



# APPROCHES STATISTIQUES DU RISQUE

J.-J. Dreesbeke, M. Maumy-Bertrand,  
G. Saporta et C. Thomas-Agnan  
Éditeurs



Editions **TECHNIP**

2-519-256-1



SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE



2-519-256-1

**Jean-Jacques Droesk**  
Université Libre de Bruxelles

**Myriam Maumy-Bertrand**  
Université de Strasbourg

**Gilbert Saporta**  
Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris

**Christine Thomas-Agnan**  
Université Toulouse 1 Capitole

# Approches statistiques du risque

2014



Editions TECHNIP 1 rue du Bac, 75007 PARIS, FRANCE

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Risque et probabilité : les premières rencontres</b>	<b>1</b>
1.1	Un peu d'étymologie . . . . .	1
1.2	L'histoire de la probabilité . . . . .	4
1.2.1	Les prémisses de la probabilité . . . . .	4
1.2.2	Le problème des partis . . . . .	5
1.2.3	Les contrats aléatoires . . . . .	8
1.2.4	Le degré de preuve et le degré de croyance . . . . .	10
1.3	Les racines du risque . . . . .	13
1.3.1	Le code d'Hammurabi . . . . .	13
1.3.2	Les discours de Démosthène . . . . .	15
1.3.3	La décrétale <i>Naviganti</i> de 1248 . . . . .	15
1.3.4	Les catastrophes . . . . .	17
1.4	Risque et probabilité . . . . .	18
1.4.1	<i>De mensura sortis</i> . . . . .	18
1.5	Les primes d'assurance . . . . .	23
1.6	Le contenu de l'ouvrage . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Décision dans le risque et l'incertain</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	27
2.2	Décision en environnement risqué . . . . .	28
2.2.1	Les objets de choix : loteries . . . . .	28
2.2.2	Le théorème de Von Neumann et Morgenstern . . . . .	29
2.2.3	L'aversion au risque . . . . .	29
2.3	L'expérience d'Allais . . . . .	31
2.3.1	Les modèles d'utilité dépendant du rang . . . . .	31
2.3.2	Exemple . . . . .	33

2.4	Décision en environnement incertain . . . . .	33
2.4.1	La construction de Savage. La notion de probabilité subjective . . . . .	34
2.4.2	Les expériences d'Ellsberg . . . . .	36
2.4.3	Théories de l'ambiguïté : introduction à quelques modèles récents . . . . .	37
2.5	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Mesures de risque</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.1.1	La variance comme mesure de risque ? . . . . .	41
3.1.2	De la comparaison des risques aux mesures de risque . . . . .	44
3.1.3	Plan du chapitre . . . . .	44
3.2	Approche axiomatique des mesures de risque et mesures de risque usuelles . . . . .	45
3.2.1	L'équivalent certain . . . . .	48
3.2.2	La valeur de risque . . . . .	49
3.2.3	La valeur extrême de risque . . . . .	51
3.2.4	La transformée d'Esscher . . . . .	55
3.2.5	Les mesures de risque de Wang . . . . .	57
3.2.6	Les mesures de risque par distorsion . . . . .	61
3.3	Comparaison entre risques et mesures de risque . . . . .	63
3.3.1	Ordre induit par la valeur de risque . . . . .	63
3.3.2	Rapport de vraisemblance et principe d'Esscher . . . . .	66
3.3.3	Comparaison uniforme des TVaR . . . . .	67
3.4	Estimation de la valeur de risque . . . . .	75
3.4.1	Estimation paramétrique . . . . .	75
3.4.2	Estimation non-paramétrique . . . . .	78
3.4.3	Estimation semi-paramétrique . . . . .	82
3.5	Estimation des mesures de risque . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Modèles univariés de valeurs extrêmes</b> . . . . .	<b>85</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Quels modèles probabilistes pour l'étude des valeurs extrêmes ? . . . . .	87
4.2.1	Lois limites de maxima : les lois GEV . . . . .	88
4.2.2	Domaines d'attraction . . . . .	91

