

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT

En Mathématiques

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Etude de la $[j,k]$ -domination et la $[j,k]$ -indépendance dans les graphes

Par

ZEMIR MOHAMED

Devant le jury composé de :

BOUDJEMAA Redouane	MCA	Univ. de Blida 1	Président
CHELLALI Mustapha	Professeur	Univ. de Blida 1	Directeur de thèse
BOUCHOU Ahmed	MCA	Univ. de Médéa	Co-directeur de thèse
BOUCHEMAKH Isma	Professeur	USTHB, Alger	Examinatrice
IKHLEF ESCHOUF Nouredine	Professeur	Univ. de Médéa	Examineur
MEDDAH Nacéra	MCA	Univ. de Blida 1	Examinatrice

Date de soutenance

03 Octobre 2024

RESUME

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n et soient j et k deux entiers positifs tels que $j \leq k$. Un sous-ensemble S de V est un $[j, k]$ -ensemble de G si tout sommet v de $V - S$ est adjacent à au moins j sommets et à au plus k sommets dans S . Le cardinal minimum d'un $[j, k]$ -ensemble de G est désigné par $\gamma_{[j,k]}(G)$. Si de plus S est indépendant, alors S est dit un $[j, k]$ -ensemble indépendant où $i_{[j,k]}(G)$ et $\alpha_{[j,k]}(G)$ désignent, respectivement, les cardinaux minimum et maximum d'un $[j, k]$ -ensemble indépendant de G .

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés par l'étude des $[j, k]$ -ensembles dans les graphes. Nous commençons par quelques propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles disjoints. En outre, nous nous intéressons à la caractérisation des graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) \in \{n, n-1\}$ pour $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$. Nous donnons également des conditions suffisantes pour les graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. A la fin, nous montrons que le problème de décision correspondant à la détermination de $\gamma_{[j,k]}(G)$, pour $2 \leq j \leq k$, est $\mathcal{NP}$ -complet dans les graphes bipartis. La dernière partie de cette thèse a été consacrée à l'étude des $[j, k]$ -ensembles indépendants. Nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un $[1, k]$ -ensemble indépendant dans un graphe. De plus, les graphes scindés admettant de tels ensembles ont été caractérisés. D'autre part, des bornes ont été déterminées pour $\alpha_{[1,k]}(G)$ et $i_{[1,k]}(G)$, ainsi que des relations de type Nordhaus-Gaddum. Enfin, la $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de décision associé à la détermination de $\alpha_{[1,k]}(G)$ a été montré pour les graphes bipartis et triangulés.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n and let j and k be two positive integers such that $j \leq k$. A subset S of V is a $[j, k]$ -set of G if every vertex v of $V - S$ is adjacent to at least j vertices and to at most k vertices in S . The minimum cardinality of a $[j, k]$ -set of a graph G is denoted by $\gamma_{[j,k]}(G)$. If, in addition, S is independent, then S is an independent $[j, k]$ -set, where $i_{[j,k]}(G)$ and $\alpha_{[j,k]}(G)$ denote, respectively, the minimum and maximum cardinalities of an independent $[j, k]$ -set of G .

In this thesis, we are interested in the study of $[j, k]$ -sets in graphs. We start with some properties on disjoint $[j, k]$ -sets. Furthermore, we are interested in the characterisation of graphs G of order n such that $\gamma_{[j,k]}(G) \in \{n, n-1\}$ for $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$. We also give sufficient conditions for graphs G of order n with $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. Finally, we show that the decision problem corresponding to the determination of $\gamma_{[j,k]}(G)$, for $2 \leq j \leq k$, is $\mathcal{NP}$ -complete for bipartite graphs. The last part of this thesis was devoted to the study of independent $[j, k]$ -sets. We have established a necessary and sufficient condition for the existence of an independent $[1, k]$ -set in a graph. In addition, split graphs having such sets are characterized. On the other hand, bounds have been determined for $\alpha_{[1,k]}(G)$ and $i_{[1,k]}(G)$, as well as Nordhaus-Gaddum type relations. Finally, we show that the problem of computing $\alpha_{[1,k]}(G)$ is $\mathcal{NP}$ -complete for bipartite and chordal graphs.

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطاً رتبته n و ليكن z و k عددين صحيحين موجبين حيث $k \leq z$. نقول عن مجموعة جزئية S من V أنها $[j,k]$ -مجموعة من G إذا كان لكل رأس من $V-S$ على الأقل z جوارا و على الأكثر k جوارا في S . نرمز بـ $\gamma_{[j,k]}(G)$ للأصلى الأدنى $[j,k]$ -مجموعة في G . بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت S مستقلة نقول عنها $[j,k]$ -مجموعة مستقلة و $i_{[j,k]}(G)$ و $\alpha_{[j,k]}(G)$ ترمز إلى الأصلى الأدنى و الأعلى لـ $[j,k]$ -مجموعة مستقلة من G على الترتيب.

في هذه الأطروحة، نهتم بدراسة $[j,k]$ -مجموعات في البيانات. نبدأ ببعض الخصائص المتعلقة بـ $[j,k]$ -المجموعات المنفصلة. بالإضافة إلى ذلك، نهتم بمميزات البيانات G ذات الرتبة n التي تحقق $\gamma_{[j,k]}(G) \in \{n, n-1\}$ من أجل $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$. نقدم أيضاً شروطاً كافية التي من أجلها يكون $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. في النهاية، نبين أن مشكلة القرار المتعلقة بإيجاد $\gamma_{[j,k]}(G)$ من أجل $k \leq 2$ ، معقدة خوارزمياً للبيانات ثنائية الأجزاء. نُخصص الجزء الأخير من هذه الأطروحة لدراسة $[j,k]$ -المجموعات المستقلة. لقد وضعنا شرطاً ضرورياً وكافياً لوجود $[1,k]$ -مجموعة مستقلة في بيان. علاوة على ذلك، نعطي مميزات للبيانات المنقسمة التي تقبل مثل هذه المجموعات. من ناحية أخرى، نقدم حدود للوسيطين $\alpha_{[j,k]}(G)$ و $i_{[j,k]}(G)$ ، بالإضافة إلى العلاقات من نوع Nordhaus-Gaddum. وأخيراً، ندرس التعقيدات الخوارزمية لمشكلة القرار المتعلقة بإيجاد $\alpha_{[1,k]}(G)$ للبيانات ثنائية الأجزاء و المثلثية.

REMERCIEMENTS

Tout d’abord, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur le Professeur **Mostafa BLIDIA** qui a été mon directeur de thèse, avant sa retraite, lors des premières années de doctorat. Son expertise, son soutien et ses conseils ont été d’une grande valeur pour moi et ont établi les bases de mes recherches. Je lui souhaite, ainsi qu’à sa famille, une retraite emplies de bonheur et de santé. Merci encore pour tout ce qu’il a fait pour moi et pour l’ensemble de ses étudiants.

Je tiens également à exprimer ma plus profonde gratitude et reconnaissance envers mes directeurs de thèse, Monsieur **Mustapha CHELLALI**, Professeur à l’Université de Blida 1, et Monsieur **Ahmed BOUCHOU**, Maître de Conférences à l’Université de Médéa, pour leur précieuse contribution à la réalisation de cette thèse. Leur collaboration et leur expertise ont été inestimables pour enrichir mon travail et le mener à son terme.

Je remercie vivement Monsieur **Redouane BOUDJEMAA**, Maître de Conférences à l’Université de Blida 1, pour l’honneur qu’il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également Madame **Isma BOUCHEMAKH**, Professeur à l’USTHB, Madame **Nacéra MEDDAH**, Maître de Conférences à l’Université de Blida 1, et Monsieur **Noureddine IKHLEF ESCHOUF**, Professeur à l’Université de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l’intérêt qu’ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Je saisis également cette occasion pour exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers tous ceux qui m’ont apporté leur aide, que ce soit de près ou de loin, et dont le soutien m’a été précieux lors de la préparation de cette thèse.

Enfin, je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance envers ma famille pour sa patience et son soutien constant qu’elle m’a offerts.

Table des matières

RESUME	i
ABSTRACT	ii
RESUME EN ARABE	iii
REMERCIEMENTS	iv
INTRODUCTION	10
1 Notions générales sur les graphes	13
1.1 Concepts fondamentaux	14
1.1.1 Définitions et notations	14
1.1.2 Quelques graphes particuliers	15
1.1.3 Quelques opérations sur les graphes	17
1.1.4 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum	17
1.1.5 Invariants de graphes	18
1.2 Notion de complexité	19
1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes	21
1.3.1 Domination dans les graphes	22

1.3.2	Indépendance dans les graphes	23
1.3.3	Domination efficace dans les graphes	24
2	Les $[j, k]$-ensembles dans les graphes	27
2.1	Définitions et propriétés	27
2.2	Les $[1, 2]$ -ensembles dans les graphes	29
2.3	Bornes sur $\gamma_{[1,2]}$	30
2.3.1	Graphes G tels que $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$	30
2.3.2	Graphes G tels que $\gamma_{[1,2]}(G) = n$	31
2.3.3	Graphes G tels que $\gamma_{[1,2]}(G) < n$	33
2.3.4	Inégalités de type Nordhaus-Gaddum	35
2.4	Les $[1, k]$ -ensembles indépendants dans les graphes	35
2.4.1	Les $[1, k]$ -ensembles indépendants	37
2.4.2	Bornes sur le nombre de $[1, k]$ -indépendance	39
3	Nouveaux résultats sur les $[j, k]$-ensembles dans les graphes	42
3.1	Propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles	42
3.2	Graphes avec un nombre de $[j, k]$ -domination grand	46
3.2.1	Graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) = n$	49
3.2.2	Graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) = n - 1$	53
3.2.3	Graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) < n$	57
3.3	Résultat sur la $\mathcal{NP}$ -complétude	59
4	Les $[1, k]$-ensembles indépendants	63
4.1	Graphes ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants	63
4.2	Graphes scindés ayant $[1, k]$ -ensembles indépendants	65

4.3	Bornes sur les nombres de $[1, k]$ -indépendance	67
4.4	Inégalités de type Nordhaus-Gaddum	73
4.5	Résultats sur la $\mathcal{NP}$ -complétude pour $\alpha_{[1,k]}$	75
Conclusion		79
Bibliographie		80

Table des figures

1.1	Un graphe simple G d'ordre 8 et de taille 10.	15
1.2	La couronne de C_3	17
1.3	Le graphe $K_{2,3}$	23
2.1	Un graphe biparti G tel que $\gamma_{[3,4]}(G) = \{x, y, z, t\} < \gamma_{[3,3]}(G) = \{x, y, z, t, b\} $	29
2.2	Un arbre T tel que $\gamma(T) = i(T) < \gamma_{[1,2]}(T)$	30
2.3	Le graphe G_5	32
2.4	Un arbre T tel que $\gamma(T) = 3 < \gamma_{[1,2]}(T) = 4$	34
2.5	Exemples de graphes n'admettant pas de $[1, 2]$ -ensemble indépendant mais admettant un $[1, 3]$ -ensemble indépendant.	37
2.6	Un arbre T avec $i_{[1,k]}(T) = i_{[1,2]}(T) = 2t$ et $\alpha_{[1,k]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = 3t$, pour $k \geq 2$	39
2.7	Un exemple d'une couronne vérifiant $i_{[1,k]}(G) = \alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{k+1}$ pour $k = 2$	40
3.1	Un graphe G tel que $A \cap B \neq \emptyset$ et $ A \neq B $	44
3.2	Un graphe G tel que $\gamma_{[3,\Delta-1]}(G) = n$	50
3.3	Un graphe G tel que $\gamma_{[2,\Delta-2]}(G) = n$	52
3.4	Un arbre T tel que $\gamma_{[2,\Delta-2]}(T) = n$	52
3.5	Un graphe G tel que $\gamma_{[2,\Delta]}(G) = n - 1$	54

3.6	Un graphe G tel que $\gamma_{[3, \Delta-1]}(G) = n - 1$	55
3.7	Un arbre T tel que $\gamma_{[2, \Delta-2]}(T) = n - 1$	57
3.8	Réduction du problème X3C au problème $[j, k]$ -ENSEMBLE	61
4.1	Les graphes G_1 , G_2 et G_3	67
4.2	La construction d'un graphe biparti G pour $q = k = 2$	77

Introduction

Fréquemment, lorsque l'on souhaite visualiser certaines situations ou des relations entre les éléments d'un système donné, la méthode la plus pratique consiste à dessiner des points et à les relier par des traits. Ce schéma prend le nom de « graphe », où les points et les traits sont respectivement appelés sommets et arêtes (ou arcs lorsque les traits ont une direction). La théorie des graphes joue un rôle essentiel dans de nombreux domaines des sciences appliquées, notamment l'ingénierie, l'informatique, la biologie, la génétique et les sciences sociales. Elle se penche généralement sur des problèmes pratiques de nature combinatoire, où la recherche de structures optimales spécifiques est fréquente, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimale ou dominant minimum.

L'un des domaines les plus florissants en théorie des graphes est le concept de la domination, qui a fait l'objet d'une étude intensive au cours des trois dernières décennies. Ses origines semblent remonter au 16^{ème} siècle en Inde, où elle était abordée comme un problème lié au jeu d'échec [40]. L'idée fondamentale est d'occuper toutes les cases de l'échiquier avec un ensemble de pièces du jeu. Au début des années 1850 [42], les passionnés d'échecs se sont penchés sur la recherche du nombre minimum de reines nécessaires à disposer sur un échiquier de manière à ce que chaque case soit occupée par une reine, soit puisse être occupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [46] a été le premier à rédiger un article sur le concept de domination dans les graphes et a donné le nom actuel du nombre de domination. Après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [20], la domination a

connu sa véritable expansion. La pertinence et l'intérêt accrus à ce sujet ont été démontrés par les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [38, 39].

De nouveaux paramètres de domination ont souvent été créés par l'aspect pratique et concret de la domination. En effet, lorsque des conditions supplémentaires ont été ajoutées au graphe en question, de nombreux paramètres de domination ont émergé. En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo, Fink et Jacobson [27, 28] ont introduit une généralisation de la domination et de l'indépendance dans les graphes.

Le concept de domination a gagné une grande popularité entre les chercheurs. Des résultats plus récents peuvent être trouvés dans [15, 35–39].

Le concept de $[j, k]$ -ensemble a été introduit en 2013 par Chellali et al. [17]. Cependant, il y a encore beaucoup à faire sur les $[j, k]$ -ensembles. Cette thèse est une contribution à l'étude de la $[j, k]$ -domination et de la $[j, k]$ -indépendance dans les graphes.

La détermination des paramètres liés aux $[j, k]$ -ensembles dans les graphes, généralement, est un problème $\mathcal{NP}$ -complet, nous nous penchons sur la détermination de bornes à ces paramètres qui les encadrent le plus étroitement possible, et sur la détermination de leurs valeurs exactes dans des classes particulières de graphes. De plus, nous nous concentrons sur les graphes extrémaux en lien avec les bornes élaborées.

Cette thèse s'articule sur quatre chapitres dont voici une description.

Le premier chapitre contient les concepts fondamentaux de la théorie des graphes essentiels à la compréhension de cette thèse. Ensuite, nous aborderons de manière concise le concept de la domination dans les graphes ou quelques paramètres de domination seront définis.

Dans le deuxième chapitre, nous explorons le sujet de notre étude en fournissant un aperçu des concepts des $[j, k]$ -ensembles et $[1, k]$ -ensembles indépendants dans les graphes. Nous présentons un résumé des résultats importants existants dans la littérature sur ces types d'ensembles.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des $[j, k]$ -ensembles dans les graphes. Nous commençons par établir quelques propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles disjoints, puis nous nous intéressons à la caractérisation des graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) \in \{n, n-1\}$, où les cas $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$ ont été traités. La difficulté de ce problème dans le cas général, nous amène à chercher des conditions suffisantes pour lesquels $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. Nous montrons par la suite que le problème de décision correspondant au problème de la détermination du nombre de $[j, k]$ -domination, pour $2 \leq j \leq k$, est $\mathcal{NP}$ -complet, même lorsqu'on se restreint aux graphes bipartis.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons une condition nécessaire et suffisante pour les graphes possédant un $[1, k]$ -ensemble indépendant. De plus, nous caractérisons les graphes scindés ayant un tel ensemble. Nous déterminons également des bornes pour $\alpha_{[1,k]}(G)$ et $i_{[1,k]}(G)$, et établissons des relations de type Nordhaus-Gaddum sur $\alpha_{[1,k]}(G)$, en fournissant une caractérisation des graphes extrémaux atteignant ces bornes. Enfin, nous montrons que le problème de décision correspondant aux problèmes des $[1, k]$ -ensembles indépendants est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis et triangulés, lorsque $1 < k < \Delta$.

Nous clôturons cette thèse par une conclusion, accompagnée de quelques perspectives pour les futurs travaux dans ce domaine.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous présentons les notions et les terminologies utilisées à travers ce document. La première partie revisite quelques définitions fondamentales de la théorie des graphes, offre un aperçu des paramètres structurels d'un graphe, et énonce les définitions de certains invariants. Les concepts spécifiques à chaque chapitre sont définis au sein de ces chapitres respectifs. Dans la deuxième partie, un rappel sur la notion de complexité sera donné. Enfin, nous rappelons brièvement le concept de la domination dans les graphes et nous donnons les définitions de quelques paramètres liés à la domination, l'indépendance, la domination stable et la domination efficace.

Pour une compréhension approfondie de la terminologie employée dans cette thèse, nous recommandons au lecteur de consulter les ouvrages de C. Berge [5], Haynes, Hedetniemi, et Slater [38, 39], ainsi que les récents livres de Haynes, Hedetniemi et Henning [35, 36, 37].

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définitions et notations

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de *sommets* V et un ensemble d'*arêtes* E . Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de G , noté $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la *taille* de G , notée $m(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets u, v notée par $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e . On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe *simple* est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis.

Le *voisinage ouvert* d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage fermé $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. Le *degré* d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est le nombre de ses voisins. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement, le *degré maximum* et le *degré minimum* dans G . Un sommet de degré nul sera dit isolé, et un sommet de degré un sera dit *pendant* tandis qu'un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit *support*.

La Figure 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ dont l'ensemble des sommets est $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et l'ensemble des arêtes est $E = \{ac, bc, cd, ce, df, eg, fh, gh, de, fg\}$. Le voisinage ouvert du sommet c est $N_G(c) = \{a, b, d, e\}$ et son voisinage fermé est $N_G[c] = \{c, a, b, d, e\}$. Le voisinage ouvert de l'ensemble $S = \{a, f\}$ est $N_G(S) = \{c, d, g, h\}$ et son voisinage fermé est $N_G[S] = \{a, f, c, d, g, h\}$. Le sommet c est un sommet support et les sommets a et b sont des sommets pendants. Le degré minimum de G est $\delta(G) = 1$ et son degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

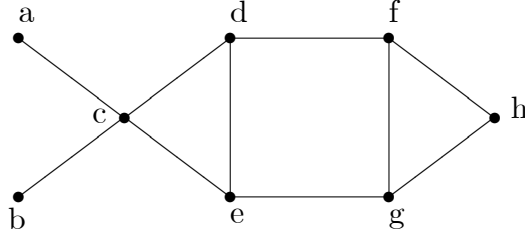


FIG. 1.1 – Un graphe simple G d'ordre 8 et de taille 10.

1.1.2 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous graphe induit* par S , noté par $G[S]$, est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S .

Pour un sous-ensemble $U \subseteq E$, le *graphe partiel* de G défini par U , noté G_U , est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U .

Le graphe *complémentaire* de G , noté $\overline{G}$, est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G .

Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition de ses sommets en deux sous-ensembles X et Y de telle façon que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de X à un sommet de Y . Autrement dit, les sous graphes $G[X]$ et $G[Y]$ sont des stables. Si tout sommet de l'ensemble X est adjacent à tout sommet de Y , alors le graphe est appelé *biparti complet*, et noté par $K_{|X|,|Y|}$.

