

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème :

Étude des invariants d'alliance dans quelques classes de graphes

Par

Mohamed BOUZEFRANE

Devant le jury composé de :

Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université de Blida 1	Président
Isma BOUCHEMAKH, Professeur à L'U.S.T.H.B, Alger	Directrice de Thèse
Sadek BOUROUBI, Professeur à l'U.S.T.H.B, Alger	Examineur
Ahmed BOUCHOU, M.C.A à l'Université de Médéa	Examineur
Samia KERDJOU DJ, M.C.A à l'Université de Blida 1	Examinatrice
Nacéra MEDDAH, M.C.A à l'Université de Blida 1	Examinatrice

Blida, 2023

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1.	Un graphe simple d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 8$.	14
FIGURE 1.2.	Un graphe G avec $pn[v_2, S] = \{v_1\}$	14
FIGURE 1.3.	Un graphe G avec $\Delta(G) = 3 = d(u)$, $\delta(G) = 1 = d(z)$, $S(G) = u$ et $L(G) = z$.	15
FIGURE 1.4.	Une chaîne simple P_5 et un cycle C_5 .	16
FIGURE 1.5.	Un graphe G et sous-graphe induit par $A = \{a, b, c, d\}$ et son graphe partiel H .	16
FIGURE 1.6.	Un graphe G et son complémentaire \overline{G} .	17
FIGURE 1.7.	Une clique K_5 .	18
FIGURE 1.8.	Un graphe biparti complet $K_{3,4}$	18
FIGURE 1.9.	Un graphe de blocs	19
FIGURE 1.10.	Un arbre T d'ordre $n = 15$, $ L(T) = 8$ et $ S(T) = 4$.	19
FIGURE 1.11.	Une forêt à 4 composantes connexes.	19
FIGURE 1.12.	Un étoile, une double étoile et une chenille	20
FIGURE 1.13.	Un graphe cactus	20
FIGURE 1.14.	Un graphe unicycle	20
FIGURE 1.15.	La couronne $C_6 \circ K_1$.	21
FIGURE 1.16.	Une étoile subdivisée	21
FIGURE 1.17.	Une araignée blessée	21
FIGURE 2.1.	Un arbre T avec $a(T) = 1$ et $\hat{a}(T) = 2$	26
FIGURE 2.2.	Un unicycle G avec $\gamma_a(G) = 2$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$	27
FIGURE 2.3.	Un $S_{2,2}$ avec $o(S_{2,2}) = 2$ et un $S_{3,3}$ avec $\hat{o}(S_{3,3}) = 3$	28
FIGURE 2.4.	Un $S_{2,2}$ avec $\gamma_o(S_{2,2}) = 2$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{2,2}) = 5$	29
FIGURE 2.5.	Un arbre T avec $\gamma_{ap}(T) = 8$.	29
FIGURE 2.6.	Un arbre de la famille \mathcal{F}	33
FIGURE 2.7.	Un arbre de la famille \mathcal{G} .	40
FIGURE 2.8.	Un arbre T avec $\gamma_o(T) = 5 > \gamma_a(T) = 4$	40

LISTE DES FIGURES—*Continued*

FIGURE 2.9.	Un arbre T avec $\gamma_o(T) = \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$	41
FIGURE 2.10.	Un graphe G avec un $\gamma_o^2(G)$ -ensemble et un arbre T avec un $\gamma_a^2(T)$ -ensemble	42
FIGURE 3.1.	Deux graphes unicycles avec $\gamma_o(G) = \frac{n-l+s}{3}$	49
FIGURE 3.2.	La famille \mathcal{G}_0	54
FIGURE 5.1.	Un arbre T avec $\gamma_o(T) = 4$, $\gamma_a(T) = 5$ et $\gamma_{ap}(T) = 6$	71
FIGURE 5.2.	L'arbre T' de la preuve du Théorème 5.4, Cas 1.	74
FIGURE 5.3.	Graphe illustratif de la preuve du Théorème 5.4, Cas 1	74
FIGURE 5.4.	Graphe illustratif du Sous cas 2.1.	76
FIGURE 5.5.	Graphe illustratif du Sous cas 2.2 où $T' = T - \{w_0\}$	76
FIGURE 5.6.	Graphe illustratif du Théorème 5.7 où $T' = T - T_{u_1}$	79
FIGURE 5.7.	Graphe illustratif du Fait 5.11	81
FIGURE 5.8.	Graphe illustratif du Fait 5.14 (a) et (b)	82
FIGURE 5.9.	Graphe illustratif du Fait 5.14 où $ N[u_3] \cap D = N[u_3] - D $	83

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	2
RÉSUMÉ	7
ABSTRACT	8
REMERCEMENTS	9
INTRODUCTION	10
CHAPITRE 1. NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHS	13
1.1. Définitions et notations	13
1.1.1. Définition d'un graphe :	13
1.1.2. Voisinage	14
1.1.3. Degré d'un sommet	14
1.1.4. Chaîne, cycle, distance, diamètre	15
1.1.5. Graphe partiel et sous graphe	16
1.1.6. Clique et stable	16
1.2. Quelques classes de graphes	17
1.2.1. Graphe complémentaire d'un graphe	17
1.2.2. Graphe régulier	17
1.2.3. Graphe complet	17
1.2.4. Graphe <i>k-parti</i>	17
1.2.5. Graphe connexe	18
1.2.6. Graphe blocs	18
1.2.7. Arbre, unicycle, cactus et couronne d'un graphe	19
1.2.8. Subdivision d'un graphe	21
1.3. Aperçu sur la domination dans les graphes	21
1.3.1. Quelques types de domination	22

CHAPITRE 2. ÉTAT DE L'ART SUR LES ALLIANCES DANS LES GRAPHS	24
2.1. Vue historique et application des alliances	24
2.2. Types d'alliances	25
2.2.1. Alliances défensives	25
2.2.2. Alliances offensives	28
2.2.3. Alliances puissantes	29
2.3. Bornes sur $\gamma_a, \gamma_{\hat{a}}, \gamma_o, \gamma_{\hat{o}}$ et $\gamma_{ap}(G)$	30
2.3.1. Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$	30
2.3.2. Bornes supérieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$	31
2.3.3. Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$	32
2.3.4. Bornes sur $\gamma_{ap}(G)$ et $a_p(G)$	34
2.4. Relations entre $\gamma_a, \gamma_{\hat{a}}, \gamma, \gamma_o, \gamma_{\hat{o}}, \beta_0, \gamma_2$ et i	34
2.4.1. Relations entre $\gamma_a, \gamma_{\hat{a}}$ et β_0 dans les arbres	34
2.4.2. Relations entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$	36
2.4.3. Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$	37
2.4.4. Relations entre $\gamma_o, \gamma_{\hat{o}}, \beta_0, i$ et γ_2 dans les arbres	37
2.4.5. Relations entre $\gamma_a(G)$ et $\gamma_o(G)$	40
2.4.6. Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$	41
2.5. Généralisation des alliances	42
2.5.1. k-alliances	42
2.5.2. Bornes supérieures sur γ_o^k	43
2.5.3. Bornes inférieures sur γ_o^k	43
2.5.4. Bornes sur γ_a^k	44
2.5.5. Partition en alliance	44
CHAPITRE 3. ALLIANCES OFFENSIVES GLOBALES DANS	
LES GRAPHS UNICYCLES	46
3.1. Borne inférieure du nombre γ_o pour les unicycles	46
3.2. Graphes unicycles avec $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$	54

CHAPITRE 4. CARACTERISATION DES ARBRES AYANT UNE	
ALLIANCE OFFENSIVE GLOBAL MINIMUM UNIQUE	58
4.1. Ensemble minimum unique par rapport à un paramètre de domination pour	
quelques classes de graphes	58
4.2. Résultats principaux	63
4.2.1. Construction de la famille \mathcal{F}	63
4.3. Caractérisation des <i>aogu</i> -arbres	65
4.4. Algorithme pour tester si un arbre T appartient à \mathcal{F}	69
CHAPITRE 5. ALLIANCES PUISSANTES GLOBALES DANS LES AR-	
BRES	71
5.1. Quelques résultats sur le nombre d'alliance puissante globale.	71
5.2. Borne inférieure du nombre d'alliance puissante globale pour les arbres . .	72
5.3. Arbres avec $\gamma_{ap}(T) = \frac{3n-2l-s+2}{5}$	77
5.3.1. Résultats préliminaires	77
5.3.2. Résultat principal	78
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	85

RÉSUMÉ

Dans cette thèse nous nous intéressons essentiellement au concept des alliances globales dans les graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E . Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Un ensemble dominant S est une alliance offensive globale (*aog*) si pour tout sommet v dans $V - S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$, et il est une alliance offensive globale *forte* (*aogf*) si l'inégalité est *stricte*. S est une alliance défensive globale (*adg*) si pour tout sommet v dans S , $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$, et il est une alliance défensive globale *forte* (*adgf*) si l'inégalité est *stricte*. On dit que S est une alliance puissante globale ou duale (*apg*) s'il est à la fois une (*aog*) et une (*adg*). Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G et le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_o(G)$) est le cardinal minimum d'une (*aog*) (respectivement, (*aogf*)) de G . Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_a(G)$) est le cardinal minimum d'une (*adg*) (respectivement, (*adgf*)) de G . Le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ est le cardinal minimum d'une (*apg*) de G .

L'étude de cette thèse comprend trois parties:

Dans la première partie, nous montrons que tout graphe unicycle G d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets support satisfait $\gamma_o(G) \geq (n - \ell + s)/3$. De plus nous caractérisons les graphes unicycles extrémaux atteignant cette borne inférieure.

Dans la deuxième partie, nous donnons une caractérisation constructive de tous les arbres ayant une alliance offensive globale minimale unique (*aogu*-arbres).

Dans la troisième partie, nous montrons que tout arbre T d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports satisfait $\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2\ell - s + 2)/5$. De plus nous caractérisons tous les arbres extrémaux atteignant cette borne inférieure

ABSTRACT

In this thesis, we are mainly interested in the concept of global alliances in graphs.

Let $G = (V, E)$ be a simple graph, with vertex set V and edge set E . A subset $S \subseteq V$ is a dominating set of G if every vertex of $V - S$ is adjacent to some vertex of S . A dominating set S is called a global offensive alliance (*goa*) of G if every vertex v in $V - S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$ and it is a global strong offensive alliance (*gs oa*) of G if the inequality is strict. S is a global defensive alliance (*gda*) of G if every vertex v in S , $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$ and it is a strong defensive alliance if the inequality is strict. We say that S is a global powerful alliance or dual (*gpa*) if it is both defensive and offensive. The domination number $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set of G and the global offensive alliance number $\gamma_o(G)$ (respectively, the global strong offensive alliance number $\gamma_{\hat{o}}(G)$) is the minimum cardinality of (*goa*) (respectively, (*gs oa*)) of G . The global defensive alliance number $\gamma_a(G)$ (respectively, the global strong defensive alliance number $\gamma_{\hat{a}}(G)$) is the minimum cardinality of (*gda*) (respectively (*gs da*)) of G . The global powerful alliance number $\gamma_{ap}(G)$ is the minimum cardinality of (*gpa*) of G .

The study of this thesis is divided into three parts:

In the first part, we show that if G is connected unicycle graph of order n with $l(G)$ leaves and $s(G)$ support vertices then $\gamma_o(G) \geq (n - l + s)/3$. Moreover, we characterize all extremal unicycle graphs attaining this bound.

In the second part, we give a constructive characterization of all trees having a unique minimum global offensive alliance (*ugoa-trees*).

In the third part, we show that if T is a tree of order n with l leaves and s support vertices, then $\gamma_{ap}(T) \geq (3n - 2l - s + 2)/5$. Moreover, we provide a constructive characterization of all extremal trees attaining this bound.

ملخص

في هذه الأطروحة نحن مهتمون بشكل رئيسي بفكرة التحالفات العالمية في الرسوم البيانية

ليكن $G = (V, E)$ رسم بياني بسيط مع V مجموعة رؤوس و E مجموعة أضلاع, تحت المجموعة $S \in V$ هي مجموعة مهيمنة من G إذا كان كل رأس من $V - S$ مجاور لبعض رؤوس S . مجموعة مهيمنة S من G تسمى تحالف هجومي عالمي (hog) إذا كان كل رأس من $V - S$ يحقق $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$ و يسمى تحالف هجومي عالمي قوي ($hogf$) إذا كانت المتراحة أكبر تماما. S تسمى تحالف دفاعي عالمي (adg) إذا كان كل رأس V من S يحقق $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$ و يسمى تحالف دفاعي عالمي قوي ($adgf$) إذا كانت المتراحة أكبر تماما. نقول أن S تحالف عالمي قوي كليا إذا كان هجومي و دفاعي في نفس الوقت. رقم الهيمنة $\gamma(G)$ هو العدد الأدنى لمجموعة مهيمنة من G , و رقم التحالف الهجومي العالمي $\gamma_o(G)$ (على التوالي رقم التحالف الهجومي العالمي القوي $\gamma_o(G)$) هو العدد الأدنى ل (hog) (على التوالي ($hogf$)) ل G . و رقم التحالف الدفاعي العالمي $\gamma_a(G)$ (على التوالي رقم التحالف الدفاعي العالمي القوي $\gamma_a(G)$) هو العدد الأدنى ل (adg) (على التوالي ل ($adgf$)). رقم التحالف العالمي القوي كليا $\gamma_{ap}(G)$ هو العدد الأدنى ل (apg) ل G .

و تنقسم دراسة هذه الأطروحة إلى ثلاثة أجزاء :

الجزء الاول, نبين انه من اجل كل رسم بياني أحادي الحلقة G رتبته n مع L ورقة و S رأس داعم يحقق $\gamma_o(G) \geq (n - L + S)/3$ و أيضا نعطي توصيفا للرسوم البيانية أحادية الحلقة التي تحقق الحد الأدنى.

في الجزء الثاني نعطي توصيفا تركيبيا لجميع الأشجار التي لديها تحالف هجومي عالمي وحيد ($oagu$ -أشجار).

في الجزء الثالث نبين انه إذا كانت T شجرة ذات رتبة n و L ورقة و S رؤوس داعمة تحقق $\gamma_{ap}(G) \geq (3n - 2L + S + 2)/5$ إضافة إلى ذلك نقدم وصفا لجميع الأشجار التي تصل إلى هذا الحد.

REMERCEMENTS

En premier lieu et tout d'abord, je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à ma directrice de thèse, Madame *Isma BOUCHEMAKH*, Professeur à l'*U.S.T.H.B.*, d'avoir accepté d'être ma directrice de thèse ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, ses encouragements et pour la pertinence de ses conseils avec lesquels elle a su me guider.

Je remercie vivement Monsieur *Mustapha CHELLALI*, Professeur à l'Université de Blida 1, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens également à remercier, Monsieur *Sadek BOUROUBI*, Professeur à l'USTHB, Monsieur *Ahmed BOUCHOU*, Maître de Conférences à l'Université de Médéa, Madame *Nacéra MEDDAH*, Maître de Conférences à l'Université de Blida 1, ainsi que Madame *Samia KERDJOUJ* Maître de Conférences à l'Université de Blida 1, qui m'ont aidé à perfectionner ce manuscrit et qui m'ont honoré en acceptant d'être des membres de ce jury et examinateurs de ma thèse.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille, mon père et ma mère, mes frères et soeurs, à ma femme nacéra pour son soutien quotidien indéfectible, à mes enfants sirine, ranime, israa et nouh, à mes amis qui m'ont toujours encouragé tout au long de la réalisation de cette thèse.

A tous merci,

Mohamed BOUZEFRANE

INTRODUCTION

La théorie des graphes est un outil privilégié de modélisation et de résolution de problèmes dans un grand nombre de domaines allant de la science fondamentale aux applications technologiques concrètes. Par exemple, les graphes déterministes et aléatoires sont utilisés en chimie (modélisation de structure), en sciences sociales (pour représenter des relations entre groupes d'individus), en mathématiques, en informatique (structures de données et algorithmique). Concernant les applications, elles sont très nombreuses : réseaux électriques et transport d'énergie, routage du trafic dans les réseaux de télécommunications et les réseaux d'ordinateurs, routage de véhicules et organisation de tournées, problèmes de localisation (localisation d'entrepôts dans les réseaux de distribution de marchandises, d'antennes ...), problèmes d'ordonnancement de tâches et d'affectation de ressources (problèmes de rotation d'équipages dans les compagnies aériennes).

On considère que l'apparition des graphes remonte à Euler qui, en 1736, a étudié le fameux problème des ponts de Königsberg (actuelle ville de Kalinigrad) : "Peut-on se promener dans la ville en traversant une et une seule fois chacun des sept ponts de la ville?" et de revenir au point de départ. La solution de ce problème a permis de définir la notion de cycle eulérien et a donné lieu à un théorème d'existence d'un tel cycle dans un graphe donné. De nos jours, ce résultat est appliqué notamment dans l'industrie pour la conception de circuits électroniques.

De nombreux résultats sont apparus dans la seconde partie du *XIX*^{ème} siècle, notamment en raison des applications en électricité (lois de Kirschoff...).

Parmi Les mathématiciens le plus connu pour la théorie des graphes est Claude Berge (1926 – 2002), également un des membres fondateurs de l'Oulipo, à qui on doit une bonne partie du vocabulaire de la théorie de graphes.

Parmi les problèmes les plus connus en théorie des graphes, on peut citer les problèmes de domination dans les graphes. En 1862, De Jaenisch [22] posa le problème qui consiste à déterminer le nombre minimum des reines qui peuvent être placées sur un échiquier de sorte que chaque case de l'échiquier est attaquée ou "dominée" par au moins l'une des

reines. D'autres applications de la domination dans la théorie des graphes sont utilisées dans divers domaines tels que la communication, la théorie des réseaux, la théorie du codage. De ce fait, l'étude de la domination dans les graphes a reçu beaucoup d'attention ces dernières années. La théorie de la domination dans les graphes a été formellement introduite par Berge [1] en 1958.

En 1962, Ore [57] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connu sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [20]. Les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [48, 49] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années. En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson [34] ont introduit la k -domination dans les graphes qui est une généralisation de la domination dans les graphes.

Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensemble S a au moins un voisin dans S . Parmi ces variantes, il y a les alliances dans les graphes, des paramètres de domination introduits en 2002 par Kristiansen et al. [55]

Dans cette thèse, on s'intéresse principalement à l'étude des invariants d'alliances globales dans quelques classes de graphes. Après une introduction, la thèse s'articule autour de cinq chapitres qui sont organisés comme suit:

Chapitre 1 : Définitions de base et notations

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les notions de base de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de cette thèse. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

Chapitre 2 : Etat de l'art sur les alliances dans les graphes

Dans ce chapitre, nous exposons un état de l'art sur les différents types d'alliances dans les graphes en rappelant les principaux résultats existants dans la littérature.

Chapitre 3 : Alliances offensives globales dans les graphes unicycles

Dans ce chapitre, nous montrons que si G est un graphe unicycle connexe d'ordre n avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets supports alors $\gamma_o(G) \geq \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. De plus, nous caractérisons tous les graphes unicycles extrémaux atteignant cette borne.

Chapitre 4 : Caractérisation des arbres ayant une unique alliance offensive globale minimum (*aogu*)

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination de la structure des arbres qui sont des *aogu*-arbres.

Nous traitons la préservation de la propriété de l'arbre *aogu* après avoir effectué une opération dessus. Suite à cela, nous fournissons une caractérisation constructive de l'arbre *aogu*. Enfin, nous concluons en posant quelques problèmes qui nous paraissent intéressants.

Chapitre 5 : Alliances puissantes globales dans les arbres

Dans ce dernier chapitre, nous montrons que si T est un arbre d'ordre n avec l feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l(T)-s(T)+2}{3}$. De plus, nous fournissons une caractérisation constructive de tous les arbres extrémaux atteignant cette borne.

La thèse s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés. Nous proposons quelques perspectives de recherches dans le domaine des alliances dans les graphes.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHES

Dans ce chapitre, nous introduisons les définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles tout au long de cette thèse. Ces notions sont standards et peuvent être retrouvées dans [1], [48] et [49].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Définition d'un graphe :

Un *graphe* G est la donnée d'un couple $(V(G), E(G))$ où $V(G)$ est un ensemble non vide, appelé ensemble de sommets de G et $E(G)$ est l'ensemble des paires de sommets, appelées *arêtes de G* . Un graphe est fini si l'ensemble de ses sommets est fini. L'*ordre* de G , noté par n , est le cardinal de $V(G)$, et la *taille* de G , notée par m est le cardinal de $E(G)$. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules: u, v, x, y, a, b , etc. Les arêtes sont notées par uv, xy, ab , etc. Deux sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins* s'ils sont reliés par une arête. Deux arêtes distinctes sont dites *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité commune. Une arête e sera dite *incidente* à un sommet v si v est une extrémité de e .

Un graphe *simple* est un graphe dont toute paire de sommets sont reliés par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis.

Pour l'exemple de la Figure 1.1, $G = (V(G), E(G))$ est un graphe d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 8$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $E(G) = \{ab, ac, bc, be, cd, de, eg, ef\}$.

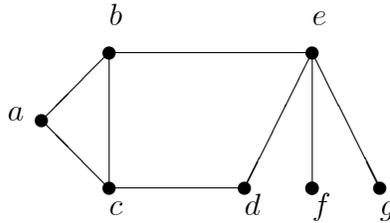


Figure 1.1: Un graphe simple d'ordre $n = 7$ et de taille $m = 8$.

1.1.2 Voisinage

Pour un sommet v de G , le *voisinage ouvert* de v est $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, et le *voisinage fermé* de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le *voisinage ouvert* de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et le *voisinage fermé* de S est $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[v]$.

Pour le graphe $G = (V(G), E(G))$ de la Figure 1.1, le voisinage ouvert du sommet c est $N_G(c) = \{a, b, d\}$ et son voisinage fermé est $N_G[c] = \{a, b, c, d\}$

Le *voisinage privé* d'un sommet $v \in S$ par rapport à S est l'ensemble, noté $pn[v, S]$, des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas de voisins dans S autre que v , i.e, $pn[v, S] = \{u \in V(G) : N_G[u] \cap S = \{v\}\}$.

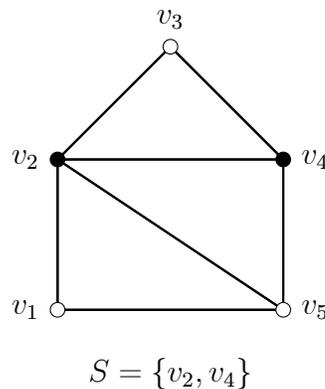


Figure 1.2: Un graphe G avec $pn[v_2, S] = \{v_1\}$

1.1.3 Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet $v \in V(G)$, noté $deg_G(v)$ ou $d_G(v)$, est le cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit *isolé* et un sommet de degré un est dit *pendant* ou

feuille. On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G . Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet *support* et l'ensemble des sommets supports de G sera noté par $S(G)$. On note par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le *degré minimum* et *maximum* dans G , respectivement.

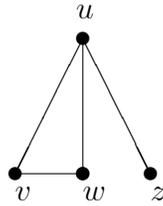


Figure 1.3: Un graphe G avec $\Delta(G) = 3 = d(u)$, $\delta(G) = 1 = d(z)$, $S(G) = u$ et $L(G) = z$.

1.1.4 Chaîne, cycle, distance, diamètre

- Une *chaîne* dans un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que pour tout $1 \leq i \leq k - 1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G)$. L'entier $k - 1$ représente la *longueur* de la chaîne (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés *extrémités* de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite *élémentaire*.
- Un cycle est une chaîne dont les extrémités sont confondues.
- Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne.
- Une chaîne *minimale* induite par n sommets, notée par $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, est une chaîne élémentaire sans corde.
- Un *cycle élémentaire* d'ordre n est noté C_n .
- Soient u et v deux sommets d'un graphe G . On appelle *distance* entre u et v , notée $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . L'*excentricité* d'un sommet v dans G est $exc(v) = \max\{d_G(v, w) : w \in V(G)\}$.

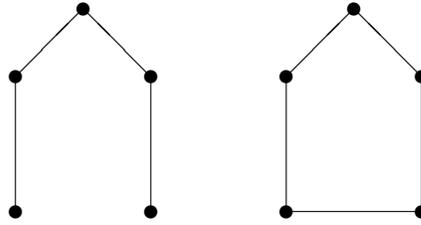


Figure 1.4: Une chaîne simple P_5 et un cycle C_5 .