4.2.3	Lois limites pour les excès : lois GPD . . . . .	93
4.2.4	Comportement limite du processus ponctuel . . . . .	94
4.3	Inférence statistique . . . . .	95
4.3.1	Méthode des maxima par blocs . . . . .	95
4.3.2	Approche quantile . . . . .	100
4.3.3	Approche dépassements de seuil . . . . .	108
4.4	Applications . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Théorie de la ruine</b> . . . . .	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Le modèle classique de la théorie de la ruine . . . . .	114
5.2.1	Le modèle de Cramér-Lundberg . . . . .	114
5.2.2	Renouvellement et équation intégrale . . . . .	116
5.2.3	Généralisations du modèle de base . . . . .	120
5.3	Dividendes et taxes . . . . .	121
5.3.1	Versement de dividendes au delà d'une barrière . . . . .	121
5.3.2	Taxes . . . . .	123
5.4	Propriétés asymptotiques dans le modèle de Sparre Andersen . . . . .	124
5.5	Méthodes pour le calcul exact ou approché de la probabilité de ruine . . . . .	126
5.5.1	Formule de Picard et Lefèvre . . . . .	126
5.5.2	Formules de Takács et de type Seal . . . . .	127
5.6	Modulation par un processus d'environnement markovien . . . . .	130
5.7	Dépendance stochastique en univers univarié . . . . .	132
5.7.1	Principaux types de dépendance en théorie du risque . . . . .	132
5.7.2	Corrélation entre montants de sinistres . . . . .	133
5.7.3	Corrélation entre temps inter-sinistres et montants de si- nistres . . . . .	134
5.8	Au-delà de la probabilité de ruine : les fonctions de pénalité . . . . .	135
5.8.1	Fonction de pénalité escomptée de Gerber-Shiu . . . . .	137
5.8.2	Aire en dessous de zéro . . . . .	137
5.8.3	Conclusion . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Copules et risques multiples</b> . . . . .	<b>139</b>
6.1	Introduction . . . . .	139
6.1.1	De l'indépendance à la dépendance . . . . .	140

6.1.2	Le vecteur gaussien . . . . .	140
6.1.3	Plan du chapitre . . . . .	141
6.2	Vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ . . . . .	142
6.2.1	Classes de Fréchet . . . . .	144
6.2.2	Symétrie, échangeabilité et indépendance conditionnelle	145
6.2.3	Lois sphériques et elliptiques . . . . .	148
6.2.4	La distribution de Dirichlet . . . . .	149
6.2.5	Modélisation des portefeuilles homogènes de crédit . . .	150
6.3	Les copules . . . . .	152
6.3.1	Les copules en dimension 2 . . . . .	152
6.3.2	Les copules en dimension $d > 2$ . . . . .	154
6.3.3	Propriétés de l'ensemble des copules . . . . .	157
6.3.4	Copules, quasi-copules et semi-copules . . . . .	157
6.3.5	Simulations aléatoires et copules . . . . .	160
6.4	Les familles usuelles de copules . . . . .	163
6.4.1	Les bornes de Fréchet-Hoeffding et la comonotonie . . .	163
6.4.2	Les copules elliptiques . . . . .	165
6.4.3	Les copules archimédiennes . . . . .	166
6.4.4	Les copules archimédiennes généralisées et hiérarchiques . . . . .	172
6.4.5	Les copules extrêmes . . . . .	173
6.4.6	La copule de Clayton . . . . .	176
6.4.7	Le modèle de Marshall et Olkin . . . . .	179
6.4.8	Le modèle de Gumbel . . . . .	184
6.4.9	La copule gaussienne . . . . .	185
6.5	Mesurer et ordonner des dépendances . . . . .	186
6.5.1	La corrélation de Pearson . . . . .	188
6.5.2	Le tau de Kendall et le rho de Spearman . . . . .	189
6.5.3	Autres mesures de corrélation . . . . .	192
6.5.4	Dépendance locale, dans les queues . . . . .	193
6.5.5	Quantifier la dépendance en dimension $d > 2$ . . . . .	195
6.6	De l'agrégation des risques multiples . . . . .	197
6.6.1	Espérance de fonctions nonlinéaires . . . . .	199
6.6.2	Comparer des sommes de risques . . . . .	201
6.6.3	Mesures de risques pour la somme de risques . . . . .	202
6.7	Inférence statistique . . . . .	205

