

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

Laboratoire de structures

**Projet de Fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme de master en  
Construction mécanique**

**Analyse en mode actionneur des plaques composites  
piézoélectriques**

Présenté par :

**Daoudi Ilhem**

**Kara Abd El Karim**

Proposé et encadré par :

**Dr Ezzraïmi Madjid**

**Dr Tiberkak Rachid**

Année universitaire : 2018/2019

*Je dédie ce mémoire*

*A mes chers parents ma mère et mon  
père*

*Pour leur patience, leur amour, leur  
Soutien et leur encouragement*

*A mes belles sœurs Ahlem et Samiha*

*A mes beaux frères Adel et Youcef*

*A mon futur homme Yakoub*

*A les petits : Ritedj et Abd el Djalil*

*A mes amies et mes camarades.*

*Sans oublier tous les professeurs que  
ce soit du primaire, du moyen, du  
secondaire ou de l'enseignement*

*Supérieur.*

*Daoudi Ilhem*

*Je dédie ce mémoire*

*A mes chers parents*

*Pour leur patience, leur amour, leur*

*Soutien et leur encouragement*

*A mon frère et sœurs (Zineb Hasna*

*Amel Sara Yasmine Abd el Rahmane*

*mon beaux frère Hicham et ma belle*

*sœur Nesrine)*

*car il croit en moi*

*Kara Abd El-karim*

## *Remerciements*

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nos a donnée du Courage, la patience et la force jusqu'à la fin de ce modeste travail.*

*Il est difficile d'exprimer, en quelques mots nos profonde gratitude et nos sincère remerciement pour les aides précieuses, les conseils utiles et l'encouragement de nos deux promoteurs monsieur EZZRAIMI, et monsieur TIBERKAK pour nous suivre et nous soutenir pour réaliser ce travail.*

*Nous adressons également nos remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.*

*Nous remercions très chaleureusement nos parents et nos familles, pour leur compréhension, leur soutien et leur encouragement qui nous ont aidés à bien terminer ce mémoire.*

*Un grand remerciement a tous les enseignants du département de génie mécanique et mes collègues et tous mes amis.*



## ملخص

الكهروإجهادية هي قدرة بعض المواد (البلورات والسيراميك والبوليمرات) على أن تكون قادرة على تحويل الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربائية ، إنها التأثير الكهروإجهادي المباشر ، وتحويل الطاقة الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية ، هذا هو التأثير عكس كهروضغطية.

تمثل الميزة الرئيسية للمواد الكهروإجهادية في أنها تربط بقوة بين المقاييس الميكانيكية والكهربائية، وتسمح للعمل على الحالة الميكانيكية للبنية طريق تغيير المجال الكهربائي المطبق على هذه المواد.

من خلال استغلال هذه الخصائص ، قدمنا لوحة مشروطة مزودة بعناصر كهروضغطية تسمح بالتحكم في الاهتزازات في وضع المحرك

## Abstract

Piezoelectricity is the ability of certain materials (crystals, ceramics, polymers) to be able to transform a mechanical energy into electrical energy it is the direct piezoelectric effect, and to transform an electric energy into mechanical energy, it is the effect reverse piezoelectric.

The main advantage of piezoelectric materials is that they strongly couple the mechanical and electrical magnitudes, and allow acting on the mechanical state of a structure by changing the electric field applied to these materials.

By exploiting these properties, we presented a modal plate equipped with piezoelectric elements allowing the control of vibrations in actuator mode.

## Résumé

La piézoélectricité est la capacité de certains matériaux (cristaux, céramiques, polymères) de pouvoir transformer une énergie mécanique en une énergie électrique, c'est l'effet piézoélectrique direct, et transformer une énergie électrique en une énergie mécanique, c'est l'effet piézoélectrique inverse.

L'intérêt principal des matériaux piézoélectriques est qu'ils couplent fortement les grandeurs mécaniques et électriques, et permettent d'agir sur l'état mécanique d'une structure par modification du champ électrique appliqué à ces matériaux.

Par exploitation de ces propriétés, on a présenté un modale de plaque équipé des éléments piézoélectrique permettant la contrôle des vibrations en mode actionneur.

# Nomenclatures

## Symboles

[C] : est la matrice des constantes élastiques.

[S] : la matrice de souplesse.

[ $\varepsilon$ ] : la déformation.

[ $\sigma$ ] : la contrainte.

$\delta_{ij}$  : le symbole de Kronecker.

$\lambda$  et  $\mu$  : Les coefficients de Lamé.

$k_{ij}^2$  : Coefficient de couplage.

$u$  et  $v$  : Déplacement de la membrane par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement.

$w$  : Déplacement transversal.

$\theta_x$  et  $\theta_y$  : Rotation totale par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement .

$\varphi_x$  et  $\varphi_y$  : Rotation de cisaillement des sections normales à l'axe  $x$  et  $y$ .

$\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  et  $\nu_{31}$  : Coefficient de Poisson.

$E_1$  : Module d'élasticité longitudinal.

$E_2$  : Module d'élasticité transversal.

$G_{12}$  : Module de cisaillement longitudinal.

[ $Q_{ij}$ ] : La matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1, 2, 3).

[ $\bar{Q}_{ij}$ ] : Est la matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel ou orthotrope.

$T$  : est la matrice de changement de base (1',2',3') des contraintes.

$T'$  : est la matrice de changement de base (1',2',3') des déformations.

$N$  : résultantes en membrane.

[A] : La matrice de rigidité en membrane.

[ $\beta$ ] : La matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

$M_f$  : Moments de flexion et de torsion.

[D] : La matrice de rigidité en flexion.

[F] : La matrice de rigidité en cisaillement.

$\delta$  : Variation subie pendant l'intervalle de temps considéré.

{ $F$ } : Forces volumiques.

$\{f\}$  : Forces surfaciques.

$\{P\}$  : Forces ponctuelles.

$\{D\}$  : Vecteur de déplacement électrique.

$\{\varepsilon\}$  : Vecteur des déformations.

$\{E\}$  : Vecteur des champs électriques.

$[e]$  : Matrices des constantes piézoélectriques ou de couplage mécanique.

$[d]$  : Matrice de permittivité électrique.

$\{\sigma\}$  : Vecteur de contrainte.

$[C]$  : Matrice de rigidité.

$\{E\}$  : Le champ électrique.

$\{\phi\}$  : Potentiel électrique.

$h_p$  : Épaisseur de la sous-couche électrique.

$h_c$  : Épaisseur de l'âme (cœur).

$N_i$  : fonctions d'interpolation.

$nn$  : nombre de nœuds par élément.

$\{\bar{u}\}$  : Vecteur de déplacements nodaux.

$\{F_v\}$  et  $\{F_s\}$  sont respectivement les forces volumiques et surfaciques.

$[k_{u\phi}]_e$  et  $[k_{\phi u}]_e$  : est composante de la matrice de rigidité due au couplage piézo-mécanique.

$\{Q\}$  : Vecteur de charge électrique.

$[\bar{M}]$  et  $[\bar{K}]$  et  $[\bar{C}]$  : Sont des matrices diagonales.

$\{\Psi\}$  et  $\{\phi\}$  : Les vecteurs propres.

$x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  : le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'état  $n$ .

$\Delta t$  : est l'incrément du temps.

$\gamma$  et  $\beta$  : sont des paramètres qui définissent la méthode.



***Abréviations***

G.D : les composites grandes diffusions.

H.P : les composites hautes performances.

T.D: thermodurcissable.

T.P: thermoplastique.

PZT : Oxyde de plomb, zirconium et titane.

PVDF: Polyvinylidene Difluoride.

SiO<sub>2</sub> : Quartz.

LiNbO<sub>3</sub> : Niobate de lithium.

## Liste des tableaux

<b>Tableau (1.1):</b> Exemples de matériaux composites, pris au sens large .....	04
<b>Tableau (1.2):</b> Les différents types de renfort de base .....	10
<b>Tableau (2.1):</b> Equations piézoélectriques et électromécanique .....	20
<b>Tableau (2.2):</b> Grandeurs électriques, mécaniques et piézoélectriques .....	21
<b>Tableau (2.3):</b> Ecriture des tenseurs $[c]$ $[e]$ et $[\varepsilon]$ selon la direction de polarisation pour les matériaux piézoélectriques .....	22
<b>Tableau (2.4):</b> Caractéristiques piézoélectriques de matériaux piézoélectriques .....	24
<b>Tableau (2.5):</b> Différentes applications de la piézoélectricité .....	25
<b>Tableau (4.1):</b> Des deux paramètres dépendent les propriétés de l'algorithme .....	56
<b>Tableau (4.2):</b> La liste de méthodes classiques associées à des valeurs particulières .....	56
<b>Tableau (5.1) :</b> Les quatre premières fréquences propres .....	58
<b>Tableau (5.2) :</b> Propriétés des matériaux .....	59
<b>Tableau (5.3) :</b> Sans la charge mécanique et avec potentiel électrique .....	61
<b>Tableau (5.4) :</b> Les résultats obtenus de cas avec charge mécanique et potentiel.....	62
<b>Tableau (5.5) :</b> Propriétés des matériau.. .....	63
<b>Tableau (5.6) :</b> Les résultats obtenus de cas la plaque sans potentiel électrique et sans charge mécanique.....	63
<b>Tableau (5.7) :</b> Les résultats obtenus de cas avec s potentiel électrique et sans charge mécanique.....	64
<b>Tableau (5.8) :</b> Les résultats obtenus de cas avec potentiel électrique et avec charge mécanique .....	65
<b>Tableau (5.9) :</b> Les résultats obtenus de changement de voltage .....	65
<b>Tableau (5.10) :</b> Les résultats obtenus de cas sans potentiel électrique et avec charge mécanique .....	66