- Le *diamètre* de G , noté $diam(G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V(G)\}$. Le *centre* est l'ensemble de tous les sommet de G ayant une excentricité minimum.

1.1.5 Graphe partiel et sous graphe

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Un graphe H est dit un *graphe partiel* de G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Pour un sous ensemble de sommets non vide $A \subseteq V(G)$, le sous graphe $H = (A, E_A)$ induit par A dans G , noté par $\langle A \rangle_G$ ou $G[A]$, est un graphe dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arêtes est $E_A = \{uv \in E(G) : u, v \in A\}$. La Figure 1.4 illustre ces deux définitions.

Pour les sous-ensembles A et B de $V(G)$, on note par $m(A, B)$ le nombre d'arêtes reliant les sommets de A aux sommets de B , et par $m(A)$ le nombre d'arêtes du sous-graphe $G[A]$.

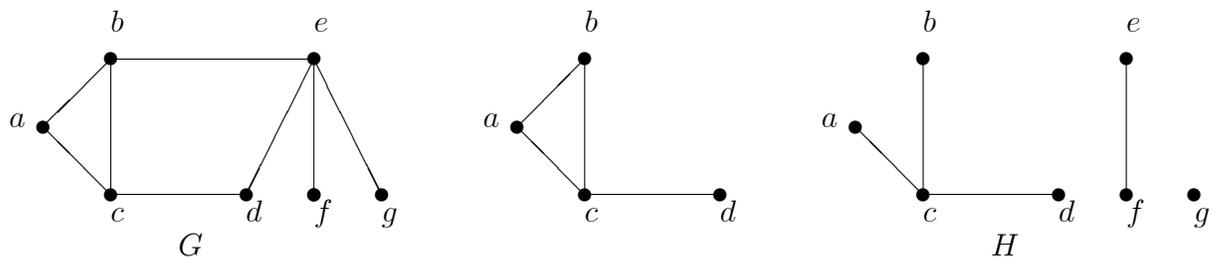


Figure 1.5: Un graphe G et sous-graphe induit par $A = \{a, b, c, d\}$ et son graphe partiel H .

1.1.6 Clique et stable

Une *clique* dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, est un sous ensemble de sommets deux à deux adjacents.

Un *stable* dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, appelé aussi, *ensemble indépendant*, est un sous ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

1.2 Quelques classes de graphes

1.2.1 Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire de G , noté \overline{G} , est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête $uv \in E(\overline{G})$ si et seulement si $uv \notin E(G)$. Voir la Figure 1.5 qui illustre un graphe G et son complémentaire \overline{G} .

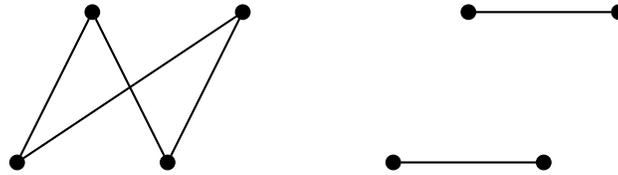


Figure 1.6: Un graphe G et son complémentaire \overline{G} .

1.2.2 Graphe régulier

Un graphe G est dit *d-régulier* si chaque sommet de G a un degré égal à d .

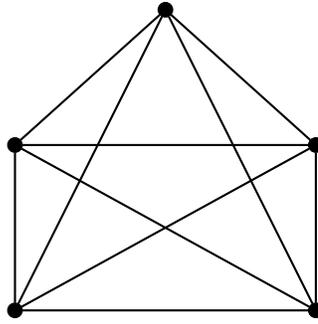
1.2.3 Graphe complet

Un graphe *complet* d'ordre n , noté K_n , est un graphe $(n - 1)$ -régulier. Voir un exemple de K_5 dans la Figure 1.6.

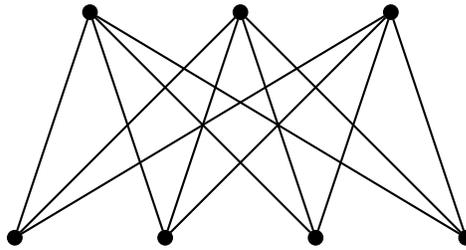
1.2.4 Graphe *k-parti*

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *k-parti*, pour un entier $k \geq 2$, s'il existe une partition de $V(G)$ en k sous-ensembles stables V_1, V_2, \dots, V_k .

Si $k = 2$ alors le graphe G est dit *biparti*. Un graphe est biparti si et seulement si, il ne contient pas de cycle de longueur impair.

Figure 1.7: Une clique K_5

On appelle graphe *biparti complet*, un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E(G)$. Dans ce cas si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe *biparti complet* est noté $K_{p,q}$. Un exemple du graphe $K_{3,4}$ est illustré dans la Figure 1.7

Figure 1.8: Un graphe biparti complet $K_{3,4}$

1.2.5 Graphe connexe

On dit qu'un graphe G est *connexe* si pour toute paire de sommets distincts u et v de $V(G)$, il existe une chaîne joignant u et v . Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe. Une *composantes connexe* d'un graphe est un sous graphe induit maximal (au sens de l'inclusion) connexe.

1.2.6 Graphe blocs

Un sommet x d'un graphe G est un sommet d'articulation si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Un *bloc* d'un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation.

Un *graphe blocs* G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne possède pas de sommet d'articulation alors G est lui même un bloc. L'intersection de deux blocs contient au plus un sommet. La Figure 1.8, représente un graphe G à 4 blocs.

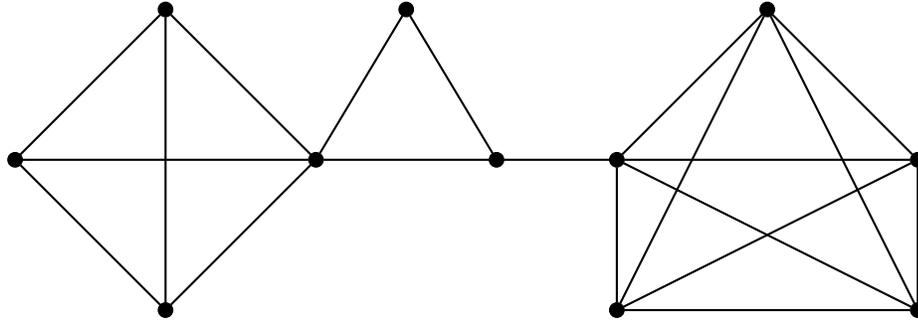


Figure 1.9: Un graphe de blocs

1.2.7 Arbre, unicycle, cactus et couronne d'un graphe

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle (ou acyclique).

Un exemple d'un arbre T est représenté dans la Figure 1.9.

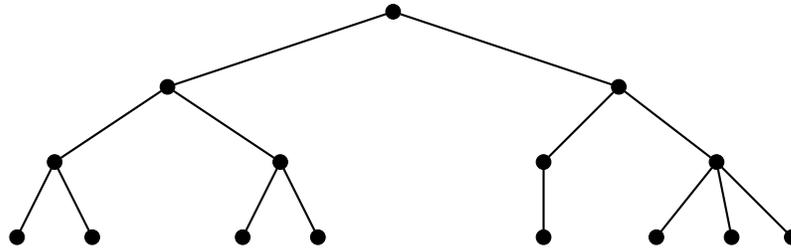


Figure 1.10: Un arbre T d'ordre $n = 15$, $|L(T)| = 8$ et $|S(T)| = 4$.

Une *forêt* est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

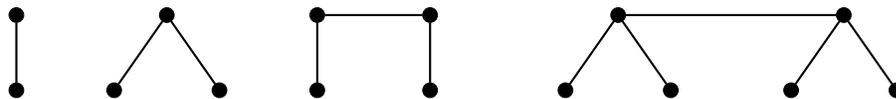


Figure 1.11: Une forêt à 4 composantes connexes.

Une *étoile* d'ordre $n + 1$, est le graphe biparti complet $K_{1,n}$, n est un entier positif. Si $n \geq 2$, le sommet de degré n est le centre de l'étoile, et si $n = 1$, alors les deux sommets de l'étoile sont des centres.

Une *double étoile*, notée $S_{r,s}$, est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres.

Une *chenille* est un arbre tel que si on supprime toutes les feuilles, le graphe résultant est une chaîne.

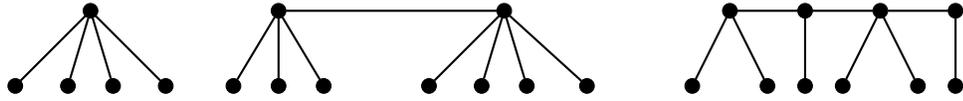


Figure 1.12: Un étoile, une double étoile et une chenille

Un *graphe cactus* G est un graphe où toute arête appartient à au plus un cycle.

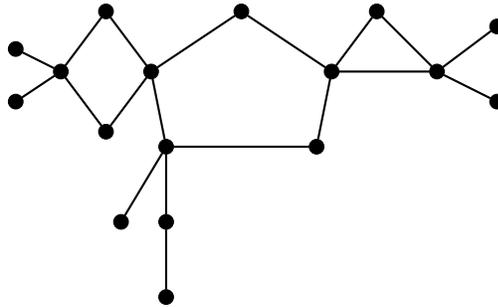


Figure 1.13: Un graphe cactus

Un *graphe cactus* ayant un seul cycle est dit *unicycle*.

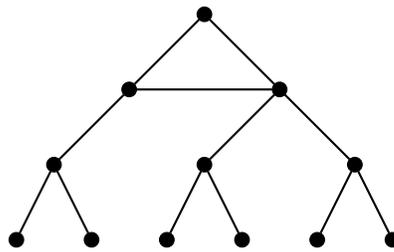
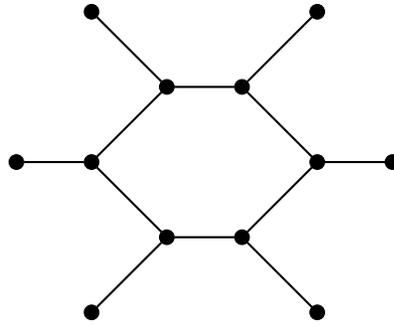


Figure 1.14: Un graphe unicycle

La *couronne* d'un graphe G , notée $G \circ K_1$, est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Pour le cycle C_6 , sa couronne est représentée par le graphe de la Figure 1.14.

Figure 1.15: La couronne $C_6 \circ K_1$.

1.2.8 Subdivision d'un graphe

Une *subdivision* $SS(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et deux arêtes uw et wv .

Voir exemple de la Figure 1.15.

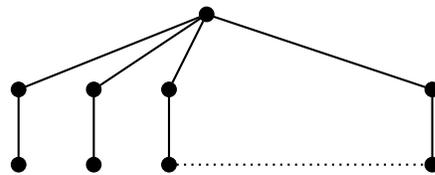


Figure 1.16: Une étoile subdivisée

Une *araignée blessée* est un graphe obtenu en subdivisant au plus $n - 1$ arêtes d'une étoile $K_{1,n}$.

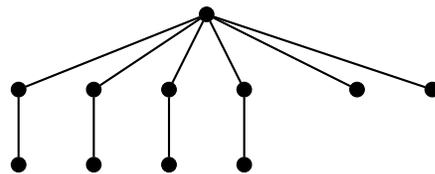


Figure 1.17: Une araignée blessée

1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. On dit qu'un sous-ensemble A de $V(G)$ est *minimal*, (resp, *maximal*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp.,

$B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} .

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de $V(G)$ est *minimum* ou de *taille minimale* (resp, *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} et $|A| > |B|$ (resp, $|B| > |A|$).

Donnons maintenant la définition des ensembles dominants dans les graphes.

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Un sous ensemble S de $V(G)$ est un *dominant* si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S .

Le cardinal minimum d'un *ensemble dominant* de G est appelé *nombre de domination* et il est noté par $\gamma(G)$.

1.3.1 Quelques types de domination

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. On définit le nombre de domination inférieur conditionné $\gamma(G : P)$ comme étant la taille minimum d'un ensemble dominant $S \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par S satisfait la propriété P .

Remarque: $\gamma(G) \leq \gamma(G : P)$ pour toute propriété P .

De nombreux paramètres de domination peuvent être définis en imposant une ou plusieurs conditions à l'ensemble dominant, par exemple imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant:

1. $\langle D \rangle$ soit connexe, produit la *domination connexe*.
2. $\langle D \rangle$ soit sans sommets isolés, produit la *domination totale*.
3. $\langle D \rangle$ soit une clique, produit la *domination clique*.
4. $\langle D \rangle$ soit sans arêtes, produit la *domination stable*.
5. $\langle D \rangle$ soit un cycle, produit la *domination cycle*.
6. $\langle D \rangle$ possède un couplage parfait produit la *domination couplée*.

On peut de même imposer des conditions extérieures, sur la façon de dominer, par exemple, chaque sommet extérieur à D possède au moins k voisins dans D , produit la k -domination.

Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un *dominant double* D est un dominant sans sommet isolé et chaque sommet extérieur à D est dominé par au moins 2 sommets de D .

Les invariants de domination sont nombreux. A titre d'exemples, nous pouvons citer :

- *La domination multiple* : Un sous ensemble S de V est dit dominant multiple (ou k -dominant) de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans D . Le *nombre de domination multiple* (ou *nombre de k -domination*), noté par $\gamma_k(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple de G .

- *La domination connexe* : Un sous ensemble S de $V(G)$ est dit *dominant connexe* de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S est connexe. Le nombre de domination connexe, noté par $\gamma_c(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G .

- *La domination stable* : Un sous ensemble S de $V(G)$ est dit *dominant stable* de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G , noté $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$), est appelé le *nombre de domination stable* (resp. le *nombre de stabilité*) de G .

- *La domination totale* : Un sous ensemble S de V est dit *dominant total* de G si tout sommet de V possède un voisin dans S , i.e, $N(S) = V$. Le *nombre de domination totale* noté, $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G .

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LES ALLIANCES DANS LES GRAPHERS

2.1 Vue historique et application des alliances

Le mot **alliance** peut être défini comme une union ou une association formée pour un bénéfice mutuel, par exemple il peut s'agir : d'un accord ou traité entre deux ou plusieurs nations pour coopérer à des fins spécifiques, une fusion d'efforts ou d'intérêts par des personnes, des familles, des États ou des organisations. Les alliances sont présentées de plusieurs façons dans le monde réel. D'une manière générale, une alliance peut être comprise comme un ensemble d'éléments partageant des objectifs similaires ou ayant des propriétés similaires parmi tous les éléments de la collection. Comme exemples d'alliances, on peut citer:

Groupe de personnes unies par une amitié commune ou par des obligations.

Groupe de plantes appartenant à la même famille botanique.

Groupe d'entreprises partageant le même intérêt économique.

Groupe d'utilisateurs de Twitter suivant ou étant suivi entre eux.

Groupe d'utilisateurs Facebook partageant une activité commune.

Par exemple, Facebook peut être vu comme un énorme réseau (ou graphe) dans lequel chaque utilisateur est un sommet et deux sommets sont connectés s'ils sont "Amis", au sens du système. Avec cette idée, une alliance dans Facebook peut être réalisée comme une collection d'utilisateurs (ou sommets) ayant plus d'amis" à l'intérieur de la collection qu'à l'extérieur. De manière analogue, Twitter peut être compris comme un graphe dans lequel chaque utilisateur est un sommet et deux sommets sont adjacents si au moins l'un d'entre eux suit l'autre. Ainsi, une alliance sur Twitter peut être réalisée comme une collection d'utilisateurs qui suivent (ou sont suivis) plus d'utilisateurs (par plus d'utilisateurs) à l'intérieur de la collection qu'à l'extérieur.

Les alliances dans les graphes ont été introduites par Kristiansen et al. [54] en définissant différents types d’alliances qui ont été largement étudiées au cours de la dernière décennie. Ces types d’alliances sont appelées *alliances défensives* [38], [70], *alliances offensives* [26], [64] et *alliances puissantes ou duales* [11], [12]. Une généralisation de ces alliances, appelée *k-alliances* (ou *r-alliances*), introduites par Shafique et Dutton [66] et [67], a reçu une attention particulière ces dernières années. Dans ce cadre, il y a eu des définitions de nombreux et divers paramètres qui ont été largement étudiés dans le cas des *k-alliances défensives* (offensives, puissantes) et pour différentes classes de graphes.

Les travaux de recherche de Kristiansen et al. [54] sont motivés par l’alliance des nations en guerre pour un soutien mutuel. Ils considèrent deux cas : le premier qui correspond à une *alliance défensive* se réalise lorsque les nations sont obligées de s’unir si un ou plusieurs d’entre eux sont attaqués et le second est une *alliance offensive* qui sert de moyen de maintenir la paix. A titre d’exemple illustratif, l’action des troupes de l’OTAN dans un pays déchiré par la guerre est donnée. Dans le graphe correspondant à cette situation, les *sommets* représentent les nations et les *arêtes* correspondent aux relations possibles (d’amitié ou d’hostilité) entre eux.

Kristiansen et al. [55] ont étudié les propriétés mathématiques des alliances défensives dans les graphes.

Une riche littérature sur les différents paramètres d’alliances peut être trouvée dans les surveys [35], [60] et [70].

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents types d’alliances et leurs variantes avec les paramètres associés en rappelant quelques résultats connus.

2.2 Types d’alliances

Considérons un graphe simple $G = (V(G), E(G))$.

2.2.1 Alliances défensives

Définition 2.1. *Un ensemble non vide de sommets S est dit une alliance défensive si pour chaque sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. Si l’inégalité est stricte alors,*

l'alliance défensive est dite forte.

Utilisons les problèmes de la sécurité nationale pour illustrer ces concepts. On peut penser à un sommet dans une alliance S pouvant se défendre lui-même et ses voisins contre des attaques possibles par des sommets de $V - S$. Puisque chaque sommet dans une alliance défensive S a au moins autant de sommets de son voisinage fermé dans S que dans $V - S$, nous dirons que chaque sommet dans S peut être défendu contre une attaque possible par des sommets de $V - S$.

Définition 2.2. *Le nombre d'alliance défensive $a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive forte $\hat{a}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement, d'une alliance défensive forte).*

La Figure 2.1 représente un arbre T avec $a(T) = 1$ et $\hat{a}(T) = 2$

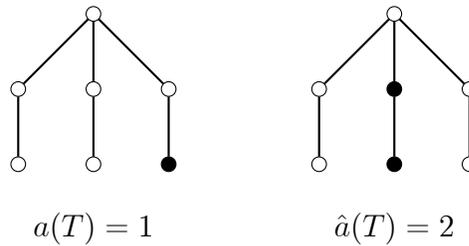


Figure 2.1: Un arbre T avec $a(T) = 1$ et $\hat{a}(T) = 2$

Il est à signaler que tout graphe G admet une alliance défensive car $V(G)$ est un tel ensemble.

Définition 2.3. *Une alliance défensive S est dite globale si S est un ensemble dominant.*

Définition 2.4. *Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale (respectivement, d'une alliance défensive globale forte).*

Donnons une illustration, par le graphe G de la Figure 2.2. L'ensemble $S = \{b, c\}$ est une alliance défensive globale du graphe G , d'où $\gamma_a(G) = 2$, et $S = \{a, b, c\}$ est une alliance défensive globale forte de G , d'où $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$.

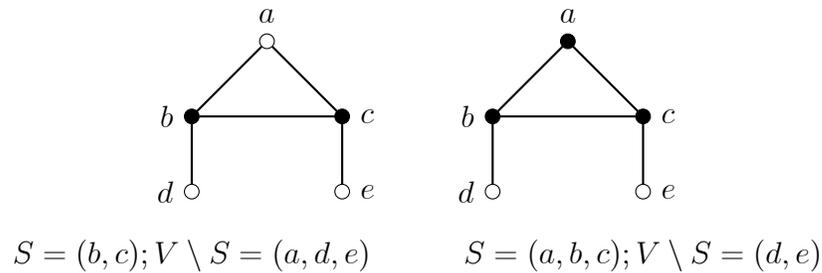


Figure 2.2: Un unicyclic G avec $\gamma_a(G) = 2$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats relatifs aux paramètres $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Remarque 2.5 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Pour tout graphe G , d'ordre n ,*

- (i) $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$;
- (ii) $1 \leq a(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$;
- (iii) $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$.

Proposition 2.6 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Pour un graphe complet K_n , $\gamma_a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,*

Proposition 2.7 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$*

- (i) $\gamma_a(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$,
- (ii) $\gamma_a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, si $r, s \geq 2$,
- (iii) $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

Haynes et al. [38] ont présenté aussi des résultats liant les nombres d'alliances globales aux nombres de domination totale $\gamma_t(G)$ défini comme étant le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G dont le sous-graphe induit est sans sommets isolés.

1. Pour un cycle C_n , $n \geq 3$, $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$.
2. Pour $n \geq 3$, $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.

3. Pour $n \geq 2$, $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$, si $n \equiv 2(\text{mod } 4)$, et $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$, sinon.
4. Pour $r, s \geq 1$, $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor (r-1)/2 \rfloor + \lfloor (s-1)/2 \rfloor + 2$.
5. Pour $r, s \geq 1$, $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor r/2 \rfloor + \lfloor s/2 \rfloor + 2$.

2.2.2 Alliances offensives

Pour un sous ensemble $S \subseteq V$, notons par $\partial S = N(S) - S$.

Définition 2.8. *Un ensemble non vide de sommets $S \subseteq V$ est dit une alliance offensive si pour chaque $v \in \partial S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. Dans ce cas on dit que chaque sommet de ∂S est vulnérable à une attaque possible par des sommets de S (par la force des nombres). Si l'inégalité est stricte, alors S est dit une alliance offensive forte.*

Définition 2.9. *Une alliance offensive S est dite globale (aog) si S est un dominant.*

Définition 2.10. *Le nombre d'alliance offensive $o(G)$ (respectivement le nombre d'alliance offensive forte $\hat{o}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive, (respectivement, d'une alliance offensive forte) de G .*

La Figure 2.3 représente un arbre $T = S_{2,2}$ avec $o(T) = 2$ et un graphe G avec $\hat{o}(G) = 3$

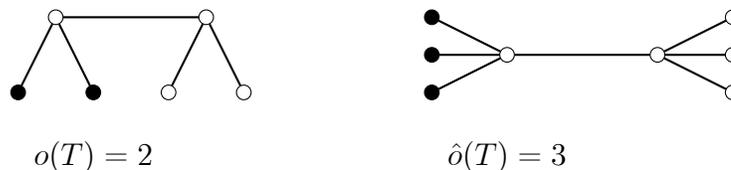


Figure 2.3: Un $S_{2,2}$ avec $o(S_{2,2}) = 2$ et un $S_{3,3}$ avec $\hat{o}(S_{3,3}) = 3$

Il est à signaler que tout graphe G admet une alliance offensive puisque $V(G)$ est un tel ensemble.

Définition 2.11. *Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_\delta(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive globale (respectivement, d'une alliance offensive globale forte) de G .*

La Figure 2.4 illustre un arbre T avec $\gamma_o(T) = 2$ et $\gamma_\delta(T) = 5$.

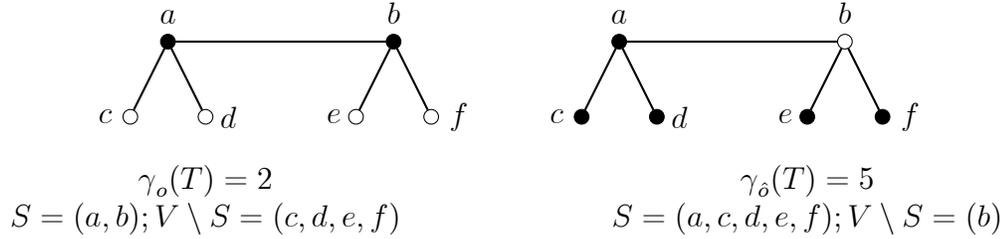


Figure 2.4: Un $S_{2,2}$ avec $\gamma_o(S_{2,2}) = 2$ et $\gamma_\delta(S_{2,2}) = 5$

2.2.3 Alliances puissantes

Définition 2.12. Une alliance S est dite puissante si elle est à la fois défensive et offensive. Ce concept peut être exprimé par la seule condition que pour chaque sommet $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.

