	136
5.1	Expression générale de la résultante des forces	136
5.2	Coefficient de traînée et de portance	137
5.3	Exemple : la force de Stokes	138

Chapitre 5 Les ondes dans les fluides

1	Notions sur les perturbations	145
1.1	Équation d'une perturbation	145
1.2	Analyse d'une perturbation infinitésimale	146
1.3	Les perturbations d'amplitudes finies	148
1.4	Ondes et instabilités	149

2	Le son	149
2.1	Equation de propagation	149
2.2	Relation de dispersion	150
2.3	Exemples de modes acoustiques dans les instruments à vent	151
3	Les ondes de surface	152
3.1	Les ondes de gravité superficielles	153
3.2	Les ondes capillaires	155
4	Les ondes internes de gravité *	156
5	Les ondes de discontinuité	158
5.1	Propagation d'une perturbation en fonction du nombre de Mach	159
5.2	Équations d'une onde sonore d'amplitude finie	160
5.3	Équations des caractéristiques	161
5.4	Exemple : l'onde de compression	162
5.5	Conditions de passage	164
5.6	Relations entre les quantités à l'amont et à l'aval d'un choc droit	165
5.7	Chocs forts et faibles	168
5.8	Chocs radiatifs	169
5.9	Ressaut hydraulique	170
6	Les ondes solitaires *	172
6.1	L'équation de Korteweg et de Vries	173
6.2	L'onde solitaire	176
6.3	Analyse élémentaire de l'équation de Korteweg et de Vries	178
6.4	Exemples	181
7	Exercices	182
8	Appendice : conditions de passage	184

Chapitre 6 La stabilité des écoulements

1	Instabilité locale	187
1.1	Définitions	187
1.2	Exemple : l'instabilité gravitationnelle	188
1.3	Instabilité spatiale	189
2	Analyse linéaire d'instabilités globales	190
2.1	Instabilité centrifuge : critère de Rayleigh	190
2.2	Instabilité de cisaillement des écoulements plan-parallèles	192
2.3	Équation de Rayleigh	194
2.4	Équation d'Orr-Sommerfeld	196
3	Quelques exemples d'instabilités célèbres	197
3.1	Exemple : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz	197
3.2	Instabilités connexes	198
3.3	Les perturbations de l'écoulement de Couette plan	201
3.4	Cisaillement et stratification	202
3.5	L'instabilité de Bénard-Marangoni *	204

4	L'interaction d'ondes *	210
4.1	Énergie d'une onde	210
4.2	Application à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz	212
5	Le développement non-linéaire d'une instabilité	212
5.1	Équations d'amplitude	213
5.2	Notions sur les bifurcations	214
5.3	Instabilités d'amplitudes finies *	216
6	Les perturbations optimales *	219
6.1	Introduction	219
6.2	Les écoulements plan-parallèles	220
6.3	Etude d'un modèle simplifié	221
6.4	Retour aux fluides : instabilités à croissance algébriques	223
6.5	Les opérateur non-normaux	224
6.6	Spectres, pseudo-spectres et résolvante d'un opérateur	225
6.7	Exemples de perturbations optimales dans les écoulements	229

Chapitre 7 La convection thermique

1	Introduction	235
2	L'équilibre conductif	236
2.1	Équilibre d'un gaz parfait entre deux plaques horizontales	236
2.2	Le gradient adiabatique	237
2.3	La température potentielle	238
3	Deux approximations	239
3.1	L'approximation de Boussinesq : présentation qualitative	239
3.2	Les développements asymptotiques	240
3.3	Approximation anélastique *	244
4	L'absence d'équilibre : la baroclinicité	246
4.1	Convection entre deux plaques verticales	247
5	L'instabilité de Rayleigh-Bénard	250
5.1	Analyse qualitative de la stabilité - critère de Schwarzschild	250
5.2	Évolution des perturbations	252
5.3	Expression des solutions	253
5.4	Critère de stabilité	254
5.5	Les autres conditions aux limites	256
6	Les figures de convection	258
6.1	Les perturbations tridimensionnelles	260
6.2	Les rouleaux de convection	261
6.3	Autres figures de convection	261
7	Le domaine faiblement non-linéaire	262
7.1	Les conditions aux limites périodiques	263
7.2	Les petites amplitudes	263
7.3	Dérivation de l'équation d'amplitude	266
7.4	Le transport de la chaleur	268

8	La convection à flux fixé *	270
8.1	Introduction	270
8.2	Formulation	271
8.3	L'équation de Chapman-Proctor	272
8.4	Propriétés de la convection faiblement super-critique	274
9	La route vers la convection turbulente	276
9.1	Le modèle de Lorenz	276
9.2	Le domaine des très grands nombres de Rayleigh	278

Chapitre 8 Les fluides en rotation

1	Introduction	283
1.1	Les équations du mouvement	283
1.2	Les nombres caractéristiques	284
2	L'écoulement géostrophique	285
2.1	Définition	285
2.2	Théorème de Taylor-Proudman	285
2.3	Exemples	287
3	Les ondes dans les fluides en rotation *	289
3.1	Les ondes inertielles	289
3.2	Les modes inertiels	290
3.3	Les ondes de Rossby	294
4	Les effets de la viscosité	297
4.1	Méthode de résolution	297
4.2	La solution dans la couche limite	297
4.3	Le pompage et la circulation d'Eckman	300
4.4	Exemple : Le spin-up	301
5	Les ouragans	307
5.1	Présentation qualitative	307
5.2	Le régime stationnaire : une machine de Carnot	308
5.3	La génèse des ouragans	310