## Liste des figures

<b>Figure (1.1):</b> Structure d'un matériau composite.....	03
<b>Figure (1.2):</b> Classification des matériaux composites .....	07
<b>Figure (1.3):</b> Différentes familles des matrices.....	08
<b>Figure (1.4):</b> Différents matériaux des renforts.....	09
<b>Figure (1.5):</b> Interface .....	10
<b>Figure (1.6):</b> Structure d'un matériau monocouche .....	11
<b>Figure (1.7):</b> Constitution d'un stratifié.....	12
<b>Figure (1.8):</b> Désignation d'un stratifié .....	12
<b>Figure (1.9):</b> Constitution d'un sandwich .....	16
<b>Figure (1.10):</b> Les différents types des sandwiches.....	16
<b>Figure (2.1):</b> Illustrations de l'effet piézoélectrique direct et inverse.....	19
<b>Figure (2.2):</b> Polarisation par application d'un champ électrique dans les matériaux .....	19
<b>Figure (2.3):</b> Classes cristallines.....	20
<b>Figure (2.4):</b> Facteurs de couplages pour les différents types de déformation .....	23
<b>Figure (3.1):</b> Illustration de la plaque de Love- Kirchhoff .....	27
<b>Figure (3.2):</b> Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin .....	28
<b>Figure (3.3):</b> Directions principales dans un pli.....	34
<b>Figure (3.4) :</b> Plaque sandwich piézoélectrique.....	41
<b>Figure (4.1):</b> Élément rectangulaire à quatre nœuds .....	44
<b>Figure (5.1):</b> Maillage et condition aux limites appliquées à la plaque .....	58
<b>Figure (5.2):</b> Empilement des couches .....	58
<b>Figure (5.3):</b> Modes propres .....	59
<b>Figure (5.4):</b> Maillage et condition aux limites appliquées à la plaque .....	60
<b>Figure (5.5):</b> La plaque avec une potentiel électrique .....	61
<b>Figure (5.6):</b> Déformation de la plaque .....	61
<b>Figure (5.7):</b> Déformation de la plaque avec charge mécanique.....	62
<b>Figure (5.8) :</b> La plaque non déformée.....	63
<b>Figure (5.9) :</b> déformation de la plaque.....	64

<b>Figure (5.10) : Déformation de la plaque.....</b>	<b>65</b>
<b>Figure (5.11) : Déformation de la plaque.....</b>	<b>66</b>

## *Introduction Générale*

La piézo-électricité est un phénomène caractérisé par l'apparition de charges électriques à la surface de certains matériaux cristallins lorsque ces derniers sont soumis à des contraintes mécaniques. En exerçant une contrainte mécanique sur ces matériaux, la structure cristalline produit une quantité de charges négatives ou positives selon la contrainte appliquée. La quantité de charges produites est en fonction de la contrainte mécanique et disparaît lorsque cette même contrainte est relâchée. L'effet piézoélectrique a un caractère réversible permettant ainsi de transformer une contrainte mécanique en une quantité de charges (ou différence de potentiel) et inversement une quantité de charges (ou différence de potentiel) en une déformation mécanique.

L'objectif de ce travail est d'étudier les plaques vu leur importance dans le domaine de la : mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse du comportement dynamique des plaques. Leurs rôles essentielles est de parer à l'action dynamique des sollicitations extérieures et assurer ainsi les performances mécaniques souhaitées et désirable en faveur de la structure porteuse.

Le premier chapitre 'généralités' est dédié à une revue sur les matériaux composites, les avantages, et l'intérêt de son utilisation ainsi que les différents domaines d'application.

Dans le deuxième chapitre une description du phénomène piézoélectrique est proposée à travers les effets direct et inverse, et une vue générale sur les types et les applications de la piézoélectricité.

Le troisième chapitre est consacré à une analyse dynamique libre des plaques élastiques isotropes et orthotropes utilisant la théorie flexionnelle des plaques mince (Hypothèse de KIRCHOFF). Une présentation de la théorie des plaques épaisses (Hypothèse MINDLIN-REISSNER) est ensuite initiée afin de tenir compte des phénomènes supplémentaires mis en jeu, tel que l'effet d'effort tranchant ce qui permet de raffiner la solution de l'analyse.

Le quatrième chapitre est consacré à la discrétisation en éléments finis. Donne un aperçu sur les éléments finis, Le modèle de maillage et les approximations de la solution.