Dans un graphe $G = (V, E)$, une *chaîne* P est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \dots, v_k$ de V telle que $v_i v_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. La longueur de la chaîne P (au sens des arêtes) est indiquée par l'entier $k-1$ et les deux sommets v_1 et v_k sont désignés respectivement comme *extrémité initiale* et *extrémité finale* de la chaîne P . Une chaîne est dite *élémentaire* (respectivement, *simple*) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une arête reliant deux sommets non consécutifs d'une

chaîne est appelée *corde*. Une chaîne élémentaire sans cordes est une *chaîne minimale* induite par n sommets et notée P_n .

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

La *maille* d'un graphe G , noté g , est la longueur minimale d'un cycle induit dans G .

Si pour chaque paire de sommets distincts u et v de V , il existe une chaîne reliant u et v , alors le graphe G est *connexe*. La relation de connexité est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence sont appelés composantes connexes de G .

Un *arbre* est un graphe connexe ayant exactement $n - 1$ arêtes. Une *forêt* est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

Une *étoile*, notée par $K_{1,n}$, est un arbre d'ordre $n + 1$ ayant au moins n sommets pendants. Une *étoile double* est un graphe connexe obtenu en reliant par une arête les deux sommets supports des étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$, et on la note par $S_{p,q}$.

Une *chenille*, notée $C(t_1, t_2, \dots, t_s)$, est un arbre dont la suppression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, \dots, u_s$ qui est appelée la *colonne vertébrale* de la chenille, tel que t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i pour $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Un graphe *complet* d'ordre n , noté K_n , est un graphe simple dont tous ses sommets sont adjacents.

Un graphe est dit *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré k . Notons que le graphe complet K_n est $(n - 1)$ -régulier.

Un graphe G est dit *scindé* s'il existe une partition de ses sommets en un ensemble indépendant et une clique.

Un graphe G est dit *sans H* s'il ne contient pas le graphe H comme sous-graphe induit.

En théorie des graphes, la notion de sous-graphes induits est cruciale, car elle permet de définir des classes de graphes caractérisées par des sous-graphes *exclus* ou *interdits*.

Par exemple, la classe des arbres exclut les cycles, la classe des graphes bipartis exclut les cycles impairs et la classe des graphes sans griffe exclut $K_{1,3}$.

1.1.3 Quelques opérations sur les graphes

Etant donné deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

La G_2 -*couronne* de G_1 , est le graphe $G_1 \circ G_2$ obtenu d'une copie de G_1 et $|V_1|$ copies de G_2 où le $i^{\text{ième}}$ sommet de G_1 est adjacent à tous les sommets de la $i^{\text{ième}}$ copie de G_2 . Lorsque G_2 est une clique K_1 , $G_1 \circ K_1$ est appelé la *couronne* du graphe G_1 . Il est à noter que l'ordre de $G_1 \circ G_2$ est $|V_1| (|V_2| + 1)$.

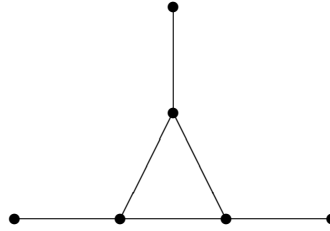


FIG. 1.2 – La couronne de C_3 .

L'*union* de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, leur *joint* est le graphe $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$, et leur *produit cartésien* $G_1 \square G_2$ est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$ et deux sommets (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont adjacents si $u_1 = v_1$ et $u_2 v_2 \in E(G_2)$ ou $u_2 = v_2$ et $u_1 v_1 \in E(G_1)$. Une grille de dimension $n \times m$ est le produit cartésien de deux chaînes P_n et P_m .

1.1.4 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset A$ (respectivement, $B \supset A$) tel que $G[B]$

vérifie $\mathcal{P}$.

On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (respectivement, *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous-ensemble $B \subset V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|A| > |B|$ (respectivement, $|B| > |A|$)

1.1.5 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs sommets correspondants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre graphe. Si deux graphes sont isomorphes, ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriété stable par isomorphisme.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n . Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

Le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, le degré minimum et le degré maximum sont des invariants de base d'un graphe.

Une *clique* de d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de V deux-à-deux adjacents. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de G est maximum si elle est de taille maximale dans G . Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

Un *stable* de G est un sous-ensemble de sommets de V deux-à-deux non-adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de ses sommets. Un stable de G est maximum s'il est de taille maximale dans G . Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$, est appelé nombre de stabilité de G .

Un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes de E non-adjacentes deux à deux. On notera par $\alpha_0(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G . Un couplage

est dit *parfait* dans G si $\alpha_0(G) = \frac{n}{2}$.

1.2 Notion de complexité

Il existe de nombreux problèmes considérés comme difficiles en théorie des graphes. Dans cette section, nous allons définir certains problèmes qui seront abordés dans cette thèse. Toutefois, nous allons d'abord introduire quelques notions fondamentales concernant la complexité algorithmique.

Un *algorithme* peut être défini comme une série finie d'opérations élémentaires qui, pour chaque instance donnée d'un problème, transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties).

Lorsqu'il s'agit de résoudre un *problème d'optimisation combinatoire*, l'objectif est de trouver la meilleure solution parmi un ensemble potentiellement très vaste d'éléments. Dans ces cas, il devient essentiel d'évaluer l'efficacité de tout algorithme mis en œuvre. Pour comparer les performances de plusieurs algorithmes traitant un même problème, on utilise généralement une mesure basée sur leur temps d'exécution, appelée la complexité temporelle.

L'analyse de la *complexité* d'un algorithme fournit une estimation du temps nécessaire pour son exécution, exprimée en nombre d'opérations élémentaires telles que les affectations, les comparaisons et les opérations arithmétiques. Cette estimation dépend de la taille de l'entrée, mesurée en termes du nombre de caractères requis pour représenter les données du problème. Pour exprimer cette relation, on utilise la notation de Landau O , qui permet de déterminer une borne supérieure sur le nombre d'opérations effectuées en fonction de la taille de l'entrée.

Un algorithme est dit *polynomial* ou de complexité $O(n^k)$, si le nombre d'opérations élémentaires $T(n)$, nécessaire pour résoudre un problème de taille n , est borné par un polynôme en n , c'est-à-dire, si $T(n) \leq c.n^k$ où c et k sont des constantes.

Un *problème de décision* est un problème dont la réponse attendue est de type “ oui ” ou “ non ”. La théorie de la complexité fournit une classification des problèmes de décision selon leur niveau de difficulté.

Un problème de décision est dans la classe $\mathcal{P}$, s’il existe un algorithme polynomial pour résoudre ce problème. Plusieurs problèmes de graphes sont dans la classe $\mathcal{P}$, par exemple : le problème du couplage maximum, le problème du plus court chemin, le problème de l’arbre de poids minimum, le problème de la connexité, etc. . .

Un problème de décision est dit appartenir à la classe $\mathcal{NP}$ s’il existe, pour toute instance dont la réponse est “ oui ”, un certificat vérifiable en temps polynomial en fonction de la taille des données. La classe $\mathcal{NP}$ (Non déterministe Polynomial) contient les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe. Cette classe contient les problèmes classiques en théorie des graphes, liés à la stabilité, la coloration, la domination, etc...

La classe $\mathcal{P}$ est incluse dans la classe $\mathcal{NP}$. Mais la classe $\mathcal{NP}$ contient des problèmes qu’on ne connaît pas d’algorithme polynomial pour les résoudre. De ce fait, un problème majeur reste posé à ce jour : est-ce que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?.

Il est dit qu’un problème P se réduit à un problème Q , s’il existe un algorithme pour P qui fait appel à un algorithme de résolution de Q , et si cet algorithme de résolution de P est polynomial lorsque la résolution de Q est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe $\mathcal{NP}$ est dit complet, si tout problème dans $\mathcal{NP}$ peut lui être réduit en temps polynomial. En d’autres termes, s’il existait un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème $\mathcal{NP}$ -complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe $\mathcal{NP}$, et on aurait l’égalité $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Les problèmes $\mathcal{NP}$ -complets sont les plus difficiles de la classe $\mathcal{NP}$.

Il est montré par Ladner [43] que si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ alors ils existent des problèmes qui ne

sont ni dans $\mathcal{P}$, ni $\mathcal{NP}$ -complet, ils sont dits $\mathcal{NP}$ -intermédiaire.

Il existe un lien fort entre un problème de décision et un problème d'optimisation. En fait, la plupart des problèmes de décision ont une version d'optimisation. Les problèmes d'optimisation associés aux problème de décision $\mathcal{NP}$ -complets sont qualifiés de $\mathcal{NP}$ -difficiles (ou $\mathcal{NP}$ -durs). Un problème $\mathcal{NP}$ -difficile est un problème au moins aussi difficile qu'un problème $\mathcal{NP}$ -complet.

Pour une présentation plus complète, le lecteur peut consulter l'article de Cook [21] et l'ouvrage de Garey et Johnson [31].

Notons que pour une sous classe de graphes H d'une classe de graphes G , si un problème est $\mathcal{NP}$ -complet pour H alors il l'est pour G , et un algorithme qui résout un problème pour G , le résout aussi pour H .

1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes

Le concept de domination dans les graphes trouve son origine dans le jeu d'échecs. Le principe est de couvrir l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée remonte au 16^{ème} siècle en Inde (Voir [40]). En 1862 De Jaenisch [42] posa le problème suivant : déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour l'échiquier 8×8 , le nombre minimum est 5. et pour l'échiquier 24×24 , le nombre minimum est 13. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent pour $n > 24$. Pour plus de détails voir [29, 37].

En 1958, Claude Berge [5] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [46], en 1962. La domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [20] en 1977. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des

propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination. Ainsi, beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple : la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, etc.

Le premier numéro spécial consacré entièrement à la domination dans les graphes a été édité en 1990 par Hedetniemi et Laskar publié dans la revue Discrete Mathematics [40]. Une liste de quelques 400 références a été incluse dans ce numéro. On dénombre actuellement plus de 200 types de domination et plus de 6000 références dans le domaine.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater [38, 39], et les trois récents livres de Haynes, Hedetniemi et Henning [35, 36, 37].

Nous donnons les définitions de quelques types de domination dans les graphes liés à notre sujet d'étude.

1.3.1 Domination dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets D de V est dit *dominant* si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D . Le *nombre de domination*, noté $\gamma(G)$, d'un graphe G représente le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G . Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$ -ensemble.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants. En voici des exemples :

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Notons qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$ -ensembles.

Par exemple dans le graphe biparti complet $K_{2,3}$ de la Figure 1.3, $\gamma(K_{2,3}) = 2$, et $\{a, b\}$, $\{a, x\}$, $\{a, y\}$, $\{a, z\}$, $\{b, x\}$, $\{b, y\}$ et $\{b, z\}$ sont tous des $\gamma(K_{2,3})$ -ensembles.

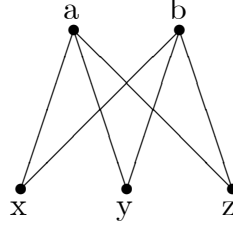


FIG. 1.3 – Le graphe $K_{2,3}$

En 1975, Cockayne, Goodman et Hedetniemi [18] ont construit le premier algorithme linéaire pour déterminer le nombre de domination dans les arbres. Garey et Johnson [31] ont montré, en 1975, que le problème de la détermination du nombre de domination est $\mathcal{NP}$ -complet en général. Plus tard, Dewdney [24], Chang et Nemhauser [14], et Bertossi [6], indépendamment, ont montré que le problème reste $\mathcal{NP}$ -complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. En 1982, Booth et Johnson [10] ont montré que le problème reste aussi $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes triangulés.

1.3.2 Indépendance dans les graphes

Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe G est dit *indépendant* (ou *stable*) si les sommets de S sont deux à deux non-adjacents. Le cardinal maximum (respectivement, minimum) des ensembles indépendants maximaux est appelée le *nombre d'indépendance* (respectivement, *nombre de domination stable*) de G , et est noté par $\alpha(G)$ (respectivement $i(G)$). Un ensemble indépendant avec un tel cardinal est appelé $\alpha(G)$ -ensemble (respectivement, $i(G)$ -ensemble).

Pour le graphe $K_{2,3}$, représenté dans la Figure 1.3, $\alpha(K_{2,3}) = 3$, et $\{x, y, z\}$ est le seul $\alpha(G)$ -ensemble, $i(K_{2,3}) = 2$, et $\{a, b\}$ est le seul $i(G)$ -ensemble.

Par le fait qu'un indépendant maximal est un dominant, il est facile de voir que :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \quad (1.1)$$

Ces bornes sont atteintes pour le graphe $K_{1,k} \circ K_1$. D'autre part, les différences $\gamma(G) - i(G)$ et $\alpha(G) - i(G)$ peuvent être aussi larges que l'on veut. Ceci peut être vu en considérant l'étoile double $S_{t,t}$, pour $t \geq 3$.

Allan et Laskar [1] ont montré que les graphes sans griffes vérifient $\gamma(G) = i(G)$.

Il est bien connu qu'il existe un algorithme polynomial pour déterminer le nombre d'indépendance dans les graphes bipartis, car $\alpha(G) = n - \alpha_0(G)$, et Edmonds [26] a montré que $\alpha_0(G)$ peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe G . En 1994, Daykin et Ng. [23] ont donné le premier algorithme pour la détermination de $\alpha(G)$ dans les arbres. Aussi, en 1972, Gavril [32] a montré que le problème peut être résolu en un temps polynomial si l'on se restreint aux graphes triangulés. D'autre part, en 1975, Garey et Johnson [31] ont montré que le problème de la détermination de $\alpha(G)$ est $\mathcal{NP}$ -complet, pour un graphe arbitraire. Aussi, Fricke et al. 1998 en [30] ont montré que le problème reste $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes réguliers.

Le paramètre de la domination stable se révèle être $\mathcal{NP}$ -complet, comme il est montré dans l'ouvrage de Garey et Johnson [31]. Corneil et Perl [22] ont montré, en 1984, que le problème reste $\mathcal{NP}$ -complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. D'autre part, Beyer et al. [7] ont donné un algorithme polynomial pour déterminer le nombre de domination stable dans les arbres.

1.3.3 Domination efficace dans les graphes

Un ensemble S de V est dit *dominant efficace* si tout sommet de G est dominé exactement par un sommet de S , c'est-à-dire pour tout sommet v de G , $|N[v] \cap S| = 1$.

La domination efficace a été introduite en 1988 par Bange et al. [3].

Notons qu'un ensemble dominant efficace n'existe pas toujours, par exemple le cycle C_5 ne possède pas d'ensemble dominant efficace. Cependant, si G admet un dominant efficace S , alors tous les ensembles dominants sont de même cardinal, en particulier $\gamma(G) = |S|$.

En 1988, Bange et al. [3] ont montré que le problème de la domination efficace est $\mathcal{NP}$ -complet, en général, et ils ont montré qu'il est possible de résoudre ce problème en temps linéaire pour les arbres. Par la suite, en 1990, Yen et Lee [48] ont montré que le problème reste $\mathcal{NP}$ -complet, même pour les graphes bipartis et triangulés.

La domination est utilisée dans beaucoup de problèmes pratiques comme les problèmes de réseaux de communication, de systèmes de surveillance, de systèmes électriques, de réseaux informatiques ... etc. Le côté appliqué de la domination a été souvent la cause de naissance d'autres paramètres, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire. Cette condition peut être intérieure ou extérieure à l'ensemble dominant, ou bien intérieure et extérieure en même temps. A titre d'exemple, considérons quelques types de domination qui nous intéressent dans les prochains chapitres.

- Imposer la condition à ce que chaque sommet extérieur ait au moins j voisins dans l'ensemble dominant définit ainsi, un ensemble j -dominant.
- Imposer la condition à ce que chaque sommet extérieur ait au plus k voisins dans l'ensemble dominant définit ainsi, un $[1, k]$ -ensemble.
- Imposer la condition à ce que chaque sommet extérieur ait au moins j voisins et au plus k voisins dans l'ensemble dominant définit ainsi, un $[j, k]$ -ensemble.
- Imposer la condition à ce que chaque sommet extérieur ait exactement k voisins dans l'ensemble dominant définit ainsi, un ensemble k -dominant parfait.
- Imposer la condition à ce que chaque sommet extérieur ait au plus k voisins dans l'ensemble dominant et que l'ensemble dominant soit stable définit ainsi, un $[1, k]$ -ensemble

indépendant.

Comme les paramètres de domination sont souvent montrés difficiles à déterminer et en l'absence de valeurs exactes pour ces paramètres, on est amené à chercher des bornes supérieures et des bornes inférieures simples à vérifier, la recherche des graphes extrémaux et la recherche des inégalités entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité.

Chapitre 2

Les $[j, k]$ -ensembles dans les graphes

Ce chapitre, divisé en trois sections, se focalise sur les travaux portant sur les $[j, k]$ -ensembles et les $[1, k]$ -ensembles indépendants dans les graphes. Dans la première section, les notions des $[j, k]$ -ensembles et des $[1, k]$ -ensembles indépendants seront rappelés, et certaines propriétés seront données. La deuxième section traitera les résultats existants sur les $[1, 2]$ -ensembles dans les graphes, tandis que la dernière section se penchera sur les résultats existants sur les $[1, k]$ -ensembles indépendants.

2.1 Définitions et propriétés

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soient j et k deux entiers positifs tels que $j \leq k$. Un sous ensemble S de V est un $[j, k]$ -ensemble de G si pour tout sommet v de $V - S$, $j \leq |N(v) \cap S| \leq k$, c-à-d chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins j sommets, mais pas plus que k sommets dans S . L'ordre minimum d'un $[j, k]$ -ensemble d'un graphe G est appelé le *nombre de $[j, k]$ -domination* noté $\gamma_{[j, k]}(G)$. Un $[j, k]$ -ensemble de cardinal $\gamma_{[j, k]}(G)$ est appelé un $\gamma_{[j, k]}(G)$ -ensemble.

Il est clair que $\gamma_{[j, \Delta]}(G)$ est le nombre de j -domination $\gamma_j(G)$ introduit par Fink et Jacobson [27], tandis que $\gamma_{[j, j]}(G)$ est le nombre de j -domination parfaite $\gamma_{pj}(G)$ introduit

par Chaluvvaraju et al. [12].

Des définitions précédentes, nous avons les propriétés suivantes :

1. Tout $[j, k]$ -ensemble contient au moins j sommets, d'où $\gamma_{[j,k]}(G) \geq j$.
2. Tout $[j, k]$ -ensemble contient tous les sommets de degré plus petit que j .
3. Tout $[j + 1, k]$ -ensemble est aussi un $[j, k]$ -ensemble, et donc

$$\gamma_{[1,k]}(G) \leq \gamma_{[2,k]}(G) \leq \cdots \leq \gamma_{[k-1,k]}(G) \leq \gamma_{[k,k]}(G) = \gamma_{pk}(G). \quad (2.1)$$

4. Tout $[j, k]$ -ensemble est aussi un $[j, k + 1]$ -ensemble, et donc

$$\gamma_j(G) = \gamma_{[j,\Delta]}(G) \leq \gamma_{[j,\Delta-1]}(G) \leq \cdots \leq \gamma_{[j,j+1]}(G) \leq \gamma_{[j,j]}(G) = \gamma_{pj}(G). \quad (2.2)$$

5. Si $j \geq \Delta + 1$, alors V est le seul $[\Delta + 1, k]$ -ensemble, mais il n'est pas un $[\Delta, k]$ -ensemble minimum. On en déduit que pour tout graphe G d'ordre n ,

$$\gamma_{[\Delta,k]}(G) < \gamma_{[\Delta+1,k]}(G) = n. \quad (2.3)$$

Il est à noter que les inégalités des deux séquences précédentes 2.1 et 2.2 peuvent être strictes. Pour le voir, il suffit de considérer :

1. pour la première séquence, le graphe complet K_n d'ordre n . Alors $\gamma_{[j,k]}(K_n) = j$ pour tous j et k avec $1 \leq j \leq k \leq n$, et donc

$$\gamma_{[1,k]}(G) = 1 < \gamma_{[2,k]}(G) = 2 < \cdots < \gamma_{[k-1,k]}(G) = k - 1 < \gamma_{[k,k]}(G) = \gamma_{pk}(G) = k.$$

2. pour la deuxième séquence, le graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, tel que $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ et

$E = \{x_1y_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\} \cup \{x_2y_i : i \in \{1, 2, \dots, k-1\}\} \cup \dots \cup \{x_{j-1}y_i : i \in \{1, 2, \dots, k-j+2\}\}$
avec j et k deux entiers vérifiant $j \geq 2$ et $k = 2j - 2$. Alors,

$$\Delta = k = \gamma_{[j,\Delta]}(G) < \gamma_{[j,\Delta-1]}(G) < \dots < \gamma_{[j,j+1]}(G) < \gamma_{[j,j]}(G) = n - 1.$$

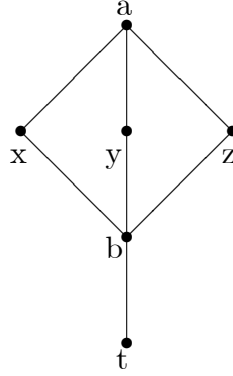


FIG. 2.1 – Un graphe biparti G tel que $\gamma_{[3,4]}(G) = |\{x, y, z, t\}| < \gamma_{[3,3]}(G) = |\{x, y, z, t, b\}|$.