Puisqu'une alliance puissante S est défensive, elle peut défendre tout sommet de S contre une attaque possible par les sommets de ∂S , et puisqu'elle est offensive, elle peut effectivement attaquer tous les sommets dans ∂S . En outre, une alliance puissante peut également défendre tout sommet de ∂S contre une attaque par des sommets dans $N[\partial S] - N[S]$.

Définition 2.13. Une alliance puissante globale de G est une alliance puissante qui domine G .

Définition 2.14. Le nombre d'alliance puissante $a_p(G)$ (respectivement, d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'une alliance puissante globale).

La Figure 2.5 représente un arbre T avec un $\gamma_{ap}(T) = 8$.

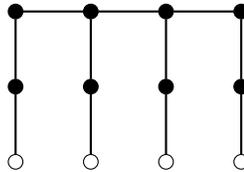


Figure 2.5: Un arbre T avec $\gamma_{ap}(T) = 8$.

Voici quelques valeurs exactes de $a_p(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$ pour des familles de graphes spécifiques [11].

1. Pour toute chaîne P_n avec $n \geq 2$, $a_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \lfloor 2n/3 \rfloor$.
2. Pour tout cycle C_n , $a_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$.
3. Pour le graphe complet K_n , $a_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \lceil n/2 \rceil$.
4. Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $1 \leq r \leq s$,

$$a_p(K_{r,s}) = \gamma_{ap}(K_{r,s}) = \min \{r + \lfloor s/2 \rfloor, \lceil (r+1)/2 \rceil + \lceil (s+1)/2 \rceil\}.$$

2.3 Bornes sur γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$, γ_o , $\gamma_{\hat{o}}$ et $\gamma_{ap}(G)$

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques propriétés et principaux résultats existants dans la littérature sur les paramètres d'alliances définis auparavant.

2.3.1 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Dans [38], Haynes et al. ont donné des bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ en fonction de l'ordre n et le degré maximum Δ du graphe G .

Théorème 2.15 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Si G est un graphe d'ordre n , alors*

- (i) $\gamma_a(G) \geq (\sqrt{4n+1} - 1)/2$.
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}$.

Théorème 2.16 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Si T est un arbre d'ordre n , alors*

- (i) $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}$.
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{n+2}{3}$.

Théorème 2.17 (Rodriguez et Sigaretta [63], 2005). *Soit G un graphe simple d'ordre n et de degré maximum Δ . Alors $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{2n}{\Delta+3} \rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \right\rceil$.*

En 2010, Bouzeffrane et al. [5] ont donné des bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ pour tout arbre T en fonction de son ordre, du nombre de ses feuilles et du nombre de ses sommets support.

Théorème 2.18 (Bouzeffrane, Chellali et Haynes [5], 2010). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec l feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_a(T) \geq \frac{3n-l-s+4}{8}$ et $\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{3n-l-s+4}{6}$.*

Les mêmes auteurs dans [5] ont caractérisé tous les arbres extrémaux atteignant ces deux bornes.

2.3.2 Bornes supérieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$

La proposition suivante, établie par Haynes et al. dans [38], donne une borne supérieure sur γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe G .

Proposition 2.19 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38] 2003). *Pour tout graphe G sans sommets isolés et de degré minimum δ ,*

$$(i) \quad \gamma_a(G) \leq n - \lceil \delta/2 \rceil.$$

$$(ii) \quad \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n - \lceil \delta/2 \rceil.$$

Le corollaire suivant découle immédiatement de la Proposition 2.19.

Corollaire 2.20 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_a(G) = n \text{ si et seulement si } G = \overline{K}_n.$$

Les deux résultats suivants, établis par Haynes et al. [38], donnent une borne supérieure, pour la classe des arbres, sur γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ avec une caractérisation des arbres extrémaux pour chaque borne.

Soit \mathcal{F}_1 la famille des arbres T contenant $T = P_5$, $T = K_{1,4}$ ou bien T est obtenu à partir de $tK_{1,4}$ (l'union disjoint de t copies de $K_{1,4}$) en ajoutant $t - 1$ arêtes entre les feuilles de ces copies de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,4}$ est adjacent à exactement trois feuilles de T .

Théorème 2.21 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$, alors $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_1$.*

Les mêmes auteurs ont introduit une famille \mathcal{F}_2 d'arbres T obtenus à partir de l'union disjointe $tK_{1,3}$ de $t \geq 1$ copies de $K_{1,3}$ en ajoutant $t - 1$ arêtes entre les feuilles de ces copies de $K_{1,3}$ de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,3}$ est adjacent à au moins une feuille dans T .

Théorème 2.22 (Haynes, Hedetniemi et Henning [38], 2003). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3n}{4}$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_2$.*

2.3.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$

Le résultat suivant établi par Chellali [14], donne une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe biparti.

Théorème 2.23 (Chellali [14], 2010). *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_o(G) \leq (n - L(G) + S(G))/2$.*

Dans le même article, Chellali a donné une caractérisation constructive des arbres extrémaux vérifiant $\gamma_o(T) = (n - L(T) + S(T))/2$.

Sigaretta et Rodriguez ont donné une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe G en fonction de l'ordre n , les degrés minimum δ et maximum Δ ,

Théorème 2.24 (Rodriguez et Sigaretta [61], 2006). *Pour tout graphe G d'ordre n , et des degrés minimum δ et maximum Δ ,*

$$\frac{2n}{3} \geq \gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair;} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.25 (Rodriguez et Sigaretta [61], 2006). *Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de degré d impair, on a :*

$$\frac{n(d+1)}{3d+1} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Le Théorème 2.25 permet d'affirmer que pour le cas des graphes cubiques (3- réguliers) on a: $\frac{2n}{5} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.

Dans [8], Blidia, Chellali et Favaron ont montré que tout graphe biparti G sans sommets isolés satisfait $\gamma_2(G) \leq (n + \ell(G))/2$. Du fait que pour tout $\gamma_\delta(G)$ -ensemble S , tout sommet $v \in V - S$ possède au moins deux voisins dans S , alors S est un 2-dominant de G et par suite, $\gamma_2(G) \leq \gamma_\delta(G)$ pour tout graphe G . La précédente borne supérieure sur γ_2 , établie dans [10] par Blidia, Chellali et Volkmann, a été améliorée pour γ_δ par Chellali dans [14].

Théorème 2.26 (Chellali [14]). *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés,*

$$\gamma_\delta(G) \leq (n + \ell(G))/2.$$

Dans le même article, Chellali a donné une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant la borne du Théorème 2.26.

Dans [61], Rodriguez et Sigaretta ont donné une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_δ pour les graphes cubiques ainsi qu'une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 2.27 (Rodriguez et Sigaretta [61], 2006). *Soit G un graphe cubique d'ordre n .*

1. $\frac{n}{2} \leq \gamma_\delta(G) \leq \frac{3n}{4}$.
2. $\gamma_\delta(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est un graphe biparti.
3. $\gamma_\delta(G) = \frac{3n}{4}$ si et seulement si G est isomorphe au graphe complet K_4 .

Soit \mathcal{F} la famille des arbres d'ordre au moins trois qui peuvent être obtenus de r étoiles disjointes en ajoutant d'abord $r - 1$ arêtes incidentes seulement aux centres des étoiles, le graphe ainsi obtenu est connexe, ensuite en subdivisant chaque nouvelle arête exactement une seule fois. L'arbre de la Figure 2.6 est un exemple d'un arbre de \mathcal{F} .

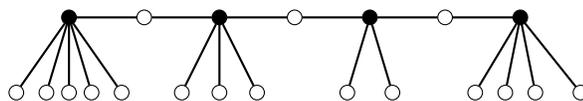


Figure 2.6: Un arbre de la famille \mathcal{F}

Bouzefrane et Chellali ont montré que tout arbre T d'ordre au moins trois avec ℓ feuilles et s sommets support satisfait $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1)/3$, et une caractérisation des arbres extrémaux atteignant cette borne inférieure a été établie.

Théorème 2.28 (Bouzeffrane et Chellali [3], 2009). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$, avec L feuilles et S sommets supports. Alors*

$$\gamma_o(T) \geq \frac{n - L + S + 1}{3},$$

avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.

2.3.4 Bornes sur $\gamma_{ap}(G)$ et $a_p(G)$

Dans leur article introductif, Brigham et al. [11], ont donné une borne supérieure sur le nombre d'alliance puissante a_p pour les arbres.

Théorème 2.29 (Brigham et al. [11], 2009). *Si T est un arbre d'ordre n différent d'une chaîne P_n , alors $a_p(T) \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ et cette borne est atteinte.*

Les mêmes auteurs ont montré aussi les deux résultats suivants :

Proposition 2.30 (Brigham et al. [11], 2009). *Pour tout graphe G d'ordre n , de degrés minimum δ et maximum Δ , on a :*

$$n \leq \left(\frac{\Delta + \delta + 2}{\delta + 1} \right) \gamma_{ap}(G).$$

Corollaire 2.31 (Brigham et al. [11], 2009). *Si G est un graphe régulier d'ordre n , alors $n \leq 2\gamma_{ap}(G)$.*

2.4 Relations entre γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$, γ , γ_o , $\gamma_{\hat{o}}$, β_0 , γ_2 et i

2.4.1 Relations entre γ_a , $\gamma_{\hat{a}}$ et β_0 dans les arbres

En général, le nombre d'alliance défensive globale peut être beaucoup plus grand que le nombre d'indépendance. Par exemple, pour le graphe complet K_n , $\beta_0(K_n) = 1 \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \gamma_a(K_n)$. Chellali et Haynes dans [13], ont montré que le nombre d'alliance défensive globale pour les arbres est borné supérieurement par le nombre d'indépendance.

Théorème 2.32 (Chellali et Haynes [13], 2007). *Pour tout arbre T , $\gamma_a(T) \leq \beta_0(T)$, et cette borne est atteinte.*

Puisque $\beta_0(T) \leq \frac{n+\ell-1}{2}$ pour tout arbre non trivial T avec ℓ feuilles [8], le corollaire suivant est une amélioration du Théorème 2.21 [38], pour $\ell \leq n/5$.

Corollaire 2.33 (Chellali et Haynes [13], 2007). *Pour tout arbre T avec ℓ feuilles, $\gamma_a(T) \leq \frac{n+\ell-1}{2}$.*

Les mêmes auteurs dans [13], ont montré que $\gamma_a(T)$ et $i(T)$ sont incomparables. Par exemple, pour une étoile T d'ordre $n \geq 3$, $i(T) = 1 < \lceil n/2 \rceil = \gamma_a(T)$. D'autre part, pour la chenille T_{6k} avec $6k$ sommets supports, où chaque support est adjacent à exactement deux feuilles, on a $\gamma_a(T_k) = 6k$ tandis que $i(T_k) = 9k$.

Par les exemples précédents, $\gamma_{\hat{a}}(T)$ et $i(T)$ sont aussi incomparables. Pour une étoile T d'ordre $n \geq 3$, $i(T) = 1 < \lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \gamma_{\hat{a}}(T)$.

Les paramètres $\gamma_{\hat{a}}(T)$ et $\beta_0(T)$ sont aussi incomparables. En effet, pour une étoile $K_{1,p}$ ($p \geq 4$), $\beta_0(T) = p > \lceil p/2 \rceil + 1 = \gamma_{\hat{a}}(T)$, et si T est un 2-couronne de la chaîne P_{2k} , alors $\gamma_{\hat{a}}(T) = 4k > 3k = \beta_0(T)$.

Chellali et Haynes [13], ont établi deux bornes supérieures sur le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}$ pour la classe des arbres en fonction de β_0 et $(\beta_0$ et $s)$ respectivement.

Théorème 2.34 (Chellali et Haynes [13], 2007). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec s sommets support, alors*

$$(a) \gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3\beta_0(T)-1}{2}.$$

$$(b) \gamma_{\hat{a}}(T) \leq \beta_0(T) + s - 1,$$

et ces bornes sont atteintes.

Pour l'étoile G d'ordre n , $i(G) = 1$, $\gamma_a(G) = \lceil n/2 \rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Par conséquent, aucune borne du type $\gamma_a(G) \leq f(i(G))$ ou $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq g(i(G))$ ne peut être satisfaite pour tout graphe, et ceci même pour la classe des arbres.

2.4.2 Relations entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$

Avant d'énoncer les résultats ci-dessous on donne la définition suivante :

Définition 2.35. *Un graphe biparti équilibré est un graphe tel que les deux ensembles de la bipartition ont la même taille.*

Exemple 2.36. *Les graphes bipartis complet $K_{p,q}$ pour lesquels $p = q$, sont des graphes équilibrés.*

Dans [25] Favaron a étudié l'existence d'une fonction f telle que $i(G) \leq f(\gamma_a(G))$ pour un graphe quelconque, un graphe biparti ou bien un arbre. Elle a défini les familles de graphes suivantes :

1. \mathcal{F}_1 est la famille de graphes obtenus d'une clique S d'ordre k par la fixation de k feuilles à chaque sommet de la clique S .
2. \mathcal{F}_2 est la famille de graphes bipartis obtenus à partir d'un graphe biparti complet équilibré S d'ordre k par la fixation de $k + 1$ feuilles à chaque sommet de S .
3. \mathcal{F}_3 est la famille d'arbres obtenus à partir d'un arbre S par la fixation de l'ensemble L_u de $ds(u) + 1$ feuilles à chaque sommet u de S .

Le théorème suivant de Favaron [25] nous donne une relation entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$ sous forme $i(G) \leq f(\gamma_a(G))$, avec une caractérisation des graphes extrémaux.

1. Tout graphe G satisfait $i(G) \leq (\gamma_a(G))^2 - \gamma_a(G) + 1$, avec égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_1$.
2. Tout graphe biparti G satisfait $i(G) \leq (\gamma_a(G))^2 / 4 + \gamma_a(G)$, avec égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_2$.
3. Tout arbre G satisfait $i(G) \leq 2\gamma_a(G) - 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_3$.

2.4.3 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$

Puisque $i \leq \gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe, Favaron dans [25], a donné des bornes du type $i(G) \leq g(\gamma_{\hat{a}}(G))$ ($i(G)$ borné par une fonction de $\gamma_{\hat{a}}(G)$) pour un graphe général, biparti ou un arbre. Elle a défini les familles des graphes suivantes:

1. \mathcal{F}_4 est la famille de graphes obtenus d'une clique S d'ordre k par la fixation de $k - 1$ feuilles à chaque sommet de la clique S .
2. \mathcal{F}_5 est la famille de graphes bipartis obtenus à partir d'un graphe biparti complet équilibré S d'ordre $2k$ par la fixation de k feuilles à chaque sommet de S .
3. \mathfrak{S} est la famille d'arbres S tels que pour tout ensemble d'indépendance maximal J de S , le nombre de composantes des forêts $S - J$ est au plus $S/2$.
4. \mathcal{F}_6 est la famille d'arbres obtenus par un arbre S de \mathfrak{S} par la fixation de l'ensemble $L(u)$ de $d_s(u)$ feuilles à chaque sommet de S .

Favaron [25] à donner une relation entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$ sous forme $i(G) \leq f(\gamma_{\hat{a}}(G))$, avec une caractérisation des graphes extrémaux.

1. Tout graphe G satisfait $i(G) \leq \gamma_{\hat{a}}^2(G) - 2\gamma_{\hat{a}}(G) - 2$, avec égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_4$.
2. Tout graphe biparti G sans sommets isolés satisfait $i(G) \leq \gamma_{\hat{a}}^2(G)/4 + \gamma_{\hat{a}}(G)/2$, avec égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_5$.
3. Tout arbre G d'ordre $n \geq 2$ satisfait $i(G) \leq 3\gamma_{\hat{a}}(G)/2 - 1$, avec égalité si et seulement si $G \in \mathcal{F}_6$.

2.4.4 Relations entre γ_o , $\gamma_{\hat{o}}$, β_0 , i et γ_2 dans les arbres

Le théorème suivant de Favaron [25], donne une relation entre γ_o et i dans les arbres.

Théorème 2.37 (Favaron [25], 2008). *Pour tout arbre T , $\gamma_o(T) \leq 2i(T) - 1$ et cette borne est atteinte.*

Le résultat suivante, établi par Favaron [25], est une borne sur γ_δ en fonction de i pour la classe des arbres.

Théorème 2.38 (Favaron [25], 2008). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_\delta(T) \geq i(T) + 1$ et cette borne est atteinte.*

En 2007, Volkmann [69], a donné une relation sur γ_2 en fonction de γ pour la classe des arbres.

Théorème 2.39 (Volkmann [69], 2007). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_2(T) \geq \gamma(T) + 1$ avec égalité si et seulement si, T est une étoile subdivisée, une couronne d'une étoile ou une double étoile subdivisée.*

Hansberg et al. [51], ont donné une caractérisation des arbres T vérifiant $\gamma_2(T) = i(T) + 1$.

Théorème 2.40 (Hansberg et Volkmann [51]). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_2(T) \geq i(T) + 1$, avec égalité si et seulement si $\gamma_2(T) \geq \gamma(T) + 1$ ou $T = S_{2,2}$.*

Dans [15], il a été prouvé que tout graphe G vérifie $\gamma_\delta(G) \geq \gamma_2(G)$, Chellali et al. [15], ont utilisé le Théorème 2.40 pour montrer ce qui suit :

Théorème 2.41 (Chellali, Haynes et Volkmann [15], 2009). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_\delta(T) \geq \gamma(T) + 1$ avec égalité si et seulement si T est une étoile subdivisée, une couronne d'une étoile ou une double étoile subdivisée.*

Les mêmes auteurs [15], ont donné une borne inférieure pour le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_\delta(G)$ pour tout graphe en fonction de $\gamma_o(G)$, le nombre de feuilles L et le nombre de supports S .

Théorème 2.42 (Chellali, Haynes et Volkmann [15], 2009). *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, avec S sommet suport et L feuilles, $\gamma_\delta(G) \geq \gamma_o(G) + L - S$.*

On note que pour tout graphe G , les feuilles de G sont dans tout $\gamma_\delta(G)$ -ensemble. Avant d'énoncer la chaîne d'inégalités établie par Chellali et al, on donne une remarque, justifiée par le fait que $V - D$ est une (aog) pour tout stable D .

Remarque 2.43. *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\beta_0(G) + \gamma_o(G) \leq n$.*

En utilisant l'inégalité triviale suivante: $\gamma(G) \leq \gamma_o(G) \leq \gamma_\delta(G)$, on a alors

Corollaire 2.44. *Pour tout arbre T , on a $\gamma(T) \leq \gamma_o(T) \leq \beta_0(T) \leq \gamma_2(T) \leq \gamma_\delta(T)$.*

Le résultat suivant, de Chellali et al., est une relation entre le nombre d'alliance offensive globale forte γ_δ et le nombre d'alliance offensive globale γ_o pour les arbres.

Théorème 2.45 (Chellali, Haynes et Volkmann [15], 2009). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_\delta(T) \geq \gamma_o(T) + 1$, avec égalité si et seulement si, une des propriétés suivantes est vérifiée.*

(i) T un arbre subdivisé.

(ii) T est obtenu à partir des arbres T_1 et T_2 , qui sont des subdivisions des arbres T'_1 et T'_2 , respectivement, en ajoutant une arête entre un sommet u_1 de T'_1 et u_2 de T'_2 , où au moins l'un des sommets u_1 et u_2 est une feuille ou un sommet isolé de $T_1 \cup T_2$.

Théorème 2.46 (Blidia, Chellali et Favaron [8], 2005). *Soit T un arbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$,

b) $T = K_1$ ou $T \in \mathcal{F}$,

c) T a un $\gamma_2(T)$ -ensemble et un $\beta_o(T)$ -ensemble.

En utilisant le Théorème 2.46, Chellali et al. [15], ont donné une caractérisation descriptive des arbres satisfaisant $\gamma_\delta(T) = \beta_0(T)$.

Afin de caractériser les arbres pour lesquels les nombres de domination et d'alliance offensive globale sont égaux, nous définissons la famille \mathcal{G} suivante:

\mathcal{G} est la famille de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) d'arbres, où $T_1 = P_2$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des quatre opérations définies ci-dessous. Considérons l'un des sommets de T_1 un support et l'autre une feuille.

- **Opération \mathcal{O}_1** : Attacher un nouveau sommet en le joignant à un sommet support quelconque de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_2** : Attacher une chaîne $P_2 = xy$ en joignant x à un sommet support z quelconque de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_3** : Attacher une étoile subdivisée SS_k , $k \geq 2$, de centre u en joignant u à un sommet v de T_i avec la condition que si v n'appartient pas à un $\gamma_o(T_i)$ -ensemble D , alors la majorité stricte des sommets de $N_{T_i}[v]$ sont dans D .
- **Opération \mathcal{O}_4** : Attacher une chaîne $P_3 = xyz$ en joignant x à un sommet quelconque de T_i appartenant à un $\gamma_o(T_i)$ -ensemble.

Théorème 2.47 (Bouzeffrane et Chellali [3] 2009). *Soit T un arbre. Alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T = K_1$ ou bien $T \in \mathcal{G}$.*

L'arbre illustré dans Figure 2.7 est un exemple d'arbre T de \mathcal{G} .

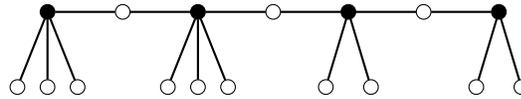


Figure 2.7: Un arbre de la famille \mathcal{G} .

2.4.5 Relations entre $\gamma_a(G)$ et $\gamma_o(G)$

La figure suivante nous montre un arbre T avec $\gamma_o(T) > \gamma_a(T)$

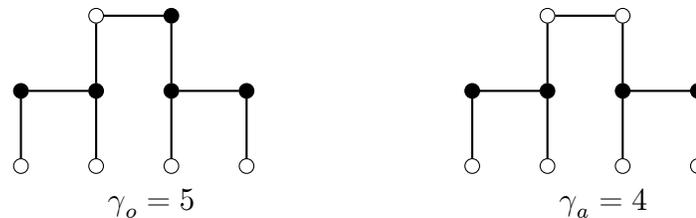


Figure 2.8: Un arbre T avec $\gamma_o(T) = 5 > \gamma_a(T) = 4$

Le Théorème suivant donne une relation entre le nombre d'alliance offensive globale et le nombre d'alliance défensive globale dans les arbres.

Théorème 2.48 (Bouzeffrane et Chellali [4]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$, et cette borne est atteinte.*

La caractérisation des arbres pour lesquels $\gamma_o(T) = \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$ n'est pas encore résolue à ce jour. La figure suivante représente un arbre T vérifiant $\gamma_o(T) = \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$, $\gamma_o(T) = 11$ et $\gamma_a(T) = 8$.

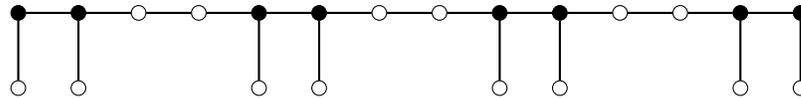


Figure 2.9: Un arbre T avec $\gamma_o(T) = \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$

2.4.6 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$

La proposition suivante donne une relation entre le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ et le nombre de domination $\gamma(G)$.

Proposition 2.49 (Brigham et al. [11], 2009). *Pour tout graphe G de degré minimum δ , $\gamma(G) + \lfloor \delta/2 \rfloor \leq \gamma_{ap}(G)$.*

Brigham et al. [11] ont caractérisé les graphes tels que $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ par le théorème suivant:

Théorème 2.50 (Brigham et al. [11], 2009). *Un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ si et seulement si $N[v]$ contient au moins $\lceil |N[v]|/2 \rceil$ sommets support, pour tout sommet $v \in V(G)$.*

Pour la classe des arbres, ils ont caractérisé ceux qui vérifient $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$.

Théorème 2.51 (Brigham et al. [11], 2009). *Soit T un arbre. Alors $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$ si et seulement si T est une double étoile $S_{2,2}$ ou bien T peut être obtenu d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant au plus $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ arêtes exactement une seule fois.*

2.5 Généralisation des alliances

2.5.1 k -alliances

Les concepts des alliances défensives et offensives ont été généralisés aux k -alliances offensives et défensives respectivement, où la force d'une alliance est liée à la valeur du paramètre k . Avant de présenter quelques résultats existants sur ces concepts, donnons les définitions suivantes:

Définition 2.52. Soit $k \geq 1$ un entier. Un ensemble non vide S de sommets d'un graphe G est appelé une k -alliance offensive globale si $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S| + k$ pour tout $v \in V(G) - S$. Le nombre de k -alliance offensive globale de G , noté $\gamma_o^k(G)$, est le cardinal minimum de k -alliance offensive globale de G .