Le cinquième chapitre est réservé exclusivement aux applications et discussions des résultats obtenues principalement par logiciel ANSYS.

Notre travail ce termine par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Généralités sur les matériaux composites

### 1.1 Introduction

Un matériau composite est tout alliage ou matière première comportant un renfort sous forme filamentaire. Il nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le renfort (la fibre) et La matrice (résine) (Figure I .1), qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, l'interface.

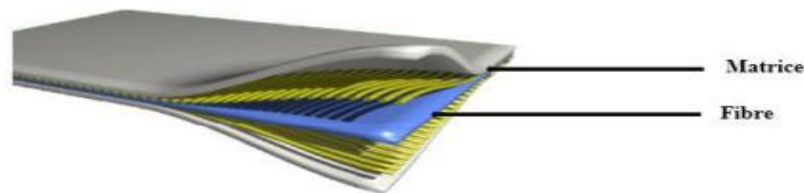


Figure (1.1):Structure d'un matériau composite.

- **Définition des matériaux composites**

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques aux matériaux de renfort : la rigidité, la résistance à la rupture, la dureté, etc.

Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques du composite tel que: le comportement thermique, la tenue à la température, la tenue au feu, la résistance à l'abrasion, les propriétés électriques, etc.

Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : les caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible et une bonne compatibilité avec les résines ainsi qu'une facilité de mise en œuvre, faible coût, etc.[1]

On distingue deux types de composites:

- Les composites grandes diffusions (G.D) représentent 95% de matériaux composites utilisés.
- Les composites hautes performances (H.P) principalement utilisé dans l'aéronautique.

## 1.2 Notion de base

.Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations aux quelles sont soumises les pièces [2].

Le tableau (1.1) montre quelque type des matériaux et leurs domaines d'applications :

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice Organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiment Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale Béton Composite carbone-carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibre céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, Biomédecine, etc. Pièces thermomécanique
3. Composites à matrice Métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. Sandwiches Peaux âmes	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, etc.	Domaines multiples

Tableau (1.1) : Exemples de matériaux composites, pris au sens large [3].



## Définitions de base

- **Homogène** : mêmes propriétés en tout point du matériau.
- **Hétérogène** : en 2 points différentes, propriété différentes
- **Isotrope** : même propriété dans toute les directions
- **Isotrope transverse**: il existe en axe de symétrie par rapport à une étroite.
- **Orthotrope**: propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- **Anisotrope** : les propriétés sont différentes selon les différentes directions

## 1.3 Bref historique

Historiquement, la notion de renfort fibreux est très ancienne. Il y a des références bibliques à des briques d'argile de paille renforcés dans l'Égypte ancienne.

Des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie au 19<sup>ème</sup> Siècle, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé). La résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite au début du 20<sup>ème</sup> siècle.

Le premier bateau en fibre de verre a été construit en 1942, des matières plastiques renforcées ont également été utilisées dans les avions et les composants électriques à ce moment.

L'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950.

Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968. Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970.

Dupont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973. A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, et les industries biomédicales.

Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 1990, l'accent est mis sur le développement des matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température.

Les applications des composite comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des avions et des structures aérospatiales, composantes d'automobile, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des

performances mécaniques élevées et/ou la stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids [4].

## 1.4 Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants où Suivant la nature des Composants [3].

### 1.4.1 Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres .

#### A. Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres Continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, Etc. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les Propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux Allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan.

Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- la nature des constituants.
- la proportion des constituants.
- l'orientation des fibres.

#### B. Composites à particules

Dans ce cas lorsque le renfort se Trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne Possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés Des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la Résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les Particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du Matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

### 1.4.2 Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort nous pouvons citer :

#### A. Composites à matrice organique (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

#### B. Composites à matrice métallique (alliages légers et ultralégers d'aluminium de magnésium, et de titane), avec :

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC).
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de Silicium (Bor SiC).

#### C. Composites à matrice minérale (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets,
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans Le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux

composites matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : Jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice Céramique.

Les matériaux composites se divisent en 3 familles principales comme montré au-dessous (figure. 1.2) [5].

