



Collection
Les cours

Introduction au calcul des probabilités et à la statistique

Exercices, problèmes et corrections

2^e édition

Jean-François Delmas



LES PRESSES DE L'ENSTA

Table des matières

partie I Énoncés

I	Espaces probabilisés	3
I.1	Dénombrement	3
I.2	Formule du crible et applications	4
I.3	Probabilités conditionnelles	6
II	Variables aléatoires discrètes	9
II.1	Exercices de manipulation	9
II.2	Jeu de pile ou face	11
II.3	Lois conditionnelles	13
II.4	Modélisation	14
III	Variables aléatoires continues	19
III.1	Calculs de probabilités ou d'espérance	19
III.2	Calculs de loi	20
III.3	Modélisation	22
IV	Fonctions caractéristiques	27
IV.1	Calculs de loi	27
IV.2	Modélisation	29
V	Théorèmes limites	31
V.1	Quelques convergences	31
V.2	Calcul de limites	34
V.3	Modélisation	35

VI Vecteurs gaussiens	41
VI.1 Exemples	41
VI.2 Propriétés et applications	42
VII Simulation	45
VIII Estimateurs	47
VIII.1 Modèles paramétriques usuels	47
VIII.2 Modélisation	50
IX Tests	55
IX.1 Mise en œuvre	55
IX.2 Modélisation	58
IX.3 Tests du χ^2	61
X Intervalles et régions de confiance	67
XI Problèmes (probabilités)	69
XI.1 Calcul de lois	69
XI.2 Le collectionneur	71
XI.3 Le paradoxe du bus	75
XI.4 La statistique de Mann et Whitney	79
XI.5 Le processus de Galton Watson	82
XI.6 Loi de Bose-Einstein	84
XI.7 Sondages (I)	86
XI.8 Loi de Yule (I)	89
XI.9 Mathématiques financières	91
XI.10 Transmission de message	94
XI.11 Mariage d'un prince	97
XI.12 Réduction de variance	100
XI.13 Modèle de compétition de Pòlya	101
XII Problèmes (probabilités et statistique)	105
XII.1 Le modèle de Hardy-Weinberg	105
XII.2 Estimation de la taille d'une population	108
XII.3 Comparaison de traitements	110
XII.4 Ensemencement des nuages	114
XII.5 Chaleur latente de fusion	118
XII.6 Taille des grandes villes	123
XII.7 Résistance d'une céramique	128
XII.8 Sondages (II)	132
XII.9 Loi de Yule (II) et disques d'or	135

XII.10 Sexe des anges	137
XII.11 Comparaison d'échantillons appariés	140
XII.12 Modèle auto-régressif pour la température	144
XII.13 Mutation de l'ADN mitochondrial	148
XII.14 Estimation d'un quantile et produits de la mer	152
XII.15 Records sportifs	156

partie II Corrections

XIII Corrections	163
XIII.1 Espaces probabilisés	163
XIII.2 Variables aléatoires discrètes	173
XIII.3 Variables aléatoires continues	191
XIII.4 Fonctions caractéristiques	209
XIII.5 Théorèmes limites	214
XIII.6 Vecteurs gaussiens	231
XIII.7 Simulation	238
XIII.8 Estimateurs	241
XIII.9 Tests	257
XIII.10 Intervalles et régions de confiance	282
XIII.11 Problèmes (probabilités)	287
XIII.12 Problèmes (probabilités et statistique)	339



Collection
Les cours



Cet ouvrage d'exercices et de problèmes corrigés se fixe pour but d'illustrer les concepts de base des probabilités et de la statistique mathématique présentés dans l'ouvrage *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*. Il présente des exercices de manipulation qui permettent d'appréhender les concepts du cours (variables aléatoires, théorèmes asymptotiques, modèles gaussiens, estimations paramétriques, tests, régions de confiance). Il comporte également une part importante d'exercices de problèmes de modélisation avec des applications diverses dans plusieurs domaines scientifiques (mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur, sciences du vivant, économie...).

Jean-François Delmas est docteur en mathématiques appliquées (option probabilités). Il est chercheur Cermics, le laboratoire de mathématiques appliquées de l'École des ponts ParisTech. Il effectue actuellement sa recherche sur les arbres aléatoires avec des applications en biologie. Enseignant à l'École des ponts ParisTech, à l'ENSTA ParisTech, ainsi qu'en Master, il est également professeur chargé de cours à l'École polytechnique. Il est actuellement directeur du Cermics.

École Nationale Supérieure
de **Techniques Avancées**

828, boulevard des Maréchaux 91120 Palaiseau
www.ensta-paristech.fr



ISBN : 978-2-7225-0944-3

30 € TTC