Définition 2.53. Un ensemble non vide $S \subseteq V$ est une k -alliance défensive globale si pour tout $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S| + k$. Le nombre k -alliance défensive globale de G , noté $\gamma_a^k(G)$, est le cardinal minimum d'une k -alliance défensive globale de G .

Dans [36], Fernau, Rodriguez et Sigarreta ont montré que le problème de la recherche du nombre de k -alliance offensive (défensive) globale est NP -Complet.

La Figure 2.9 représente un graphe G avec un $\gamma_o^2(G)$ -ensemble et un arbre T avec $\gamma_a^2(T)$ -ensemble.

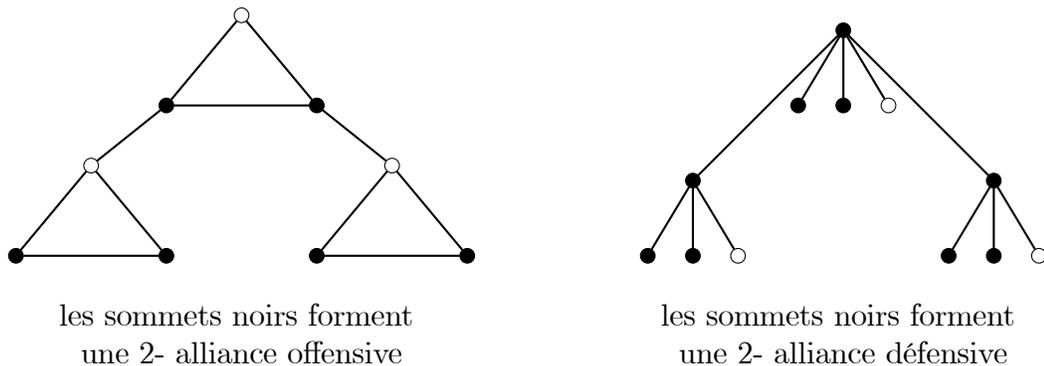


Figure 2.10: Un graphe G avec un $\gamma_o^2(G)$ -ensemble et un arbre T avec un $\gamma_a^2(T)$ -ensemble

2.5.2 Bornes supérieures sur γ_o^k

Chellali, Haynes et Volkmann [15], ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour les graphes bipartis. Soit $L_k(G) = \{x \in V(G) : d_G(x) \leq k - 1\}$.

Théorème 2.54 (Chellali, Haynes et Volkmann [15], 2009). *Soit $k \geq 1$, un entier. Si G est un graphe biparti alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{n(G)+|L_k(G)|}{2}$.*

Une caractérisation constructive des arbres atteignant la borne du Théorème 2.54. a été établie par les mêmes auteurs.

Théorème 2.55 (Chellali, Haynes et Volkmann [15], 2009). *Soit $k \geq 2$ un entier. Un arbre T satisfait $\gamma_o^k(T) = (n + |L_k(T)|) / 2$ si et seulement si, ou bien $\Delta \leq k - 2$ ou $T \in \mathcal{F}_k$. où \mathcal{F}_k est la famille d'arbres obtenus d'une manière constructive dans [15],*

Par ailleurs dans [16], Chellali et al. ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour un graphe quelconque.

Théorème 2.56 (Chellali et al. [16], 2009). *Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k+1}{k+2}n$.*

Dans le cas où $\delta \geq k + 2$, la borne du Théorème 2.56 peut être améliorée.

Théorème 2.57 (Chellali et al. [16], 2009). *Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k + 2$. Alors $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.*

2.5.3 Bornes inférieures sur γ_o^k

Deux bornes inférieures ont été données par Chellali et al. dans [16] sur le nombre k -alliance offensive globale γ_o^k pour tout graphe G d'ordre n , de degré minimum δ et de degré maximum Δ .

Théorème 2.58 (Chellali et al. [16] 2009). *Soit k un entier positif. Si G est un graphe d'ordre n , de degré minimum δ et de degré maximum Δ , alors $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k)}{2\Delta+\delta+k}$.*

Théorème 2.59 (Chellali et al. [16] 2009). *Soit $k \geq 1$ un entier et soit G est un graphe d'ordre n , de degré minimum δ et maximum Δ . Alors, $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k+1)}{2\Delta+\delta+k+1}$.*

2.5.4 Bornes sur γ_a^k

Théorème 2.60 (Rodriguez et Sigaretta [62] 2009). *Pour tout graphe G ,*

$$\frac{\sqrt{4n + k^2} + k}{2} \leq \gamma_a^k(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\Delta - k}{2} \right\rfloor.$$

Les mêmes auteurs ont donné aussi la borne suivante.

Théorème 2.61 (Rodriguez et Sigaretta [62] 2009). *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_a^k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{\Delta - k}{2} \right\rfloor + 1} \right\rceil.$$

Rodriguez et al. ont établi d'autres résultats pour les graphes cubiques et planaires sur ce paramètre, (pour plus de détails, voir [68]).

2.5.5 Partition en alliance

Le nombre de partition en alliance a été défini dans [54] comme suit :

Définition 2.62. *Le nombre de partition en alliance d'un graphe G noté ψ_a est le nombre maximum d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance. De même le nombre de partition en alliances globales ψ_g est le nombre maximum d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance globale.*

Notons que ψ_a est appelé aussi le *quorum coloration* étudié par Hedetniemi et al dans [44].

Dans ce qui suit, on donne quelques résultats existants sur le nombre de partition en alliance globale ψ_g . Le théorème suivant, établi par Eroh et Gera dans [23], donne une borne sur ψ_g pour tout graphe connexe en fonction du degré minimum δ .

Théorème 2.63 (Eroh et Gera [23], 2008). *Soit G un graphe connexe de degré minimum δ . Alors $1 \leq \psi_g(G) \leq 1 + \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil$, et cette borne est atteinte.*

Comme conséquence immédiate du Théorème 2.63, ils obtiennent le corollaire suivant.

Corollaire 2.64 (Eroh et Gera [23], 2008). *Soit G un arbre d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$1 \leq \psi_g(G) \leq 2.$$

Shafique [34] a étudié le partitionnement des données (objets) en clusters en impliquant le concept de défense 0-alliance. En général, les clusters sont définis en maximisant les similarités des objets appartenant à chaque cluster ainsi que les dissemblances d'objets entre les clusters. Ainsi, il existe plus de liens à l'intérieur de chaque cluster qu'entre les grappes. Il a représenté cette situation par un graphe (où les sommets correspondent aux données et les arêtes symbolisent la propriété commune (similitude) que les données partagent). Cela implique que les sommets de chaque cluster ont au moins autant d'arêtes adjacentes aux sommets à l'intérieur du cluster qu'aux sommets à l'extérieur, et ça correspond à la définition de 0-alliance défensive. Sur cette base, Shafique [34] a établi un algorithme approché et appliqué pour différentes applications de clustering.

Il existe plusieurs résultats sur ce concept. Pour plus de détails on peut se référer aux articles , [24], [50] et [53].

CHAPITRE 3

ALLIANCES OFFENSIVES GLOBALES DANS LES GRAPHES UNICYCLES

Dans ce chapitre on montre que si G est un graphe unicycle connexe d'ordre n avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets support alors $\gamma_o(G) \geq \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. De plus, nous caractérisons tous les graphes unicycles extrémaux atteignant cette borne.

3.1 Borne inférieure du nombre γ_o pour les unicycles

Pour la classe des arbres, Bouzefrane et Chellali [3], ont donné une borne inférieure du nombre d'alliance globale et ont caractérisé tous les arbres extrémaux atteignant cette borne.

Théorème 3.1. (*Bouzefrane et Chellali [3], 2009*) *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$, avec $l(T)$ feuilles et $s(T)$ sommets supports. Alors $\gamma_o(T) \geq \frac{n-l(T)+s(T)+1}{3}$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}$*

Nous commençons par donner une observation qui nous sera utile par la suite.

Observation 3.2. *Si G est un graphe connexe d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma_o(G)$ -ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Le théorème qui suit nous donne une borne inférieure du nombre d'alliance offensive globale pour les graphes unicycles.

Théorème 3.3. (*Bouzefrane et al.[7], 2018*) *Si G est un graphe unicycle connexe d'ordre n avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets support. Alors*

$$\gamma_o(G) \geq \frac{n - l(G) + s(G)}{3}. \quad (3.1)$$

Preuve. Soit G un graphe unicycle d'ordre n et de cycle C . Il est très facile de voir que l'inégalité (3.1) est vraie pour $n = 3$ ou 4 . On suppose que tout graphe unicycle G' d'ordre $n' < n$ avec l' feuille et s' sommets support satisfait $\gamma_o(G') \geq \frac{n'-l'+s'}{3}$.

Si G est un cycle C_n , alors $\gamma_o(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil > \frac{n}{3}$. On suppose donc que $G \neq C_n$. Soit D un $\gamma_o(G)$ -ensemble qui contient tous les sommets supports de G , un tel ensemble existe d'après l'Observation 3.2. Soient x, y, z trois sommets consécutifs de C et dans cet ordre. On considère les cas suivants:

Cas. 1.: $x \in D$ et $y \notin D$. Donc y n'est pas un sommet support. On distingue deux sous cas selon la taille de $V(C)$.

Cas 1.1: $|V(C)| = 3$. Si $z \notin D$, alors y, z sont de degrés au moins 3, sinon D ne serait pas un (aog) de G . Dans ce cas D est aussi un (aog) de $H = G - yz$ et ceci implique que $\gamma_o(G) \geq \gamma_o(H)$. Puisque H est un arbre d'ordre $n(H) = n(G) = n$ avec $l(H) = l(G)$ et $s(H) = s(G)$, par le Théorème 3.1, on a:

$$\begin{aligned} \gamma_o(G) &\geq \gamma_o(H) \geq \frac{n(H) - l(H) + s(H) + 1}{3} \\ &= \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3} \\ &> \frac{n - l(G) + s(G)}{3} \end{aligned}$$

On suppose maintenant que $z \in D$ et $d(x) = 2$. Donc $d(y) \geq 3$ car G n'est pas un cycle. Soit $D' = (D - \{z\}) \cup \{y\}$. Il est très facile de voir que D' est un (aog) de $H = G - yz$ et donc $\gamma_o(G) \geq \gamma_o(H)$. Aussi, il n'est pas difficile de vérifier que $n(H) = n(G) = n$, $l(H) = l(G) + 1$ et $s(H) = s(G) + 1$. Comme H est un arbre, le Théorème 3.1 implique que

$$\gamma_o(G) \geq \frac{n(H) - l(H) + s(H) + 1}{3} = \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3},$$

qui donne $\gamma_o(G) > \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$.

Supposons maintenant que l'un de sommets x et z , disons x , est de degré au moins 3 et soit $H = G - xz$. Si $d_G(z) = 2$, alors l'ensemble $(D - \{z\}) \cup \{y\}$ est une (aog) de H , et par suite, $n(H) = n(G) = n$, $l(H) = l(G) + 1$ et $s(H) = s(G) + 1$. Donc comme le cas précédent, $\gamma_o(G) > \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. Si $d_G(z) \geq 3$, l'ensemble D reste une (aog) de H . Alors

$n(H) = n(G) = n$, $l(H) = l(G)$ et $s(H) = s(G)$. Donc, par le Théorème 3.1

$$\begin{aligned} \gamma_o(G) &\geq \gamma_o(H) \geq \frac{n(H) - l(H) + s(H) + 1}{3} \\ &= \frac{n - l(G) - 1 + s(G) + 1}{3} \\ &> \frac{n - l(G) + s(G)}{3}. \end{aligned}$$

Cas 1.2: $|V(C)| \geq 4$. Si $d(y) = 2$, alors $z \in D$, car sinon D ne serait pas une (aog) . Supprimons y et identifions x et z dans un seul sommet noté \overline{xz} . Alors G' est un graphe unicycle d'ordre $n' = n - 2$, $l' = l(G)$, et $s' \geq s(G) - 1$. D'autre part, $(D - \{x, z\}) \cup \{\overline{xz}\}$ est une (aog) de G' . En utilisant l'induction sur G' , on obtient

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G') + 1 \geq \frac{n' - l' + s'}{3} + 1 \geq \frac{n - 2 - l(G) + s(G) - 1}{3} + 1$$

et donc

$$\gamma_o(G) \geq \frac{n - l(G) + s(G)}{3}.$$

On suppose maintenant que $d(y) \geq 3$. Le sommet y n'est pas support car sinon par notre choix de D , $y \in D$. Soit w l'autre voisin de y telque $w \notin D$. Si un tel sommet n'existe pas, alors $N(y) \subset D$ et dans ce cas supprimons l'arête xy . Le graphe résultant G' est un arbre d'ordre $n' = n$, $l' \leq l(G) + 1$ et $s' \geq s(G)$. Comme D est une (aog) de G' , on obtient par le Théorème 3.1

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G') \geq \frac{n' - l' + s' + 1}{3} \geq \frac{n - l(G) + s(G)}{3}.$$

Donc on peut supposer que w existe. Dans ce cas supprimons l'arête yw et on note G' le graphe résultant. Si $w = z$, comme $y, z \notin D$, alors $\deg_G(z) \geq 3$. L'ensemble D reste une (aog) de G' qui est un arbre d'ordre $n' = n$ avec $l' = l(G)$ et $s' = s(G)$. En utilisant le Théorème 3.1 sur G' , on obtient $\gamma_o(G) > \frac{n - l(G) + s(G)}{3}$. On suppose maintenant que $w \neq z$. Donc $z \in D$. Le graphe G' est constitué de deux composantes connexes, une est un unicycle graphe G'' et l'autre est un arbre T' qui contient w . Notons que T' est d'ordre $n' \geq 5$. Comme y et w ne sont pas dans D , w a au moins deux voisins dans $D \cap V(T')$. D'autre part $D \cap V(G'')$ et $D \cap V(T')$ sont deux alliances offensives globales de G'' et T' respectivement. Il s'ensuit que

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G') = \gamma_o(G'') + \gamma_o(T').$$

Posons

$$l(T') = l', s(T') = s'. n(G'') = n'', l(G'') = l'' \text{ et } s(G'') = s''.$$

Puisque $d(y) \geq 3$ et T' est un arbre d'ordre $n' \geq 5$, alors

$$n = n'' + n', l(G) = l'' + l' \text{ et } s(G) = s'' + s'.$$

Maintenant utilisons l'induction sur G'' . Par le Théorème 3.1 sur T' , on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_o(G) &\geq \gamma_o(G'') + \gamma_o(T') \geq \frac{n'' - l'' + s''}{3} + \frac{n' - l' + s' + 1}{3} \\ &= \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3} > \frac{n - l(G) + s(G)}{3}. \end{aligned}$$

Cas 2. $x, y \in D$. Si $d_G(x) = 2$, alors on peut remplacer x dans D par son deuxième voisin dans C . Dans ce cas on obtient un nouveau $\gamma_o(G)$ -ensemble D' telque $x \notin D'$, $y \in D'$, et ce cas a déjà été considéré (voir le Cas 1). Donc $d_G(x) \geq 3$ et de même $d_G(y) \geq 3$. Soit G' le graphe obtenu après avoir supprimé l'arête xy . Alors G' est un arbre d'ordre n' avec $l' = l(G)$, et $s' = s(G)$. Puisque G' est un arbre et D est une (aog) de G' donc on obtient par le Théorème 3.1, $\gamma_o(G) > \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$.

Cas 3. $x \notin D, y \in D$. Alors les deux sommets x et y doivent être de degré au moins 3, sinon D ne serait pas une (aog) . En outre, par le choix de D , x et y ne sont pas des sommets supports. Soit H le graphe obtenu de G en supprimant l'arête xy . Clairement, H est un arbre d'ordre $n = n(H)$ avec $l(H) = l(G)$ et $s(H) = s(G)$. Comme D est une (aog) de H , il s'ensuit, par le Théorème 3.1, que $\gamma_o(G) > \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. \square

Les deux graphes illustrés dans la Figure 3.1 sont des unicycles tels que $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$

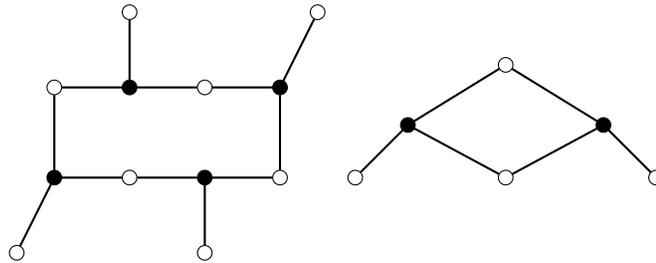


Figure 3.1: Deux graphes unicycles avec $\gamma_o(G) = \frac{n-l+s}{3}$.

Afin de caractériser tous les unicycles atteignant la borne du Théorème 3.3, nous avons besoin des théorèmes suivants qui nous donnent des propriétés sur le cycle de ces graphes. Nous commençons par la propriété qui indique que si la borne inférieure du Théorème 3.3 est atteinte, alors le graphe unicycle est biparti. Chellali dans [14] a montré que si G est un graphe biparti d'ordre n et sans sommets isolés alors, $\gamma_o(G) \leq \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. Le résultat suivant montre que cette inégalité reste vraie pour les graphes unicycles.

Théorème 3.4. (*Bouzefrane et al.[7], 2018*) *Soit G un graphe unicycle connexe d'ordre n et de cycle C , avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets support. Si $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$, alors C est un cycle pair.*

Preuve. Par absurde. On suppose que G est un graphe unicycle de cycle impair C tel que $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. Comme $\gamma_o(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2} \neq \frac{n}{3}$, donc G a au moins un sommet support (en particulier $G \neq C_n$). Soit D un $\gamma_o(G)$ -ensemble et soient x, y deux sommets adjacents de C . Il s'ensuit, par le Cas 3 de la preuve du Théorème 3.3, qu'au moins un des sommets x, y est dans D . Ainsi, nous considérons le cas où x et $y \in D$. Le Cas 2 de la preuve du Théorème 3.3 exclu le cas où x et y sont à la fois de degré au moins 3. Donc, on suppose que $\deg_G(x) = 2$. Si $|V(C)| = 3$, alors le Cas 1.1 du preuve du Théorème 3.3 conduit à $\gamma_o(G) > \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. Comme C est un cycle impair, on suppose maintenant que $|V(C)| \geq 5$. Nous identifions les sommets x et y en un seul sommet \overline{xy} . Le graphe obtenu $G' = (G - \{x, y\}) \cup \{xy\}$ est un graphe unicycle d'ordre $n' = n - 1$. Puisque $\deg_G(x) = 2$, alors $l(G') = l' = l(G)$ et $s(G') = s' = s(G)$. L'ensemble $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est une alliance offensive global de G' , ce qui implique

$$\gamma_o(G') \leq |D| - 1 = \gamma_o(G) - 1 = \frac{n - l(G) + s(G)}{3} - 1 = \frac{n - l(G) + s(G) - 3}{3}.$$

D'autre part, par le Théorème 3.3, $\gamma_o(G') \geq \frac{n' - l' + s'}{3} = \frac{n - l(G) + s(G) - 1}{3}$. Donc on obtient $\frac{n - l(G) + s(G) - 1}{3} \leq \gamma_o(G') \leq \frac{n - l(G) + s(G) - 3}{3}$, qui est une contradiction. On en déduit que pour tout arête \overline{xy} de C , une seule extrémité x ou y est dans D et donc soit $|V(C) \cap D| = \frac{|V(C)| + 1}{2}$ et dans ce cas il existe une arête xy telle que $x, y \in D$, qui est une contradiction, soit $|V(C) \cap D| = \frac{|V(C)| - 1}{2}$ et dans ce cas il existe une arête xy telle que x et y ne soient pas dans D , ce qui est aussi une contradiction. \square

Théorème 3.5. (*Bouzefrane et al.[7], 2018*) Soit G un graphe unicycle connexe d'ordre n , de cycle C , avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets support tel que $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. Alors pour tout $\gamma_o(G)$ -ensemble D , tout sommet de $V(C) - D$ est de degré deux.

Preuve. Soit D un $\gamma_o(G)$ -ensemble et soit y un sommet de $C - D$ tel que $\deg_G(y) \geq 3$. Supposons x, z sont les voisins de y dans C et soit x' l'autre voisin de x dans C . D'après la preuve du Théorème 3.4, les deux sommets x, z sont dans D et $x' \notin D$. Donc, on est dans le Cas 1.2 de la preuve du Théorème 3.3, puisque $x \in D, w \notin D$ et $\deg_G(y) \geq 3$. On sait alors que s'il existe un sommet w voisin de y tel que $w \notin D$ et par suite $w \neq z$ car $z \in D$. En supprimant l'arête wy , on obtient $\gamma_o(G) > \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$ ce qui est une contradiction. Ainsi, tous les voisins de y sont dans D . Soit $G' = (G - \{x, y\})$. Si $\deg_G(x) = 2$, G' est un arbre d'ordre $n(G') = n' = n$ avec $l(G') = l' = l(G) + 1$ et $s(G') = s' = s(G) + 1$. L'ensemble $(D - \{x\}) \cup \{x'\}$ est un (aog) de G' et donc $\gamma_o(G') \leq |D| = \frac{n-l(G)+s(G)-3}{3}$. D'autre part, par le Théorème 3.1, on a

$$\gamma_o(G') \geq \frac{n' - l' + s' + 1}{3} = \frac{n - l(G) - 1 + S(G) + 1 + 1}{3} = \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3}.$$

Donc on obtient, $\frac{n-l(G)+s(G)-1}{3} \leq \gamma_o(G') \leq \frac{n-l(G)+s(G)-3}{3}$, qui est une contradiction. Supposons maintenant que $\deg_G(x) \geq 3$. G' est un arbre d'ordre $n(G') = n' = n$ avec $l(G') = l' = l(G) + 1$ et $s(G') = s' = s(G)$. L'ensemble D est un (aog) de G' et donc $\gamma_o(G') \leq |D| = \frac{n-l(G)+s(G)-3}{3}$. D'autre part, par le Théorème 3.1, on a $\gamma_o(G') \geq \frac{n' - l' + s' + 1}{3} = \frac{n-l(G)-1+S(G)+1+1}{3}$ ce qui est une contradiction. \square

Théorème 3.6. (*Bouzefrane et al.[7], 2018*) Soit G un graphe unicycle connexe d'ordre n de cycle C , avec $l(G)$ feuille et $s(G)$ sommets support tel que $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$. Alors pour tous $\gamma_o(G)$ -ensemble D , tout sommet de $C \cap D$ est un sommet support.

Preuve. Soit D un $\gamma_o(G)$ -ensemble. Supposons qu'il existe un sommet x de $C \cap D$ qui n'est pas un sommet support. Soient y, z les voisins de x dans C . Par les Théorèmes 3.4 et 3.5, on sait que les deux sommets y, z sont de degrés deux et ne sont pas dans D . Donc y, z ne sont pas des sommets supports. Sans perte de généralité, on suppose que les autres voisins de z et y dans C sont des sommets supports. Si $\deg_G(x) = 2$,

supprimons l'arête xy de G , on obtient un graphe G' qui est un arbre d'ordre $n(G') = n$ avec $l(G') = l' = l(G) + 2$ et $s(G') = s' = s(G) + 1$. L'ensemble $(D - \{x\}) \cup \{z\}$ est une (aog) de G' et donc $\gamma_o(G') \leq |D| = \frac{n-l(G)+s(G)-3}{3}$. D'autre part le Théorème 3.1, donne

$$\gamma_o(G') \geq \frac{n' - l' + s' + 1}{3} = \frac{n - l(G) - 2 + s(G) + 1 + 1}{3} = \frac{n - l(G) + s(G)}{3}.$$

On obtient donc $\gamma_o(G') = \frac{n-l(G)+s(G)}{3} = \frac{n'-l'+s'+1}{3}$. Donc au vu du Théorème 3.1, $G' \in \mathcal{F}$. ou G' a deux sommets support z et son voisin, et cela est impossible par la construction de \mathcal{F} . Donc $\deg_G(x) \geq 3$. \square

Fait 1. x n'a pas de sommet support comme voisin

Preuve. Supposons que x est adjacent a un sommet support w . Par la preuve du Théorème 3.4, $w \notin C$. En supprimant l'arête xw de G , le graphe G' obtenu a deux composantes connexes, G_0 qui contient le cycle C et l'arbre T' qui contient w . G_0 est un graphe unicycle d'ordre $n(G_0) = n_0$ avec $l(G_0) = l_0$ et $s(G_0) = s_0$. T' est d'ordre $n(T') = n'$ avec $l(T') = l'$ et $s(T') = s'$. Les ensembles $D \cap V(G_0)$, $D \cap V(T')$ sont les deux (aog) de G et T' respectivement. On a $n = n_0 + n'$, $l(G) = l_0 + l'$ et $s(G) = s_0 + s'$. Nous obtenons par les Théorèmes 3.1 et 3.3

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G_0) + \gamma_o(T') \geq \frac{n_0 - l_0 + s_0}{3} + \frac{n' - l' + s' + 1}{3} = \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3},$$

qui est une contradiction. \square

Fait 2. Tout voisin de x dans $V(G) - C$ est au plus de degré 2.

