



Collection  
Les cours

# Introduction au calcul des probabilités et à la statistique

Exercices, problèmes et corrections

*2<sup>e</sup> édition*

Jean-François Delmas



ENSTA  
ParisTech

LES PRESSES DE L'ENSTA

# Table des matières

## partie I Énoncés

<b>I Espaces probabilisés</b>	<b>3</b>
I.1 Dénombrément .....	3
I.2 Formule du crible et applications .....	4
I.3 Probabilités conditionnelles .....	6
<b>II Variables aléatoires discrètes</b>	<b>9</b>
II.1 Exercices de manipulation .....	9
II.2 Jeu de pile ou face .....	11
II.3 Lois conditionnelles .....	13
II.4 Modélisation .....	14
<b>III Variables aléatoires continues</b>	<b>19</b>
III.1 Calculs de probabilités ou d'espérance .....	19
III.2 Calculs de loi .....	20
III.3 Modélisation .....	22
<b>IV Fonctions caractéristiques</b>	<b>27</b>
IV.1 Calculs de loi .....	27
IV.2 Modélisation .....	29
<b>V Théorèmes limites</b>	<b>31</b>
V.1 Quelques convergences .....	31
V.2 Calcul de limites .....	34
V.3 Modélisation .....	35

<b>VI Vecteurs gaussiens</b>	41
VI.1 Exemples . . . . .	41
VI.2 Propriétés et applications . . . . .	42
<b>VII Simulation</b>	45
<b>VIII Estimateurs</b>	47
VIII.1 Modèles paramétriques usuels . . . . .	47
VIII.2 Modélisation . . . . .	50
<b>IX Tests</b>	55
IX.1 Mise en œuvre . . . . .	55
IX.2 Modélisation . . . . .	58
IX.3 Tests du $\chi^2$ . . . . .	61
<b>X Intervalles et régions de confiance</b>	67
<b>XI Problèmes (probabilités)</b>	69
XI.1 Calcul de lois . . . . .	69
XI.2 Le collectionneur . . . . .	71
XI.3 Le paradoxe du bus . . . . .	75
XI.4 La statistique de Mann et Whitney . . . . .	79
XI.5 Le processus de Galton Watson . . . . .	82
XI.6 Loi de Bose-Einstein . . . . .	84
XI.7 Sondages (I) . . . . .	86
XI.8 Loi de Yule (I) . . . . .	89
XI.9 Mathématiques financières . . . . .	91
XI.10 Transmission de message . . . . .	94
XI.11 Mariage d'un prince . . . . .	97
XI.12 Réduction de variance . . . . .	100
XI.13 Modèle de compétition de Pòlya . . . . .	101
<b>XII Problèmes (probabilités et statistique)</b>	105
XII.1 Le modèle de Hardy-Weinberg . . . . .	105
XII.2 Estimation de la taille d'une population . . . . .	108
XII.3 Comparaison de traitements . . . . .	110
XII.4 Ensemencement des nuages . . . . .	114
XII.5 Chaleur latente de fusion . . . . .	118
XII.6 Taille des grandes villes . . . . .	123
XII.7 Résistance d'une céramique . . . . .	128
XII.8 Sondages (II) . . . . .	132
XII.9 Loi de Yule (II) et disques d'or . . . . .	135

XII.10 Sexe des anges .....	137
XII.11 Comparaison d'échantillons appariés .....	140
XII.12 Modèle auto-régressif pour la température .....	144
XII.13 Mutation de l'ADN mitochondrial .....	148
XII.14 Estimation d'un quantile et produits de la mer .....	152
XII.15 Records sportifs .....	156

---

## partie II Corrections

---

XIII Corrections	163
XIII.1 Espaces probabilisés .....	163
XIII.2 Variables aléatoires discrètes .....	173
XIII.3 Variables aléatoires continues .....	191
XIII.4 Fonctions caractéristiques .....	209
XIII.5 Théorèmes limites .....	214
XIII.6 Vecteurs gaussiens .....	231
XIII.7 Simulation .....	238
XIII.8 Estimateurs .....	241
XIII.9 Tests .....	257
XIII.10 Intervalles et régions de confiance .....	282
XIII.11 Problèmes (probabilités) .....	287
XIII.12 Problèmes (probabilités et statistique) .....	339



**Collection  
Les cours**



Cet ouvrage d'exercices et de problèmes corrigés se fixe pour but d'illustrer les concepts de base des probabilités et de la statistique mathématique présentés dans l'ouvrage *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*. Il présente des exercices de manipulation qui permettent d'appréhender les concepts du cours (variables aléatoires, théorèmes asymptotiques, modèles gaussiens, estimations paramétriques, tests, régions de confiance). Il comporte également une part importante d'exercices de problèmes de modélisation avec des applications diverses dans plusieurs domaines scientifiques (mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur, sciences du vivant, économie...).

*Jean-François Delmas est docteur en mathématiques appliquées (option probabilités). Il est chercheur à Cermics, le laboratoire de mathématiques appliquées de l'École des ponts ParisTech. Il effectue actuellement sa recherche sur les arbres aléatoires avec des applications en biologie. Enseignant à l'École des ponts ParisTech, à l'ENSTA ParisTech, ainsi qu'en Master, il est également professeur chargé de cours à l'École polytechnique. Il est actuellement directeur du Cermics.*

École Nationale Supérieure  
de **Techniques Avancées**

828, boulevard des Maréchaux 91120 Palaiseau  
[www.ensta-paristech.fr](http://www.ensta-paristech.fr)



ISBN : 978-2-7225-0944-3

30 € TTC