Dans [17], Chellali et al. ont montré que la détermination du nombre $\gamma_{[1,2]}$ est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis. Plus tard, Bishnu et al. [9] ont montré que la détermination du nombre $\gamma_{[1,k]}$ est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes triangulés, et ont donné aussi des algorithmes linéaires pour déterminer $\gamma_{[1,k]}$ dans les arbres et dans les graphes scindés.

L'étude des $[j,k]$ -ensembles dans le cas général reste ouverte et seulement quelques cas particuliers ont été examinés. Pour les $[1,2]$ -ensembles, voir par exemple [4, 17, 47], et pour les $[1,k]$ -ensembles, voir par exemple [9, 33, 45]. Notons par ailleurs que la version de $[j,k]$ -ensemble indépendant a été étudiée dans [16] pour le cas de $j = 1$.

2.2 Les $[1,2]$ -ensembles dans les graphes

Dans cette section, on va présenter quelques propriétés et résultats sur les $[1,2]$ -ensembles, donnés par Chellali et al. dans [17]. Le concept des $[1,2]$ -ensembles peut être relié à de nombreux autres concepts de domination, par exemple : les $[0,1]$ -ensembles, les $[1,1]$ -ensembles, et les $[0,2]$ -ensembles étudiés dans les papiers [17, 19, 25].

Quels sommets	Bornes	Type d'ensemble
$\forall v \in V - S$	$0 \leq N(v) \cap S \leq 1$	Domination presque parfaite
$\forall v \in V - S$	$ N(v) \cap S = 1$	Domination parfaite
$\forall v \in V - S$	$1 \leq N(v) \cap S \leq 2$	$[1, 2]$ -ensemble
$\forall v \in V - S$	$0 \leq N(v) \cap S \leq 2$	Domination presque 2-parfaite

2.3 Bornes sur $\gamma_{[1,2]}$

Notons que tout graphe G a un $[1, 2]$ -ensemble, et puisque tout $[1, 2]$ -ensemble est un ensemble dominant, tout $[1, 1]$ -ensemble est un $[1, 2]$ -ensemble, et V satisfait les conditions de la définition d'un $[1, 2]$ -ensemble, on a $\gamma(G) \leq \gamma_{[1,2]}(G) \leq \gamma_{P1}(G) \leq n$, pour tout graphe G d'ordre n . Dans la suite, on rappelle quelques résultats donnés par Chellali et al. [17].

2.3.1 Graphes G tels que $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$

En général, les paramètres $i(G)$ et $\gamma_{[1,2]}(G)$ ne sont pas comparables. Par exemple, considérons l'arbre T construit d'un sommet u de degré 3, tel que chaque voisin de u est adjacent à exactement deux sommets pendants. Alors $\gamma(T) = i(T) = 3 < \gamma_{[1,2]}(T) = 4$. Tandis que, pour l'étoile double $T \cong S_{r,s}$ avec $2 \leq r \leq s$, $\gamma(T) = \gamma_{[1,2]}(T) = 2 < i(T) = r + 1$.

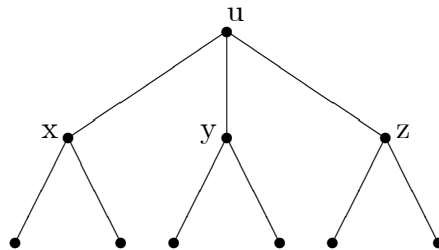


FIG. 2.2 – Un arbre T tel que $\gamma(T) = i(T) < \gamma_{[1,2]}(T)$.

Le résultat suivant rassemble quelques conditions suffisantes pour qu'un graphe G satisfasse $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.

Théorème 2.3.1 ([17]) *Soit G un graphe d'ordre n vérifiant l'une des conditions suivantes,*

- (i) $\gamma(G) \leq 2$.
- (ii) G est une chenille ou une couronne $H \circ K_1$, où H est un graphe quelconque.
- (iii) G est sans griffe. En plus $i(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.
- (iv) G est sans P_4 .
- (v) $\Delta(G) \geq n - 3$.

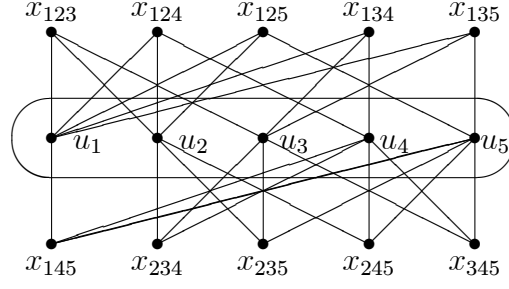
$$\text{Alors } \gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$$

Il est à noter que la réciproque pour les conditions (iv) et (v) du Théorème 2.3.1 n'est pas vraie. Pour le voir, il suffit de prendre $G \cong P_4$ et $G \cong C_6$, respectivement, mais $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.

2.3.2 Graphes G tels que $\gamma_{[1,2]}(G) = n$

L'ensemble des sommets de tout graphe G est un $[1, 2]$ -ensemble, et donc pour tout graphe G d'ordre n , on a $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n$. L'égalité est atteinte pour le graphe trivial K_1 . Ceci nous amène à poser la question suivante : “Existe-t-il des graphes connexes G d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma_{[1,2]}(G) = n$?”. Il semble qu'il est difficile de caractériser ces graphes. Dans [17], les auteurs ont construit un graphe scindé G_p avec n sommets, vérifiant $\gamma_{[1,2]}(G_p) = n$.

Soit G_p un graphe obtenu d'un graphe complet K_p , avec $p \geq 5$, comme suit : Pour chaque sous-ensemble de trois sommets S de $V(K_p)$, on ajoute un nouveau sommet x_S et les arêtes $x_S u$ pour tout $u \in S$. Notons que le nombre total de sommets ajoutés est C_p^3 et le nombre total d'arêtes ajoutées est $3C_p^3$. Par exemple, le graphe G_5 illustré dans la Figure 2.3 est le plus petit graphe dans cette famille.


 FIG. 2.3 – Le graphe G_5

Théorème 2.3.2 ([17]) *Pour tout graphe G_p , $p \geq 5$, d'ordre n , $\gamma_{[1,2]}(G_p) = n$.*

Plus tard, Bishnu et al. [9] ont construit un graphe scindé $G_{p,k}$ avec n sommets, vérifiant $\gamma_{[1,k]}(G_{p,k}) = n$.

Soit p et k deux entiers avec $p \geq k + 2$. Soit $G_{p,k}$ le graphe obtenu d'un graphe complet K_p comme suit. Pour chaque sous-ensemble de k sommets S de $V(K_p)$, on ajoute un nouveau sommet x_S et de nouvelles arêtes $x_S u$ pour tout $u \in S$. Notons que le nombre total de sommets ajoutés est C_p^k et le nombre total d'arêtes ajoutées est kC_p^k .

Théorème 2.3.3 ([9]) *Pour tout graphe $G_{p,k}$, $p \geq k + 2$, d'ordre n , $\gamma_{[1,k]}(G_p) = n$.*

On remarque que le résultat du théorème précédent pour $k = 3$ est dû à Chellali et al. [17], et les preuves sont semblables. Aussi, dans le même papier, ils ont donné une caractérisation des graphes scindés G tels que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$.

Théorème 2.3.4 ([9]) *Soit $G = (V, E)$ un graphe scindé tel que $V = K \cup S$ et $|K| = n_1$, $|S| = n_2$. Alors $\gamma_{[1,k]}(G) = n$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- (i) *Il existe au moins un sommet v dans K tel que $d_G(v) \geq n_1 + k$.*
- (ii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ et pour toute sous clique $K_i = \{v_1, \dots, v_i\}$ de K , il existe un sommet $v_t \in K - K_i$ tel que $d_{G[K \cup S_i]}(v_t) \geq n_1 + (k - i)$, où $S_i = S - N_G(K_i)$.*
- (iii) *Pour toute sous clique K_k de K , $S \not\subseteq N_G(K_k)$.*

(iv) Pour tout sommet $u \in S$, $d_G(u) \geq k + 1$.

Les conditions (i), (ii) et (iii) forcent tous les sommets de K d'être dans le $[1, k]$ -ensemble, et la condition (iv) force tous les sommets de S d'être dans le $[1, k]$ -ensemble. En utilisant ce type de graphe scindé, Bishnu et al. [9] ont réussi à construire un graphe G (non-scindé) tel que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$.

Soit $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_p = (V_p, E_p)$ des p graphes scindés tels que $V_1 = K_1 \cup S_1, V_2 = K_2 \cup S_2, \dots, V_p = K_p \cup S_p$. L'ensemble des sommets du graphe construit $G = (V, E)$ sont $V = \bigcup_{i=1}^p V_i$ et l'ensemble des arêtes est $E = \bigcup_{i=1}^p E_i \cup E'$, où E' est un ensemble arbitraire d'arêtes entre les sommets de $K_1, K_2, \dots, K_p$. Ce graphe vérifie $\gamma_{[1,k]}(G) = |V| = n$.

2.3.3 Graphes G tels que $\gamma_{[1,2]}(G) < n$

Le Théorème 2.3.2 donne une famille infinie de graphes $G = (V, E)$, dont le seul $[1, 2]$ -ensemble est l'ensemble $V(G)$. D'autre part, Chellali et al. [17] ont pu améliorer la borne supérieure de $\gamma_{[1,2]}(G)$ pour plusieurs familles de graphes. Il est important de noter que si I est un ensemble indépendant maximal de G tel que tout sommet de $V - I$ est de degré 1 ou 2, alors I est un $[1, 2]$ -ensemble. D'où l'observation suivante :

Observation 2.3.1 ([17]) Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$.

1. Si $\delta \leq 2$, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n$.
2. Si G admet un ensemble indépendant de k sommets de degré au plus 2, alors $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - k < n$.

Théorème 2.3.5 ([17]) Si un graphe G a au moins une arête et de degré maximum $\Delta \leq 4$, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n$.

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème précédent.

Corollaire 2.3.1 ([17]) *Si G est k -régulier, avec $1 \leq k \leq 4$, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n$.*

Le Théorème 2.3.5 montre que les graphes G de degré maximum $\Delta \leq 4$ vérifient $\gamma_{[1,2]}(G) < n$, mais ceci n'implique pas que $\gamma_{[1,2]}(G) = \gamma(G)$. Pour le voir, prenons l'arbre T de la Figure 2.4. Alors $\Delta(T) = 3 \leq 4$, $\gamma(T) = |\{x, y, z\}| = 3$ et $\gamma_{[1,2]}(T) = |\{x, y, z, u\}| = 4$. Notons que l'arbre T est d'ordre $n = 10$ est le plus petit arbre tel que $\gamma(G) < \gamma_{[1,2]}(G)$.

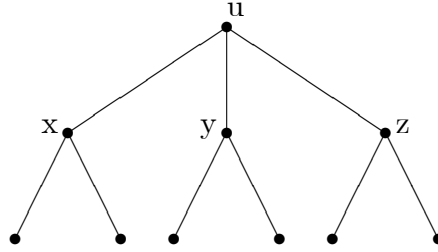


FIG. 2.4 – Un arbre T tel que $\gamma(T) = 3 < \gamma_{[1,2]}(T) = 4$.

Théorème 2.3.6 ([17]) *Si G admet une clique d'ordre k dont les sommets sont de degré k ou $k + 1$ dans G , alors $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - k < n$.*

Proposition 2.3.1 ([17]) *Si G est un graphe dont les sommets sont de degré 2 ou 3, alors $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - 2\alpha_0(G)$, où $\alpha_0(G)$ le cardinal maximum d'un couplage induit de G .*

Corollaire 2.3.2 ([17]) *Si G est un cycle ou un graphe cubique, alors*

$$\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - 2\alpha_0(G).$$

L'égalité est atteinte pour le cycle C_3 , et nous avons $\gamma_{[1,2]}(C_3) = n - 2\alpha_0(C_3) = 3 - 2 = 1$.

Proposition 2.3.2 ([17]) *Si G est un graphe 3-régulier ou 4-régulier d'ordre n et de maille g , alors $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - g$.*

Notons que, pour les graphes cubiques G d'ordre n et de maille g , on a $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - g \leq n - 3$. Chellali et al. [17] ont montré que le graphe complet K_4 est le seul graphe cubique connexe atteignant la borne $n - 3$.

2.3.4 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum

Yang et Wu [47] ont donné une relation de type Nordhaus-Gaddum pour le paramètre $\gamma_{[1,2]}(G)$, en montrant que pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$,

$$3 \leq \gamma_{[1,2]}(G) + \gamma_{[1,2]}(\overline{G}) \leq 2n \quad \text{et} \quad 2 \leq \gamma_{[1,2]}(G) \gamma_{[1,2]}(\overline{G}) \leq n^2.$$

Les bornes inférieures sont atteintes pour l'étoile $K_{1,n-1}$. En effet $\gamma_{[1,2]}(K_{1,n-1}) = 1$, et $\gamma_{[1,2]}(\overline{K_{1,n-1}}) = 2$, tandis que pour la borne supérieure, Yang et Wu ont dû construire un graphe H d'ordre n pour lequel $\gamma_{[1,2]}(H) = \gamma_{[1,2]}(\overline{H}) = n$. Le graphe H est obtenu à partir de $G_{p,k}$ défini dans la sous-section 2.

2.4 Les $[1, k]$ -ensembles indépendants dans les graphes

Dans [16], Chellali et al. ont poursuivi l'étude des $[j, k]$ -ensembles, dans le cas $j = 1$, en ajoutant en plus la condition d'indépendance des $[1, k]$ -ensembles.

Notons qu'un $[1, 1]$ -ensemble indépendant S est un ensemble dominant efficace, c'est-à-dire que pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| = 1$. Biggs, dans [8], a introduit les ensembles dominants efficaces dans le domaine des codes correcteurs d'erreurs, qui consistent en des méthodes de manipulation de données numériques pour la détection et la correction d'erreurs pendant la transmission ou le stockage. Ces méthodes impliquent l'ajout d'informations redondantes aux données afin de renforcer la fiabilité. Par la suite, Bange, Barkauskas et Slater dans [3] ont appliqué ces ensembles dominants efficaces à la théorie des graphes.

La domination efficace dans les graphes a suscité beaucoup d'intérêt, voir [2], par exemple. L'étude des $[1, 1]$ -ensembles indépendants est étroitement liée à l'étude des codes correcteurs d'erreurs simples. La généralisation aux $[1, k]$ -ensembles indépendants est également liée aux codes correcteurs d'erreurs.

Quels sommets	Bornes	Type d'ensemble
S est indépendant et $\forall v \in V - S$	$1 \leq N(v) \cap S \leq 2$	$[1, 2]$ -ensemble indépendant
S est indépendant et $\forall v \in V - S$	$0 \leq N[v] \cap S \leq 2$	presque 2-parfait indépendant

Un ensemble S est un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G si S est indépendant et $1 \leq |N(v) \cap S| \leq k$ pour tout $v \in V - S$. Contrairement aux $[1, 2]$ -ensembles qui existent toujours, un graphe G peut ne pas avoir un $[1, k]$ -ensemble indépendant pour un certain entier positif k . Ceci dit, tout graphe G a un $[1, \Delta]$ -ensemble indépendant. On définit k_0 comme l'entier positif minimum tel que G admet un $[1, k]$ -ensemble indépendant. Puisque tout $[1, k_0]$ -ensemble indépendant est un $[1, k]$ -ensemble indépendant pour tout $k > k_0$, on définit pour tout $k \geq k_0$, le nombre de $[1, k]$ -indépendance inférieur $i_{[1, k]}(G)$ et le nombre $[1, k]$ -indépendance $\alpha_{[1, k]}(G)$, comme étant respectivement les cardinaux minimum et maximum d'un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G . Un $[1, k]$ -ensemble de cardinal $i_{[1, k]}(G)$ est appelé un $i_{[1, k]}(G)$ -ensemble, et un $[1, k]$ -ensemble de cardinal $\alpha_{[1, k]}(G)$ est appelé un $\alpha_{[1, k]}(G)$ -ensemble. Rappelons que $\alpha_{[1, \Delta]}(G)$ n'est autre que le nombre d'indépendance $\alpha(G)$.

De ce qui précède, nous avons la propriété suivante :

Tout $[1, k]$ -ensemble indépendant est un $[1, k']$ -ensemble indépendant pour $k' > k$, et donc pour tout graphe, on a

$$i = i_{[1, \Delta]} \leq i_{[1, \Delta-1]} \leq \dots \leq i_{[1, k_0]} \leq \alpha_{[1, k_0]} \leq \dots \leq \alpha_{[1, \Delta-1]} \leq \alpha_{[1, \Delta]} = \alpha.$$

Pour les graphes ayant un $[1, k]$ -ensemble indépendant, Chellali et al. [16] ont déterminé

des bornes pour $i_{[1,k]}(G)$ et $\alpha_{[1,k]}(G)$, et ils ont caractérisé les arbres ayant un $[1, k]$ -ensemble indépendant. De plus, ils ont montré que le problème de décision associé à $i_{[1,k]}(G)$ est $\mathcal{NP}$ -complet, pour $k \geq 1$.

2.4.1 Les $[1, k]$ -ensembles indépendants

Comme indiqué précédemment, certains graphes n'ont pas de $[1, k]$ -ensembles indépendants pour un entier positif k donné. Par exemple, le graphe biparti complet $K_{3,3}$, et l'étoile double $S_{2,3}$ n'ont pas de $[1, 2]$ -ensemble indépendant. Mais on peut voir facilement que chacun des deux graphes $K_{3,3}$ et $S_{2,3}$ a un $[1, 3]$ -ensemble indépendant, où $i_{[1,3]}(K_{3,3}) = \alpha_{[1,3]}(K_{3,3}) = 3$, $i_{[1,3]}(S_{2,3}) = 3$ et $\alpha_{[1,3]}(S_{2,3}) = 5$.

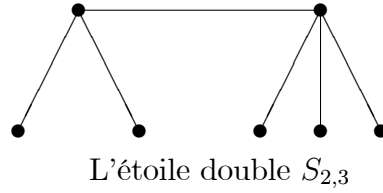
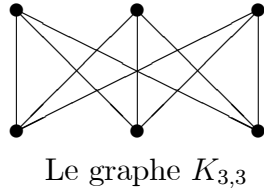


FIG. 2.5 – Exemples de graphes n'admettant pas de $[1, 2]$ -ensemble indépendant mais admettant un $[1, 3]$ -ensemble indépendant.

Cela pose le problème général suivant :

Problème 2.4.1 *Caractériser les graphes G avec des $[1, k]$ -ensembles indépendants pour un entier positif k donné.*

Un autre problème est de déterminer le plus petit ordre des graphes qui n'ont pas de $[1, k]$ -ensemble indépendant. Le résultat suivant, donné par Chellali et al. [16], permet de résoudre ce problème.