Preuve. Soit y un voisin de x dans $V(G) - C$ tel que $\deg_G(y) \geq 3$. Selon le Fait 1, y n'est pas un sommet support. De plus, $y \notin D$, car sinon, en supprimant l'arête xy , et en procédant de la même manière que dans la preuve du Fait 1, nous obtiendrions une contradiction. Si y a tous ses voisins dans D , alors en supprimant l'arête xy , nous obtenons un graphe avec deux composantes connexes et nous aboutissons à la même contradiction qu'auparavant. Ainsi, y a au moins un voisin dans $V(G) - (C \cap D)$, disons w . Dans ce cas, en supprimant l'arête yw et par l'argument similaire à celui du précédent cas, nous obtenons à nouveau une contradiction. \square

Soit y le voisin de x dans $V(G) - C$ tel que $\deg_G(y) = 2$ et soit w l'autre voisin de y qui est différent de x

Fait 3. *Chaque sommet $w \notin C$ de distance 2 de x est un sommet support.*

Preuve. Supposons que w n'est pas un sommet support. Comme $x \in D$ et $y \notin D$, alors $w \in D$. Supprimons l'arête xy . Le graphe obtenu a deux composantes connexes G_0 qui contient un cycle C et l'arbre T' qui contient w . G_0 est un graphe unicycle d'ordre $n(G_0) = n_0$ avec $l(G_0) = l_0$ et $s(G_0) = s_0$. T' est d'ordre $n(T') = n'$ avec $l(T') = l'$ et $s(T') = s'$. Les ensembles $D \cap V(G_0)$ et $D \cap V(T')$ sont une *(aog)* de G_0 et T' respectivement. On a $n = n_0 + n'$, $l(G) = l_0 + l' - 1$ et $s(G) = s_0 + s' - 1$. On obtient par les Théorèmes 3.1 et 3.3

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G_0) + \gamma_o(T') \geq \frac{n_0 - l_0 + s_0}{3} + \frac{n' - l' + s' + 1}{3} = \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3},$$

qui est une contradiction.

Maintenant, si x a tous ses voisins dans $V(G) - C$ qui sont de degré 2, soit $k = \deg_G(x) - 2$ et soit $\{y_i, i = 1, \dots, k\}$, l'ensemble de ces voisins. Pour $i = 1, \dots, k$, soit w_i l'autre voisin de y_i qui est différent de x . Nous supprimons à partir de G , l'ensemble $\{y_i w_i, i = 1, \dots, k\}$. Nous obtenons les composantes $\cup_{i=1}^k T_i$, G_0 , où T_i est un arbre qui contient w_i , d'ordre n_i avec $l(T_i) = l_i$, $s(T_i) = s_i$ et G_0 la composante qui contient C et qui est un graphe unicycle d'ordre n_0 avec $l(G_0) = l_0$, $s(G_0) = s_0$. Posons $T' = \cup_{i=1}^k T_i$. Clairement

$$n(T') = n' = \sum_{i=1}^k n_i, \quad l(T') = l' = \sum_{i=1}^k l_i \quad \text{et} \quad s(T') = s' = \sum_{i=1}^k s_i.$$

Par les Faits 2 et 3, comme y_i est de degré deux et w_i est un sommet support pour $i = 1, \dots, k$, il s'ensuit que $l(G) = l_0 + l' - k$, $s(G) = s_0 + s' - 1$ et $n = n_0 + n'$. Les ensembles $D \cap V(G_0)$, $D \cap V(T_i)$ pour $i = 1, \dots, k$, sont une *(aog)* de G_0 et T_i respectivement. Par les Théorèmes 3.1 et 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_o(G) &\geq \gamma_o(G_0) + \gamma_o(T') \geq \frac{n_0 - l_0 + s_0}{3} + \frac{n' - l' + s' + k}{3} = \frac{n - l(G) - k + s(G) + 1 + k}{3} \\ &= \frac{n - l(G) + s(G) + 1}{3} \end{aligned}$$

qui est une contradiction. Donc il existe un voisin de x_0 de degré un. Ainsi, x_0 est un sommet support. \square

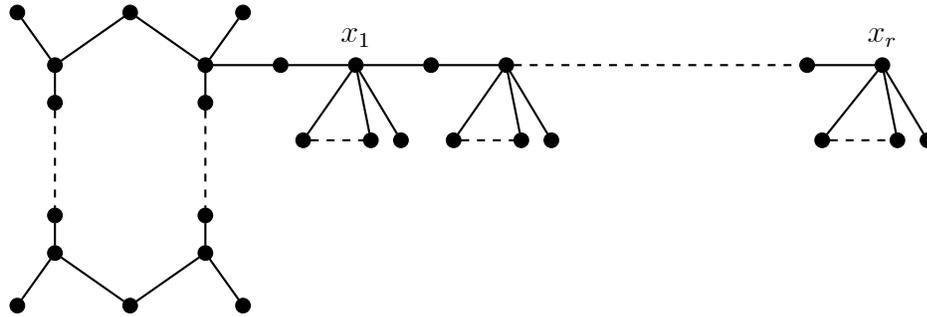


Figure 3.2: La famille \mathcal{G}_0

3.2 Graphes unicycles avec $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$

Nous proposons dans ce qui va suivre une caractérisation de tous les graphes unicycles atteignant la borne du Théorème 3.3. Dans ce but, nous introduisons la famille \mathcal{G} de graphes unicycles que l'on peut obtenir à partir d'une séquence $G_1, G_2, \dots, G_k, (k \geq 1)$ d'unicycles, où $G = G_k$ et G_1 est le graphe obtenu à partir d'un cycle pair d'ordre k avec les sommets x_1, x_2, \dots, x_k dans cet ordre en ajoutant $\frac{k}{2}$ arêtes telles qu'exactlyement l'une d'elles est incidente à x_{2i-1} pour chaque i dans $\{1, \dots, \frac{k}{2}\}$, et si $k \geq 2$, G_{i+1} est obtenu récursivement à partir de G_i par l'une des deux opérations définies ci-dessous.

- **Opération O_1** : Attacher un sommet en le joignant par une arête à n'importe quel sommet support de G_i .
- **Opération O_2** : Attacher une chaîne $P_3 = abc$ en joignant a par une arête à n'importe quel sommet support de G_i .

Avant de prouver que la famille \mathcal{G} contient tous les graphes unicycles atteignant la borne inférieure du Théorème 3.3, nous devons prouver que la famille \mathcal{G}_0 suivante qui est inclus dans \mathcal{G} atteint aussi la borne du Théorème 3.3.

Soit \mathcal{G}_0 une famille de graphes obtenus à partir de $r \geq 1$ étoiles disjointes en ajoutant d'abord $r - 1$ arêtes telles que sont incidentes seulement aux centre des étoiles et en

joignant un sommet centre d'une étoile par une arête e à un sommet support de G_1 puis en subdivisant e et les $r - 1$ arêtes qui connectent les centres exactement une seule fois (voir Figure.3.2), puis nous appliquons l'opération O_1 à ce graphe résultant. Il est clair que chaque graphe de \mathcal{G}_0 est dans \mathcal{G} .

Proposition 3.7. (*Bouzefrane et al.[7], 2018*) *Soit $G \in \mathcal{G}_0$ un graphe d'ordre n avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets support. Donc $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$.*

Preuve. Soit C l'unique cycle pair de G et soient L_c, S_c le nombre des feuilles et des sommets supports de C respectivement. Soient T et $G \setminus T$ les deux composantes connexes de $G - xy$ où x est un sommet support de C et $y \notin C$ est un voisin de x de degré 2 dans G . Il est clair que T est un arbre d'ordre $n(T)$ et appartient à \mathcal{F} . Donc $n(T) = n - (L_c + 2S_c)$, $l(T) = l(G) - L_c + 1$ et $s(T) = s(G) - S_c$. Puis par l'Observation 1,

$$\gamma_o(G) = \gamma_o(T) + \gamma_o(G \setminus T) = \gamma_o(T) + S_c.$$

Comme T est un arbre de \mathcal{F} , il s'ensuit que $\gamma_o(T) = \frac{n-l(T)+s(T)+1}{3}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \gamma_o(G) &= \frac{n(T) - l(T) + s(T) + 1}{3} + S_c \\ &= \frac{n(T) - (L_c + 2S_c) - (l(G) - L_c + 1) + 1 + s(G) - S_c + 3S_c}{3} \\ &= \frac{n - l(G) + s(G)}{3}. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.8. (*Bouzefrane et al.[7], 2018*) *Si G est un unicycle connexe d'ordre n ayant $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets supports alors, $\gamma_o(G) = \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$ si et seulement si $G \in \mathcal{G}$.*

Preuve. Soit $G \in \mathcal{G}$ et C_k l'unique cycle pair de G d'ordre k . Supprimons de G , $\frac{k}{2}$ arêtes $x_i y_i$ ($1 \leq i \leq \frac{k}{2}$) telles que x_i est un sommet support de C_k , et $y_i \notin C_k$ est un voisin de x_i de degré 2 dans G . Soient $T_1, T_2, \dots, T_{\frac{k}{2}}$ et H_1 les composantes connexes du graphe obtenu. H_1 est la composante qui contient le cycle C_k et T_i est un arbre. Nous observons que pour chaque $i \in \{1, \dots, \frac{k}{2}\}$, T_i est dans \mathcal{F} . Ainsi par le Théorème 3.1,

$$\gamma_o(T_i) = \frac{n(T_i) - l(T_i) + s(T_i) + 1}{3} \text{ pour chaque } i \in \{1, \dots, \frac{k}{2}\} \quad (3.2)$$

Posons $G_0 = G \setminus \cup_{i=2}^{\frac{k}{2}} T_i$. Alors G_0 est le sous-graphe induit par les sommets de H_1 et T_1 . Clairement, $G_0 \in \mathcal{G}_0$. Par conséquent, par l'Observation 3.2, l'égalité (3.2) et proposition 3.7, on obtient,

$$\begin{aligned} \gamma_o(G) &= \gamma_o(G_0) + \sum_{i=2}^{\frac{k}{2}} \gamma_o(T_i) = \frac{n(G_0) - l(G_0) + s(G_0)}{3} + \sum_{i=2}^{\frac{k}{2}} \frac{n(T_i) - l(T_i) + s(T_i) + 1}{3} \\ &= \frac{n(G_0) - l(G_0) + s(G_0)}{3} + \sum_{i=2}^{\frac{k}{2}} \frac{n(T_i) - l(T_i) + s(T_i)}{3} + \frac{\frac{k}{2} - 1}{3}. \end{aligned}$$

Comme

$$n = n(G_0) + \sum_{i=2}^{\frac{k}{2}} n(T_i), s(G) = s(G_0) + \sum_{i=2}^{\frac{k}{2}} s(T_i) \text{ et } l(G) = l(G_0) + \sum_{i=2}^{\frac{k}{2}} l(T_i) - \left(\frac{k}{2} - 1\right),$$

il s'ensuit que

$$\gamma_o(G) = \frac{n - l(G) + s(G)}{3}.$$

Inversement, soit D un $\gamma_o(G)$ -ensemble et soit x un sommet dans $C \cap D$. Par le Théorème 3.6, x est un sommet support. Soit y un voisin de x dans $V(G) - C$ de degré 2, (un tel sommet existe par le Fait 2). Supposons que w est l'autre voisin de y dans $V(G) - C$. Il s'ensuit par le Fait 3 que w est un sommet support. Supprimons l'arête xy de G . Le graphe obtenu a deux composantes connexes G'' qui est un unicycle contenant x , et T' qui est un arbre qui contient y . G'' est un unicycle de cycle C qui est un cycle pair par le Théorème 3.4. Soit S_c, L_c le nombre de sommets supports et de feuilles de C , respectivement. Comme chaque sommet de $C \cap D$ est un sommet support (par le Théorème 3.6) et tout sommet de $C - D$ est de degré deux par le Théorème 3.5, donc si $S_c = L_c$, alors $G'' = G_1 \in \mathcal{G}$, car sinon, G'' peut être obtenu à partir de G_1 en utilisant l'opération O_1 et donc $G'' \in \mathcal{G}$. Soit G'' d'ordre n'' avec $l(G'') = l'', s(G'') = s''$ et soit T' d'ordre n' avec $l(T') = l', s(T') = s'$. Comme $G'' \in \mathcal{G}$, il s'ensuit que $\gamma_o(G'') = \frac{n'' - l'' + s''}{3}$. Les ensembles $D \cap V(G'')$ et $D \cap V(T')$ sont des (aog) de G'' et T' respectivement, alors

$$\gamma_o(G) \geq \gamma_o(G'') + \gamma_o(T'). \quad (3.3)$$

D'autre part, comme x et w sont des sommets supports et y est de degré deux, alors $n = n'' + n', l(G) = l'' + l' - 1, s(G) = s'' + s'$ et tout $(\gamma_o(G'') - \text{ensemble}) \cup (\gamma_o(T'))$

-ensemble) est un (*aog*) de G , et ainsi,

$$\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G'') + \gamma_o(T'). \quad (3.4)$$

Par les inégalités (3.3), (3.4),

$$\gamma_o(G) = \gamma_o(G'') + \gamma_o(T').$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma_o(T') &= \gamma_o(G) - \gamma_o(G'') \\ &= \frac{n - l(G) + s(G)}{3} - \frac{n'' - l'' + s''}{3} \\ &= \frac{(n - n'') - (l(G) - l'') + (s(G) - s'')}{3} \\ &= \frac{n' - (l' - 1) + s'}{3} = \frac{n' - l' + s' + 1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $T' \in \mathcal{F}$. Donc, si $G'' = \mathcal{G}_1$, alors $G = \mathcal{G}_0 \in \mathcal{G}$, sinon G peut être obtenu à partir de \mathcal{G}_0 par l'opération O_1 et donc $G \in \mathcal{F}$, ce qui complète la preuve. \square

CHAPITRE 4

CARACTERISATION DES ARBRES AYANT UNE ALLIANCE OFFENSIVE GLOBAL MINIMUM UNIQUE

Un ensemble dominant minimum unique dans un graphe est un ensemble dominant minimum qui est unique, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul tel ensemble dans ce graphe. Le problème de trouver un ensemble dominant minimum unique est un problème difficile et important en théorie des graphes avec de nombreuses applications pratiques du monde réel.

Les graphes avec un ensemble dominant minimum unique, où par rapport à un paramètre de domination, ont suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs au cours de ces dernières décennies.

4.1 Ensemble minimum unique par rapport à un paramètre de domination pour quelques classes de graphes

Dans ce chapitre, on traite la préservation de la propriété des *aogu*-arbres, puis nous fournissons de cette classe d'arbres après avoir effectué une opération dessus. Ainsi, nous fournissons une caractérisation constructive de l'arbre *aogu*.

Les graphes avec un ensemble dominant minimum unique ont été étudiés, par Gunther et al. [37]. Ces auteurs ont initié ce concept lié à l'unicité dans la théorie de domination et ont étudié quelques propriétés structurelles des graphes ayant cette propriété d'unicité. Certaines travaux ont été établis sur différentes classes de graphes connus par exemple, par Fischermann et Volkmann [28] pour les arbres et dans [29] pour les graphes cactus; par Fischermann [32] pour les graphes blocs; par Hedetniemi [42] pour les produits cartésiens de certains graphes et dans [46] pour certains graphes de produits cartésiens répétés. En ce qui concerne l'unicité liée aux autres invariants de domination, des études ont été

entreprises par Blidia *et al.* [9] pour le nombre de localisation-domination; par Chellali et Haynes [18] pour le nombre de domination couplée et pour le nombre de domination double [17]; Chellali et Rad [19] pour le nombre de domination romaine; et par Haynes et Henning [41] pour le nombre de domination totale. D'autres travaux sur ce sujet se trouvent dans [[27], [30], [31], [33], [47], [52] et [65]].

Rappelons que D est une alliance offensive globale d'un graphe G si pour tout $v \in V - D$, on a $|N_G[v] \cap D| \geq |N_G[v] - D|$.

Nous présentons d'abord quelques résultats concernant les *aogu*-arbres dont certains sont simples et leurs preuves seront donc omises.

Observation 4.1. (*Bouzefrane et al. [6], 2021*) Soit T un arbre d'ordre au moins trois et soit $u \in S(T)$. Alors,

- (i) il existe un $\gamma_o(T)$ -ensemble qui contient $S(T)$,
- (ii) si D est un *aogu*-arbre, alors D contient $S(T)$, et aucune feuille.
- (iii) si $L_T(u) \geq 2$, alors u appartient à tout $\gamma_o(T)$ -ensemble.

Preuve. (i) et (ii) sont évidentes. Soit S un $\gamma_o(T)$ -ensemble et on suppose que (iii) n'est pas satisfait. Dans ce cas, toutes les feuilles adjacentes à u devraient être dans S et l'ensemble $(S - L_T(u)) \cup \{u\}$ est une (*aog*) de T de cardinalité inférieure à $\gamma_o(T)$, ce qui est une contradiction. \square

Observation 4.2. (*Bouzefrane et al.[6], 2021*) Soit T un arbre obtenu d'un arbre non trivial T' en joignant un nouveau sommet v à un sommet support u de T' . Soit D et D' des $\gamma_o(T)$ -ensembles de T et T' , respectivement. Alors,

- (i) $|D'| = |D|$,
- (ii) $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble,
- (iii) si T est un *aogu*-arbre tel que u est dans tout $\gamma_o(T')$ -ensemble, alors T' est un *aogu*-arbre.

Preuve. Par l'Observation 4.1 (iii), et puisque $l_T(u) \geq 2$, u doit être dans D .

(i) Il est clair que D est une (aog) de T' , et alors $|D'| \leq |D|$. Par l'Observation 4.1 (i), on peut supposer que $u \in D'$. Par conséquent, D' peut être étendu à une (aog) de T , ce qui implique $|D| \leq |D'|$. D'où l'égalité.

(ii) Puisque $D \cap V(T') = D$ est une (aog) de T' de cardinalité $|D| = |D'|$, on en déduit que $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble.

(iii) L'Item (i) avec le fait que u est dans tout $\gamma_o(T')$ implique que D' peut être étendu à un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Donc l'unicité de D en tant que $\gamma_o(T)$ -ensemble conduit à $D' = D$. Par conséquent, D' est l'unique $\gamma_o(T)$. \square

Observation 4.3. (Bouzefrane et al.[6], 2021) Soit T un arbre obtenu d'un arbre non trivial T' , différent de P_2 , en joignant le sommet centre y de la chaîne $P_3 = x-y-z$ à un sommet support v de T' . Soient D et D' des $\gamma_o(T)$ -ensembles de T et T' , respectivement tels que chacun d'eux contient tous les sommets supports. Alors,

$$(i) |D'| = |D| - 1,$$

(ii) $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble,

(iii) si T est un aogu-arbre, alors T' est un aogu-arbre.

Preuve. (i) Puisque $y \in D$ et $v \in D \cap D'$, l'ensemble $D - \{y\}$ est une (aog) de T' et par suite $|D'| \leq |D| - 1$. De plus, puisque $v \in D'$, D' peut être étendu à une (aog) de T en ajoutant y . Il s'ensuit que, $|D| \leq |D' \cup \{y\}| = |D'| + 1$ D'où l'égalité.

(ii) Puisque $D \cap V(T') = D - \{y\}$ est une (aog) de T' de cardinalité $|D| - 1 = |D'|$, $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble.

(iii) Soit $B = \{y\}$. Par l'Item (i), D' peut être étendu à un $\gamma_o(T)$ -ensemble en ajoutant le sommet unique de B . L'Item (ii) et l'unicité de D impliquent que $D' = D \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_o(T')$ -ensemble. \square

Observation 4.4. (Bouzefrane et al.[6], 2021) Soit T un arbre obtenu d'un arbre non trivial T' en ajoutant une étoile subdivisée SS_k avec k feuilles, $k \geq 1$, puis en identifiant

son centre à une feuille v de T' . Soit w le sommet support adjacent à v dans T' , et soient D et D' des $\gamma_o(T)$ -ensembles de T et T' , respectivement. Si $w \in D \cap D'$, alors les trois propriétés suivantes sont satisfaites.

- (i) $|D'| = |D| - k$
- (ii) $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble,
- (iii) Si T est un *aogu*-arbre, alors T' est un *aogu*-arbre.

Preuve. Soit $B = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ l'ensemble des sommets supports de SS_k . La définition de T implique que chaque sommet de B est adjacent à v .

(i) il est clair que chaque sommet dans B reste un sommet support dans T . D'où, par l'Observation 4.1(i), on peut supposer que D contient tous les sommets de B . Donc, puisque $w \in D$ et $v \notin D$, $D - B$ est une (*aog*) de T' , et par conséquent, $|D'| \leq |D - B| = |D| - k$. Nous prouvons maintenant l'inégalité inverse. $w \in D'$ implique que D' peut être étendu à une (*aog*) de T en ajoutant tous les sommets de B . Donc, $|D| \leq |D' \cup B| = |D'| + k$ et l'égalité est atteinte.

(ii) La preuve est similaire à celle de l'Observation 4.3 (ii), en prenant $D \cap V(T') = D - B$ □

(iii) La preuve est similaire à celle de l'Observation 4.3(iii).

Observation 4.5. (*Bouzefrane et al.[6], 2021*) Soit $V(T')$ un ensemble de sommets d'un arbre T' , et soit D' un $\gamma_o(T')$ -ensemble tel que $V(T') - D'$ à un sommet w de degré $q \geq 2$ dans T' et $|N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| \leq 1$.

Soit p un entier positif tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} p \leq q - 1, & \text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 0, \\ \text{ou} & \\ p \leq q - 3, & \text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 1. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Soit T un arbre obtenu à partir de T' en ajoutant p étoiles subdivisées $SS_{k_1}, \dots, SS_{k_p}$, $k_i \geq 2$ pour $1 \leq i \leq p$, et en joignant chaque centre x_i de SS_{k_i} , $1 \leq i \leq p$, à w . Soit D un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Si w et x_1, x_2, \dots, x_p ne sont pas dans D , alors les trois propriétés suivantes sont satisfaites

$$(i) |D'| = |D| - \sum_{i=1}^p k_i.$$

(ii) $D \cap V(T')$ est un $\gamma_o(T')$ -ensemble,

(iii) si T est un *aogu*-arbre, alors T_0 est aussi un *aogu*-arbre.

Preuve. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, soit B_i l'ensemble des sommets supports de SS_{k_i} .

(i) Puisque les sommets w, x_1, x_2, \dots, x_p ne sont pas dans D , tous les sommets de $\cup_{i=1}^p B_i$ doivent être dans D . Par conséquent, $D - \cup_{i=1}^p B_i$ est un (*aog*) de T' , ce qui donne $|D'| \leq |D| - \sum_{i=1}^p k_i$. Pour l'inégalité inverse, nous prouvons d'abord que l'ensemble $A = \cup_{i=1}^p B_i \cup D'$ est une (*aog*) de T , c'est à dire, $|N_T[z] \cap A| \geq |N_T[z] - A|$ est vérifiée, pour tout $z \in \{w, x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Pour cela, nous considérons deux cas en selon la valeur de z .