6.7.1	Méthodes paramétriques . . . . .	205
6.7.2	Méthodes semi-paramétriques . . . . .	206
6.7.3	Méthodes non-paramétriques d'estimation de copule . . . . .	206
6.7.4	Tests d'ajustement . . . . .	208
<b>7</b>	<b>Valeurs extrêmes multivariées : aspects divers et modèles</b>	<b>213</b>
7.1	Introduction . . . . .	213
7.2	Modèles pour les valeurs extrêmes multivariées . . . . .	214
7.3	Inférence statistique pour les valeurs extrêmes multivariées . . . . .	221
7.4	Limitations du modèle : cas de l'indépendance asymptotique . . . . .	225
7.4.1	Modèles pour queues jointes . . . . .	226
7.4.2	Modèles pour probabilités conditionnelles . . . . .	228
7.5	Conclusion . . . . .	229
<b>8</b>	<b>Théorie de la ruine multivariée</b>	<b>231</b>
8.1	Introduction . . . . .	231
8.2	Processus de risque multivarié et dépendances inter-branches . . . . .	232
8.3	Critères de risque . . . . .	234
8.4	Allocation optimale . . . . .	238
<b>9</b>	<b>Solvabilité</b>	<b>243</b>
9.1	Contexte actuel général . . . . .	243
9.2	Solvabilité II et ERM . . . . .	245
9.3	Zoom sur le risque de rachat en assurance-vie . . . . .	249
9.3.1	Le risque de rachat dans le cadre de Solvabilité II . . . . .	252
9.3.2	Crises de corrélation . . . . .	253
9.4	Robustesse et sensibilité . . . . .	254
<b>10</b>	<b>Modèles statistiques du risque en assurance</b>	<b>263</b>
10.1	La problématique du provisionnement en assurance . . . . .	263
10.1.1	Quelques définitions et notations . . . . .	265
10.1.2	Formalisation du problème du provisionnement . . . . .	267
10.2	Les cadences de paiements et la méthode <i>Chain Ladder</i> . . . . .	268
10.3	Modèle multiplicatif et méthode des marges . . . . .	270
10.4	De Mack à Merz et Wüthrich . . . . .	272
10.4.1	Quantifier l'incertitude dans une prédiction . . . . .	272

10.4.2	Le formalisme de Mack . . . . .	273
10.4.3	La notion de facteur de queue . . . . .	275
10.4.4	De l'incertitude sur $\hat{R}_t$ et $\hat{R}$ . . . . .	275
10.4.5	L'incertitude à un an de Merz et Wüthrich . . . . .	279
10.5	Régression et modèles factoriels . . . . .	282
10.5.1	Les modèles à facteurs, un introduction historique . . . . .	283
10.5.2	Les modèles de De Vylder et de Christophides . . . . .	283
10.5.3	La régression poissonnienne de Hachemeister et Stanard . . . . .	284
10.5.4	Incertainitude dans un modèle de régression . . . . .	285
10.5.5	Quel modèle de régression ? . . . . .	289
10.6	Modélisation et prédiction de la mortalité future . . . . .	291
10.6.1	Modélisation statique des contrats d'assurance vie . . . . .	291
10.6.2	Extension dans un cadre dynamique . . . . .	293
10.7	Le modèle de Lee et Carter . . . . .	294
<b>11</b>	<b>Construction d'une digue</b> . . . . .	<b>299</b>
11.1	Situation d'étude . . . . .	300
11.1.1	Ensemble des décisions ou actions . . . . .	300
11.1.2	Ensemble des informations . . . . .	301
11.1.3	Quelle règle de décision ? . . . . .	302
11.2	Deux modèles mathématiques . . . . .	304
11.2.1	Le processus ponctuel marqué d'extrêmes pour décrire les débordements d'une rivière . . . . .	305
11.2.2	Quel modèle de dommages pour décrire les effets des débordements d'une rivière ? . . . . .	310
11.3	Optimum économique . . . . .	313
11.3.1	La fonction de coût . . . . .	313
11.3.2	Interprétation économique de la période de retour de la crue de projet . . . . .	314
11.3.3	Pratique de l'ingénierie ordinaire . . . . .	315
11.3.4	Prise en compte règlementaire des risques . . . . .	316
11.4	Le dimensionnement optimal en contexte incertain . . . . .	318
11.4.1	Le risque dans le cadre décisionnel théorique . . . . .	318
11.4.2	La décision bayésienne . . . . .	319
11.4.3	Analyse décisionnelle complète du problème de la digue . . . . .	321
11.5	Discussion . . . . .	325