Théorème 2.4.1 ([16]) *Pour tout $k \geq 1$, tout graphe G d'ordre $n \leq 2k + 1$ a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, et il existe un graphe connexe d'ordre $n = 2k + 2$ n'ayant pas de $[1, k]$ -ensembles indépendants.*

Pour le graphe biparti complet $K_{k+1,k+1}$ d'ordre $n = 2k + 2$, les seuls ensembles dominants indépendants sont les deux partitions A et B de $K_{k+1,k+1}$. Mais A et B ne sont pas $[1, k]$ -ensembles indépendants. Donc $K_{k+1,k+1}$ n'a pas de $[1, k]$ -ensemble indépendant.

Théorème 2.4.2 ([16]) *Pour tout entier $k \geq 1$, tout arbre T d'ordre $n = 2k + 2$ a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, et il existe un arbre d'ordre $n = 2k + 3$ n'ayant pas de $[1, k]$ -ensembles indépendants.*

Considérons l'étoile double $S_{k,k+1}$ d'ordre $n = 2k + 3$, et de sommets supports a et b , et soient A et B les ensembles des sommets pendants adjacents, respectivement, à a et b . Les seuls ensembles dominants indépendants de $S_{k,k+1}$ sont les $B \cup \{a\}$, $A \cup \{b\}$ et $A \cup B$. Mais chacun de ces ensembles n'est pas un $[1, k]$ -ensemble indépendant. Donc $S_{k,k+1}$ n'a pas de $[1, k]$ -ensemble indépendant.

Corollaire 2.4.1 ([16]) *Les plus petits ordres d'un graphe connexe et d'un arbre n'ayant pas de $[1, k]$ -ensembles indépendants sont, respectivement, $2k + 2$ et $2k + 3$.*

Pour $k = 2$, les théorèmes précédents montrent que $K_{3,3}$ est le plus petit graphe n'ayant pas de $[1, 2]$ -ensemble indépendant et $S_{2,3}$ est le petit arbre n'ayant pas de $[1, 2]$ -ensemble indépendant.

Chellali et al. [16] ont montré aussi que tout graphe G est un sous-graphe induit d'un certain graphe ayant un $[1, k]$ -ensemble indépendant, pour $k \geq 1$, et donc il n'existe pas une caractérisation par des sous-graphes exclus des graphes ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants. Les graphes G sans $K_{1,k+1}$ constituent un exemple de graphes avec des $[1, k]$ -ensembles indépendants, et en particulier $i_{[1,k]}(G) = i(G)$ et $\alpha_{[1,k]}(G) = \alpha(G)$.

Notons que la différence entre $i_{[1,k]}(G)$ et $\alpha_{[1,k]}(G)$ peut être arbitrairement grande. Pour voir, considérons l'arbre T formé par une chaîne P_{2t} de $2t$ sommets, où pour chaque sommet v de P_{2t} , on ajoute deux nouveaux sommets v' et v'' avec des arêtes vv' et $v'v''$.

Il est facile de voir que pour tout entier positif $k \geq 2$, $i_{[1,k]}(T) = i_{[1,2]}(T) = 2t$ et $\alpha_{[1,k]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = 3t$.

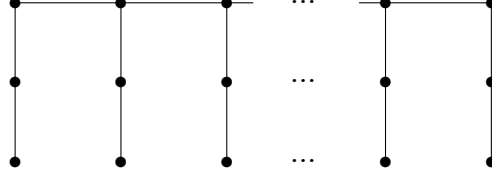


FIG. 2.6 – Un arbre T avec $i_{[1,k]}(T) = i_{[1,2]}(T) = 2t$ et $\alpha_{[1,k]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = 3t$, pour $k \geq 2$.

Enfin, pour les arbres, Bange et al. [3] ont caractérisé de manière constructive les arbres ayant un ensemble dominant efficace (c'est-à-dire un $[1,1]$ -ensemble indépendant) et ont donné un algorithme linéaire pour trouver un tel ensemble. Dans [34], Grinstead et Slater ont présenté un modèle de récurrence qui donne des algorithmes linéaire pour déterminer plusieurs paramètres liés à la domination, y compris des ensembles dominants efficaces, pour les graphes séries-parallèles (généralisés). Enfin, dans [16], Chellali et al. ont donné une caractérisation constructive des arbres ayant un $[1,k]$ -ensemble indépendant, pour $k \geq 2$.

2.4.2 Bornes sur le nombre de $[1,k]$ -indépendance

Dans [16], Chellali et al. ont déterminé des bornes supérieures sur les nombres de $[1,k]$ -indépendance pour les graphes ayant des $[1,k]$ -ensembles indépendants.

Soient les familles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ définies comme suit : Les graphes $G' \in \mathcal{L}'$ sont bipartis avec les partitions S et $V - S$, telles que $|S| = kq/\delta$ et $|V - S| = q$, q est entier positif tel que δ divise kq . De plus, $d_{G'}(v) = \delta$ pour tout $v \in S$ et $d_{G'}(v) = k$ pour tout $v \in V - S$. Le graphe $G \in \mathcal{L}$ est obtenu à partir d'un graphe G' de $\mathcal{L}'$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de $V - S$ de telle sorte que $d_G(v) \geq \delta$ pour tout $v \in V - S$.

Théorème 2.4.3 ([16]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 1$. Si G a un $[1,k]$ -ensemble indépendant, alors*

$$\alpha_{[1,k]}(G) \leq \frac{kn}{k + \delta}$$

avec égalité si et seulement si $G \in \mathcal{L}$.

Corollaire 2.4.2 ([16]) *Si G est un graphe d'ordre n , et de degré minimum $\delta = 1$, et G possède un $[1,k]$ -ensemble indépendant, alors*

1. $\alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{k + 1}$ si et seulement si G est la couronne $H \circ \overline{K_k}$, où H est un graphe quelconque.
2. Si $\alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{k + 1}$ et aucune composante de G est une étoile $K_{1,k}$, alors $i_{[1,k]}(G) = \alpha_{[1,k]}(G)$.

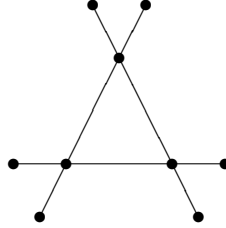


FIG. 2.7 – Un exemple d'une couronne vérifiant $i_{[1,k]}(G) = \alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{k + 1}$ pour $k = 2$.

Théorème 2.4.4 ([16]) *Soit G un graphe d'ordre n et de taille m . Si G admet un $[1,k]$ -ensemble indépendant, alors*

$$\alpha_{[1,k]}(G) \leq \frac{2n + 2k - 1 - \sqrt{8m + (2k - 1)^2}}{2}.$$

avec égalité si et seulement si G est obtenu à partir d'un graphe scindé, dont l'ensemble de sommets est partitionné en une clique Q et un ensemble indépendant I tels que pour tout $v \in Q$, $|N(v) \cap I| = k$.

Corollaire 2.4.3 ([11]) *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre n et de la taille m , et G admet un $[1,k]$ -ensemble indépendant, alors $\alpha_{[1,k]}(G) = \frac{2n+2k-1-\sqrt{8m+(2k-1)^2}}{2}$ si et seulement si $G \cong K_{1,k}$ ou $S_{k,k}$.*

Notons que la borne du Théorème 2.4.4 est mieux que celle du Théorème 2.4.3 pour tout graphe G de taille assez grande et de degré minimum petit.

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur les $[j, k]$ -ensembles dans les graphes

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés par l'étude des $[j, k]$ -ensembles dans les graphes. Nous commençons par établir quelques propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles disjoints, puis nous caractérisons les graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) \in \{n, n-1\}$, où les cas $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$ ont été traités. De plus, nous donnons des conditions suffisantes pour les graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. Nous montrons par la suite que le problème de décision correspondant au problème de détermination du nombre de $[j, k]$ -domination, pour $2 \leq j \leq k$, est $\mathcal{NP}$ -complet, même lorsqu'on se restreint aux graphes bipartis.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication en 2022 dans la revue Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences and Society.

3.1 Propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles, en particulier lorsque ces ensembles sont disjoints. Si A et B deux sous-ensembles de $V(G)$,

alors on note par $m(A, B)$ le nombre d'arêtes joignant les sommets de A aux sommets de B .

Proposition 3.1.1 ([50]) *Soit G un graphe et soient S_1 un $[j, k]$ -ensemble et S_2 un $[j', k']$ -ensemble de G avec $j \leq k < j' \leq k'$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $S_1 \neq S_2$.
- (ii) $S_1 \cup S_2$ est un $[j', k + k']$ -ensemble de G .
- (iii) Si $|S_1| = |S_2|$, alors $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Preuve. (i) Puisque $j \leq k < j' \leq k'$, il en résulte de la définition de S_1 et S_2 que $S_1 \neq S_2$.
(ii) Si $V = S_1 \cup S_2$, alors clairement $S_1 \cup S_2$ est un $[j', k + k']$ -ensemble de G . Supposons donc que $V \neq S_1 \cup S_2$ et soit $v \notin S_1 \cup S_2$. Puisque v a au moins j' voisins dans S_2 , il a aussi au moins j voisins dans $S_1 \cup S_2$. De plus, puisque v a au plus k voisins dans S_1 et au plus k' voisins dans S_2 , il a au plus $k + k'$ voisins dans $S_1 \cup S_2$. Par conséquent, $S_1 \cup S_2$ est un $[j', k + k']$ -ensemble de G . (iii) Soit $|S_1| = |S_2| = t$. Supposons au contraire que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Puisque S_1 et S_2 sont des $[j, k]$ -ensemble et $[j', k']$ -ensemble de G , respectivement, nous devons avoir $jt \leq m(S_1, S_2) \leq kt$ et $j't \leq m(S_1, S_2) \leq k't$. Par conséquent, $j't \leq m(S_1, S_2) \leq kt$, et donc $j' \leq k$, ce qui contredit l'hypothèse $k < j'$. ■

Il est à noter que l'inverse de l'assertion (iii) de la Proposition 3.1.1 n'est pas vrai. On peut le voir par le graphe G obtenu à partir du graphe biparti complet $K_{2,4}$, avec les partitions A et B telles que $|A| < |B|$, en ajoutant un nouveau sommet v attaché à exactement un sommet de A et à exactement un sommet de B . (voir la Figure 3.1). Il est facile de voir que $A \cup \{v\}$ et $B \cup \{v\}$ sont des $[2, 3]$ -ensemble et $[4, 5]$ -ensemble de G , respectivement. Il est clair aussi que $(A \cup \{v\}) \cap (B \cup \{v\}) = \{v\} \neq \emptyset$, mais $|A \cup \{v\}| = 3 \neq 4 = |B \cup \{v\}|$.

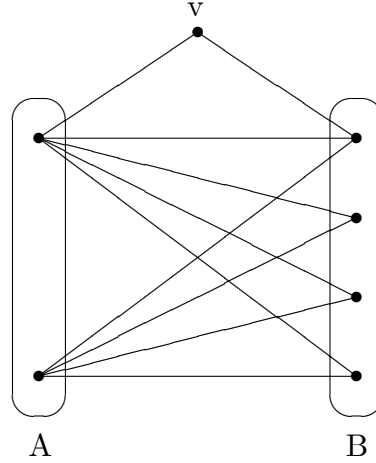


FIG. 3.1 – Un graphe G tel que $A \cap B \neq \emptyset$ et $|A| \neq |B|$

Proposition 3.1.2 ([50]) *Si G a deux $[j,k]$ -ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $j \leq \delta$.
- (ii) *Chaque sommet de $V - (S_1 \cup S_2)$ a au moins $2j$ voisins.*
- (iii) $j|S_2| \leq k|S_1|$.

Preuve. (i) Si $j > \delta$, alors chaque sommet de degré inférieur à j appartient à la fois à S_1 et à S_2 ce qui contredit le fait que S_1 et S_2 sont disjoints. Pour (ii), elle découle du fait que chaque sommet de $V - (S_1 \cup S_2)$ doit avoir au moins j voisins dans chacun des deux ensembles S_1 et S_2 . Pour (iii), puisque S_1 et S_2 sont des $[j,k]$ -ensembles, nous avons $j|S_1| \leq m(S_1, S_2) \leq k|S_1|$ et $j|S_2| \leq m(S_1, S_2) \leq k|S_2|$, respectivement. On en déduit que $j|S_2| \leq m(S_1, S_2) \leq k|S_1|$. ■

Les deux corollaires suivants sont facilement déduits de la Proposition 3.1.2-(i) et (ii).

Corollaire 3.1.1 ([50]) *Si un graphe G a deux $[j,k]$ -ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $j > \frac{\Delta}{2}$, alors $V = S_1 \cup S_2$.*

Corollaire 3.1.2 ([50]) *Si un arbre a deux $[j,k]$ -ensembles disjoints, alors $j = 1$.*

Les deux résultats suivants donnent des bornes supérieures sur les tailles des $[j, k]$ -ensembles disjoints S_1 et S_2 , et dans quelles conditions sont atteintes.

Proposition 3.1.3 ([50]) *Si un graphe G d'ordre n a deux $[j, k]$ -ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors*

$$|S_1| \leq \frac{n}{2},$$

avec égalité si et seulement si $V = S_1 \cup S_2$ et $|S_2| = \frac{n}{2}$.

Preuve. La borne supérieure découle du fait que S_1 et S_2 sont deux $[j, k]$ -ensembles disjoints avec $|S_1| \leq |S_2|$. Maintenant, si $|S_1| = \frac{n}{2}$, alors nous avons l'égalité $|S_1| = |S_2|$ et ainsi $V = S_1 \cup S_2$. La réciproque est facile à voir. ■

Proposition 3.1.4 ([50]) *Si un graphe G d'ordre n a deux $[j, k]$ -ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors*

$$|S_2| \leq \frac{kn}{j+k}.$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $|S_1| = \frac{jn}{j+k}$ et $V = S_1 \cup S_2$.

Preuve. Puisque $S_1 \subseteq V - S_2$ et $j|S_2| \leq k|S_1|$ (par la Proposition 3.1.2-(iii)), nous avons $j|S_2| \leq k|S_1| \leq k|V - S_2|$, et donc $|S_2| \leq \frac{kn}{j+k}$. Maintenant, si $|S_2| = \frac{kn}{j+k}$, alors nous avons l'égalité dans toutes les inégalités précédentes. En particulier, $j|S_2| = k|S_1|$ et $|S_1| = |V - S_2|$. Par conséquent $|S_1| = \frac{jn}{j+k}$ et $V = S_1 \cup S_2$.

Réciproquement, supposons que $|S_1| = \frac{jn}{j+k}$ et $V = S_1 \cup S_2$. Puisque $|S_1| + |S_2| = n$, nous obtenons $|S_2| = \frac{kn}{j+k}$. ■

Pour le cas particulier $j = k$, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 3.1.3 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n avec deux $[k, k]$ -ensembles disjoints S_1 et S_2 . Alors $|S_1| = |S_2| \leq \frac{n}{2}$, avec égalité si et seulement si $V = S_1 \cup S_2$.*

Preuve. Supposons, sans perte de généralité, que $|S_1| \leq |S_2|$. Par la Proposition 3.1.2-(iii), nous avons $|S_2| \leq |S_1|$ et donc $|S_2| = |S_1|$. Par conséquent, nous avons aussi $|S_2| \leq \frac{n}{2}$. Supposons maintenant que $|S_1| = |S_2| = \frac{n}{2}$. Puisque $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, nous devons avoir $V = S_1 \cup S_2$.

Réciproquement, supposons que $V = S_1 \cup S_2$. Puisque S_1 et S_2 sont deux $[k, k]$ -ensembles disjoints, nous devons avoir $k|S_1| = k|S_2|$ et donc $|S_1| = |S_2| = \frac{n}{2}$. ■

3.2 Graphes avec un nombre de $[j, k]$ -domination grand

Trivialement, pour chaque graphe G d'ordre n et les entiers positifs j et k avec $j \leq k$, le nombre de $[j, k]$ -domination de G est borné supérieurement par n . De plus, l'égalité est atteinte pour tout graphe G et tout entier j avec $j \geq \Delta + 1$. Cela nous amène à se demander s'il existe des graphes G connexes avec $j \leq \Delta$ tels que $\gamma_{[j, k]}(G) = n$.

Dans cette section, nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur les graphes scindés G d'ordre n avec $\gamma_{[j, k]}(G) = n$. Toutefois, étant donné que la caractérisation des graphes G tels que $\gamma_{[j, k]}(G) \in \{n, n-1\}$ semble difficile, nous nous restreignons aux cas particuliers lorsque $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$. Dans le reste, nous définissons l'ensemble $X_{[j, k]} = \{v \in V : j \leq d_G(v) \leq k\}$.

Nous commençons par les deux observations suivantes sur les graphes G tels que $\gamma_{[j, k]}(G) = n$ ou $n-1$.

Observation 3.2.1 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n , et soient j et k deux entiers tels que $j \leq k$. Si $\gamma_{[j, k]}(G) = n$, alors $X_{[j, k]} = \emptyset$.*

Preuve. Si $X_{[j, k]} \neq \emptyset$, alors pour chaque $x \in X_{[j, k]}$, $V - \{x\}$ est un $[j, k]$ -ensemble de G , et donc $\gamma_{[j, k]}(G) < n$, d'où la contradiction. ■

Observation 3.2.2 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n , et soient j et k des entiers tels que $j \leq k$. Si $\gamma_{[j, k]}(G) = n-1$, alors $X_{[j, k]} \neq \emptyset$.*

Preuve. Si S est un $\gamma_{[j, k]}(G)$ -ensemble de cardinal $n - 1$, alors $V - S$ contient un seul sommet, noté x , dont le degré doit être $j \leq d_G(x) \leq k$. D'où $X_{[j, k]} \neq \emptyset$. ■

Notons que la réciproque des Observations 3.2.1 et 3.2.2 n'est pas vraie. Pour voir, considérons les étoiles doubles $S_{k, k}$ et $S_{k-1, k}$, où $j \in \{2, \dots, k\}$. Alors on a $X_{[j, k]}(S_{k, k}) = \emptyset$ et $X_{[j, k]}(S_{k-1, k}) \neq \emptyset$, mais $\gamma_{[j, k]}(S_{k, k}) = \gamma_{[j, k]}(S_{k-1, k}) = n - 2$.

Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour les graphes scindés G d'ordre n tels que $\gamma_{[j, k]}(G) = n$. Rappelons que dans [17], Chellali et al. ont construit un graphe scindé spécial G de n sommets pour lequel $\gamma_{[1, 2]}(G) = n$. De plus, Bishnu et al. [9] ont donné un algorithme polynomial qui détermine le nombre de $[1, k]$ -domination d'un graphe scindé arbitraire.

Théorème 3.2.1 ([50]) *Soit G un graphe scindé connexe d'ordre n dont l'ensemble de sommets est partitionné en une clique Q et un stable S tel que $|Q| = q$. Alors $\gamma_{[j, k]}(G) = n$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- (i) *Pour tout sommet $u \in S$, $1 \leq d_G(u) \leq j - 1$ ou $d_G(u) \geq k + 1$.*
- (ii) *Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, \min\{j - 1, q - 1\}\}$ et pour chaque sous-ensemble Q_i de taille i de Q , il existe un sommet v dans $Q - Q_i$ tel que soit $d_G(v) \leq j + q - i - 2$ ou $d_G(v) \geq k + q - i$.*
- (iii) *Pour tout $i \in \{j, \dots, \min\{k, q - 1\}\}$ et pour chaque sous-ensemble Q_i de taille i de Q , il existe un sommet v dans $Q - Q_i$ tel que $|N_G(v) \cap (Q \cup S_i)| \geq q + k - i$, où $S_i = \{u \in S : |N_G(u) \cap Q_i| \leq j - 1\}$.*

Preuve. (i) Supposons que $\gamma_{[j, k]}(G) = n$ et qu'il existe un sommet v dans S avec $j \leq d_G(v) \leq k$. Alors clairement, $V - \{v\}$ est un $[j, k]$ -ensemble de G de cardinal inférieur à n , d'où la contradiction. Maintenant, pour prouver (ii), nous supposons, au contraire, qu'il existe un sous-ensemble Q_{i_0} de taille i_0 de Q tel que $i_0 \in \{0, 1, \dots, \min\{j - 1, q - 1\}\}$ et $j + (q - i_0 - 1) \leq d_G(v) \leq k + (q - i_0 - 1)$ pour tout $v \in Q - Q_{i_0}$. Puisque chaque sommet

de $Q - Q_{i_0}$ a exactement $q - i_0 - 1$ voisins dans $Q - Q_{i_0}$, nous en déduisons que $S \cup Q_{i_0}$ est un $[j, k]$ -ensemble de G de cardinal inférieur à n , ce qui conduit à une contradiction.