Cas 1. $z = x_i$, pour un certain $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Nous avons alors,

$$|N_T[z] \cap A| = |N_T[z] \cap (\cup_{i=1}^p B_i)| = k_i \geq 2,$$

et

$$|N_T[z] - A| = |\{z, w\}| = 2.$$

Donc, $|N_T[z] \cap A| \geq |N_T[z] - A|$, pour tout $z \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

Cas 2. $z = w$.

On a

$$|N_T[z] \cap A| = \begin{cases} q, & \text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 0, \\ q - 1, & \text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 1, \end{cases}$$

et

$$|N_T[z] - A| = \begin{cases} p + 1, & \text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 0, \\ p + 2, & \text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 1. \end{cases}$$

D'après (4.1), on a aussi, $|N_T[z] \cap A| \geq |N_T[z] - A|$, pour $z = w$. Par conséquent, A est une (*aog*) de T , et

$$|D| \leq |A| = |D'| + \sum_{i=1}^p k_i.$$

D'où, l'égalité est atteinte.

(ii) Puisque $D \cap V(T') = D - \cup_{i=1}^p B_i$, la preuve de ce cas est similaire à celle de l'Observation 4.3 (ii).

(iii) La preuve est similaire à celle de l'Observation 4.3 (iii), en prenant $B = \cup_{i=1}^p B_i$. \square

4.2 Résultats principaux

4.2.1 Construction de la famille \mathcal{F}

Afin de caractériser les arbres avec une alliance offensive globale minimum unique (*aogu*-arbre), nous définissons une famille \mathcal{F} de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_r , $r \geq 1$, d'arbres, où T_1 est la chaîne P_3 centrée à un sommet y , $T = T_r$, et, si $r \geq 2$, l'arbre T_{i+1} est obtenu à partir de T_i , $1 \leq i \leq r-1$, par une des opérations suivantes. Soit $A(T_1) = \{y\}$.

- Opération \mathcal{O}_1 : Attacher un sommet en le joignant à un sommet support quelconque de T_i . Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i)$.
- Opération \mathcal{O}_2 : Attacher une chaîne $P_3 = u-v-w$ en joignant v à un sommet de T_i . Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{v\}$.
- Opération \mathcal{O}_3 : Ajouter une étoile subdivisée SS_k avec k feuilles, $k \geq 1$, puis en identifier son centre à une feuille de T_i , où son sommet support w dans T_i satisfait la condition C_0 suivante.

(C_0) : Si $|N_{T_i}[w] \cap A(T_i)| \geq |N_{T_i}(w) \cap (V(T_i) - A(T_i))| + 1$, alors,

* soit $l_{T_i}(w) = 2$ et $N_{T_i}(w) - A(T_i)$ a au moins un sommet w_t , tel que,

$$|N_{T_i}(w_t) \cap A(T_i)| \leq |N_{T_i}[w_t] \cap (V(T_i) - A(T_i))| + 1,$$

* ou $l_{T_i}(w) = 1$ et $N_{T_i}(w) - A(T_i)$ a deux sommets w_p et w_q , tels que,

$$|N_{T_i}(w_l) \cap A(T_i)| \leq |N_{T_i}[w_l] \cap (V(T_i) - A(T_i))| + 1, \text{ pour } l \in \{p, q\}.$$

Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup B$, où B est l'ensemble des sommets supports de SS_k .

- Opération \mathcal{O}_4 : Soit $w \in V(T_i) - A(T_i)$ un sommet de degré $q \geq 2$ dans T_i , tel que $|N_{T_i}(w) \cap (V(T_i) - A(T_i))| \leq 1$. Attacher $p \geq 1$ étoiles subdivisées SS_{k_i} , $k_i \geq 2$ pour $1 \leq i \leq p$, en joignant chaque centre x_i de SS_{k_i} , à w , tel que

$$p \leq \begin{cases} q - 1 & \text{si } |N_{T_i}(w) \cap (V(T_i) - A(T_i))| = 0, \\ q - 3 & \text{si } |N_{T_i}(w) \cap (V(T_i) - A(T_i))| = 1. \end{cases}$$

Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (\cup_{i=1}^p B_i)$, où B_i est l'ensemble des sommets supports de SS_{k_i} .

Avant d'énoncer notre résultat principal, nous devons prouver un lemme supplémentaire.

Lemme 4.6. (*Bouzefrane et al. [6], 2021*) Si $T \in \mathcal{F}$, alors $A(T)$ est l'unique $\gamma_o(T)$ -ensemble.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{F}$. On utilise une induction sur le nombre d'opérations r exécutées pour construire l'arbre T . La propriété est vraie si $r = 1$, puisque $T = T_1$ est la chaîne P_3 centrée à y et $A(T) = \{y\}$ est l'unique $\gamma_o(T)$ -ensemble. Cela établit le cas de base. Supposons que pour tout arbre $T' \in \mathcal{F}$ qui peut être construit à partir de $r - 1$ opérations de T_1 , $A(T')$ est l'unique $\gamma_o(T')$ -ensemble. Soit $T = T_r$, avec $r \geq 2$, et $T' = T_{r-1}$. On considère quatre cas, selon l'opération utilisée.

Case 1. T est obtenu à partir de T' en utilisant \mathcal{O}_1 .

Supposons que T est obtenu à partir de T' en attachant un sommet supplémentaire à un sommet support u de T' . En vue de l'Observation 4.1 (ii), $u \in A(T')$. Par conséquent, $A(T')$ peut être étendu à une (aog) de T . Par l'Observation 4.2 (i), $\gamma_o(T) = \gamma_o(T')$, puis $A(T')$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Puisque $A(T')$ est l'unique $\gamma_o(T')$ -ensemble, nous en déduisons que $A(T) = A(T')$ est l'unique $\gamma_o(T)$ -ensemble.

Case 2. T est obtenu de T' en utilisant Opération \mathcal{O}_2 .

$A(T') \cup \{v\}$ est une (aog) de T . Par l'Observation 4.3 (i), $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$, puis $A(T') \cup \{v\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Puisque $A(T')$ est l'unique $\gamma_o(T')$ -ensemble, nous en déduisons que $A(T) = A(T') \cup \{v\}$ est l'unique $\gamma_o(T)$ -ensemble.

Case 3. T est obtenu de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_3 .

$A(T') \cup B$ est une (aog) de T . Par l'Observation 4.4 (i), $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + k$, puis $A(T') \cup B$

est un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Puisque $A(T')$ est l'unique $\gamma_o(T')$ -ensemble, nous en déduisons que, $A(T) = A(T') \cup B$ est l'unique $\gamma_o(T)$ -ensemble.

Case 4. T est obtenu de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_4 .

$A(T') \cup (\cup_{i=1}^p B_i)$ est une *aog* de T . Par l'Observation 4.5 (i), $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + \sum_{i=1}^p k_i$, puis $A(T') \cup (\cup_{i=1}^p B_i)$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Puisque $A(T')$ est l'unique $\gamma_o(T')$ -ensemble, nous en déduisons que $A(T) = A(T') \cup (\cup_{i=1}^p B_i)$ est l'unique $\gamma_o(T)$ -ensemble. \square

Notons que dans chacun des quatre cas précédents, $A(T_{i+1})$ est obtenu à partir de $A(T_i)$ en ajoutant tous les sommets supports à $T_{i+1} - T_i$. Par conséquent, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 4.7. (*Bouzefrane et al.[6], 2021*) Soit $T \in \mathcal{F}$ et $S(T)$ un ensemble de sommets supports dans T . Alors, $\gamma_o(T) \geq |S(T)|$.

4.3 Caractérisation des *aogu*-arbres

Nous sommes maintenant prêts à prouver notre résultat principal.

Théorème 4.8. (*Bouzefrane et al. [6], 2021*) Un arbre T est un *aogu*-arbre si et seulement si $T = K_1$ ou $T \in \mathcal{F}$.

Preuve. Il est clair que $T = K_1$ est une *aogu*-arbre. Aussi, le Lemme 4.6 montre que tout arbre de \mathcal{F} est une *aogu*-arbre. Nous prouvons l'inverse par récurrence sur le nombre n de sommets de T . Pour $n = 1$ ou $n = 3$, le résultat est trivial, mais pas pour $n = 2$, puisque P_2 n'est pas une *aogu*-arbre. Pour $n = 4$, $T \in \{K_{1,3}, P_4\}$. Clairement que P_4 n'est pas une *aogu*-arbre, tandis que $K_{1,3}$ est une *aogu*-arbre qui peut être obtenu à partir d'un P_3 à l'aide de l'Opération \mathcal{O}_1 . Par conséquent, $K_{1,3} \in \mathcal{F}$. Pour $n = 5$, $T \in \{S_{1,2}, K_{1,4}, P_5\}$. La double étoile $S_{1,2}$ n'est pas un *aogu*-arbre, tandis que $K_{1,4}$ et P_5 sont des *aogu*-arbres, puisque $K_{1,4}$ peut être obtenu à partir de $K_{1,3}$ en utilisant l'Opération \mathcal{O}_1 , et P_5 peut être obtenu à partir de P_3 en utilisant \mathcal{O}_3 . Par conséquent, $K_{1,4}$ et P_5 sont dans \mathcal{F} . Ceci établit le cas de base.

Supposons maintenant $n \geq 6$, et tout arbre T' d'ordre n' , $3 \leq n' < n$, a un $\gamma_o(T')$ -ensemble unique dans \mathcal{F} . Soit T un arbre d'ordre n avec un $\gamma_o(T)$ -ensemble unique D et soit $s \in S(T)$. Par l'Observation 4.1 (ii), on a $s \in D$. Si $l_T(s) \geq 3$, soit T' un arbre obtenu de T en supprimant une feuille adjacente à s et soit D' un $\gamma_o(T')$ -ensemble. Alors, clairement $n' = |V(T')| = n - 1 \geq 5$, $l_{T'}(s) \geq 2$ et donc, $s \in D'$ par l'Observation 4.1 (iii). Selon l'Observation 4.2 (iii), T' est une *aogu*-arbre. En appliquant l'hypothèse d'induction à T' , nous obtenons $T' \in \mathcal{F}$. Ainsi, T est obtenu à partir de T' en appliquant l'Opération \mathcal{O}_1 , ceci implique que $T \in \mathcal{F}$. Supposons maintenant que

$$\text{Pour tout } x \in S(T), l_T(x) \leq 2. \quad (4.2)$$

Nous enracinons T à un sommet r d'excentricité maximum. Soit u un sommet support à distance maximum de r et soit u' une feuille adjacente à u . Soit v et w les parents de u et v , respectivement, dans l'arbre enraciné T . Nous considérons deux cas.

Cas 1. $v \in D$.

Si $l_T(u) = 1$, alors $D \cup \{u'\} - \{u\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble, contredisant l'unicité de D en tant qu'un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Par conséquent, par (4.2), $l_T(u) = 2$. Nous affirmons que $v \in S(T)$. Supposons au contraire que $v \notin S(T)$. Alors, soit $w \in D$ et ainsi, $D - \{v\}$ est un *aog* de T de cardinalité inférieure à $|D|$, ce qui est une contradiction avec le fait que D est minimum, soit $w \notin D$ et donc, $(D - \{v\}) \cup \{w\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble, ce qui est une contradiction avec l'unicité de D comme un $\gamma_o(T)$ -ensemble. D'où $v \in S(T)$. Soit $T' = T - T_u$ et D' un $\gamma_o(T')$ -ensemble. Par l'Observation 4.1(i), on peut supposer que D' contient tous les sommets supports dans T' . Puisque $|V(T_u)| = 3$, il s'ensuit que $n' = |V(T')| = n - 3 \geq 3$ et donc, $T' \neq P_2$. Par l'Observation 4.3(iii), T' est un *aogu*-arbre. En appliquant l'hypothèse d'induction, on a $T' \in \mathcal{F}$. Donc, T peut être obtenu à partir de T' par l'Opération \mathcal{O}_2 et donc, $T \in \mathcal{F}$.

Cas 2. $v \notin D$.

Selon l'Observation 4.1(ii), $v \notin S(T)$ et donc, $l_T(v) = 0$. Soit $k = |N_T(v) - \{w\}|$. Nous avons $d_T(v) = k + 1$ et puisque $u \in N_T(v) - \{w\}$, nous en déduisons que $k \geq 1$. Pour $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, soit $u_i \in N_T(v) - \{w\}$ tel que $u_1 = u$. Par le choix de v $u_i \in S(T)$,

$l_T(u_i) \geq 1$ et donc,

$$u_i \in D \text{ pour tout } i. \quad (4.3)$$

Par conséquent, par (4.2), nous avons $1 \leq l_T(u_i) \leq 2$ pour tout i . Supposons d'abord que $l_T(u_j) = 2$ pour un certain $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Sans perte de généralité, soit $j = 1$. Alors, u a un autre voisin $u'' \neq u'$ dans T . Soit $T' = T - \{u''\}$ et D' un $\gamma_o(T')$ -ensemble. Clairement u' est l'unique feuille de u dans T' . Nous affirmons que $u \in D'$. Supposons au contraire que $u \notin D'$. Alors, u' et v doivent être dans D' . Il s'ensuit que $D'' = (D' - \{u'\}) \cup \{u\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble qui est différent de D (puisque v appartient à D'' et non à D), une contradiction. D'où $u \in D'$. Nous avons $n' = n - 1 \geq 5$. Par l'Observation 4.2(iii), T' est un *aogu*-arbre. En appliquant notre hypothèse d'induction à T' , nous obtenons $T' \in \mathcal{F}$. Par conséquent, T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_1 , ce qui implique que $T \in \mathcal{F}$. Supposons maintenant que $l_T(u_i) = 1$ et donc,

$$d_T(u_i) = 2 \text{ pour tout } i. \quad (4.4)$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, soit u'_i l'unique feuille adjacente à u_i (avec $u'_1 = u'$). Nous distinguons deux sous-cas, selon w appartient à D ou non.

Cas 2.1. $w \in D$.

Au vu de (4.4), T_v est une étoile subdivisée SS_k centrée en v . Soit $T' = T - (T_v - \{v\})$. Clairement $v \in L(T')$ et $w \in S(T')$. Si $n' = |V(T')| = 2$, alors T is une araignée blessée avec exactement une arête non-subdivisée et dans ce cas, il n'est pas difficile de voir qu'un tel graphe n'est pas un *aogu*-arbre. Par conséquent, supposons que $n' \geq 3$. Nous affirmons ce qui suit:

Si $|N_T[w] \cap D| \geq |N_T(w) \cap (V(T) - D)| + 1$ avec $l_T(w) \in \{0, 1\}$, alors

- Quand $l_T(w) = 1$, $N_T(w) - D$ a au moins un sommet w_t tel que

$$|N_T(w_t) \cap D| \leq |N_T[w_t] \cap (V(T) - D)| + 1. \quad (4.5)$$

- Quand $l_T(w) = 0$, $N_T(w) - D$ a au moins deux sommets w_p et w_q pour lequel (4.5) est vérifiée.

En effet, supposons d'abord que $l_T(w) = 1$ et supposons qu'il n'y ait pas de sommet dans $N_T(w) - D$ pour lequel (4.5) est vérifiée. Soit w' une feuille adjacente à w dans T . Dans ce cas $(D - \{w\}) \cup \{w'\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble différent de D , une contradiction. Supposons maintenant que $l_T(w) = 0$. Supposons d'abord que $N_T(w) - D$ a exactement un sommet, disons w'' pour lequel (4.5) est vérifiée. Alors $(D - \{w\}) \cup \{w''\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble différent de D , une contradiction. On suppose maintenant qu'il n'y a aucun sommet dans $N_T(w) - D$ pour lequel (4.5) est vérifiée. Alors $(D - \{w\}) \cup \{v\}$ est un $\gamma_o(T)$ -ensemble différent de D , une contradiction. Ceci complète la preuve.

On observe que lorsque $l_{T'}(w) \in \{1, 2\}$, le fait précédent reste vrai en remplaçant D par D' et T par T' . Ainsi, selon l'Observation 4.4 (iii), T' est un *aogu*-arbre. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{F}$. Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_3 , nous obtenons directement $T \in \mathcal{F}$.

Cas 2.2. $w \notin D$.

Par l'Observation 4.1(ii), $w \notin S(T)$ et donc, $l_T(w) = 0$. Puisque v et w sont dans $V(T) - D$, v doit avoir au moins deux voisins dans D . Par conséquent, $d_T(v) = k + 1 \geq 3$. Soit t le père de w , et soient X, Y et Z les ensembles suivants: $Y = C(w) \cap S(T)$, $X = C(w) - Y$ et $Z = D(w) \cap (S(T) - Y)$. On observe que $v \in X$, $u \in Z$, $N_T(w) = \{t\} \cup X \cup Y$ et chaque sommet de Z joue le même rôle que u . Par conséquent, par (4.3), nous avons $Z \subset D$ puisque $Z \subset S(T)$. Nous avons également, par (4.4), chaque sommet dans Z a exactement deux voisins tels que l'un d'eux est une feuille et l'autre est dans X . De plus, comme $v \in X$, $u_i \in Z$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et donc, $|Z| \geq k \geq 2$. Notons aussi que $|X| \geq 1$ puisque $v \in X$. De même $|Y| \geq 1$ puisque D est un $\gamma_o(T)$ -ensemble. Il est clair que $Y \subseteq S(T)$ et alors, par l'Observation 4.1(ii), $Y \subseteq D$. Posons

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \quad p \geq 1, \quad \text{avec } x_1 = v \text{ et } |Y| = q - 1, \quad q \geq 2.$$

Le fait que chaque sommet de X joue le même rôle que v , $x_i \in V(T) - D$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Soit

$$p_i = |N_T(x_i) - \{w\}| \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

Nous avons $p_1 = k$ et puisque pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, x_i et w sont dans $V(T) - D$, x_i doit avoir au moins deux voisins dans Z . Par conséquent, $d_T(x_i) = p_i + 1 \geq 3$. Cela

signifie que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $V(T_{x_i})$ induit une étoile subdivisée SS_{p_i} d'ordre $p_i + 1$, centrée en x_i . Puisque $w \in V(T) - D$, l'inégalité (4.1) est valide en remplaçant v par w . Cela donne

$$p \leq q - 1 \text{ si } t \in D, \text{ ou } p \leq q - 3 \text{ sinon.} \quad (4.6)$$

Soit $T' = T - (\cup_{i=1}^p T_{x_i})$ et D' un $\gamma_o(T')$ -ensemble. On observe que T' contient au moins un P_3 comme sous-graphe induit, ce qui signifie que $n' = |V(T')| \geq 3$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, soit B_i l'ensemble des sommets supports de SS_{p_i} . Nous avons $\cup_{i=1}^p B_i = Z$ et $N_{T'}(w) = Y \cup \{t\}$, donc

$$d_{T'}(w) = q \geq 2.$$

Selon l'Observation 4.1 (i), on peut supposer que $Y \subset D'$ puisque $Y \subset S(T')$. Alors, t est le seul voisin de w dans T' qui ne peut pas être dans D' , c'est-à-dire

$$|N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| \leq 1.$$

Si $t \in D'$, alors la minimalité de D' conduit à $w \in V(T') - D'$, car sinon, on pourrait remplacer w par t dans D' . Par l'Observation 4.5 (ii) et (iii), nous avons $D' = D \cap V(T')$. Donc, $t \in D$ si et seulement si $t \in D'$. Notons que si $t \in D'$, alors $N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')$ est un ensemble vide, sinon, t serait l'unique sommet de $N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')$. Ainsi, (4.6) peut être réécrit comme suit:

$$\text{Si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 0, \text{ alors } p \leq q - 1,$$

et

$$\text{si } |N_{T'}(w) \cap (V(T') - D')| = 1, \text{ alors } p \leq q - 3.$$

Par l'Observation 4.5(iii), T' est un *aogu*-arbre. En appliquant l'hypothèse d'induction sur T' , on en déduit que $T' \in \mathcal{F}$. Puisque T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{O}_4 , nous concluons que $T \in \mathcal{F}$. Ceci complète la preuve. \square

4.4 Algorithme pour tester si un arbre T appartient à \mathcal{F}

Le Théorème 4.8 suggère un algorithme pour tester si un arbre T d'ordre n appartient à \mathcal{F} et, si c'est le cas, l'algorithme renvoie l'ensemble $A(T)$. Les étapes de cet algorithme peuvent

être résumées comme suit. Si T est une chaîne de 2 ou 4 sommets, répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêtez. Sinon si $n \leq 5$, répondre $T \in \mathcal{F}$, renvoyer l'ensemble précédent $A(T)$, et arrêter. Supposons $n \geq 6$. Si T a un sommet support fort, disons s tel que $l_T(s) \geq 3$, appeler l'algorithme récursivement sur l'arbre T' obtenu à partir de T en supprimant une feuille voisine de s ; si la réponse à l'appel récursif est $T' \in \mathcal{F}$, alors répondre $T \in \mathcal{F}$, retourner $A(T) = A(T')$ et arrêtez, sinon répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêter. Supposons maintenant que pour chaque $x \in S(T)$, $l_T(x) \leq 2$. Choisir un sommet r , enraceriner l'arbre T à r , choisir un sommet u' de distance maximum à r . Soit u le père de u' dans l'arbre enraciné et v le père de u . Si $v \in S(T)$ et $l_T(u) = 2$, appeler l'algorithme récursivement sur l'arbre $T' = T - T_u$; si la réponse à l'appel récursif est $T' \in \mathcal{F}$, alors répondre $T \in \mathcal{F}$, revenir $A(T) = A(T') \cup \{u\}$ et arrêter, sinon répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêter. Si $v \in S(T)$ et $l_T(u) = 1$, puis retourner et répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêter. Supposons maintenant que $v \notin S(T)$. Si un fils de v a deux feuilles u', u'' , puis appeler l'algorithme récursivement sur l'arbre $T' = T - \{u''\}$; si la réponse à l'appel récursif est $T' \in \mathcal{F}$, alors répondre $T \in \mathcal{F}$, retourner $A(T) = A(T')$ et arrêtez, sinon répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêter. Supposons maintenant que chaque fils de v est un sommet support de degré deux. Soit w le père de v et de plus soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et Y deux sous-ensembles de $V(T)$ définis comme dans la preuve du Théorème 4.8. Supposons d'abord que $w \in S(T)$ ou $|Y| < |X|$. Appeler l'algorithme récursivement sur l'arbre $T' = T - (T_v - \{v\})$; si la réponse à l'appel récursif est $T' \in \mathcal{F}$ et w vérifie la condition C_0 (voir l'Opération \mathcal{O}_3), alors répondre $T \in \mathcal{F}$, poser $A(T) = A(T') \cup B$ et arrêter, sinon répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêter. Supposons maintenant que $w \notin S(T)$ et $|Y| \geq |X|$. Appeler l'algorithme récursivement sur l'arbre $T' = T - (\cup_{i=1}^p T_{x_i})$; si la réponse à l'appel récursif est $T' \in \mathcal{F}$, et $w \notin A(T')$, alors répondre $T \in \mathcal{F}$, poser $A(T) = A(T') \cup (\cup_{i=1}^p B_i)$ et arrêter, sinon répondre $T \notin \mathcal{F}$ et arrêter.

CHAPITRE 5

ALLIANCES PUISSANTES GLOBALES DANS LES ARBRES

Rappelons la définition d'une alliance puissante globale. Une alliance globale d'un graphe G est dite puissante ou duale si elle est à la fois défensive et offensive. Le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale de G . Dans ce chapitre, nous nous intéressons à ce paramètre pour la classe des arbres.

5.1 Quelques résultats sur le nombre d'alliance puissante globale.

Commençons par donner un exemple illustratif. La Figure 5.1 représente un arbre T avec un $\gamma_o(T) = 4$, $\gamma_a(T) = 5$ et $\gamma_{ap}(T) = 6$.

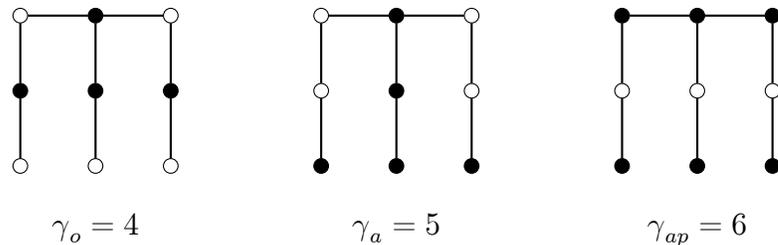


Figure 5.1: Un arbre T avec $\gamma_o(T) = 4$, $\gamma_a(T) = 5$ et $\gamma_{ap}(T) = 6$

Pour la classe des étoiles et des double étoiles, la valeur du nombre d'alliance globale puissante.