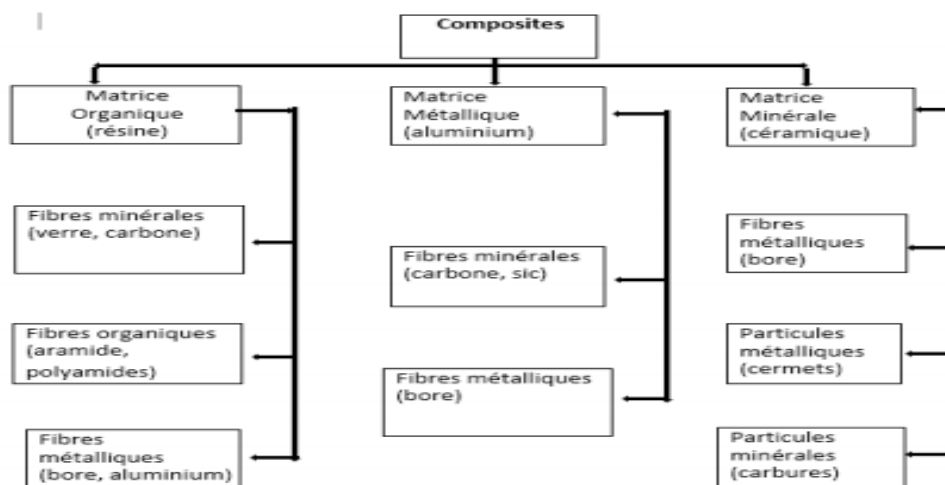


Figure (1.2) : Classification des matériaux composites .

## 1.5 Les éléments constituant des matériaux composites

### 1.5.1 Les matrices (résines)

Les matrices utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les matrices doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées

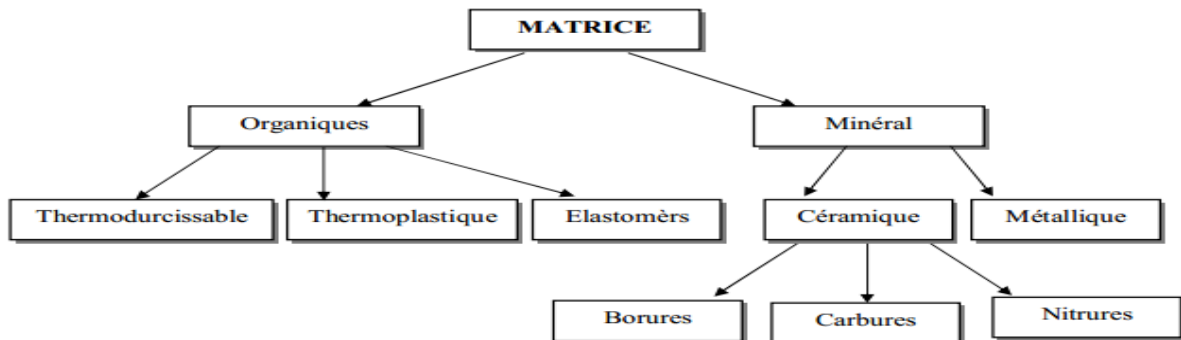


Figure (1.3): Différentes familles des matrices.

Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines thermodurcissables et les résines thermoplastiques [6].

#### ➤ Résine thermoplastique(T.P)

Polymère pouvant être alternativement ramollie par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique de polymère étudié les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramollie, de se mouler aisément par plasticité.

#### ➤ Résine thermodurcissable(T.D)

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- **les résines polyesters insaturées** : polyesters condensés, vinylesters, Dérivés allyliques, etc.
- **les résines de condensation**: phénoliques, aminoplastes, furaniques (peu Utilisées en France), etc.
- **les résines époxydes**.sont fabriqués par polymérisation (polyamine, aminoamide) : ce sont des polymères tridimensionnels.

### 1.5.2 Les renforts (fibres)

Les renforts peuvent être utilisés sous différentes formes : particules ou fibres. Une particule ne possède aucune dimension privilégiée, elle est utilisée généralement pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Les fibres se présentent sous plusieurs formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes, etc.) et c'est leur arrangement et leur orientation qui permettent de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites.

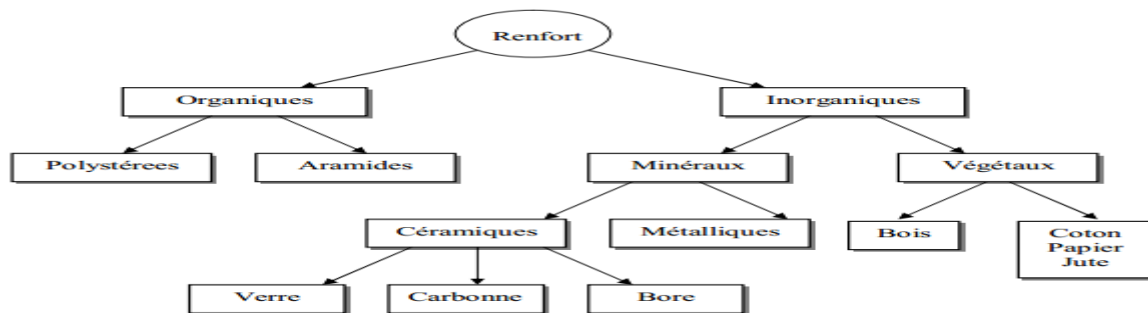


Figure (1.4): Différents matériaux des renforts.