(iii) Supposons, au contraire, qu'il existe un sous-ensemble Q_{i_0} de taille i_0 de Q tel que $i_0 \in \{j, \dots, \min\{k, q - 1\}\}$ et $|N_G(v) \cap (Q \cup S_{i_0})| \leq k + (q - i_0 - 1)$ pour tout $v \in Q - Q_{i_0}$. Clairement, $j \leq |N_G(v) \cap Q_{i_0}| \leq k$ pour tout $v \in S - S_{i_0}$. Maintenant, en utilisant le fait que chaque sommet de $Q - Q_{i_0}$ a exactement $q - i_0 - 1$ voisins dans $Q - Q_{i_0}$, et a exactement $i_0 \geq j$ voisins dans Q_{i_0} , il s'ensuit que $S_{i_0} \cup Q_{i_0}$ est un $[j, k]$ -ensemble de G de cardinal inférieur à n , ce qui mène aussi à une contradiction.

Inversement, soit D un $\gamma_{[j, k]}(G)$ -ensemble, et supposons que $|D| < n$. Alors $V - D \neq \emptyset$, et donc $j \leq |N_G(y) \cap D| \leq k$ pour chaque sommet y de $V - D$. Supposons que $Q \subseteq D$. Alors, $V - D \subset S$. Puisque $|D| < n$, il existe un sommet y dans S tel que $j \leq |N_G(y) \cap Q| \leq k$, nous obtenons une contradiction avec la condition (i). Maintenant, soit $D = Q_i \cup S_i$, où $S_i = S \cap D$ et $Q_i = Q \cap D$ avec $|Q_i| = i$. Si $i \in \{0, 1, \dots, \min\{j - 1, q - 1\}\}$, alors $S_i = S$, et donc $D = Q_i \cup S$. Puisque D est un $[j, k]$ -ensemble et chaque sommet de $Q - Q_i$ a exactement $q - i - 1$ voisins dans $Q - Q_i$, nous en déduisons que $(q - i - 1) + j \leq d_G(y) \leq k + (q - i - 1)$ pour chaque sommet y dans $Q - Q_i$, ce qui contredit la condition (ii). Si $i \in \{j, \dots, \min\{k, q - 1\}\}$, alors, par la minimalité de D , nous avons $S_i = \{u \in S : |N_G(u) \cap Q_i| \leq j - 1\}$. Encore une fois, puisque D est un $[j, k]$ -ensemble et chaque sommet de $Q - Q_i$ a exactement $q - i - 1$ voisins dans $Q - Q_i$, nous en déduisons que $|N_G(y) \cap (Q \cup S_i)| \leq k + (q - i - 1)$ pour tout sommet y de $Q - Q_i$, mais cela contredit la condition (iii). Par conséquent, $\gamma_{[j, k]}(G) = n$. ■

Comme exemple des graphes scindés vérifiant les conditions du Théorème 3.2.1 pour $j = 1$ et $k = 2$, on considère le graphe donné par Chelleli et al. dans [17]. Ce graphe est construit à partir d'un graphe complet Q d'ordre $q \geq 5$, et pour chaque sous-ensemble S de trois sommets de $V(Q)$, on ajoute un nouveau sommet x_S et les arêtes $x_S u$ pour tout u dans S .

3.2.1 Graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) = n$

Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ . Dans cette sous-section, une condition nécessaire et suffisante sera établie pour tout $k \in \{\Delta, \Delta - 1, \Delta - 2\}$ et pour tout graphe G d'ordre n tel que $\gamma_{[j,k]}(G) = n$. Commençons par le cas $k = \Delta$.

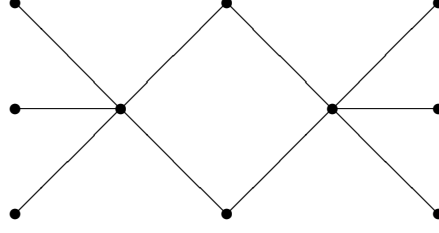
Observation 3.2.3 *Soit G un graphe d'ordre n , de degré maximum Δ , et soit j un entier tel que $j \leq \Delta$. Alors $\gamma_{[j,\Delta]}(G) = \gamma_j(G) < n$.*

Théorème 3.2.2 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n , de degré maximum $\Delta \geq 3$, et soit j un entier tel que $2 \leq j \leq \Delta - 1$. Alors $\gamma_{[j,\Delta-1]}(G) = n$ si et seulement si $X_{[j,\Delta-1]} = \emptyset$ et $X_{[\Delta,\Delta]}$ est un stable.*

Preuve. Supposons que $\gamma_{[j,\Delta-1]}(G) = n$. D'après l'observation 3.2.1, on a $X_{[j,\Delta-1]} = \emptyset$. Maintenant, supposons que G a deux sommets adjacents y et z de degré Δ . Alors $V - \{y, z\}$ est un $[j, \Delta - 1]$ -ensemble de G d'ordre $n - 2$, d'où la contradiction. Donc $X_{[\Delta,\Delta]}$ est un stable.

Inversement, supposons que $X_{[j,\Delta-1]} = \emptyset$ et $X_{[\Delta,\Delta]}$ est un stable, et supposons que $\gamma_{[j,\Delta-1]}(G) < n$. Clairement, $V - S \neq \emptyset$, pour tout $\gamma_{[j,\Delta-1]}$ -ensemble S de G , et donc $j \leq |N_G(y) \cap S| \leq \Delta - 1$ pour tout sommet y de $V - S$. Puisque $X_{[j,\Delta-1]} = \emptyset$, nous déduisons que chaque sommet de $V - S$ est de degré maximum Δ et a au moins un voisin dans $V - S$ qui est aussi de degré maximum. Mais alors $X_{[\Delta,\Delta]}$ n'est pas stable, d'où la contradiction, et la preuve est complète. ■

La Figure 3.2 représente un graphe G d'ordre $n = 10$ dont les sommets sont de degrés 1, 2, et 5. Il est clair que $X_{[3,4]} = \emptyset$ et $X_{[5,5]}$ est un stable, et nous avons $\gamma_{[3,4]}(G) = 10$.


 FIG. 3.2 – Un graphe G tel que $\gamma_{[3, \Delta-1]}(G) = n$.

Corollaire 3.2.1 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 3$. Alors $\gamma_{[2, \Delta-1]}(G) = n$, si et seulement si G possède au moins une composante isomorphe à l'étoile $K_{1, \Delta}$, et les autres composantes (s'il y en a) sont des sommets isolés.*

Théorème 3.2.3 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 4$, et soit j un entier tel que $2 \leq j \leq \Delta - 2$. Alors $\gamma_{[j, \Delta-2]}(G) = n$ si et seulement si $X_{[j, \Delta-2]} = \emptyset$ et chaque composante du sous-graphe induit par $X_{[\Delta-1, \Delta]}$ contient au plus un sommet de degré $\Delta - 1$ dans G . De plus, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Si $j < \Delta - 2$, alors le sous-graphe induit par $X_{[\Delta-1, \Delta]}$ est sans cycle.*
- (ii) *Si $j = \Delta - 2$, alors le sous-graphe induit par $X_{[\Delta, \Delta]}$ est sans cycle.*

Preuve. Soit G un graphe tel que $\gamma_{[j, \Delta-2]}(G) = n$. D'après l'observation 3.2.1, on a $X_{[j, \Delta-2]} = \emptyset$. Maintenant, supposons que $G[X_{[\Delta-1, \Delta]}]$ contient une composante connexe H ayant au moins deux sommets de degré $\Delta - 1$ dans G . Parmi tous les sommets de degré $\Delta - 1$ dans G appartenant à H , soient x et y deux sommets dont la distance entre eux dans H est la plus petite possible. Soit P la chaîne la plus courte joignant x et y dans H . Notons que par le choix de P , si $xy \notin E(G)$, alors tous les sommets dans P (sauf ses extrémités x et y) ont le degré Δ . Dans ce cas, il est clair que $V(G) - V(P)$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G , et donc $\gamma_{[j, \Delta-2]}(G) < n$. Maintenant, pour montrer les conditions (i) et (ii), supposons d'abord que $j = \Delta - 2$ et que $G[X_{[\Delta, \Delta]}]$ a un cycle C . Alors $V(G) - V(C)$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G , ce qui contredit $\gamma_{[j, \Delta-2]}(G) = n$. De plus, si $j < \Delta - 2$ et $G[X_{[\Delta-1, \Delta]}]$ a un cycle C , alors puisque $G[X_{[\Delta-1, \Delta]}]$ contient au plus

un sommet de degré $\Delta - 1$ dans G , $V(G) - V(C)$ devient un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G , ce qui contredit aussi le fait que $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G) = n$.

Pour voir la réciproque, supposons au contraire que $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G) < n$, et soit S un $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G)$ -ensemble. Alors, $V - S \neq \emptyset$. Aussi pour chaque sommet $y \in V - S$, $j \leq |N(y) \cap S| \leq \Delta - 2$, nous déduisons que $j \leq d_G(y) \leq \Delta$. Maintenant, puisque $X_{[j, \Delta - 2]} = \emptyset$, tous les sommets de $V - S$ appartiennent à $X_{[\Delta - 1, \Delta]}$ et donc chaque composante de $G[V - S]$ est d'ordre au moins deux. Soit A une composante de $G[V - S]$ et considérons les deux situations suivantes.

Cas1. $|A| = 2$. Alors, A est composé de deux sommets adjacents de degré $\Delta - 1$ dans G car S est un $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G)$ -ensemble, et ainsi, $G[X_{[\Delta - 1, \Delta]}]$ contient plus qu'un sommet de degré $\Delta - 1$ dans G , d'où la contradiction.

Cas2. $|A| \geq 3$. Rappelons que chaque composante de $G[X_{[\Delta - 1, \Delta]}]$ contient au plus un sommet de degré $\Delta - 1$ dans G . Maintenant, si A induit un arbre, alors il a au moins deux sommets pendants, et il est clair qu'ils sont de degré $\Delta - 1$ dans G , d'où la contradiction. Par conséquent, $G[A]$ contient un cycle, noté C , avec au plus un sommet de degré $\Delta - 1$. Si tous les sommets de C sont de degré Δ , alors puisque $G[X_{[\Delta, \Delta]}]$ contient le cycle C , nous aurons une contradiction avec la condition (ii) lorsque $j = \Delta - 2$. Ainsi, un sommet de C doit avoir le degré $\Delta - 1$. Mais alors, pour $j < \Delta - 2$, $G[X_{[\Delta - 1, \Delta]}]$ contient un cycle, ce qui contredit la condition (i). ■

Les deux corollaires suivants sont des conséquences immédiates du Théorème 3.2.3.

Corollaire 3.2.2 ([50]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 4$. Alors $\gamma_{[2, \Delta - 2]}(G) = n$ si et seulement si $X_{[2, \Delta - 2]} = \emptyset$, et chaque composante de $G[X_{[\Delta - 1, \Delta]}]$ contient au plus un sommet de degré $\Delta - 1$ dans G . De plus, si $\Delta \geq 5$, alors G est un arbre, et si $\Delta = 4$, alors G est un arbre ou a un uni-cycle qui contient un unique sommet du degré 3.*

Dans la Figure 3.3, nous donnons une illustration d'un graphe G d'ordre $n = 8$ et de degré maximum $\Delta = 4$. De plus, le graphe G n'a aucun sommet de degré 2 (c'est-à-dire $X_{[2,\Delta-2]} = \emptyset$) et il contient un seul sommet de degré 3. Pour $j = 2$, on a $\gamma_{[2,2]}(G) = 8$.

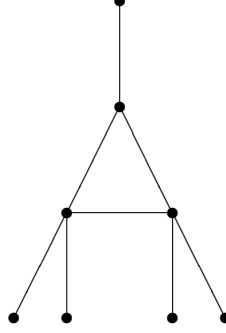


FIG. 3.3 – Un graphe G tel que $\gamma_{[2,\Delta-2]}(G) = n$.

Corollaire 3.2.3 ([50]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 4$, et soit j un entier tel que $2 \leq j \leq \Delta - 2$. Alors $\gamma_{[j,\Delta-2]}(T) = n$ si et seulement si $X_{[j,\Delta-2]} = \emptyset$ et toute composante de $G[X_{[\Delta-1,\Delta]}]$ contient au plus un sommet de degré $\Delta - 1$ dans T .*

La Figure 3.4 illustre un exemple d'un arbre T d'ordre $n = 9$ et de degré maximum $\Delta = 5$. Pour $j = 2$, on a $X_{[j,\Delta-2]} = X_{[2,3]} = \emptyset$. C'est-à-dire, l'arbre T n'a aucun sommet de degré 2 et 3, et la composante $G[X_{[4,5]}]$ contient un seul sommet de degré 4 avec $\gamma_{[j,\Delta-2]}(T) = \gamma_{[2,3]}(T) = 9$.

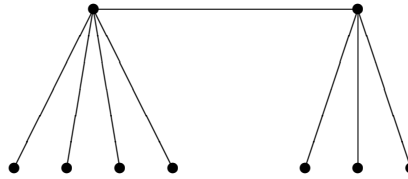


FIG. 3.4 – Un arbre T tel que $\gamma_{[2,\Delta-2]}(T) = n$.

3.2.2 Graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j, k]}(G) = n - 1$

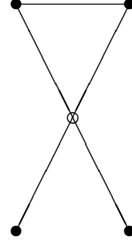
Dans cette sous-section, nous nous concentrerons sur les graphes G d'ordre n et de degré maximum Δ avec $\gamma_{[j, k]}(G) = n - 1$ pour $k \in \{\Delta, \Delta - 1, \Delta - 2\}$.

Théorème 3.2.4 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ , et soit j un entier positif. Alors $\gamma_{[j, \Delta]}(G) = n - 1$ si et seulement si l'ensemble $X_{[j, \Delta]}$ est une clique non vide, et $|X_{[j+1, \Delta]}| \leq 1$.*

Preuve. Supposons que $\gamma_{[j, \Delta]}(G) = n - 1$. Puisque $j \leq \Delta$, nous avons $X_{[j, \Delta]} \neq \emptyset$. Maintenant, s'il existe deux sommets non-adjacents $x, y \in X_{[j, \Delta]}$, alors $V - \{x, y\}$ est un $[j, \Delta]$ -ensemble d'ordre $n - 2$, ce qui contredit le fait que $\gamma_{[j, \Delta]}(G) = n - 1$. Donc $X_{[j, \Delta]}$ induit un sous-graphe complet. Enfin, si $|X_{[j+1, \Delta]}| \geq 2$, alors $X_{[j+1, \Delta]}$ contient deux sommets, disant x et y , avec $j + 1 \leq d_G(x) \leq \Delta$ et $j + 1 \leq d_G(y) \leq \Delta$. Puisque $X_{[j+1, \Delta]} \subseteq X_{[j, \Delta]}$, alors $xy \in E$, et donc $V - \{x, y\}$ est un $[j, \Delta]$ -ensemble, contredisant le fait que $\gamma_{[j, \Delta]}(G) = n - 1$. D'où $|X_{[j+1, \Delta]}| \leq 1$.

Inversement, supposons que $X_{[j, \Delta]}$ est une clique non vide, et que $|X_{[j+1, \Delta]}| \leq 1$. Il est clair que $\gamma_{[j, \Delta]}(G) < n$. Soit S un $\gamma_{[j, \Delta]}$ -ensemble de G , et supposons que $\gamma_{[j, \Delta]}(G) \leq n - 2$. Alors ils existent deux sommets $x, y \in V - S$ tels que $j \leq |N_G(x) \cap S| \leq \Delta$ et $j \leq |N_G(y) \cap S| \leq \Delta$, et donc $x, y \in X_{[j, \Delta]}$. Puisque $X_{[j, \Delta]}$ est une clique, alors $xy \in E$. Par suite $j + 1 \leq d_G(x) \leq \Delta$ et $j + 1 \leq d_G(y) \leq \Delta$, et donc $x, y \in X_{[j+1, \Delta]}$, ce qui contredit le fait que $|X_{[j+1, \Delta]}| \leq 1$. ■

Un exemple d'un graphe G d'ordre $n = 5$ et de degré maximum $\Delta = 4$ est donné dans la Figure 3.5. Pour $j = 2$, $X_{[2, 4]}$ est une clique et $|X_{[3, 4]}| \leq 1$ avec $\gamma_{[2, 4]}(G) = 4$.


 FIG. 3.5 – Un graphe G tel que $\gamma_{[2, \Delta]}(G) = n - 1$.

Du Théorème 3.2.4, on peut voir facilement que l'ordre de la clique $X_{[j, \Delta]}$ est au plus $j + 1$. De plus, si $V(G) - X_{[j, \Delta]} = \emptyset$, alors $|X_{[j, \Delta]}| = j + 1$. Et donc, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.4 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum δ et soit j un entier positif avec $j \leq \delta$. Alors, $\gamma_{[j, \Delta]}(G) = n - 1$ si et seulement si G est un graphe complet d'ordre $n = j + 1$.*

Théorème 3.2.5 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 2$, et soit j un entier tel que $j \leq \Delta - 1$. Alors $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G) = n - 1$ si et seulement si $X_{[j, \Delta-1]}$ est une clique non vide et $X_{[j+1, \Delta]}$ est indépendant.*

Preuve. Supposons que $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G) = n - 1$. D'après l'observation 3.2.2, on a $X_{[j, \Delta-1]} \neq \emptyset$. Maintenant, supposons qu'il existe deux sommets non-adjacents $x, y \in X_{[j, \Delta-1]}$. Alors $V - \{x, y\}$ est un $[j, \Delta - 1]$ -ensemble de G d'ordre $n - 2$, ce qui conduit à une contradiction. Par conséquent, $X_{[j, \Delta-1]}$ induit un sous-graphe complet. Enfin, supposons que $X_{[j+1, \Delta]}$ n'est pas indépendant et soient x et y deux sommets adjacents de $X_{[j+1, \Delta]}$. Alors $V - \{x, y\}$ est un $[j, \Delta - 1]$ -ensemble de G d'ordre $n - 2$, contredisant $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G) < n - 1$. D'où $X_{[j+1, \Delta]}$ est un ensemble indépendant.

Inversement, puisque $X_{[j, \Delta-1]}$ est non vide, nous en déduisons que $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G) \leq n - 1$. Supposons que $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G) < n - 1$ et soit S un $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G)$ -ensemble. Alors $V - S$ contient au moins deux sommets, disons x et y . Si $xy \notin E$, alors $j \leq d_G(x) \leq \Delta - 1$ et $j \leq d_G(y) \leq$

$\Delta - 1$, et donc $x, y \in X_{[j, \Delta-1]}$, mais cela contredit le fait que $X_{[j, \Delta-1]}$ induit un sous-graphe complet. Donc $xy \in E$. Nous déduisons que $j + 1 \leq d_G(x) \leq \Delta$ et $j + 1 \leq d_G(y) \leq \Delta$, aussi on a une contradiction avec $X_{[j+1, \Delta]}$ est indépendant. D'où $\gamma_{[j, \Delta-1]}(G) = n - 1$. ■

Un graphe G d'ordre $n = 7$ et de degré maximum $\Delta = 6$ est représenté dans la Figure 3.6. Pour $j = 3$, $X_{[3,5]}$ est une cilque et $X_{[4,6]}$ est indépendant, donc $\gamma_{[3,5]}(G) = 6$.

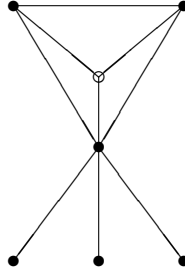


FIG. 3.6 – Un graphe G tel que $\gamma_{[3, \Delta-1]}(G) = n - 1$.