Observation 5.1. Si T est une étoile $K_{1,p}$, alors $\gamma_{ap}(K_{1,p}) = \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$.

Observation 5.2. *Si T est une double étoile $S_{p,q}$, alors $\gamma_{ap}(S_{p,q}) = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor$.*

Dans [2], Bouzefrane et Chellali ont donné une borne supérieure du nombre d'alliance puissante globale dans la classe des arbres,

$$\gamma_{ap}(T) \leq \frac{4n - l + s}{6}.$$

Ouatiki [58] a caractérisé les arbres extrémaux atteignant cette borne supérieure.

Dans ce qui suivra, nous présenterons nos résultats.

5.2 Borne inférieure du nombre d'alliance puissante globale pour les arbres

L'invariant γ_{ap} d'un arbre quelconque est borné inférieurement par une fonction dépendant de son ordre et de ses nombres de feuilles et de supports.

Observation 5.3. *(Ouatiki et Bouzefrane [59], 2021) Si G est un graphe connexe d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma_{ap}(G)$ -ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Preuve. Si D est un $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble, et D ne contient pas un sommet support u , alors D contient tous les feuilles de u . Donc on peut remplacer une feuille de u par u dans D □

Théorème 5.4. *(Ouatiki et Bouzefrane [59], 2021) Soit T un arbre d'ordre n avec l feuilles et s sommets support. Alors*

$$\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n - 2l - s + 2}{5}.$$

Preuve. On utilise l'induction sur l'ordre n de T . Il est clair que le résultat est vrai pour $1 \leq n \leq 3$ où T est une chaîne.

Soit $n \geq 4$. On suppose que tout arbre T' d'ordre n , $4 < n' < n$ avec l' feuilles et s' sommets support vérifie

$$\gamma_{ap}(T') \geq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5}.$$

Soit T un arbre d'ordre n avec l feuilles et s sommets support. Si $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile S_p , $p \geq 2$, et par l'Observation 5.1,

$$\gamma_{ap}(S_p) = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor.$$

Puisque $n = p + 1$, $s = 1$ et $l = p$, on a $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5} = \frac{p+4}{5}$. Si $\text{diam}(T) = 3$, alors $T = S_{p,q}$ et par l'Observation 5.2,

$$\gamma_{ap}(S_{p,q}) = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor.$$

Puisque $n = p + q + 2$, $l = p + q$ et $s = 2$ et on obtient,

$$\gamma_{ap}(S_{p,q}) \geq \frac{p+q+6}{5} = \frac{3n-2l-s+2}{5}$$

et donc le résultat est vrai. Supposons que $\text{diam}(T) = t \geq 4$. Soit T un arbre enraciné à une feuille u_T d'excentricité maximum $\text{ecc}(u_T) = \text{diam}(T)$ et soit u_1 un sommet support à distance $\text{diam}(T) - 1$ de u_T . Soit u_{i+1} , $0 \leq i \leq t-1$, le père de u_i dans l'arbre enraciné. Soit $P : u_0, u_1, \dots, u_t$ la chaîne diamétral résultante. Il est clair que u_1 est un sommet support pendant. Soit D un $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble avec le plus petit nombre de feuilles possibles. Considérons les cas suivants:

Cas 1: $|L_{u_1}| = k \geq 3$, Par le choix de D les deux sommets u_1 et u_2 sont dans D et D contient $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ feuilles de u_1 . Soit u' une feuille de u_1 qui n'est pas dans D . Soit $T' = T - (L_{u_1} - u')$ (voir Figure 5.2), alors $n' = n - k + 1$, $l' = l - k + 1$ et $s' = s$. Puisque $\text{diam}(T) \geq 4$, alors $n' \geq 5$. Clairement $D \cap V(T')$ est un (apg) de T' et donc, $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$.

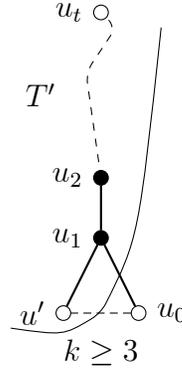
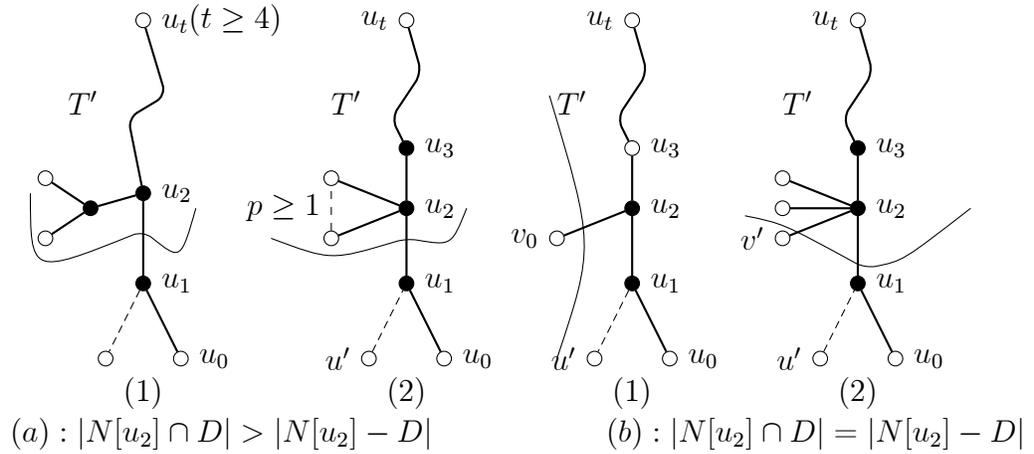
Figure 5.2: L'arbre T' de la preuve du Théorème 5.4, Cas 1.

Figure 5.3: Graphe illustratif de la preuve du Théorème 5.4, Cas 1 .

En Utilisant l'hypothèse d'induction sur T' , on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5} + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$.
Puisque $n' = n - k + 1$, $l' = l - k + 1$ et $s' = s$, alors $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n - 2l - s + 2}{5} + \frac{1-k}{5} + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor > \frac{3n - 2l - s + 2}{5}$.

Cas 2: $|L_{u_1}| = k \leq 2$ et $D \cap L(u_1) = \emptyset$. Tous fils de u_2 est soit une feuille soit un sommet support. Par l'Observation 5.3, et la minimalité de D , les deux sommets u_1 et u_2 sont dans D .

Sous-cas 2.1: $d_T(u_2) \geq 3$. On suppose que u_2 est un sommet support avec $|L(u_2)| = p \geq 2$ ou u_2 a un fils qui est un sommet support . Alors si $|N[u_2] \cap D| > |N[u_2] - D|$, considérons $T' = T - T_{u_1}$ (voir Figure 5.3 (a)). Comme $diam(T) \geq 4$, alors $n' \geq 4$. Il est clair que $D \cap V(T')$ est un *apg* de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 1$. D'où $\gamma_{ap}(T) \geq \gamma_{ap}(T') + 1$. L'hypothèse d'induction sur T' procure $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5} + 1$. Puisque $n' = n - 1 - k$, $l' = l - k$ et $s' = s - 1$, on a $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n - 2l - s + 2}{5} + \frac{3-k}{5} >$

$\frac{3n-2l-s+2}{5}$. On suppose maintenant que u_2 est un sommet support avec $|N[u_2] \cap D| = |N[u_2] - D|$. Soit v' une feuille voisine de u_2 qui n'est pas dans D et soit $T' = T - (T_{u_1} \cup \{v'\})$ (voir Figure 5.3 (b.2)). Clairement $D \cap V(T')$ est un *apg* de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 1$. En utilisant l'hypothèse d'induction sur T' , on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + 1$. Puisque $n' = n - 2 - k$, $l' = l - k - 1$ et $s' = s - 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5} + \frac{2-k}{5} > \frac{3n-2l-s+2}{5}$.

On suppose maintenant que u_2 est un sommet support avec $|L_{u_2}| = 1$ et $d_T(u_2) = 3$ (voir Figure 5.3 (a.2)). Si $u_3 \in D$ alors on considère $T' = T - T_{u_1}$. Comme précédemment on peut voir que $\gamma_{ap}(T) > \frac{3n-2l-s+2}{5}$. Supposons donc que $u_3 \notin D$. D'où par l'Observation 5.3, u_3 n'est pas dans D . Soit v_0 l'unique feuille de u_2 dans T . Considérons $T' = T - \{v_0\}$ (Voir Figure 5.3 (b.1)). On a $\text{diam}(T') \geq 4$. L'ensemble $D \cap V(T')$ est un (*apg*) de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T)$. En utilisant l'hypothèse d'induction sur T' , et puisque $n' = n - 1$, $l' = l - 1$ et $s' = s - 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5}$. D'où le résultat est obtenu.

Sous-cas 2.2: $d_T(u_2) = 2$. Supposons que $u_3 \in D$. Tout fils de u_3 est soit une feuille soit un sommet support ou voisin à un sommet support mais qui n'est pas une feuille. Selon l'Observation 5.3 et la minimalité de D , tout sommet différent d'une feuille et voisin de u_3 est dans D . Supposons que $|N[u_3] \cap D| > |N[u_3] - D|$ (voir Figure 5.4 (a.1)). Considérons $T' = T - T_{u_2}$. On peut voir facilement que si $T' = k_2$, alors $n = k + 4$, $l = k + 1$ et $s = 2$ et donc $\gamma_{ap}(T) = 3 > \frac{3n-2l-s+2}{5} = \frac{k+10}{5}$. D'où le résultat. De plus $T' \neq S_2$ sinon $|N[u_3] \cap D| = |N[u_3] \cap V - D|$. Ainsi $n' \geq 4$ et $D \cap V(T')$ est un (*apg*) de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 2$. En utilisant l'hypothèse d'induction sur T' et puisque $n' = n - 2 - k$, $l' \leq l - k + 1$ et $s' \leq s$, on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5} + \frac{2-k}{5} \geq \frac{3n-2l-s+2}{5}$. Remarquons que le cas $d_T(u_3) = 2$ est inclu dans ce cas.

On suppose maintenant que $|N[u_3] \cap D| = |N[u_3] - D|$. Si $d_T(u_3) = 3$, alors $L_{u_3} = 1$ et u_4 n'est pas dans D (voir Figure 5.5 (b.1)). Soit w_0 l'unique feuille de w_3 et nous considérons $T' = T - \{w_0\}$. Comme $\text{diam}(T) \geq 4$ alors $n' \geq 5$. Clairement $D \cap V(T')$ est un (*apg*) de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 2$. En utilisant l'hypothèse d'induction sur T' et puisque $n' = n - 1$, $l' \leq l - 1$ et $s' = s - 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5}$.

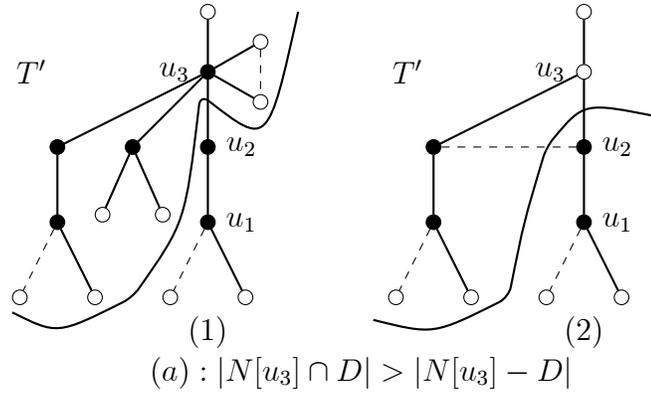
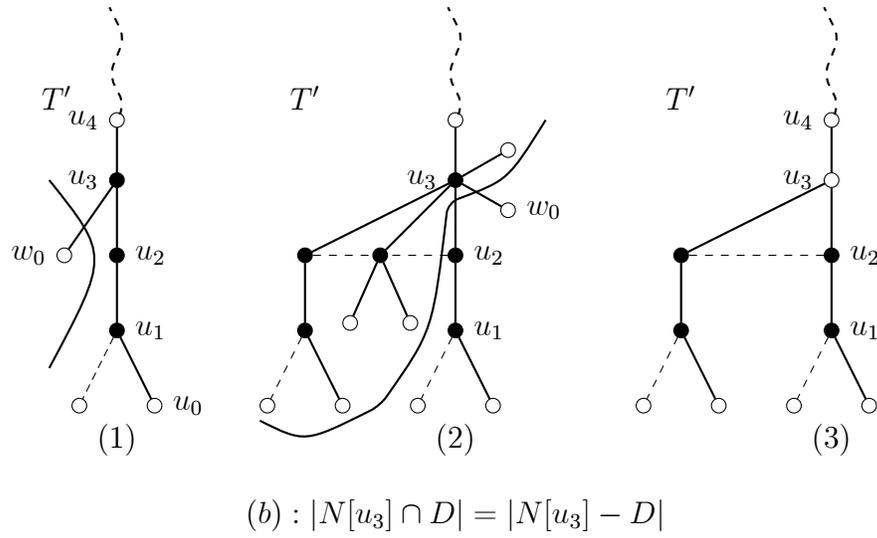


Figure 5.4: Graphe illustratif du Sous cas 2.1.

Figure 5.5: Graphe illustratif du Sous cas 2.2 où $T' = T - \{w_0\}$.

Supposons maintenant que $d_T(u_3) > 3$. Donc, $|L_{u_3}| \geq 2$ et u_3 a forcément une feuille $w_0 \notin D$. Considérons $T' = T - (T_{u_2} \cup \{w_0\})$ (voir Figure 5.5 (b.2)). Si $u_4 \in D$ alors $|L_{u_3}| \geq 3$ et donc $n' \geq 4$. Sinon $u_4 \notin D$, $|L_{u_3}| \geq 2$ et $L_{u_3} \cap D = \emptyset$. Donc u_3 a un fils qui n'est pas une feuille dans $D \cap V(T')$ et donc $n' \geq 4$. Clairement $D \cap V(T')$ est une (*apg*) de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 2$. En utilisant l'hypothèse d'induction sur T' et puisque $n' = n - 3 - k$, $l' = l - 1 - k$ et $s' = s - 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5} + 2 \geq \frac{3n - 2l - s + 2}{5} + \frac{4 - k}{5}$. Puisque $k \leq 2$, on obtient $\gamma_{ap}(T) > \frac{3n - 2l - s + 2}{5}$. On suppose maintenant que $u_3 \notin D$. Alors u_3 est différent d'un sommet support selon l'Observation 5.3. De plus, u_3 ne peut pas être l'unique voisin à un sommet support et différent d'une feuille car il peut remplacer n'importe quelle feuille dans D de son voisin support ce qui est une contradiction. Donc, tout voisin de u_3 est dans D . Si

$|N[u_3] \cap D| > |N[u_3] - D|$ (voir Figure 3 (a.2)). Considérons $T' = T - T_{u_2}$ et on procède de la même manière que ce qui a été fait précédemment (le cas $d_T(u_3) = 2$ est inclus ici). Supposons maintenant que $|N[u_3] \cap D| = |N[u_3] - D|$. Donc, $d_T(u_3) = 3$ et u_4 n'est pas dans D (voir Figure 4 (b.3)). Soient w, v les fils de u_3 et w respectivement dans T_{u_3} et considérons $T' = T - T_{u_3}$. Si w est un sommet support alors $|L_w| = 1$ sinon, u_3 peut remplacer une feuille de w dans D qui est une contradiction. Posons $L_v = p$, par analogie avec L_{u_1} , $p \leq 2$. Comme $u_4, u_3 \notin D$, Alors u_4 a au moins deux voisins dans $D \cap V(T')$ Le sommet u_t ne peut pas être un parent de u_4 sinon u_4 serait un sommet support et alors u_4 serait dans D , ce qui est une contradiction. Donc, $n' \geq 4$. Il est clair que $D \cap V(T')$ est une *(apg)* de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 4$. En utilisant l'hypothèse d'induction sur T' et puisque $n' \geq n - 6 - p - k$, $l' \leq l - p - k$ et $s' \leq s - 2$, on obtient $\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n-2l-s+2}{5} + \frac{4-(p+k)}{5}$. Puisque $(p+k) \leq 4$, alors on obtient $\gamma_{ap}(T) > \frac{3n-2l-s+2}{5}$ et le résultat est vrai. \square

5.3 Arbres avec $\gamma_{ap}(T) = \frac{3n-2l-s+2}{5}$

Dans cette section, nous caractérisons les arbres extrémaux atteignant la borne donnée dans le Théorème 5.4. Pour cela nous définissons une famille \mathcal{F} de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_k , $k \geq 1$, d'arbres, où T_1 est la chaîne P_2 , $T = T_k$, et si $k \geq 2$ l'arbre T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'opération suivante :

- Opération \mathcal{O} : Supposons que u est un sommet support de T_i . Alors l'arbre T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une feuille par l'attachement d'une arête à u et en ajoutant une chaîne $P_3 : xyz$ en joignant u à y

5.3.1 Résultats préliminaires

De la manière dont un arbre $T \in \mathcal{F}$ est construit, nous pouvons poser la remarque suivante:

Remarque 5.5. *Soit T un arbre de \mathcal{F} différent de P_2 . Alors chaque sommet de T , différent d'une feuille, est un sommet support fort.*

Théorème 5.6 (Ouatiki et Bouzefrane [59] 2021). *Soit T un arbre non trivial avec l feuilles et s sommets support. Si $T \in \mathcal{F}$, alors $\gamma_{ap}(T) = \frac{3n-2l-s+2}{5}$.*

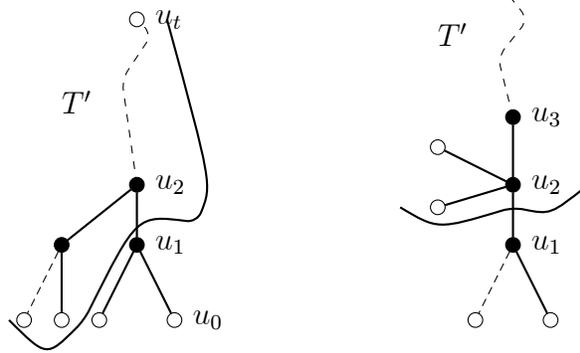
Preuve. Soit T un arbre de \mathcal{F} . Utilisons l'induction sur le nombre d'opérations \mathcal{O} effectuées pour construire T . Clairement, si $T = T_1 = P_2$, alors $\gamma_{ap}(T) = 1 = \frac{3n-2l-s+2}{5}$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de \mathcal{F} construit avec $k-1 \geq 0$ opérations, et soit T un arbre de \mathcal{F} construit avec k opérations. Ainsi T est obtenu en effectuant l'opération \mathcal{O} sur un arbre $T' = T_{k-1} \in \mathcal{F}$ d'ordre n' avec l' feuilles et s' sommets support. Par l'hypothèse d'induction, on a $\gamma_{ap}(T') = \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$. D'après l'Observation 5.3, il existe un $\gamma_{ap}(T')$ -ensemble qui contient le sommet support u . Un tel ensemble peut être étendu à une (apg) de T en ajoutant y . Alors, $\gamma_{ap}(T) \leq \gamma_{ap}(T') + 1 = \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + 1$. D'autre part, soit D un $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble avec le plus petit nombre possible de feuilles. Ainsi, par la minimalité de D et l'Observation 5.3, u et y sont dans D . Soit u' une feuille de u dans $T - T'$. Si $u' \notin D$, alors $D \cap V(T')$ est une (apg) de T' . Sinon, on remplace $u' \in D$ par n'importe quelle feuille de u dans T' qui n'est pas dans D . Il s'ensuit alors que $D \cap V(T')$ est une (apg) de T' ce qui implique $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 1$. On en déduit alors que $\gamma_{ap}(T) = \gamma_{ap}(T') + 1 = \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + 1$. Puisque $n' = n - 4$, $l' = l - 3$ et $s' = s - 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T) = \frac{3n-2l-s+2}{5}$. \square

5.3.2 Résultat principal

Théorème 5.7 (Ouatiki et Bouzefrane [59], 2021). *Soit T un arbre non trivial avec l feuilles et s sommets support. Alors $\gamma_{ap}(T) = \frac{3n-2l-s+2}{5}$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. La condition suffisante découle du Théorème 5.7. Pour prouver la condition nécessaire, on procède par induction sur l'ordre n d'un arbre T vérifiant $\gamma_{ap}(T) = \frac{3n-2l-s+2}{5}$. Nous allons prouver que $T \in \mathcal{F}$. Si $\text{diam}(T) = 1$, alors $T = K_2 \in \mathcal{F}$. Si $\text{diam}(T) = 2$ alors T est une étoile S_p avec $p \geq 2$ et de l'Observation 5.1, $\gamma_{ap}(T) = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor > \lfloor \frac{p+4}{5} \rfloor = \frac{3n-2l-s+2}{5}$. Si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une double étoile $S_{p,q}$ et par l'Observation 5.2, $\gamma_{ap}(T) = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q+1}{5} \rfloor = \frac{p+q+6}{5} = \frac{3n-2l-s+2}{5}$ si et seulement si $p = q = 2$ et $S_{2,2} \in \mathcal{F}$. Donc $\text{diam}(T) \geq 4$. Supposons maintenant que tout arbre T' d'ordre n' , $5 \leq n' \leq n$, avec l' feuilles et s' sommets support tel que $\gamma_{ap}(T') = \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$ est dans \mathcal{F} .

Si un sommet support non pendent, disons t , de T est faible, alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant une feuille, disons t' , adjacente à t . Donc tout $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble avec le plus petit nombre de feuilles possible est une (apg) de T' implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n-2l-s+2}{5}$. Puisque $n = n' + 1$, $l = l' + 1$ et $s = s' + 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$. L'égalité est vérifiée par le Théorème 5.4 et par conséquent, en utilisant l'hypothèse d'induction, on déduit que $T' \in \mathcal{F}$. Par l'Observation 5.1, on déduit que t est un sommet support fort de T' puisqu'il est différent d'une feuille, qui est une contradiction. Ainsi, on peut supposer dans la suite que tout sommet support non pendent de T est fort. Soit $diam(T) = t$ et soit $P : u_0, u_1, \dots, u_t$, ($t \geq 4$) une chaîne diamétrale et enracinée en u_t . Il est clair que u_1 est un sommet support pendent. Soit D un $\gamma_{ap}(T)$ -ensemble qui contient le moins de feuilles possible. \square

(a) : u_2 n'est pas un support(b) : $|L_{u_2}| = 2$ Figure 5.6: Graphe illustratif du Théorème 5.7 où $T' = T - T_{u_1}$

Fait 5.8: $|L_{u_1}| \leq 2$.

Preuve. On suppose $|L_{u_1}| = k \geq 3$. Par le choix de D , les deux sommets u_1 et u_2 sont dans D et D contient $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ feuilles de u_1 . Soit u' une feuille de u_1 n'appartenant pas à D . Soit $T' = T - (L_{u_1} - \{u'\})$ (voir Figure 5.2). Comme $diam(T) \geq 4$ et $k - 1 \geq 2$, alors $n' \geq 5$. Clairement $D \cap V(T')$ est un (apg) de T' et donc $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor = \frac{3n-2l-s+2}{5} - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$. Puisque $n = n' + k - 1$, $l = l' + k - 1$ et $s = s'$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + \frac{k-1}{5} - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor < \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$, qui est une contradiction avec le Théorème 5.4. \square

Par le Fait 5.8 et le choix de D , les deux sommets u_1 et u_2 sont dans D et $D \cap L(u_1) = \emptyset$.

Considérons les cas suivants.

Cas 1. $d_T(u_2) \geq 3$.

Fait 5.9. u_2 est un sommet support.