Chapitre 9 La turbulence

1	Présentation du problème de base	315
1.1	Temps et longueur de corrélation : comment définir la turbulence	315
1.2	Le problème de la fermeture des équations moyennes	317
2	Les outils	318
2.1	Moyenne d'ensemble	318
2.2	Distribution et densité de probabilité	318
2.3	Moments et cumulants	319
2.4	Corrélations et fonctions de structure	319
2.5	Les symétries	319

3	Les corrélations en deux points	320
3.1	Les contraintes de Reynolds	321
3.2	Les corrélations doubles de la vitesse	322
3.3	Les corrélations de vorticité et d'hélicité	324
3.4	Les fonctions spectrales associées	324
3.5	Les spectres	326
3.6	Le cas isotrope	327
3.7	Les corrélations triples	328
4	Les échelles de longueur de la turbulence	330
4.1	Échelles intégrales et de Taylor	330
4.2	L'échelle de dissipation	331
5	La dynamique de la turbulence universelle	332
5.1	La théorie de Kolmogorov	332
5.2	La dynamique dans l'espace spectral	336
5.3	La dynamique dans l'espace réel	337
5.4	Conclusions sur la théorie de Kolmogorov	341
6	L'intermittence *	341
6.1	Présentation	341
6.2	Lois d'échelles des fonctions de structure	343
7	Théories pour la fermeture des équations spectrales *	347
7.1	La théorie EDQNM	347
7.2	La DIA	348
7.3	Le groupe de Renormalisation	348
8	La turbulence inhomogène	349
8.1	Une courte revue des modèles de fermeture	349
8.2	Exemples : jets et panaches turbulents	354
9	La turbulence bidimensionnelle *	358
9.1	Spectres et correlations doubles	358
9.2	Conservation de l'enstrophie et cascade inverse	359
9.3	La turbulence en présence de rotation ou de stratification	361
10	Conclusions sur la turbulence	361

Chapitre 10 La magnétohydrodynamique

1	Les approximations de la magnétohydrodynamique	369
2	Les équations du mouvement	371
2.1	Équations pour \vec{j} et \vec{B}	371
2.2	Les conditions aux limites sur le champ magnétique	373
2.3	Équation de l'énergie en présence de champ magnétique	375
3	Quelques propriétés des écoulements MHD	376
3.1	Le théorème du champ gelé	376
3.2	Pression et tension magnétique	377
3.3	Le champ-sans-force	378
3.4	La solution d'équipartition et les variables d'Eliasson	379

4	Les ondes	380
4.1	Les ondes d'Alfvén	380
4.2	Les ondes magnétosonoires	381
5	Le problème de la dynamo *	383
5.1	La dynamo cinématique	384
5.2	L'amplification du champ magnétique	385
5.3	Quelques théorèmes anti-dynamo	386
5.4	Un exemple : La dynamo de Ponomarenko	388
5.5	La dynamo turbulente	388
5.6	L'effet alpha	390
6	Appendice : équations du champ axisymétrique	393

Chapitre 11 Au delà de la Mécanique des Fluides : une introduction aux fondements statistiques de la dynamique des gaz

1	Introduction	395
2	Approche qualitative	396
2.1	Retour sur le milieu continu	396
2.2	Interactions et collisions de particules, Notion de libre parcours moyen	398
2.3	Vitesse des particules	399
2.4	Le transport de l'énergie	400
2.5	Le transport de la quantité de mouvement	402
2.6	Le nombre de Prandtl	403
2.7	Comparaison avec l'expérience	404
3	Concepts et questions pour une approche statistique	405
3.1	Notion de fonction de distribution	406
3.2	Une équation pour la fonction de distribution	408
4	L'équation de Boltzmann *	410
4.1	L'intégrale de collision	412
4.2	L'équilibre thermodynamique	416
4.3	Le libre parcours moyen	416
5	Équations du mouvement comme équations de champs moyens	418
5.1	Les quantités moyennes	418
5.2	Équation d'une quantité conservée par les collisions	419
5.3	La quantité de mouvement	420
5.4	L'énergie cinétique	421
6	Fluide parfait et gaz parfait	423
7	La dynamique des gaz dans le régime newtonien	423
7.1	Vers Navier-Stokes	424
7.2	Le modèle BGK54 et la théorie de Chapman-Enskog	424
7.3	Expression du flux de chaleur et de la conductivité thermique	426
7.4	La viscosité	427

7.5 Comparaison à l'expérience	430
8 Conclusions	432
Annexe A Compléments de mathématiques	
1 Notions sur les tenseurs	439
1.1 Définitions	440
1.2 Le tenseur complètement antisymétrique [ϵ]	441
2 Le théorème de la divergence	442
2.1 Énoncé et démonstration	442
2.2 Corollaire	443
2.3 Quelques conséquences	443
3 Rayons de courbure	444
3.1 Pour une courbe plane	444
3.2 Pour une courbe dans l'espace	444
4 La théorie de la couche limite en mathématiques	445
5 Le problème de Sturm-Liouville	447
6 Les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre	449
6.1 Les différents types	449
6.2 Les courbes caractéristiques	449
6.3 Une équation hyperbolique : l'équation d'onde	452
6.4 Une équation parabolique : l'équation de diffusion	452
6.5 Une équation elliptique : l'équation de Laplace	454
Annexe B Solutions des exercices	
Solutions des exercices du chapitre 1	463
Solutions des exercices du chapitre 2	465
Solutions des exercices du chapitre 3	470
Solutions des exercices du chapitre 4	473
Solutions des exercices du chapitre 5	476
Solutions des exercices du chapitre 6	479
Solutions des exercices du chapitre 7	481
Solutions des exercices du chapitre 8	483
Solutions des exercices du chapitre 9	484
Solutions des exercices du chapitre 10	487
Solutions des exercices du chapitre 11	489
Solutions des exercices des compléments de Mathématiques	490
Bibliographie	491
Index	497