La figure (1.4) présente les familles des renforts, parmi les plus utilisées on peut citer :

**Fibres de verre :** Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres [7].

- **E** : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes.
- **R** : pour les composites hautes performances.
- **D** : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).

**Fibres de carbone :** C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile).

**Fibres de bore :** Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles.
- les fibres haut module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

**Fibres aramides :** sont une classe de matériaux résistant à la chaleur et/ou présentant de bonnes propriétés mécaniques. Ils ne peuvent être utilisés que comme fibres, qui servent surtout à la fabrication de matériaux composites, en renfort de matrices.

### 1.5.2.1 Principe caractéristiques des fibres de base [1]

	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	Charge de rupture en traction en (MPa)	Charge de rupture en Composite en (MPa)	Allongement à la rupture %	Module d'élasticité long (MPa)	Diamètre des filaments élémentaires
Verre E	2,54	3400	1200	4,8	73000	3-30
Verre R	2,48	4400	1300	5,4	86000	3-30
Aramide bas module	1,45	3100	500	2	70000	12
Aramide haute module	1,45	3100	500	1	130000	12
Carbone haute module	1,8	2200	1300	1	400000	8
Carbone haute ténacité	1,78	2800	1800	0,5	200000	8
Bore	2,63	3500	3500	0,8	400000	100-200

Tableau (1.2) : Les différents types de renfort de base.

### 1.6 Interface

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite[8].

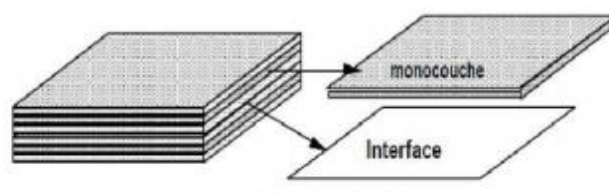


Figure (I.5) : Interface.

## 1.7 Les charges

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre) [9].

Les principales charges utilisées sont :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...).
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...).
- des particules de carbone (noir de carbone).

## 1.8 Les additifs

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés.

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage.
- pigments et colorants.
- agents anti -retraits.
- agents anti -ultraviolets.
- accélérateur.
- catalyseur.

## 1.9 Architecture des matériaux composites

### 1.9.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes[10].

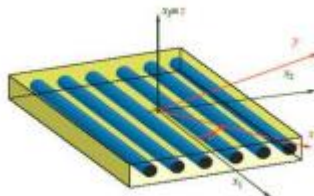


Figure (1.6): Structure d'un matériau monocouche.

### 1.9.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure. I.7).

➤ **Propriétés mécaniques spécifiques.**

On pourra avoir des stratifiés du type :

1. **Equilibré** : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $(+\theta)$  que de couches orientées suivant la direction  $(-\theta)$ .
2. **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un Plan moyen.
3. **Antisymétrique** : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. **Croisé** : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .
5. **Hybride** : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride[11].

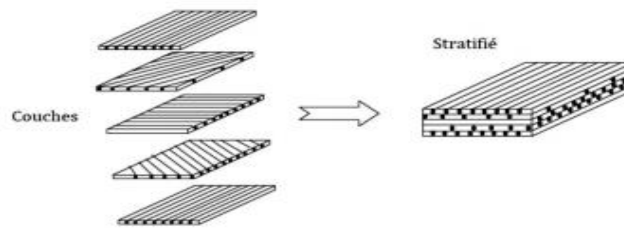


Figure (1.7): Constitution d'un stratifié.

#### 1.9.2.1 Désignation des structures stratifiées

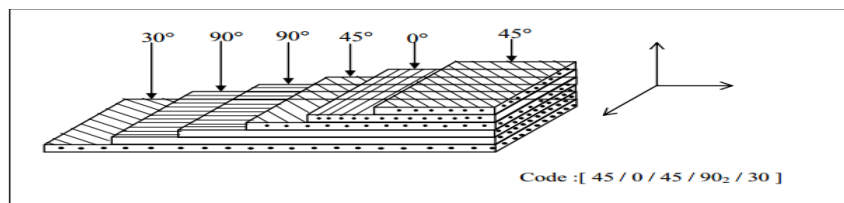


Figure (1.8) : Désignation d'un stratifié.

#### 1.9.2.2 Exemple d'un stratifié

**Stratifié :**

0°
30°
- 30°
- 45°
45°



**Désignation :**

[ ± 45 / ∓ 30 / 0 ]

**1.9.2.3 les différents types d'un stratifiés**

Il existe plusieurs types définis par la relation d'élasticité :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

Cette loi généralement appelée loi de Hooke généralisée introduit la matrice de rigidité C, symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 constantes de rigidité  $C_{ij}$  [12].