Preuve. Tout fils de u_2 soit une feuille, soit un sommet support. Supposons que u_2 a un voisin, disons v , qui est un sommet support (voir Figure 5.6 (a)). Par le Fait 5.8, $|L_v| \leq 2$ et donc $\{u_1, u_2, v\} \subseteq D$. Considérons $T' = T - T_{u_1}$. Donc $\text{diam}(T') \geq 4$ et donc $n' \geq 5$. On peut voir facilement que $D \cap V(T')$ est une (*apg*) de T' , ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 1 = \frac{3n-2l-s+2}{5} - 1$. Puisque $n = n' + 1 + |L_{u_1}|$, $l = l' + |L_{u_1}|$ et $s = s' + 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + \frac{|L_{u_1}|-3}{5} \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} - \frac{1}{5} < \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$, qui est une contradiction avec le Théorème 5.4 \square

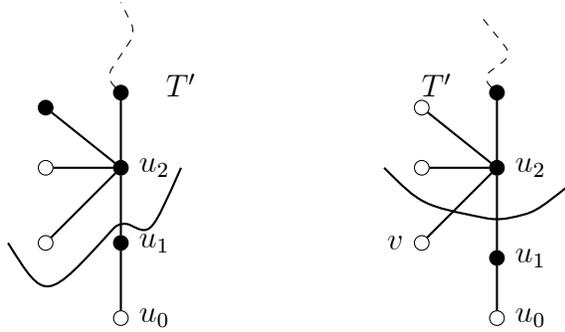
Fait 5.10: $|L_{u_2}| \geq 3$

Preuve. Par le Fait 5.9, u_2 est un sommet support non pendant, alors d'après la remarque donnée ci-dessus, u_2 est un sommet support fort. Supposons que $|L_{u_2}| = 2$. Par la minimalité de D et l'Observation 5.3, $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq D$. Considérons $T' = T - T_{u_1}$ (voir Figure 5.6 (b)). Comme $\text{diam}(T) \geq 4$ et $|L_{u_2}| = 2$ alors $n' \geq 5$. En procédant de la même manière comme dans la preuve du Fait 5.9 et nous obtenons une contradiction. \square

Fait 5.11: $|L_{u_1}| = 2$.

Preuve. Par le Fait 5.8. $|L_{u_1}| \leq 2$. Supposons $|L_{u_1}| = 1$. Par la minimalité de D , l'Observation 5.3 et le Fait 3.6. D contient $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\left\lfloor \frac{|L_{u_2}|-2}{2} \right\rfloor$ feuilles de u_2 . Puisque $u_2 \in D$ et D est une alliance défensive $|N[u_2] \cap D| \geq |N[u_2] - D|$ (voir fig 5.7). Supposons que cette inégalité est stricte et considérons $T' = T - T_{u_1}$ (voir Figure 5.7 (a)). On obtient une contradiction de la même manière que dans la preuve du Fait 5.9.

Ainsi, $|N[u_2] \cap D| = |N[u_2] - D|$. Soit v une feuille de u_2 qui n'est pas dans D . Considérons $T' = T - T_{u_1} - \{v\}$ (voir Figure 5.7 (b)). Comme $\text{diam}(T) \geq 4$ et $|L_{u_2}| \geq 3$, alors $n' \geq 5$. Clairement, $D \cap V(T')$ est une (*apg*) de T' , ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 1 = \frac{3n-2l-s+2}{5} - 1$. Puisque $n = n' + 2 + |L_{u_1}|$, $l = l' + 1 + |L_{u_1}|$ et $s = s' + 1$, on déduit que $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + \frac{|L_{u_1}|-2}{5}$. Puisque $|L_{u_1}| = 1$, alors $\gamma_{ap}(T') < \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$, qui est une contradiction avec le Théorème 5.4.



(a) : $|N[u_2] \cap D| > |N[u_2] - D|$ (b) : $|N[u_2] \cap D| = |N[u_2] - D|$

Figure 5.7: Graphe illustratif du Fait 5.11

Donc, par le Fait 5.11 et sa preuve, $|L_{u_1}| = 2$ et $|N[u_2] \cap D| = |N[u_2] - D|$. Soit v une feuille de u_2 qui n'est pas dans D et considérons $T' = T_{u_1} - \{v\}$. De la preuve du Fait 5.11, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5}$. Ainsi par le Théorème 5.4, l'égalité est obtenue. En utilisant l'hypothèse d'induction, on en déduit que $T' \in \mathcal{F}$. D'où $T \in \mathcal{F}$ car T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O} . \square

Cas 2: $d_T(u_2) = 2$

Fait 5.12: $d_T(u_3) \geq 3$

Preuve. On suppose que $d_T(u_3) = 2$, alors soit u_3 soit u_4 est dans D . Sans perte de généralité, on suppose que $u_4 \in D$. Considérons $T' = T - T_{u_2}$ (voir figure 5.8 (a)). Il est très facile de vérifier que si $T' = S_p$, $1 \leq p \leq 3$ ou $T' = P_4$, alors $\gamma_{ap}(T) \in \{3, 4\}$ et $\gamma_{ap}(T) > \frac{3n - 2l - s + 2}{5}$. Donc, $n' \geq 5$. Clairement $D \cap V(T')$ est une (apg) de T' , ce qui implique $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 2 = \frac{3n - 2l - s + 2}{5} - 2$. On a $n = n' + 2 + |L_{u_1}|$. Si u_4 est un sommet support alors $s = s' + 1$ et $l = l' - 1 + |L_{u_1}|$. Donc $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5} + \frac{|L_{u_1}| - 3}{5}$. Par le Fait 5.8, $|L_{u_1}| \leq 2$ et alors $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5} - \frac{1}{5} < \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5}$ qui est une contradiction avec le Théorème 5.4. Supposons maintenant que u_4 n'est pas un sommet support, donc $s = s'$ et $l = l' - 1 + |L_{u_1}|$. Il s'ensuit que $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5} + \frac{|L_{u_1}| - 2}{5}$. Puisque $|L_{u_1}| \leq 2$, si $|L_{u_1}| = 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5}$ qui contredit le Théorème 5.4. Donc $|L_{u_1}| = 2$ et par suite $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n' - 2l' - s' + 2}{5}$. Par le Théorème 5.4 on obtient l'égalité. En utilisant l'hypothèse d'induction, on en déduit que $T' \in \mathcal{F}$. Ainsi, d'après l'Observation 3.1, tout sommet différent d'une feuille de T est un sommet support fort. Ainsi, u_4 est un sommet support dans T , qui contredit notre hypothèse. \square

Fait 5.13: $|N[u_3] \cap D| = |N[u_3] - D|$.

Preuve. D'après le Fait 5.12, $d_T(u_3) \geq 3$. Tout fils de u_3 est ou bien une feuille, ou un sommet support, ou un voisin différent d'une feuille d'un sommet support. Supposons que $|N[u_3] \cap D| > |N[u_3] - D|$. Considérons $T' = T - T_{u_2}$ (voir Figure 5.8 (b)). On peut montrer facilement que $T' \neq S_p$, $2 \leq p \leq 3$ et $T' \neq P_4$ sinon $\gamma_{ap}(T) > \frac{3n-2l-s+2}{5}$ ce qui contredit l'hypothèse sur T . Donc $n' \geq 5$. Il est clair que, $D \cap V(T')$ est un *gpa* de T' ce qui implique $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 2 = \frac{3n-2l-s+2}{5} - 2$. Puisque $n = n' + 2 + |L_{u_1}|$, $l = l' + |L_{u_1}|$ et $s = s' + 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + \frac{|L_{u_1}|-5}{5}$. Par le Fait 5.8, $|L_{u_1}| \leq 2$ et donc, $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} - \frac{3}{5} < \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$, qui contredit le Théorème 5.4 \square

Fait 5.14: u_3 est un sommet support.

Preuve. Supposons que u_3 n'est pas un sommet support. Ainsi, par la minimalité de D et l'Observation 5.3, tout fils de u_3 est dans D car u_3 est soit un sommet support, soit un voisin différent d'une feuille, d'un sommet support. Par conséquent, si $u_3 \in D$ alors $|N[u_3] \cap D| > |N[u_3] - D|$ (voir Figure 5.8 (b)) qui contredit le Fait 5.13. Donc $u_3 \notin D$ et selon le Fait 5.13, $d_T(u_3) = 3$ et $u_4 \notin D$ (voir Figure 5.9 (a)). Alors u_4 est différent d'un sommet support, sinon, par la minimalité de D et par l'Observation 5.3, u_4 serait dans D . Soient v et w les fils de u_3 et v , respectivement dans T_{u_3} .

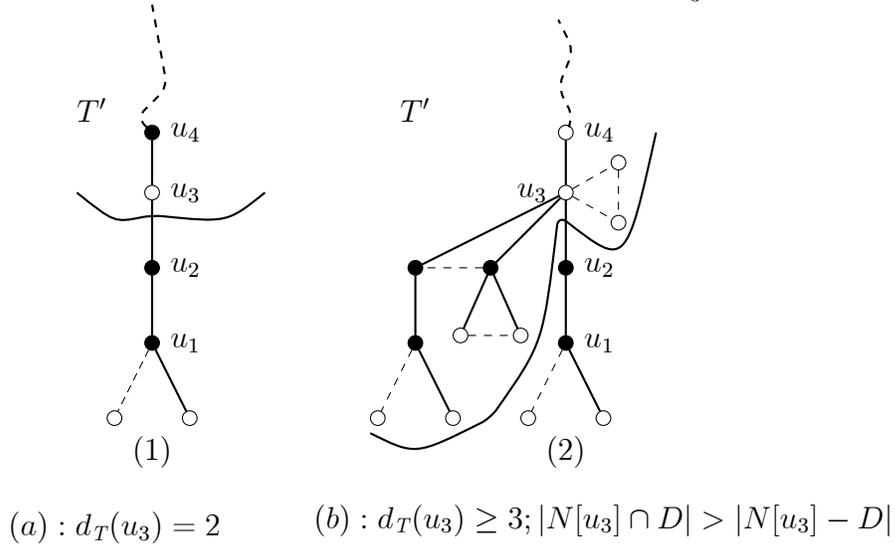


Figure 5.8: Graphe illustratif du Fait 5.14 (a) et (b)

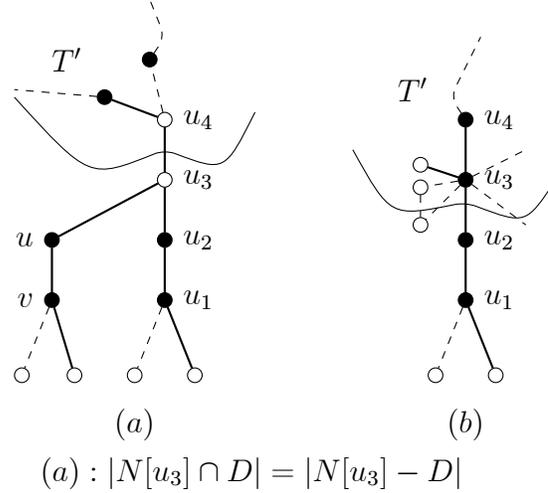


Figure 5.9: Graphe illustratif du Fait 5.14 où $|N[u_3] \cap D| = |N[u_3] - D|$

Si v est un sommet support, alors $|L_v| = 1$ car sinon u_3 serait dans D car il peut remplacer n'importe quelle feuille de v dans D .

La faiblesse de v contredit notre remarque faite auparavant sur les sommets supports non pendants qui doivent être forts. Donc, v n'est pas un sommet support. Considérons $T' = T - T_{u_3}$. Puisque $u_4 \notin D$, alors u_4 a au moins deux voisins dans $D \cap V(T')$. Le sommet u_t ne peut pas être le parent de u_4 sinon $u_4 \in D$ car il peut remplacer u_t dans D . De plus, u_4 ne peut pas être adjacent à une feuille ou à un sommet support, car sinon u_4 serait dans D car c'est un support ou il peut remplacer n'importe quelle feuille dans D de son voisin support. Il s'ensuit que $\text{diam}(T) \geq 4$ et $n' \geq 5$. L'ensemble $D \cap V(T')$ est un (apg) de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 4 = \frac{3n-2l-s+2}{5} - 4$. Puisque $n = n' + 5 + |L_{u_1}| + |L_u|$, $l = l' + |L_{u_1}| + |L_u|$ et $s = s' + 2$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + \frac{|L_{u_1}| + |L_u| - 7}{5}$. Par le Fait 5.8, $|L_{u_1}| + |L_u| \leq 4$ alors, $\gamma_{ap}(T') < \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$ ce qui contredit le Théorème 5.4.

Il s'ensuit par les Faits précédents et la remarque faite ci-dessus que u_3 est un sommet support fort vérifiant $|N[u_3] \cap D| = |N[u_3] - D|$. Soit $w_0 \notin D$ une feuille de u_3 . Considérons $T' = T - (T_{u_2} \cup \{w_0\})$ (voir Figure 8 (b)). il est facile de vérifier que u_t ne peut pas être le parent de u_3 sinon $T' = S_3$ et par suite $\gamma_{ap}(T) = 4$. Donc $\gamma_{ap}(T) > \frac{3n-2l-s+2}{5}$, qui est une contradiction. Donc $n' \geq 5$. Clairement, $D \cap V(T')$ est un (apg) de T' ce qui implique que $\gamma_{ap}(T') \leq \gamma_{ap}(T) - 2 = \frac{3n-2l-s+2}{5} - 2$. Puisque $n = n' + 3 + |L_{u_1}|$, $l = l' - 1 + |L_{u_1}|$ et $s = s' + 1$, on obtient $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} + \frac{|L_{u_1}| - 4}{5}$. Par le Fait 5.8, $|L_{u_1}| \leq 2$ et donc $\gamma_{ap}(T') \leq \frac{3n'-2l'-s'+2}{5} - \frac{2}{5} < \frac{3n'-2l'-s'+2}{5}$, qui contredit le Théorème 5.4

et ceci termine la preuve.

□

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude des alliances globales dans les graphes.

D'abord, nous avons établi une borne inférieure sur le nombre d'alliance offensive globale, plus précisément nous avons montré que tout graphe unicycle connexe G d'ordre n avec $l(G)$ feuilles et $s(G)$ sommets support satisfait $\gamma_o(G) \geq \frac{n-l(G)+s(G)}{3}$ et nous avons caractérisé tous les graphes unicycles extrémaux atteignant cette borne inférieure.

Dans un second lieu nous avons fourni une caractérisation constructive de tous les arbres ayant une alliance offensive minimum globale unique (*aogu*)-arbres.

Enfin, nous avons donné une borne inférieure sur le nombre d'alliance puissante globale pour tout arbre en fonction de son ordre, du nombre de ses feuilles et du nombre de ses sommets support. De plus, nous avons caractérisé tous les arbres extrémaux atteignant cette borne.

Comme perspectives à notre travail, qui nous semblent intéressantes, nous proposons notamment :

- Caractériser tous les *aogu*-graphes des graphes unicycles ou plus généralement des graphes cactus.
- Caractériser les arbres avec une alliance défensive minimum globale unique "*adgu*-arbres".
- Caractériser les arbres avec une alliance puissante minimum globale unique "*apgu*-arbres".
- Etendre les bornes obtenues à d'autres classes de graphes comme les unicycles, les bipartis et les cactus.
- Trouver des relations entre les différents paramètres d'alliances avec d'autres paramètres de domination.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (*North Holland, Amsterdam, 1973*).
- [2] M. Bouzefrane, On alliances in graphs, Magister memory. University of Blida, Algeria (2010).
- [3] M. Bouzefrane and M. Chellali, On the global Offensive alliance number of trees. *Opuscula Mathematica*, 29 (2009) 223 – 228.
- [4] M. Bouzefrane and M. Chellali, A note on global alliances in trees. *Opuscula Mathematica*, 31 (2) (2011) 153 – 158.
- [5] M. Bouzefrane, M. Chellali, T.W. Haynes, Global defensive alliances in trees, *Util. Math.* 82 (2010) 387 – 398.
- [6] M. Bouzefrane, I. Bouchemakh, M. Zamime and N. Ikhlef-Eschouf, Trees with unique minimum global offensive alliance. *RAIRO Operations Research* 55 (2021) S 863– S 872.
- [7] M. Bouzefrane and S. Ouatiki, On the global offensive alliance in unicycle graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 15(2018)72 – 78
- [8] M. Blidia, M. Chellali and O. Favaron, Independence and 2–domination in trees. *Austral. J. Combin.* 33 (2005) 317 – 327.
- [9] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounes and F. Mafray, Characterizations of trees with a unique minimum locating-dominating sets. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 76 (2011) 225 – 232.
- [10] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann, Some Bounds on the p-Domination Number in Trees. *Discrete Mathematics*, 306 (2006), 2031 – 2037.
- [11] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs. *Discrete Math., Vol. 309, Issue 8 (2009), pp. 2140 - 2147.*

- [12] R.C. Brigham, R.D. Dutton and S.T. Hedetniemi, A sharp lower bound on the powerful alliance number of $C_m \times C_n$. *Congr. Numer.* 167 (2004) 57 – 63
- [13] M. Chellali and T. W. Haynes, Global alliances and independence in trees. *Discuss. Math. Graph Theory* 27 (2007), 19 – 27.
- [14] M. Chellali, Offensive alliances in bipartite graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 73 (2010) 245 – 255.
- [15] M. Chellali, T. W. Haynes and L. Volkmann, Global offensive alliance numbers in graphs. with emphasis on trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 45 (2009) 87-96.
- [16] M. Chellali, T. W. Haynes, B. Randerath and L. Volkmann, Bounds on the global offensive k -alliance number in graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 29 (2009) 597 – 613.
- [17] M. Chellali and T.W. Haynes, A characterization of trees with unique minimum double domination sets. *Util. Math.* 83 (2010) 233 – 242.
- [18] M. Chellali and T.W. Haynes, Trees with unique minimum paired domination sets. *Ars Combin.* 73 (2004) 3 – 12.
- [19] M. Chellali and N.J. Rad, Trees with unique Roman dominating functions of minimum weight. *Discrete Math. Algorithms Appl.* 06 (2014) 1450038
- [20] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. *Networks*, 7 (1977) 247 – 261.
- [21] E. J. Cockayne, R. M. Dawes and S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks*, 10 (1980) 211 – 219.77
- [22] C. F De Jaennish, "Application de l'analyse mathématique au jeu d'échecs", *Petrograd*, 1962.
- [23] L. Eroh and R. Gera, Global alliance partition in trees, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 66 (2008), 161-169

- [24] L. Eroh and R. Gera, Alliance partition number in graphs, *Ars Combin.* 103 (2012) 519 – 529.
- [25] O. Favaron. Global alliances and independent domination in some classes of graphs. *The Electronic. Journal of Combinatorics* 15 (1) R123 2008.
- [26] O. Favaron, G. Fricke, W. Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, P. Kristiansen, R.C. Laskar and R.D. Skaggs, Offensive alliances in graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 24 (2) (2004) 263 – 275.
- [27] M. Fischermann and U.D.E. Triesch, Domination parameters and their unique realizations, Ph.D. thesis. Techn. Hochsch. Bibl.(2002).
- [28] M. Fischermann and L. Volkmann, Unique minimum domination in trees. *Australas. J. Combin.*25(2002)117 – 124.
- [29] M. Fischermann and L. Volkmann, Cactus graphs with unique minimum dominating sets. *Util. Math.* 63(2003)229 – 238.
- [30] M. Fischermann and L. Volkmann, Unique independence, upper domination and upper irredundance in graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 47(2003)237 – 249.
- [31] M. Fischermann, D. Rautenbach and L. Volkmann, Maximum graphs with a unique minimum dominating set. *Discrete Math.* 260(2003)197 – 203.
- [32] M. Fischermann, Block graphs with unique minimum dominating sets. *Discrete Math.*240 (2001) 247 – 251.
- [33] M. Fraboni and N. Shank, Maximum graphs with unique minimum dominating set of size two. *Australas. J. Combin.* 46(2010)91 – 99.
- [34] J. F. Fink and M. S. Jacobson, n-domination in graphs in *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. Y.Alavi and A.J. Schwenk (eds), (1985) (Kalamazoo, MI 1984) Wiley.*
- [35] H. Fernau and J.A. Rodriguez-Velazquez, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* 2 (1) (2014), 70 – 86

- [36] H. Fernau, J.A. Rodriguez and J.M. Sigarreta, offensive r-alliance in graphs, *Discrete Appl. Math.* 157 (2009) 177 – 182.
- [37] G. Gunther, B. Hartnell, L. Markus and D. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets. In: Vol. 101 of Proc. 25th S.E. Int. Conf. Combin., Graph Theory, and Computing, Congr. Numer., Springer, New York, NY (1994)55 – 63.
- [38] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, Global defensive alliances in graphs. *The Electronic. J. Combin* 10 (2003) R47.
- [39] A. Harutyunyan, Some bounds on global alliances in trees. *Discrete Appl. Math.* 161 (2013)1739 – 1746.
- [40] A. Harutyunyan, Global offensive alliances in graphs and random graphs. *Discrete Appl. Math.* 164 (2014) 522 – 526.
- [41] T.W. Haynes and M.A. Henning, Trees with unique minimum total dominating sets. *Discuss. Math. Graph Theory* 22(2002)233 – 246.
- [42] J. Hedetniemi, On unique minimum dominating sets in some cartesian product graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 34(2015) 615 – 628.
- [43] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of parameters. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 257 – 277.
- [44] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, Quorum colorings of graphs. *AKCE Int J. graphs*, 10 N 1 (2013) 97 – 109.
- [45] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 3 – 9.
- [46] J. Hedetniemi, On unique minimum dominating sets in some repeated cartesian products. *Australas. J. Combin.*62 (2015) 91 – 99.
- [47] J. Hedetniemi, On unique realizations of domination chain parameters. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 101 (2017)193 – 211

- [48] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Fundamentals of domination in Graphs. *Marcel Dekker New York*, 1998.
- [49] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Domination in Graphs. Advanced Topics. *Marcel Dekker New York* 1998.
- [50] T. W. Haynes and J. A. Lachniet, The alliance partition number of grid graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 4 (1) (2007) 51-59.
- [51] A. Hansberg and L. Volkmann, On 2-domination and independence domination numbers of graphs. *Ars Combin* 101 (2011) 405 – 415.
- [52] G. Hopkins and W. Staton, Graphs with unique maximum independent sets. *Discrete Math.* 57 (1985) 245 – 251.
- [53] H. S. Khurram, Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering. *Phd thesis, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando*, 2001.
- [54] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics et Combinatorial Computing*, 48 (2004), 157 – 177.
- [55] P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi. *Introduction to alliances in graphs, IBID, pp.* 308 – 312, 2002.
- [56] M. Lemanska, Lower bound on the domination number of a tree. *Discuss. Math. Graph Theory* 24(2) (2004) 165 – 169.
- [57] O. Ore, Theory of graphs, *Amer. Math soc. Colloq. Publ.* 38 (1962).
- [58] S. Ouatiki, On the upper global powerful alliance number in trees. *Ars Combinatoria* 151 (2020) 89 – 98
- [59] S.Ouatiki and M. Bouzefrane, A lower bound on the global powerful alliance number in trees *RAIRO-Oper. Res.* 55 (2021) 495 – 503

- [60] K. Ouazine, H. Slimani and A. Tari. Alliances in graphs: parameters, properties and applications -a survey. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 15(2018)115 – 154.
- [61] J. A. Rodríguez-Velazquez, J. M. Sigarreta, offensive alliances in cubic graphs. *International mathematical forum* 1 (36) (2006) 1773-1782.
- [62] J. A. Rodríguez-Velázquez and J. M. Sigarreta, Global defensive k -alliances in graphs. *Disc Applied Math* 157 (2009) 211-218.
- [63] J. A. Rodríguez and J. M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 27 (1) (2007) 143- 157.
- [64] J.A. Rodríguez-Velázquez and J.M. Sigarreta, Global offensive alliances in graphs, *Electron. Notes Discrete Math.* 25 (2006) 157–164.
- [65] W. Siemes, J. Topp and L. Volkmann, On unique independent sets in graphs. In Vol. 131 of *Discrete Math.* Elsevier, New York, NY (1994) 279 – 285.
- [66] K.H. Shafique and R.D. Dutton, A tight bound on the cardinalities of maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 56 (2006) 139 – 145.
- [67] K.H. Shafique and R.D. Dutton, Maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets, *Congr. Numer.* 162 (2003) 139 – 146.
- [68] J. M. Sigarreta and J.A. Rodríguez, On the global offensive alliance number of a graph. *Discrete Applied Mathematics* 157 (2) (2009) 219- 226.
- [69] L. Volkmann, Some remarks on lower bounds on the p -domination number in trees. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 61 (2007), 159 – 167.
- [70] I.G. Yero and J.A. Rodríguez-Velázquez, Defensive alliances in graphs: a survey, *Utilitas Mathematica* 105(2017)