11.5.1	Limite de l'utilisation de la loi des extrêmes . . . . .	325
11.5.2	Limites de l'approche économique du risque : attitude du décideur face au risque . . . . .	326
11.5.3	Critique de la pratique réglementaire . . . . .	326
11.5.4	Quand faire une analyse bayésienne extensive ou une analyse décisionnelle normale ? . . . . .	327
11.6	Conclusion . . . . .	327
11.7	Annexes . . . . .	329
11.7.1	Modèle POT et lois des extrêmes . . . . .	329
11.7.2	Espérance des dommages linéaires . . . . .	331
11.7.3	Période de retour . . . . .	331
11.7.4	Calcul du risque de la règle obtenue à partir du maximum . . . . .	332
11.7.5	Calcul du risque de la règle bayésienne . . . . .	333
11.7.6	Traitement décisionnel asymptotique de la construction d'une digue POT Poisson-exponentiel . . . . .	333
12	<b>Risques alimentaires</b> . . . . .	<b>337</b>
12.1	Introduction . . . . .	337
12.2	Exposition au risque : approche empirique . . . . .	338
12.2.1	Les données de consommation . . . . .	339
12.2.2	Les données de contamination . . . . .	339
12.2.3	L'exposition au risque et estimation empirique . . . . .	340
12.2.4	Un exemple : l'ochratoxine A . . . . .	341
12.3	Quantification des risques extrêmes . . . . .	343
12.3.1	Analyse de risques et valeurs extrêmes . . . . .	343
12.3.2	L'estimateur de Hill . . . . .	345
12.3.3	L'estimation indirecte : méthode P.O.T. . . . .	346
12.3.4	Modélisation et caractérisation des populations à risque . . . . .	348
12.4	Modélisation dynamique du risque . . . . .	351
12.4.1	Un modèle de ruine avec cinétique d'élimination . . . . .	353
12.4.2	Analyse probabiliste du modèle KDEM . . . . .	354
12.4.3	Indice de risque pour une exposition dynamique . . . . .	355
12.4.4	Inférence statistique par simulation . . . . .	356
12.5	Conclusion . . . . .	357
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>361</b>

# APPROCHES STATISTIQUES DU RISQUE

J.-J. Droesbeke, M. Maumy-Bertrand, G. Saporta et C. Thomas-Agnan  
Éditeurs

L'actualité nous renvoie tous les jours une facette du risque : crise financière, accidents d'avion, dérapages du changement climatique, etc.

Quel est le rôle joué par la statistique dans l'analyse de ces risques et quels sont les outils spécifiquement développés pour cela ?

Cet ouvrage est consacré à une présentation des fondements méthodologiques classiques, mais aussi récents, et présente des applications à des domaines variés.

Il est le fruit de la collaboration entre spécialistes parmi les plus réputés : Patrice Bertail (université Paris Ouest-Nanterre-La Défense), Arthur Charpentier (université Rennes-1), Anne-Laure Fougères (université Claude Bernard, Lyon), Stéphane Loisel (université Claude Bernard, Lyon), Eric Parent (AgroParisTech) et Jean-Marc Tallon (université Paris-1), réunis à l'occasion des 14<sup>e</sup> Journées d'étude en statistique organisées par la SFdS au Centre international de rencontres mathématiques de Luminy.

La Société Française de Statistique (SFdS), association reconnue d'utilité publique, a pour objectif de favoriser les développements de la statistique et d'assurer la représentation de l'ensemble des utilisateurs, enseignants et chercheurs dans ce domaine.

Image de couverture :

*The Burning of the Houses of Lords and Commons*, Joseph Mallord William Turner, 1835, Huile sur toile, 92,1 x 123,2  
Museum of Art, Cleveland © DR.

ISBN 978-2-7108-0965-4



9 782710 809654

[www.editionstechnip.com](http://www.editionstechnip.com)

présenté par Kalettis