• **Matériau anisotrope**

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. La relation s'écrit sous la forme condensée :

$$\{\varepsilon\} = [C^{-1}] \cdot \{\sigma\} = [S] \cdot \{\sigma\} \tag{1.2}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

• **Matériau orthotrope**

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche précédemment conduit aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotrope. Constantes d'élasticité :  $E_1, E_2, E_3$  (sont les modules d'élasticité longitudinaux)  $G_{12}, G_{23}, G_{13}, G_{31}$  (sont les modules de cisaillement)  $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$  (sont les coefficients de plus la symétrie de la matrice de la de comportement).

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

- **Matériau isotrope transverse**

C'est un orthotrope mais avec une seule direction différente. C'est donc la même loi de comportement mais il y'a 5 constantes à déterminer. La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & & 0 & \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & & & \\ & & & \frac{c_{22}-c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & c_{66} & 0 \\ & & & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Il ne reste donc que 6 coefficients distincts.

- **Matériau isotrope**

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope. La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & 0 & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & & \\ & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Alors la loi de comportement s'écrit:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.7)$$

Ou :  $\delta_{ij}$ : le symbole de Kronecker :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.8)$$

Les coefficients matériels  $\lambda$  et  $\mu$ , qui dépendent de la particule considérée, sont appelés les coefficients de Lamé. Leur expression en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , est :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.9)$$

Ou :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (1.10)$$

### 1.9.3 Matériaux Sandwich

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Figure 1.9). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité surface.

Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu.

Le matériau sandwich possède un grande Légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique .Ils ont pour quelques inconvénients : mauvaise isolation acoustique, risque de flambement plus élevé, tenue au feu n'est pas bonne pour certaine catégories d'âmes.

#### 1.9.3.1 Les matériaux les plus couramment utilisés [13]

##### ❖ pour les âmes pleines

- le balsa ou bois cellulaire;
- du papier kraft et du papier polyamide
- des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques

##### ❖ pour les âmes creuses essentiellement nid d'abeilles

profilés :

- des alliages métalliques légers.
- du papier kraft et du papier polyamide.



Figure (1.9) : Constitution d'un sandwich.

### 1.9.3.2 Les différents types de sandwichs

sont montrés sur la figure suivante :

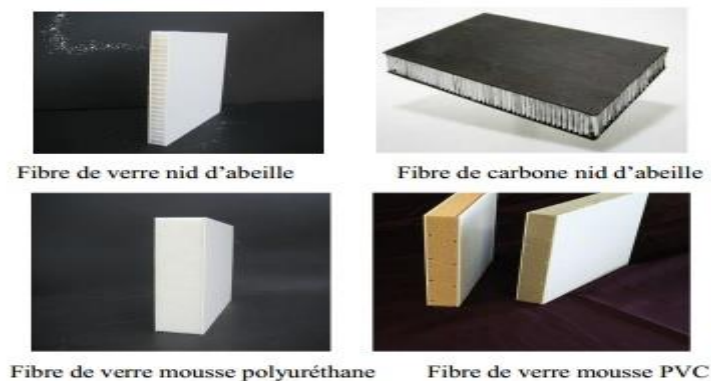


Figure (1.10) : les Différents types de sandwichs.

## 1.10 Avantages et inconvénients des matériaux composites

### 1.10.1 Avantages

L'usage des matériaux composites ne cesse de croître dans différents domaines : Automobile, naval, pétrolier, aéronautique et aérospatial. Grâce à ces matériaux présentent de Nombreux avantages telle que [14] :

- Gain de masse : la densité du matériau composite représente 20% de celle des platines d'acier.
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) .
- Grande résistance à la fatigue.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone).
- Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole, etc.

### 1.10.2 Inconvénients

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température.
- sensibilité aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes.
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques.
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre).
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches.

### 1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux composites, leurs propriétés et les différents types des matériaux composites que nous avons mentionnés dans ce chapitre, dans notre travail nous avons choisi les sandwiches en raison de ses avantages mécaniques (grande rigidité à la flexion, légèreté et bonne isolation thermique etc....) par rapport aux autres matériaux. Ses avantages mécaniques offrent de grandes potentialités aux concepteurs dans des domaines très divers comme l'industrie aérospatiale, ou généralement le transport et l'industrie du bâtiment.

# *Chapitre 2*

## *Généralités sur les matériaux piézoélectriques*

### **2.1 Introduction**

Dans ce qui suit, on décrit la piézoélectricité à travers les phénomènes mis en jeux et ses différents effets physiques. On se base sur la polarisation Ferroélectriques et les différents matériaux piézoélectriques (polymères, céramique, cristallins). Enfin, on cite quelques applications où seule la piézoélectricité est plus adéquate.