Théorème 3.2.6 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 3$, et soit j un entier avec $j \leq \Delta - 2$. Alors $\gamma_{[j, \Delta-2]}(G) = n - 1$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- (i) $X_{[j, \Delta-2]}$ est non vide et induit un sous-graphe complet.
- (ii) Chaque composante de $G[X_{[j+1, \Delta]}]$ a au plus un sommet de $X_{[j+1, \Delta-1]}$.
- (iii) $G[X_{[j+2, \Delta]}]$ est sans cycle.

Preuve. Supposons que $\gamma_{[j, \Delta-2]}(G) = n - 1$. D'après l'observation 3.2.2, on a $X_{[j, \Delta-2]} \neq \emptyset$. De plus, s'il existe deux sommets non adjacents x et y dans $X_{[j, \Delta-2]}$, alors $V - \{x, y\}$ est un $[j, \Delta-2]$ -ensemble de G d'ordre $n - 2$, ce qui mène à une contradiction. Donc la condition (i) est vérifiée. Pour montrer la condition (ii), on suppose que $G[X_{[j+1, \Delta]}]$ a une composante connexe A ayant au moins deux sommets x et y de $X_{[j+1, \Delta-1]}$. Si $xy \in E$, alors évidemment

$V - \{x, y\}$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G d'ordre $n - 2$, d'où la contradiction. On en déduit que $xy \notin E$. Soit $P = xx_1x_2\dots x_t y$, avec $t \geq 1$, une chaîne dans A dont les extrémités sont x et y . Observons que si $d_G(x_1) \leq \Delta - 1$, alors $V - \{x, x_1\}$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G d'ordre $n - 2$, d'où la contradiction. D'où $d_G(x_1) = \Delta$. De même, si $d_G(x_2) \leq \Delta - 1$, alors en appliquant l'hypothèse $j \leq \Delta - 2$ au sommet x_1 , l'ensemble $V - \{x, x_1, x_2\}$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G d'ordre $n - 3$, une contradiction. Par conséquent $d_G(x_2) = \Delta$, et par le même argument on en déduit que $d_G(x_i) = \Delta$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. Mais comme avant, puisque $j \leq \Delta - 2$, $V(G) - V(P)$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G , ce qui contredit encore $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G) = n - 1$. Par conséquent (ii) est vérifiée. (iii) Si $G[X_{[j+2, \Delta]}]$ contient un cycle C , alors $V(G) - V(C)$ est un $[j, \Delta - 2]$ -ensemble de G d'ordre inférieur à $n - 2$, d'où on a aussi une contradiction.

Inversement, puisque $X_{[j, \Delta - 2]} \neq \emptyset$, alors $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G) \leq n - 1$. Supposons que $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G) < n - 1$, et soit S un $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G)$ -ensemble. Ainsi, $|V - S| \geq 2$. Si $V - S$ est indépendant, alors puisque $V - S \subseteq X_{[j, \Delta - 2]}$ on a une contradiction avec la deuxième partie de (i). Donc $V - S$ n'est pas indépendant. Alors le sous-graphe induit par $V - S$ a une composante A d'ordre au moins deux et donc $V(A) \subset X_{[j+1, \Delta]}$. Maintenant, s'il y a deux sommets x et y de degré un dans A (ici A est considéré comme un sous-graphe induit de G), alors $\{x, y\} \subset X_{[j+1, \Delta - 1]}$ ce qui contredit la condition (ii). Il y a donc au plus un sommet de degré un dans A . Il s'ensuit que A contient un cycle C et clairement $V(C) \subseteq X_{[j+2, \Delta]}$. Mais cela contredit la condition (iii), car $G[X_{[j+2, \Delta]}]$ est sans cycle. Par conséquent, $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(G) = n - 1$, et la preuve est complète. ■

Si on se restreint à la classe des arbres, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.2.5 ([50]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 3$, et soit j un entier positif tel que $j \leq \Delta - 2$. Alors $\gamma_{[j, \Delta - 2]}(T) = n - 1$ si et seulement si $|X_{[j, \Delta - 2]}| \in \{1, 2\}$ et chaque composante de $G[X_{[j+1, \Delta]}]$ contient au plus un sommet de $X_{[j+1, \Delta - 1]}$.*

Un exemple d'un arbre T d'ordre $n = 12$ et de degré maximum $\Delta = 5$, illustré dans la Figure 3.7. Pour $j = 2$, l'arbre T a un seul sommet de degré 3 et $G[X_{[3,5]}]$ contient un seul sommet de degré 3 dans T , et $\gamma_{[2,3]}(T) = 11 = n - 1$.

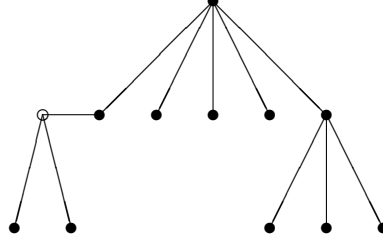


FIG. 3.7 – Un arbre T tel que $\gamma_{[2,\Delta-2]}(T) = n - 1$.

3.2.3 Graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) < n$

Dans cette partie, nous donnons principalement des conditions suffisantes pour qu'un graphe G d'ordre n vérifie $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. Cependant, nous commençons par le résultat suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour les graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) \leq n - p$ pour tout entier p ; $1 \leq p \leq n - j$.

Théorème 3.2.7 ([50]) *Soient j, k et p des entiers positifs tels que $j \leq k$ et $p \leq n - j$, et soit G un graphe d'ordre n . Alors $\gamma_{[j,k]}(G) \leq n - p$ si et seulement s'il existe un sous-graphe induit H de G d'ordre au moins p tel que pour tout sommet $v \in V(H)$, $j \leq d_G(v) - d_H(v) \leq k$.*

Preuve. Supposons que $\gamma_{[j,k]}(G) = n - p$, et soit S un $\gamma_{[j,k]}$ -ensemble de G . Alors, $V - S$ est non vide et de cardinal au moins p . Soit v un sommet de $V - S$. Alors, $|N_G(v)| = |N_G(v) \cap S| + |N_G(v) \cap (V - S)|$ et puisque $j \leq |N_G(v) \cap S| \leq k$, on obtient

$$|N_G(v) \cap (V - S)| + j \leq |N_G(v)| \leq k + |N_G(v) \cap (V - S)|.$$

Donc $d_H(v) + j \leq d_G(v) \leq d_H(v) + k$, où H est le sous-graphe de G induit par $V - S$.

Inversement, Soit H un sous-graphe induit de G d'ordre au moins p tel que $d_H(v) + j \leq d_G(v) \leq d_H(v) + k$ pour tout sommet v de $V(H)$. Alors $V(G) - V(H)$ est un $[j, k]$ -ensemble de G , et donc $\gamma_{[j,k]}(G) \leq |V(G) - V(H)| \leq n - p$. ■

Corollaire 3.2.6 ([50]) *Soient j, k et p des entiers positifs tels que $j \leq k$. Si G a une clique d'ordre p dont les sommets sont de degré au moins $p + j - 1$ et au plus $p + k - 1$ dans G , alors $\gamma_{[j,k]}(G) \leq n - p$.*

Preuve. Soit Q l'ensemble des sommets d'une telle clique de G . Clairement, chaque sommet dans Q a au moins j voisins et au plus k voisins dans $V - Q$, et donc $V - Q$ est un $[j, k]$ -ensemble de G . Par conséquent, $\gamma_{[j,k]}(G) \leq |V - Q| = n - p$. ■

Corollaire 3.2.7 ([50]) *Soient j et k deux entiers positifs avec $j \leq k$. Si G a un cycle induit C d'ordre p dont les sommets sont de degré compris entre $j + 2$ et $k + 2$ dans G , alors $\gamma_{[j,k]}(G) \leq n - p$.*

Preuve. Clairement, chaque sommet de C a au moins j voisins et au plus k voisins dans $V(G) - V(C)$, et donc $V(G) - V(C)$ est un $[j, k]$ -ensemble de G . D'où $\gamma_{[j,k]}(G) \leq |V(G) - V(C)| = n - p$. ■

Théorème 3.2.8 ([50]) *Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum δ et de degré maximum Δ , et soient j, k deux entiers tels que $j \leq k$ et $j \leq \delta \leq \Delta \leq k + 2$. Alors $\gamma_{[j,k]}(G) < n$.*

Preuve. Si $\delta \leq k$, alors pour chaque sommet x de degré minimum δ , $V - \{x\}$ est un $[j, k]$ -ensemble, et donc $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. On peut donc supposer que $\delta \geq k + 1$. Alors chaque sommet de G est de degré $k + 1$ ou $k + 2$. Considérons les cas suivants.

Cas 1. G a au moins deux sommets de degré $k + 1$. Soit P la plus courte chaîne dans G joignant deux sommets de degré $k + 1$. Clairement, chaque sommet de P a k

voisins dans $V(G) - V(P)$, et donc $V(G) - V(P)$ est un $[j, k]$ -ensemble, ce qui donne $\gamma_{[j, k]}(G) \leq |V(G) - V(P)| < n$.

Cas 2. G a exactement un sommet de degré $k + 1$, disons x . Soit $G - x$ le sous-graphe de G induit par $V - \{x\}$. Puisque x est l'unique sommet de degré $k + 1$, chaque sommet de $G - x$ est de degré au moins $k + 1 \geq 2$ dans $G - x$. Il s'ensuit que $G - x$ a un cycle C dont les sommets sont de degré $k + 2$ dans G , et donc chaque sommet de C a k voisins dans $V(G) - V(C)$. D'où $V(G) - V(C)$ est un $[j, k]$ -ensemble. Par conséquent, $\gamma_{[j, k]}(G) \leq |V(G) - V(C)| < n$.

Cas 3. G n'a pas de sommet de degré $k + 1$. Alors, tous les sommets de G sont de degré $k + 2$. Donc, pour tout cycle C de G , $V(G) - V(C)$ est un $[j, k]$ -ensemble. D'où $\gamma_{[j, k]}(G) \leq |V(G) - V(C)| < n$. ■

Corollaire 3.2.8 ([50]) *Si G est un graphe r -régulier, alors on a $\gamma_{[j, k]}(G) < n$ pour tout entier j et k tels que $j \leq r \leq k + 2$.*

Corollaire 3.2.9 ([50]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ , et soit k un entier tel que $\Delta \leq k + 2$. Alors $\gamma_{[1, k]}(T) < n$.*

3.3 Résultat sur la $\mathcal{NP}$ -complétude

Notre but dans cette section est de montrer que le problème de décision correspondant au problème de la détermination du nombre de $[j, k]$ -domination, noté par $[j, k]$ -ENSEMBLE, est $\mathcal{NP}$ -complet.

$[j, k]$ -ENSEMBLE

Instance : Graphe $G = (V, E)$, entier positif $p \leq |V|$.

Question : G possède-t-il un $[j, k]$ -ensemble de cardinal au plus égal à p ?

Il est utile de mentionner que pour $j = k = 1$, le problème $[j, k]$ -ENSEMBLE n'est

que le problème de la domination efficace montré dans [48, 44] qu'il est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes triangulés, les graphes bipartis et les graphes planaires. La $\mathcal{NP}$ -complétude du problème pour les graphes bipartis a été montrée par Chellali et al. [17] pour $j = 1$ et $k = 2$, et par Zhang et al. [51] pour $j = 2$ et $k \geq 3$. Pour $j = 1$ et $k \geq 2$, la $\mathcal{NP}$ -complétude de ce problème a été traitée par Bishnu et al. [9] pour les graphes triangulés.

Dans la suite, nous montrerons que le problème $[j, k]$ -ENSEMBLE est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis pour tout j et k avec $2 \leq j \leq k$, en réduisant le problème 3-COUVERTURE EXACTE (X3C) au problème $[j, k]$ -ENSEMBLE. Rappelons tout d'abord que le problème de la couverture exacte consiste à sélectionner des sous-ensembles de telle sorte que chaque élément d'un ensemble donné appartienne à un seul sous-ensemble sélectionné. La 3-COUVERTURE EXACTE est un cas particulier du problème de couverture exacte, et défini comme suit : étant donné un ensemble fini X avec $|X| = 3q$, et une famille C de sous-ensembles de trois éléments de X ; le but est de décider si C contient ou non une sous-collection C' pour laquelle tout élément de X apparaît exactement une seule fois dans un élément de C' .

3-COUVERTURE EXACTE (X3C)

INSTANCE : Un ensemble fini X avec $|X| = 3q$ et une collection C de sous-ensembles à trois éléments de X .

QUESTION : Est ce qu'il existe une sous-collection C' de C telle que chaque élément de X apparaît exactement une seule fois dans un élément de C' ?

Théorème 3.3.1 ([50]) *Le problème $[j, k]$ -ENSEMBLE est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis pour tous entiers positifs j et k avec $2 \leq j \leq k$.*

Preuve. Il est facile de voir que le problème de $[j, k]$ -ENSEMBLE est dans la classe $\mathcal{NP}$. En effet, pour un graphe $G = (V, E)$, un entier positif p et un $[j, k]$ -ensemble D de G avec

$|D| \leq p$, on peut vérifier facilement que chaque sommet de $V - D$ a au moins j voisins et au plus k voisins dans D .

Pour la suite, on va montrer comment construire un graphe biparti $G = (V, E)$ et un entier p d'une instance X et C de X3C de sorte que C ait une solution si et seulement si G a un $[j, k]$ -ensemble de cardinal au plus p .

Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ et $C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ une instance arbitraire de X3C. Pour chaque $x_i \in X$, on crée une étoile $K_{1,j-1}$ de centre x_i , et pour chaque $C_r \in C$ on crée une étoile $K_{1,k}$ de centre c_r . Pour compléter la construction, on ajoute toutes les arêtes $x_i c_r$ pour $x_i \in C_r$. Posons $p = kt + (3j - 2)q$. De plus, on considère les ensembles L_C et L_X formés par les sommets pendants adjacents aux sommets de C et X , respectivement (voir Figure 3.8).

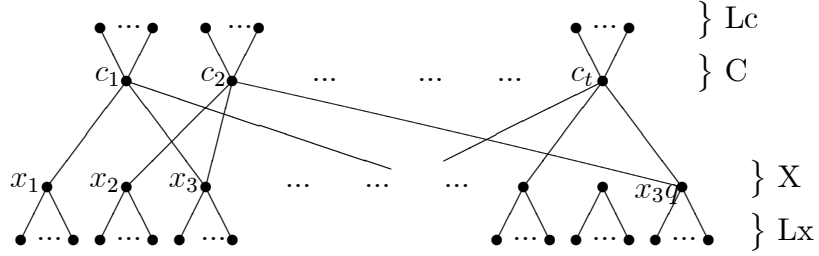


FIG. 3.8 – Réduction du problème X3C au problème $[j, k]$ -ENSEMBLE

Supposons que C' est une couverture exacte de C , et soit l'ensemble D défini par

$$D = L_C \cup L_X \cup \{c_i : C_i \in C'\}.$$

Puisque C' existe, on observe que $|C'| = q$, et donc chaque x_i doit avoir exactement j voisins dans D . De plus, chaque c_j qui n'est pas dans D a exactement k voisins dans D . Par conséquent, D est un $[j, k]$ -ensemble de G de cardinal $kt + 3q(j - 1) + q = kt + (3j - 2)q = p$.

Inversement, supposons que D est un $[j, k]$ -ensemble de G de cardinal au plus $kt + (3j - 2)q$. Clairement tous les sommets pendants de G sont dans D et donc $L_C \cup L_X \subset D$, où $|L_X \cup L_C| = kt + 3(j - 1)q$. Observons qu'à cette étape, chaque sommet c_r a exactement

k voisins dans D , et donc aucun autre voisin de c_r ne sera dans D . Ce qui nous amène à déduire qu'aucun x_i n'appartient à D . D'autre part, chaque x_i a déjà $j - 1$ voisins dans D et doit être soit dans D , soit avoir un autre voisin dans D pris de son voisinage dans C . Cependant, puisque $L_C \cup L_X \subset D$, il nous reste au plus q sommets pour dominer les $3q$ sommets de X , et cela n'est possible que s'il existe q sommets dans C . Par conséquent, $C' = \{C_r : c_r \in D\}$ est une couverture exacte pour C . ■

Chapitre 4

Les $[1, k]$ -ensembles indépendants

Dans ce chapitre, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour les graphes ayant un $[1, k]$ -ensemble indépendant et nous caractérisons les graphes scindés ayant un $[1, k]$ -ensemble indépendant. Ensuite, nous déterminons des bornes supérieures pour le paramètre $\alpha_{[1, k]}(G)$ et une borne inférieure pour le paramètre $i_{[1, k]}(G)$, et une relation de type Nordhaus-Gaddum pour $\alpha_{[1, k]}(G)$, en fournissant une caractérisation des graphes extrémaux de ces bornes. Enfin, nous montrons que le problème de décision correspond au problème de détermination du nombre de $[1, k]$ -independance supérieur est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis et les graphes triangulés pour tout entier $k \geq 2$.

4.1 Graphes ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants

Bange et al. [3] ont donné une caractérisation constructive des arbres ayant un $[1, 1]$ -ensemble indépendant ainsi qu'un algorithme polynomial pour trouver un tel ensemble. En se restreignant aussi à la classe des arbres, Chellali et al. [16] ont donné une caractérisation constructive des arbres ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants pour $k \geq 2$. Dans cette section, nous donnons une caractérisation constructive des graphes ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants.

On dit que G est un graphe pk -biparti connexe, noté k -GBC, si G est biparti et chaque sommet dans l'une des partitions est de degré au plus k , et on dit qu'une telle partition est pk -ensemble. Il est clair que, si G est connexe avec les partitions X et Y telles que Y est un pk -ensemble, alors X est un $[1, k]$ -ensemble indépendant dans G .

Nous définissons maintenant la famille $\mathcal{F}_k$ de graphes G obtenus d'abord à partir de l'union de t pk -GBCs $G_1, G_2, \dots, G_t$, où pour chaque $i \in \{1, \dots, t\}$, les partitions de G_i sont A_i et B_i avec B_i étant un pk -ensemble de G_i , puis en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets des B_i .

Théorème 4.1.1 ([11]) *Pour tout entier $k \geq 1$, un graphe G a $[1, k]$ -ensemble indépendant si et seulement si $G \in \mathcal{F}_k$.*

Preuve. Supposons que $G \in \mathcal{F}_k$ pour un certain k . Si $t = 1$, alors $G = G_1$ et puisque B_1 est un pk -ensemble, A_1 est un pk -ensemble indépendant. Soit donc $t \geq 2$. Par définition, G est obtenu à partir de l'union de $G_1, G_2, \dots, G_t$, où chaque G_i est un pk -GBC ayant des partitions A_i et B_i , avec B_i est un pk -ensemble pour tout i , en ajoutant des arêtes (possible aucune) joignant les sommets des pk -ensembles. Soit $A = \cup_i A_i$ et $B = \cup_i B_i$. Alors A est un ensemble indépendant, et puisque pour tout $y \in B$, $1 \leq |N_G(y) \cap A| \leq k$, l'ensemble A est un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G .

Inversement, supposons que G est un graphe ayant un $[1, k]$ -ensemble indépendant S pour un entier $k \geq 1$. Si $V(G) - S$ est indépendant, alors chaque composante de G est un pk -GBC, et ainsi $G \in \mathcal{F}_k$. On peut donc supposer que $V(G) - S$ contient au moins une arête, et que F soit l'ensemble des arêtes du sous-graphe induit par $V(G) - S$. En supprimant toutes les arêtes de F de G , on obtient un graphe H dont chaque composante est un pk -GBC. Soit G_i une composante de H , $A_i = V(G_i) \cap S$ et $B_i = V(G_i) \cap (V(G) - S)$. Puisque A_i est un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G_i et B_i est indépendant, on en déduit que A_i et B_i sont des partitions de G_i , et donc G_i est un pk -GBC. Maintenant, puisque G_i est une composante arbitraire de H et que toutes les extrémités des arêtes supprimées

appartiennent à $V(G) - S$, alors par construction, $G \in \mathcal{F}_k$. ■

4.2 Graphes scindés ayant $[1, k]$ -ensembles indépendants

Dans cette section, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe scindé G ait un $[1, k]$ -ensemble indépendant, et dans ce cas, nous déterminons les valeurs de $i_{[1, k]}(G)$ et $\alpha_{[1, k]}(G)$. L'idée de la démonstration est basée sur le fait que tout $[1, k]$ -ensemble indépendant S de G contient au plus un sommet de Q , puisque S est indépendant et Q est une clique.

