corinne dufetrelle

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

435 exercices corrigés

PCSI

VUIBERT collection « galaxies d'exercices »

Sommaire

1. Ensembles – Applications – Relations 1
2. Groupes – Anneaux – Corps 16
3. Ensembles finis – Dénombrement 37
4. Nombres complexes 50
5. Polynômes 89
6. Fractions rationnelles 130
7. Espaces vectoriels 146
8. Applications linéaires 161
9. Espaces vectoriels et applications linéaires en dimension finie . 177
10. Matrices 204
11. Déterminants – Systèmes linéaires 257
12. Espaces vectoriels euclidiens 283
13. Géométrie affine réelle 317
14. Géométrie affine euclidienne 333

Table des matières

1. Ensembles – Applications – Relations 1

Ensembles 1
Applications 3
Injections – Surjections – Bijections 4
Loi de composition interne 11
Relations d'ordre 13

2. Groupes – Anneaux – Corps 16

Goupes 16
Sous-groupes 18
Morphismes de groupes 19
Anneaux 22
Corps 25
Division euclidienne dans l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ 27
Divisibilité dans $(\mathbb{Z},+,\times)$ 29
Numération 32
Exponentiation rapide 35

3. Ensembles finis – Dénombrement 37

Ensembles finis 37
Cardinaux 38
Arrangement – Permutation 38
Combinaison 39
Formule du binôme de Newton 41
Trois exercices de dénombrement 47

4. Nombres complexes 50

Forme algébrique – Conjugaison – Module 50
Représentation trigonométrique 55
Calcul de sommes 59
Représentation géométrique 64
Racines de l'unité 69
Équations dans $\mathbb{C}$ 73
Transformation de $a \cos x + b \sin x$ 79
Exponentielle complexe 81
Structures 82

5. Polynômes **89**
Définition des polynômes 89
Définition euclidienne dans $K[X]$ 91
Racines d'un polynôme – Divisibilité dans $K[X]$ 95
Fonction polynômiale associée 102
Formule de Leibniz 104
Formule de Taylor 108
Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $K[X]$ 109
Relations cofficients-racines 114
Résolution d'équations 117
Équations $x^3 + px + q = 0$ 121
Applications à des calculs de sommes 126

6. Fractions rationnelles **130**
Décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ 130
Décomposition en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$ 137
Applications 142

7. Espaces vectoriels **146**
Structure d'espace vectoriel 146
Sous-espaces vectoriels 147
Somme de deux sous-espaces vectoriels 152
Sous-espaces vectoriels supplémentaires 153
Famille génératrice 154
Famille libre – Famille liée 156

8. Applications linéaires **161**
Définition d'une application linéaire 161
Noyau – Image 162
Automorphisme 170
Projecteur – Projection 173

9. Espaces vectoriels et applications linéaires en dimension finie **177**
Base et dimension 177
Rang d'une famille de vecteurs 184
Applications linéaires 186
Homothétie – Projection – Symétrie – Affinité 196

10. Matrices **204**
Structures algébriques 204
Produits et puissances de matrices 206
Matrice transposée 210
Matrice d'une application linéaire 211
Rang d'une matrice 225
Détermination du rang d'une matrice 226
Matrice inversible 230
Changement de bases 243
Trace d'une matrice 252

11. Déterminants – Systèmes linéaires **257**
Déterminant d'une matrice 260
Applications des déterminants 262
Systèmes linéaires 262
Matrice inversible 278

12. Espaces vectoriels euclidiens **283**
Définition d'un produit scalaire 283
Bases orthonormales 285
Orthogonal d'un sous-espace vectoriel 288
Endomorphismes particuliers 291
Endomorphismes orthogonaux 292
Produit vectoriel – Produit mixte 293
Endomorphismes orthogonaux en dimension 3 294
Reconnaître des endomorphismes orthogonaux 303

13. Géométrie affine réelle **317**
Droites et plans 317
Barycentres 321
Applications affines 325

14. Géométrie affine euclidienne **333**