Théorème 4.2.1 ([11]) *Soit G un graphe scindé connexe, dont l'ensemble des sommets est partitionné en un ensemble indépendant I et une clique minimale Q avec $|Q| = q$. Alors G admet un $[1, k]$ -ensemble indépendant si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

1. $\Delta \leq q + k - 1$.
2. *Il existe un sommet v de Q tel que $|N_G(y) \cap (Q \cup (I - N_G(v)))| \leq k + q - 2$ pour tout $y \in Q - \{v\}$.*

Preuve. Supposons que G ait un $[1, k]$ -ensemble indépendant S . Clairement, $|Q \cap S| \leq 1$ et un sommet de degré maximum appartient à Q . Maintenant, si $Q \cap S = \emptyset$, alors $S = I$, et donc $1 \leq |N_G(y) \cap I| \leq k$ pour tout sommet $y \in Q$. Puisque chaque sommet de Q a exactement $q - 1$ voisins dans Q , $d_G(y) \leq q + k - 1$ pour tout $y \in Q$, et donc $\Delta \leq q + k - 1$. Supposons maintenant que $|Q \cap S| = 1$ et soit $v \in Q \cap S$. D'où $S = (I - N_G(v)) \cup \{v\}$ et $V - S = (Q - \{v\}) \cup (N_G(v) \cap I) = N_G(v)$. Puisque $|N_G(y) \cap S| \leq k$ pour tout $y \in N_G(v)$, on en déduit que $|N_G(y) \cap (Q \cup (I - N_G(v)))| \leq k + q - 2$ pour tout $y \in Q - \{v\}$.

Inversement, si $\Delta \leq q + k - 1$, alors $d_G(y) \leq q + k - 1$ pour tout $x \in Q$ et donc $|N_G(y) \cap I| \leq k$ pour tout $y \in Q$. Puisque Q est minimal, $|N_G(y) \cap I| \geq 1$ pour tout $y \in$

Q , l'ensemble I est un indépendant $[1, k]$ -ensemble indépendant. Maintenant, supposons qu'il existe un sommet $v \in Q$ tel que $|N_G(y) \cap (Q \cup (I - N_G(v)))| \leq k + q - 2$ pour tout $y \in Q - \{v\}$. Il suffit de montrer que $I^* = (I - N_G(v)) \cup \{v\}$ est un $[1, k]$ -ensemble, puisque I^* est indépendant. Chaque sommet de $N_G(v) \cap I$ a exactement un voisin dans I^* , qui est v , et chaque sommet de $Q - \{v\}$ est adjacent à v et a au plus k voisins dans I^* . D'où I^* est $[1, k]$ -ensemble indépendant. ■

Comme conséquence du théorème précédent, si l'une des conditions du Théorème 4.2.1 est vérifiée, alors les valeurs exactes des paramètres $i_{[1, k]}(G)$ et $\alpha_{[1, k]}(G)$ sont déterminées en choisissant, respectivement, un $[1, k]$ -ensemble indépendant de cardinal minimum et un $[1, k]$ -ensemble indépendant de cardinal maximum de G .

Corollaire 4.2.1 ([11]) *Soit G un graphe scindé connexe d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble de sommets est partitionné en un ensemble indépendant I et une clique minimale Q tels que $|I| = p$ et $|Q| = q$. Alors,*

1. *Si $\Delta \leq q + k - 1$ et il existe un sous-ensemble Q' de Q tel que chaque sommet $v \in Q'$ satisfait $|N_G(y) \cap (Q \cup (I - N_G(v)))| \leq k + q - 2$ pour tout $y \in Q - \{v\}$, alors*

$$i_{[1, k]}(G) = n - \max_{v \in Q'} d_G(v) \text{ et } \alpha_{[1, k]}(G) = p.$$

2. *Si $\Delta > q + k - 1$ et il existe un sous-ensemble Q' de Q tel que chaque sommet $v \in Q'$ satisfait $|N_G(y) \cap (Q \cup (I - N_G(v)))| \leq k + q - 2$ pour tout $y \in Q - \{v\}$, alors*

$$i_{[1, k]}(G) = n - \max_{v \in Q'} d_G(v) \text{ et } \alpha_{[1, k]}(G) = n - \min_{v \in Q'} d_G(v),$$

3. *Si $\Delta \leq q + k - 1$ et pour tout sommet $v \in Q$ il existe un sommet $y \in Q - \{v\}$ tel que $|N_G(y) \cap (Q \cup (I - N_G(v)))| > k + q - 2$, alors*

$$i_{[1, k]}(G) = \alpha_{[1, k]}(G) = p.$$

A travers les exemples des graphes scindés présentés dans la Figure 4.1, on peut voir les différents cas qui se présentent dans le Corollaire 4.2.1 pour $k = 2$.

Pour le graphe G_1 , $\Delta = 4$, G_1 a une clique Q de taille $q = 3$ et un ensemble indépendant I de taille $p = 3$. De plus, la condition (1) est remplie et donc $i_{[1,2]}(G) = 2$ et $\alpha_{[1,2]}(G) = 3$.

Pour le graphe G_2 , $\Delta = 6$, G_2 a une clique Q de taille $q = 3$ et un ensemble indépendant I de taille $p = 5$. De plus, la condition (2) est remplie et donc $i_{[1,2]}(G) = 2$ et $\alpha_{[1,2]}(G) = 3$.

Pour le graphe G_3 , $\Delta = 4$, G a une clique Q de taille $q = 3$ et un ensemble indépendant I de taille $p = 6$. De plus, la condition (3) est remplie et donc $i_{[1,2]}(G) = \alpha_{[1,2]}(G) = 6$.

Mais lorsque $k = 1$, les conditions (1) et (2) ne sont pas remplies pour les trois graphes, et donc G_1 , G_2 , et G_3 n'admettent pas de $[1, 1]$ -ensemble indépendant.

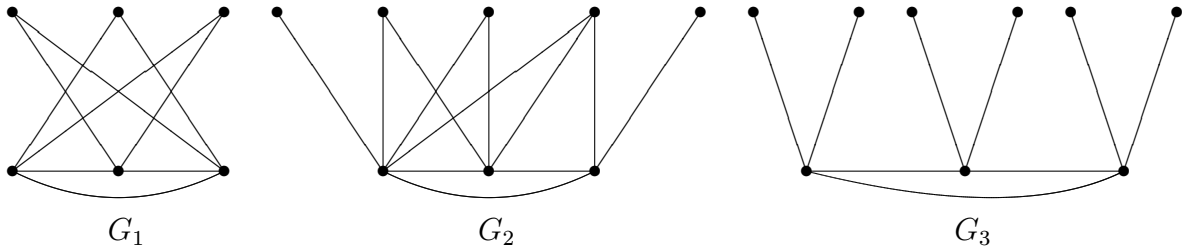


FIG. 4.1 – Les graphes G_1 , G_2 et G_3 .

4.3 Bornes sur les nombres de $[1, k]$ -indépendance

Dans [16], Chellali et al. ont déterminé des bornes supérieures sur les nombres de $[1, k]$ -indépendance pour les graphes ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants, présentées dans la deuxième section du deuxième chapitre. Nous donnons ici d'autres bornes en fonction de n , m , Δ , δ et k . Ensuite, nous donnons des caractérisations des graphes G atteignant ces bornes.

Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti dont les partitions sont X et Y , et soit p et q deux entiers positifs. Alors G est dit q -semi-régulier si le degré de chaque sommet de l'une

des deux partitions de G est p , tandis que G est dit (p, q) -birégulier si chaque sommet de X est de degré p et chaque sommet de Y est de degré q . Soit $\mathcal{H}_q(X, Y)$ l'ensemble de tous les graphes q -semi-réguliers bipartis $G = (X, Y, E)$, et soit $\mathcal{H}_q^p(X, Y)$ l'ensemble de tous les graphes (p, q) -biréguliers. Il est clair que $\mathcal{H}_q^p(X, Y)$ est une sous-classe de $\mathcal{H}_q(X, Y)$.

Théorème 4.3.1 ([11]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum δ , et soit k un entier positif. Si G a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, alors*

$$\alpha_{[1, k]}(G) \leq n - \delta + k - 1$$

avec égalité si et seulement si $k = 1$ et $G \cong \overline{K_n}$ ou K_n .

Preuve. Si $k \geq \delta + 1$, alors $n - \delta + k - 1 \geq n$, et donc $\alpha_{[1, k]}(G) \leq n \leq n - \delta + k - 1$. En plus, si $\alpha_{[1, k]}(G) = n - \delta + k - 1$, alors $\alpha_{[1, k]}(G) = n$, et donc $\delta = 0$, $k = 1$ and $G = \overline{K_n}$. Dans la suite, on suppose que $k \leq \delta$. Soit S un $[1, k]$ -ensemble indépendant maximum dans G , et soit v un sommet de $V - S$. Utilisant le fait que $d_S(v) + d_{V-S}(v) = d_G(v)$, $d_S(v) \leq k$ et $d_{V-S}(v) \leq |V - S| - 1$, on déduit que $d_G(v) - k \leq n - |S| - 1$. En plus, puisque $\delta \leq d_G(v)$ et $\alpha_{[1, k]}(G) = |S|$, on obtient $\delta - k \leq n - \alpha_{[1, k]}(G) - 1$ qui mène à la borne $\alpha_{[1, k]}(G) \leq n - \delta + k - 1$.

Maintenant, si $\alpha_{[1, k]}(G) = n - \delta + k - 1$, alors on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalités précédente. En particulier, pour tout sommet $v \in V - S$, on a $d_S(v) = k$, $d_{V-S}(v) = |V - S| - 1$ et $d_G(v) = \delta$. Il s'ensuit que $V - S$ induit un sous-graphe complet. D'autre part, puisque pour tout sommet u dans S , $d_S(u) = 0$, on déduit que $\delta \leq d_G(u) \leq |V - S| = \delta - k + 1$, et donc $k \leq 1$. Par conséquent, $k = 1$ et $d_G(u) = |V - S| = \delta$. Il est clair que si S contient plus d'un sommet, alors le degré de chaque sommet de $V - S$ serait plus grand que δ , ce qui mène à une contradiction. D'où $|S| = 1$ et G est un graphe complet d'ordre n . L'inverse est trivial.

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du Théorème 4.3.1. ■

Corollaire 4.3.1 ([11]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum δ , et soit k un entier positif. Si G a un $[1, k]$ -ensemble indépendant et $G \notin \{\overline{K_n}, K_n\}$ ou $k \geq 2$, alors*

$$\alpha_{[1, k]}(G) \leq n - \delta + k - 2.$$

Rappelons que $m(A, B)$ est le nombre d'arêtes joignant les sommets de A aux sommets de B , où A et B sont des sous-ensembles de sommets d'un graphe G .

Théorème 4.3.2 ([11]) *Soit G un graphe d'ordre n , de taille m et de degré maximum Δ , et soit k un entier positif tel que $k \leq \Delta$. Si G a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, alors*

$$\alpha_{[1, k]}(G) \leq n - \frac{2m}{\Delta + k},$$

avec égalité si et seulement si G est obtenu d'un graphe de $\mathcal{H}_k(X, Y)$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de Y de sorte que chaque sommet de Y est de degré Δ .

Preuve. Soit S un $\alpha_{[1, k]}(G)$ -ensemble indépendant. Alors,

$$m(G[S]) = 0, m(V - S, S) = \sum_{y \in V - S} d_S(y) \text{ et } m(G[V - S]) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} d_{V - S}(y).$$

Donc,

$$\begin{aligned} m &= m(V - S, S) + m(G[V - S]) \\ &= \sum_{y \in V - S} d_S(y) + \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} d_{V - S}(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} (2d_S(y) + d_{V - S}(y)) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} (d_S(y) + d_G(y)). \end{aligned}$$

Puisque $d_S(y) \leq k$ et $d_G(y) \leq \Delta$ pour tout $y \in V - S$, on obtient

$$\begin{aligned} 2m &\leq \sum_{y \in V-S} (k + \Delta) \\ &\leq (k + \Delta) (n - |S|). \end{aligned}$$

D'où $|S| \leq n - \frac{2m}{\Delta+k}$.

De plus, si $\alpha_{[1,k]}(G) = n - \frac{2m}{\Delta+k}$, alors on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalités précédente. En particulier, $d_S(y) = k$ et $d_G(y) = \Delta$ pour tout $y \in V - S$. Puisque S est indépendant, en posant $S = X$ et $Y = V - S$, on déduit que G est obtenu d'un graphe de $\mathcal{H}_k(X, Y)$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de Y de sorte que chaque sommet de Y est de degré Δ .

Inversement, supposons que G est obtenu d'un graphe de $\mathcal{H}_k(X, Y)$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de Y de sorte que chaque sommet de Y est de degré Δ . Par définition, X est un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G , et donc $\alpha_{[1,k]}(G) \geq |X|$. D'autre part, puisque tout sommet de Y est de degré maximum, $G[Y]$ est régulier de degré $\Delta - k$. Alors,

$$\begin{aligned} m &= m(Y, X) + m(G[Y]) \\ &= k|Y| + \frac{(\Delta - k)|Y|}{2} = \frac{(\Delta + k)|Y|}{2} \\ &= \frac{(\Delta + k)(n - |X|)}{2}, \end{aligned}$$

et donc, $|X| = n - \frac{2m}{\Delta+k}$. Par conséquent, $\alpha_{[1,k]}(G) \geq |X| = n - \frac{2m}{\Delta+k}$, et l'égalité décolle du fait que $\alpha_{[1,k]}(G) \leq n - \frac{2m}{\Delta+k}$. ■

Notons que puisque les bornes des Théorèmes 4.3.2 et 2.4.3 sont les mêmes pour les graphes réguliers, les graphes extrêmes atteignant ces bornes sont aussi les mêmes. De plus, on obtient, du Théorème 4.3.2, les corollaires suivants.

Corollaire 4.3.2 ([11]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n , de taille m et de degré maximum Δ . Alors $\alpha_{[1, \Delta]}(G) = \alpha(G) = n - \frac{m}{\Delta}$ si et seulement si $G \in \mathcal{H}_\Delta(X, Y)$.*

Corollaire 4.3.3 ([11]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ , et soit k un entier positif avec $k \leq \Delta$. Si T a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, alors $\alpha_{[1, k]}(T) = n - \frac{2m}{\Delta + k}$ si et seulement si $k = \Delta$ et $T \in \mathcal{H}_k(X, Y)$ ou $k = \Delta - 1$ et T est obtenu d'une forêt $F \in \mathcal{H}_k(X, Y)$, en ajoutant des arêtes entre les sommets de Y de sorte que Y induit un graphe 1-régulier.*

Maintenant on donne une borne inférieure pour $i_{[1, k]}$.

Théorème 4.3.3 ([11]) *Soit G un graphe d'ordre n , de taille m , de degré minimum $\delta \geq 1$, et soit k un entier positif tel que $k \leq \Delta$. Si G a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, alors*

$$i_{[1, k]}(G) \geq n - \frac{2m}{\delta + 1},$$

avec égalité si et seulement si G est obtenu d'un graphe de $\mathcal{H}_1(X, Y)$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de Y de sorte que chaque sommet de Y est de degré δ .

Preuve. Soit S un $i_{[1, k]}(G)$ -ensemble indépendant. Alors

$$m(G[S]) = 0, m(V - S, S) = \sum_{y \in V - S} d_S(y) \text{ et } m(G[V - S]) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} d_{V - S}(y).$$

Donc,

$$\begin{aligned} m &= m(V - S, S) + m(G[V - S]) \\ &= \sum_{y \in V - S} d_S(y) + \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} d_{V - S}(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} (2d_S(y) + d_{V - S}(y)) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V - S} (d_S(y) + d_G(y)). \end{aligned}$$

Puisque $d_S(y) \geq 1$ et $d_G(y) \geq \delta$ pour tout $y \in V - S$, on obtient

$$\begin{aligned} 2m &\geq \sum_{y \in V-S} (1 + \delta) \\ &\geq (1 + \delta) (n - |S|). \end{aligned}$$

D'où $|S| \geq n - \frac{2m}{(1+\delta)}$.

De plus, si $i_{[1,k]}(G) = n - \frac{2m}{\delta+1}$, alors on a l'égalité dans toute la chaîne d'inégalités précédente. En particulier, $d_S(y) = 1$ et $d_G(y) = \delta$ pour tout $y \in V - S$. Puisque S est indépendant, en posant $S = X$ et $Y = V - S$, on déduit que G est obtenu d'un graphe de $\mathcal{H}_1(X, Y)$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de Y de sorte que chaque sommet de Y est de degré δ .

Inversement, supposons que G est obtenu d'un graphe de $\mathcal{H}_1(X, Y)$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de Y de sorte que chaque sommet de Y est de degré δ . Par définition, X est un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G , et donc $i_{[1,k]}(G) \leq |X|$. D'autre part, puisque tout sommet de Y est de degré minimum, $G[Y]$ est régulier de degré $\delta - 1$. Alors,

$$\begin{aligned} m &= m(Y, X) + m(G[Y]) \\ &= |Y| + \frac{(\delta - 1) |Y|}{2} = \frac{(\delta + 1) |Y|}{2} \\ &= \frac{(\delta + 1) (n - |X|)}{2}, \end{aligned}$$

et donc $|X| = n - \frac{2m}{\delta+1}$. Par conséquent, $i_{[1,k]}(G) \leq |X| = n - \frac{2m}{\delta+1}$, et l'égalité découle du fait que $i_{[1,k]}(G) \geq n - \frac{2m}{\delta+1}$. ■

On obtient, du Théorème 4.3.3, les corollaires suivants, pour les graphes réguliers et les arbres.

Corollaire 4.3.4 ([11]) *Soit G , un graphe r -régulier d'ordre n . Alors $i_{[1,k]}(G) = \frac{n}{r+1}$ si et seulement si $G \in \mathcal{H}_1^r(X, Y)$.*

Corollaire 4.3.5 ([11]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ , et soit k un entier positif avec $k \leq \Delta$. Si T a un $[1, k]$ -ensemble indépendant, alors $i_{[1, k]}(T) = n - \frac{2m}{\delta+1}$ si et seulement si $T \in H_1(X, Y)$ (T consiste en une étoile).*

4.4 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum

Nous présentons, dans cette section, une relation de type Nordhaus-Gaddum pour le paramètre $\alpha_{[1, k]}$.

Théorème 4.4.1 ([11]) *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$, et soit k un entier positif. Si G et $\overline{G}$ ont des $[1, k]$ -ensembles indépendants, alors*

$$3 \leq \alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) \leq n + 1.$$

De plus, la borne inférieure est atteinte si et seulement si G ou $\overline{G}$ a un sommet support de degré $n - 1$, tandis que la borne supérieure est atteinte si et seulement si G est un graphe scindé, dont l'ensemble de sommets est partitionné en une clique Q et un ensemble indépendant I , satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. *Chaque sommet de Q est de degré au moins $|Q|$ et au plus $|Q| + k - 1$.*
2. *I a un sommet de degré $|Q|$ et chaque sommet de I est de degré au moins $|Q| - k + 1$.*

Preuve. Pour montrer la borne inférieure, il suffit de montrer que si $\alpha_{[1, k]}(G) = 1$, alors $\alpha_{[1, k]}(\overline{G}) \geq 2$. Supposons que $\alpha_{[1, k]}(G) = 1$, et soit $S = \{x\}$ un $\alpha_{[1, k]}(G)$ -ensemble. Puisque chaque sommet dans $V - S$ a un voisin dans S , alors $d_G(x) = n - 1$, et donc x est isolé dans $\overline{G}$. D'où x est dans chaque $[1, k]$ -ensemble indépendant de $\overline{G}$, et puisque $n \geq 2$, on en déduit que $\alpha_{[1, k]}(\overline{G}) \geq 2$.

Maintenant, supposons que $\alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) = 3$. Alors, sans perte de généralité, $\alpha_{[1, k]}(G) = 1$ et $\alpha_{[1, k]}(\overline{G}) = 2$. Comme G a un sommet de degré $n - 1$, disant x , et en

plus, x est dans chaque $[1, k]$ -ensemble indépendant de $\overline{G}$, on conclut que le sous-graphe induit par $V - \{x\}$ dans $\overline{G}$ a un $[1, k]$ -ensemble indépendant maximum A de taille un, c'est-à-dire que A consiste exactement à un sommet, disant y , et donc y est adjacent à tous les sommets de $V(\overline{G}) - \{x, y\}$, c'est-à-dire que y est un sommet pendant dans G , dont le sommet support est x . L'inverse est trivial.

Pour montrer la borne supérieure, supposons que S et S' sont des $[1, k]$ -ensembles indépendants maximums, respectivement, dans G et $\overline{G}$. Il est clair que S' induit une clique dans G , et donc $|S \cap S'| \leq 1$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} n &= |S| + |S'| - |S' \cap S| + |V - (S' \cup S)| \\ &\geq |S| + |S'| - 1 \geq \alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) - 1, \end{aligned}$$

et la borne supérieure est obtenue.

Supposons maintenant que $\alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) = n + 1$. Alors, d'après la chaîne d'inégalité précédente, $V - (S' \cup S) = \emptyset$ et $|S \cap S'| = 1$. Par conséquent, $V = S' \cup S$, et $S \cap S'$ consiste en un seul sommet, disant v . Puisque S' induit une clique dans G , alors G est un graphe scindé, dont l'ensemble des sommets est partitionné en un ensemble indépendant $I = S$ et une clique $Q = S' - \{v\}$ telle que v est adjacent à tous les sommets de Q . Puisque I est un $[1, k]$ -ensemble de G , chaque sommet de Q est de degré au moins $|Q|$ et au plus $|Q| + k - 1$ dans G . D'autre part, puisque $Q \cup \{v\}$ est un $[1, k]$ -ensemble de $\overline{G}$, chaque sommet de $I - \{v\}$ est de degré au moins $|I| - 1$ et au plus $|I| + k - 2$ dans $\overline{G}$. Donc, chaque sommet de $I - \{v\}$ est de degré au plus $|Q|$ et au moins $|Q| - k + 1$ dans G .

Inversement, supposons que G est un graphe scindé avec une clique Q et un ensemble indépendant I remplissant les conditions (1) et (2). D'après la condition (1), il est clair que chaque sommet de Q a au moins un voisin et au plus k voisins dans I relativement à G , et d'après la condition (2), chaque sommet de $I - \{v\}$ est adjacent à v et a au moins k voisins dans Q relativement à $\overline{G}$, ce qui signifie que I et $Q \cup \{v\}$ sont des $[1, k]$ -ensembles

indépendants, respectivement, de G et de $\overline{G}$. Donc $\alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) \geq |I| + |Q \cup \{v\}| = n + 1$, et l'égalité découle du fait que $\alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) \leq n + 1$. ■

Du Théorème 4.4.1, nous avons les résultats immédiats suivants, pour les cas $k = 1$ et $k \geq \max \{ \Delta(G), \Delta(\overline{G}) \}$.

Corollaire 4.4.1 ([11]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, tel que G et $\overline{G}$ ont des $[1, 1]$ -ensembles indépendants, alors $\alpha_{[1, 1]}(G) + \alpha_{[1, 1]}(\overline{G}) = n + 1$ si et seulement si $G \in \{K_n, \overline{K}_n\}$.*

Corollaire 4.4.2 ([11]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ et un entier $k \geq \max \{ \Delta(G), \Delta(\overline{G}) \}$ alors $\alpha_{[1, k]}(G) + \alpha_{[1, k]}(\overline{G}) = n + 1$ si et seulement si G est un graphe scindé, dont l'ensemble des sommets est partitionné en une clique Q et un ensemble indépendant I , tel que I a un sommet de degré $|Q|$.*

4.5 Résultats sur la $\mathcal{NP}$ -complétude pour $\alpha_{[1, k]}$

Dans [17], Chellali et al. ont montré que le problème de décision correspond au problème de détermination du nombre de $[1, k]$ -indépendance inférieur est $\mathcal{NP}$ -complet pour un graphe arbitraire pour tout entier $k \geq 1$. Notons que pour $k = 1$ et $k \geq \Delta$, les $[1, k]$ -ensembles indépendants coïncident, respectivement, avec les ensembles dominants efficaces et les ensembles dominants indépendants, pour lesquels les problèmes de décision correspondants sont $\mathcal{NP}$ -complets même, pour les graphes bipartis (voir [49] et [22]). De plus, puisque tous les ensembles dominants efficaces ont le même cardinal, il n'est plus intéressant de considérer le cas $k = 1$.

$[1, k]$ -ENSEMBLE INDEPENDANT MAXIMUM

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $p \leq |V|$.

Question : G a-t-il un $[1, k]$ -ensemble indépendant de cardinal au moins p ?

Dans la suite, nous allons montrer que le problème $[1, k]$ -ENSEMBLE INDEPENDANT MAXIMUM est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis et les graphes triangulés, en le réduisant au problème de 3-COUVERTURE 3-EXACT (X3C3). Notons que la $\mathcal{NP}$ -complétude de X3C3 a été montrée en 2008 par Hickey et al. [41].

3-COUVERTURE 3-EXACT (X3C3)

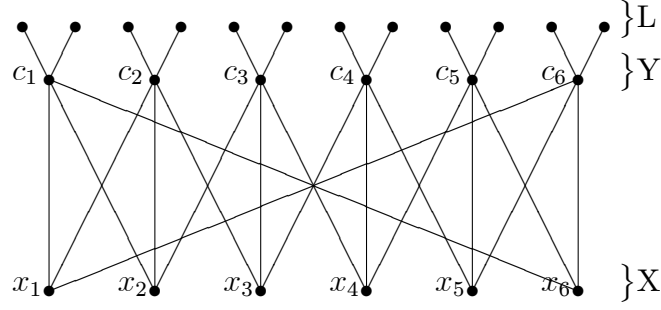
Instance : Un ensemble d'éléments X avec $|X| = 3q$, et une collection C de $3q$ sous-ensembles à 3 éléments de X , telle que chaque élément apparaît exactement dans 3 sous-ensembles de C .

Question : C contient-il une couverture exacte pour X , c'est-à-dire existe-t-il une sous-collection $C' \subset C$ telle que chaque élément de X apparaît exactement dans un sous-ensemble de C' ?.

Théorème 4.5.1 ([11]) *Le problème de $[1, k]$ -ENSEMBLE INDEPENDANT MAXIMUM est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes bipartis et pour tout $k \geq 2$.*

Preuve. Il est facile de vérifier une instance "oui" d'un $[1, k]$ -ENSEMBLE INDEPENDANT MAXIMUM en temps polynomial, c'est-à-dire, pour un graphe G , un entier positif p et un ensemble S de V avec $|S| \geq p$, par vérification que S est indépendant et que chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet et pas plus de k sommets dans S .

Ensuite, nous construisons un graphe biparti G et un entier positif p à partir d'une instance X et C de X3C3 de sorte que C ait une solution si et seulement si G a un $[1, k]$ -ensemble indépendant de cardinal d'au moins p . Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ et $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_{3q}\}$ une instance arbitraire de X3C3, avec $p = (2k + 1)q$. La construction du graphe biparti G est la suivante : pour chaque $C_j \in \mathcal{C}$ nous créons une étoile $K_{1,k}$ de centre c_j , et soit $Y = \{c_1, c_2, \dots, c_{3q}\}$. Pour chaque élément $x_i \in X$ nous créons un sommet x_i , et pour terminer la construction, on ajoute les arêtes $x_i c_r$ si $x_i \in C_r$. (Voir Figure 4.2).


 FIG. 4.2 – La construction d'un graphe biparti G pour $q = k = 2$.

Supposons que les instances X et C de X3C3 aient une solution C' . Nous construisons un $[1, k]$ -ensemble indépendant I comme suit : pour chaque $C_i \in C'$, mettons c_i dans I et pour chaque $C_i \notin C'$, nous mettons dans I tous les sommets pendants voisins de c_i . Puisque C' est une solution pour X3C3, alors chaque x_i a exactement un voisin dans I , et exactement q sommets de Y sont dans I . De plus, pour tout i , c_i appartient à I , ou ses k sommets pendants. Par conséquent, I est un $[1, k]$ -ensemble indépendant de G de cardinal $q + 2qk = p$.

Inversement, supposons que G ait un $[1, k]$ -ensemble indépendant, disant I , de cardinal au moins $p = q(2k + 1)$. Tout d'abord, notons que I ne contient aucun sommet de X . En effet, supposons que I contient un sommet x_i , et soit c_j un voisin de x_i . Alors $c_i \notin I$ et donc tous les k sommets pendants voisins de c_j appartiennent à I , ce qui conduit à $|N_G(c_j) \cap I| \geq k + 1$, contredisant le fait que I soit un $[1, k]$ -ensemble indépendant. D'où $X \cap I = \emptyset$, et donc $Y \cap I \neq \emptyset$ (pour dominer les x_i). Soit $A = Y \cap I$ et observons que $|A| \geq q$ (puisque chaque sommet de Y a exactement 3 voisins dans X). D'une autre part, I contient tous les sommets pendants voisins de tout c_i qui n'est pas dans I , et donc $|I| = k(3q - |A|) + |A|$. En combinant cela avec le fait que $|I| \geq p = q(2k + 1)$, on en déduit que $|A| \leq q$. Il s'ensuit que $|A| = q$, et donc chaque sommet de X est adjacent à exactement un sommet de A . Donc X3C3 a une solution $C' = \{C_j : c_j \in A\}$. ■

En regardant la preuve ci-dessus, on peut observer qu'elle fonctionne également pour

les graphes triangulés en ajoutant des arêtes entre les x_i afin que X induit un graphe complet. Donc on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.5.1 ([11]) *Le problème de $[1, k]$ -ENSEMBLE INDEPENDANT MAXIMUM est $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes triangulés pour tout $k \geq 2$.*

Conclusion

Cette thèse se concentre sur un concept particulier de la domination dans les graphes, à savoir les $[j, k]$ -ensembles pour $1 \leq j \leq k \leq \Delta$. Au cours de notre recherche bibliographique, nous avons remarqué que peu de recherches ont été menées sur ce concept, et seulement des cas particuliers ont été étudiés ($j = 1$ et $k = 2$, et $j = 1$ et k quelconque), mais le cas général n'a jamais été traité.

Notre étude s'est focalisée sur deux axes principaux. Pour le premier axe, nous avons établi quelques propriétés sur les $[j, k]$ -ensembles disjoints, puis nous avons donné une condition nécessaire et suffisante pour les graphes scindés G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) = n$. Puisque la caractérisation des graphes G d'ordre n tels que $\gamma_{[j,k]}(G) \in \{n, n-1\}$ semble difficile, nous nous sommes restreints aux cas particuliers lorsque $k \in \{\Delta, \Delta-1, \Delta-2\}$. Nous avons également énoncé des conditions suffisantes pour les graphes G d'ordre n ayant $\gamma_{[j,k]}(G) < n$. Ensuite, Nous avons montré que le problème de décision correspondant au problème de la détermination du nombre de $[j, k]$ -domination, pour tout entier j et k avec $2 \leq j \leq k$, est $\mathcal{NP}$ -complet, pour les graphes bipartis. Pour le deuxième axe, nous nous sommes penchés sur les $[j, k]$ -ensembles indépendants, où nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour leur existence dans un graphe quelconque, et nous avons caractérisé aussi les graphes scindés admettant un $[j, k]$ -ensembles indépendant. Par ailleurs, des bornes sur $\alpha_{[1,k]}(G)$ et $i_{[1,k]}(G)$, ainsi que des relations de type Nordhaus-Gaddum sur $\alpha_{[1,k]}(G)$ ont été établies. Nous avons fourni aussi une caractérisation des graphes extrémaux atteignant ces bornes. Enfin, nous avons montré la $\mathcal{NP}$ -complétude

du problème de décision associé à la détermination de $\alpha_{[1,k]}(G)$ pour les graphes bipartis et triangulés.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives pour de futurs travaux, en particulier nous proposons ce qui suit :

1. Quels sont les graphes G d'ordre n vérifiant $\gamma_{[j,k]}(G) = n$?
2. Existe-t-il un algorithme linéaire pour déterminer $\gamma_{[j,k]}$ pour tout arbre T ?
3. Peut-on borner $\gamma_{[j,k]}(G) + \gamma_{[j,k]}(\overline{G})$?
4. Peut-on caractériser les arbres T tels que $\gamma_j(T) = \gamma_{[j,k]}(T)$ avec $k < \Delta(T)$?
5. Peut-on déterminer des conditions nécessaires pour un graphe G admettant un $[1, k]$ -ensemble indépendant ?
6. Peut-on caractériser les graphes G ayant des $[1, k]$ -ensembles indépendants ?
7. Peut-on déterminer les bornes inférieures et supérieures sur $i_{[1,k]}(G)$ et $\alpha_{[1,k]}(G)$ pour les graphes G ?
8. Peut-on caractériser les arbres T tels que $i_{[1,2]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T)$?

Bibliographie

- [1] R. B. Allan and R.C. Laskar, *On domination and independent domination numbers of a graph*. Discrete Math. 23 (1978) 73–76.
- [2] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, L.H. Host and P.J. Slater, *Generalized domination and efficient domination in graphs*. Discrete Math. 159 (1996) 1–11.
- [3] D.W. Bange, A.E. Barkauskas and P.J. Slater, *Efficient dominating sets in graphs*. R. D. Ringeisen and F.S. Roberts, editors, Applications of Discrete Math. SIAM, Philadelphia, PA (1988) 189–199.
- [4] F. Beggas, V. Turau, M. Haddad and H. Kheddouci, *$[1, 2]$ -Domination in generalized Petersen graphs*. Discrete Math. Algorithms and Appl. 11 (5) (2019) 1950–1958.
- [5] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North Holland, Amsterdam, 1973.
- [6] A. Bertossi, *Dominating set for split and bipartite graphs*. Inform. Process. Lett., 19 (1984) 37– 40.
- [7] T. Beyer, A. Proskurowski, S. Hedetniemi and S. Mitchell, *Independent domination in trees*. Congr. Numer. XIX (1977) 321–328.
- [8] N. Biggs, *Perfect codes in graphs*. J Comb. Theory (Ser. B) 15 (1973) 289–29.
- [9] A. Bishnu, K. Dutta, A. Gosh and S. Pual, *$[1, j]$ -set problem in graphs*. Discrete Math. 339 (2016) 2215–2525.
- [10] K.S. Booth and J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput. 11 (1982) 191–199.

- [11] A. Bouchou, M. Chellali and M. Zemir, *On independent $[1, k]$ -set in graphs*. Soumis.
- [12] B. Chaluvvaraju, M. Chellali and K.A. Vidya, *Perfect k -domination in graphs*. Austral. J. Combin. 48 (2010) 175–184.
- [13] M. Chang and Y. Liu, *Polynomial Algorithms for the Weighted Perfect Domination Problems on Chordal Graphs and Split Graphs*. Inf. Process. Lett. 48.4 (1993) 205–210.
- [14] G. Chang and G. L. Nemhauser, *the k -domination and k -stability problems in sun-free chordal graphs*. SIAM J. Algebraic Discrete Methods 5 (1984) 332–345.
- [15] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, *k -Domination and k -Independence in Graphs : A Survey*. Graphs and Combinatorics 28 (2012) 1–55.
- [16] M. Chellali, O. Favaron, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and A. McRae, *Independent $[1, k]$ -sets in graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 59 (1) (2014) 144–156.
- [17] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and A. McRae, *$[1, 2]$ -sets in graphs*. Disc. Appl. Math., 161 (18) (2013) 2885–2893.
- [18] E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi, *A linear algorithm for the domination number of a tree*. Inform. Process. Lett., 4 (2) (1975) 41–4.
- [19] E. Cockayne, B.L. Hartnell, S.T. Hedetniemi and R. Laskar, *Perfect domination in graphs*. J. Combin. Inform. System Sci. 18 (1993) 136–148.
- [20] E. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*. Networks 7 (1977) 247–261.
- [21] S. Cook, *The complexity of theorem proving procedures*. Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 22 (1) (1971) 151–158.
- [22] D. Corneil and Y. Perl, *Clustering and domination in perfect graphs*. Discrete Appl. Math. 9 (1984) 27–39.
- [23] D.E. Daykin and C.P. Ng, *Algorithms for generalized stability number of tree graphs*. J. Austral. Math. Soc., 6 (1994) 89–100.

- [24] A.K. Dewdney, *Fast turning reductions between problems in $\mathcal{NP}$, chapter 4; reductions between $\mathcal{NP}$ -compet problems*. Technical report 71, Dep. Computer Science, Univ. Western Ontario, 1981.
- [25] J.E. Dunbar, F.C. Harris Jr, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A. McRae and R.C. Laskar, *Nearly perfect sets in graphs*. Discrete Math. 138 (1995) 229–246.
- [26] J. Edmonds, *Paths trees and flowers*. Canad. J. Math. 17 (1965) 449–467.
- [27] J.F. Fink and M.S. Jacobson, *n-domination in graphs*. Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. John Wiley and Sons, New York (1985) 283–300.
- [28] J. F. Fink and M. S. Jacobson, *n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs*. Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. John Wiley and Sons, New York (1985) 301–311.
- [29] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards, A brief survey, in Graph Theory, Combinatorics and Applications : Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*. vol.1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507–528.
- [30] G.H. Fricke, S.T. Hedetniemi and D.P. Jacobs, *Independence and Irredundance in k-regular graphs*. Ars Combin., 49 (1998) 271–279.
- [31] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of $\mathcal{NP}$ -Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [32] F. Gavril, *Algorithms for minimum colorings, maximum clique, minimum coverings by cliques, and maximum independent set of a chordal graph*. SIAM J. Compu. 1 (1972) 180–187.
- [33] N. Ghareghani, I. Peterin and P. Sharifani, *$[1, k]$ -domination number of lexicographic products of graphs*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 44 (2021) 375–392.

- [34] D.L. Grinstead and P.J. Slater, *A recurrence template for several parameters in series-parallel graphs*. Discrete Appl. Math. 54 (1994) 151–168.
- [35] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, *Topics in Domination in Graphs*. Developments in Mathematics 64 (2020).
- [36] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, *Structures of Domination in Graphs*. Developments in Mathematics 66 (2021).
- [37] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, *Domination in Graphs : Core Concepts*. Springer Monographs in Mathematics 2023.
- [38] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [39] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Domination in Graphs : Advanced Topics*. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [40] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86 (1990) 3–9.
- [41] G. Hickey, F. Dehne, A. Rau-Chaplin and C. Blouin, *SPR distance computation for unrooted trees*. Evolutionary Bioinformatics Online 4 (2008) 17–27.
- [42] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*. Petrograde 1862.
- [43] R.E. Ladner, *On the structure of polynomial time reducibility*. Journal of the ACM, 22 (1) (1975) 151–171.
- [44] C.C. LU and C.Y. Tang, *Weighted efficient domination problem on some perfect graphs*. Disc. Appl. Math., 117 (2002) 163–182.
- [45] M.A. Meybodi, F.V. Fomin, A.E. Mouawad and F. Panolan, *On the parameterized complexity of $[1, j]$ -domination problems*. Theoretical Computer Science 804 (2020) 207–218.
- [46] O. Ore, *theory of graphs*. Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).
- [47] X. Yang and B. Wu, *$[1, 2]$ -domination in graphs*. Disc. Appl. Math., 175 (2014) 79–86.

- [48] C. Yen and R.C.T. Lee, *The weighted perfect domination problem*. Inform. Process. Lett. 35 (1990) 295–299.
- [49] C.C. Yen and R.C.T. Lee, *The weighted perfect domination problem and its variants*. Discrete Applied Mathematics 66.2 (1996) 147–160.
- [50] M. Zemir, A. Bouchou and M. Chellali, *On $[j, k]$ -sets in graphs*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 45 (2022) 3225–3237.
- [51] X. Zhang, Z. Shao and H. Yang, *The $[a, b]$ -domination and $[a, b]$ -total domination of graphs*. Journal of Mathematics Research 9 (3) (2017) 38–45.