### **2.2 Matériaux diélectriques**

Les isolants ou diélectriques sont des matériaux ayant une résistivité très élevée :  $10^8\Omega$  à  $10^{16}\Omega$ , ils contiennent très peu d'électrons libres. Un isolant est caractérisé par ses propriétés électriques, mécaniques, chimiques et thermiques. Un bon isolant ne devrait pas laisser passer le courant lorsqu'il est soumis à une tension continue. Autrement dit, sa résistance en court circuit doit être infiniment grande [15].

### **2.3 Phénomène de la piézoélectricité**

#### **2.3.1 Définition**

La piézoélectricité est un phénomène physique présent chez certains matériaux ayant une structure cristalline. Il s'agit d'une polarisation électrique induite par une déformation mécanique. Inversement, un matériau subit une déformation mécanique sous l'effet d'un champ électrique. D'une manière générale, un matériau piézoélectrique est donc capable de coupler les énergies élastiques et électriques. Ce couplage a été observé qualitativement pour la première fois par l'abbé René Just Haüy en 1817, mais on en attribue la découverte à Pierre et Jacques Curie qui ont fait l'étude théorique et expérimentale en 1880 [16].

#### **2.3.2 L'effet piézoélectrique**

L'effet piézoélectrique a deux propriétés : lorsque il y'a aucune contrainte, les charges électriques s'annulent, et lorsque le sens des contraintes est inversé, le signe des charges est

inversé. Il existe deux effets : L'effet piézoélectrique direct correspond à l'apparition de charge sous l'effet d'une contrainte, elle permet d'utiliser les matériaux piézoélectriques comme capteurs puisque l'information qui est sous la forme d'une tension sur la déformation de la structure mécanique peut être récupérée. Par contre l'effet inverse correspond à une déformation du matériau lorsqu'on applique un champ électrique dans le matériau [17].

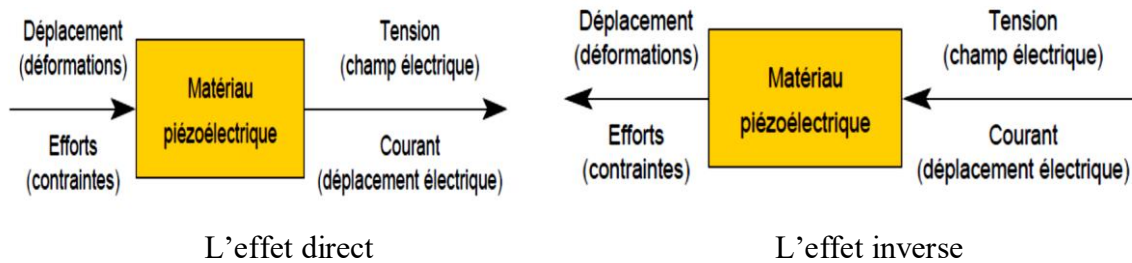


Figure (2.1) : Illustrations de l'effet piézoélectrique direct et inverse.

### 2.3.3 Polarisation des piézoélectriques

Le phénomène piézoélectrique apparaît par la déformation mécanique du dipôle élémentaire de la maille cristalline. Le matériau piézoélectrique est très souvent sous forme poly-cristalline, que ce soit en massif ou en couches minces. Ainsi, à l'état naturel ou après élaboration, les dipôles électriques sont orientés de façon aléatoire et le matériau ne présente aucun effet piézoélectrique. Pour ce faire, il est nécessaire de procéder à une étape dite polarisation qui consiste à appliquer un champ électrique intense afin d'orienter les polarisations des microcristaux dans la même direction [18].

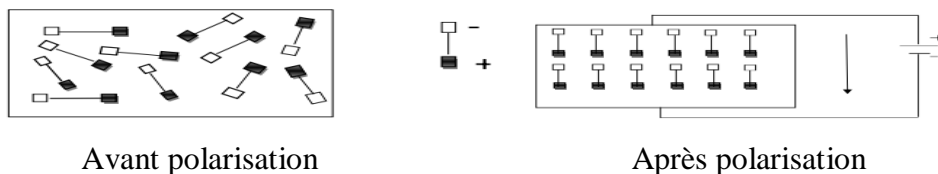


Figure (2.2) : Polarisation par application d'un champ électrique dans les matériaux.

## 2.4 Matériaux Ferroélectriques

### 2.4.1 Définition

Un matériau ferroélectrique se caractérise par une température de transition structurale entre une phase haute température présentant un comportement paraélectrique (non polaire) et une phase basse température présentant une polarisation spontanée due à la distorsion spontanée de la maille cristalline. Cette polarisation peut être réorientée ou même inversée selon des directions cristallographiques équivalentes sous l'effet du champ électrique extérieur [19].

### 2.4.2 Classes cristallines

Une classe cristalline (également appelée classe de symétrie) regroupe un ensemble de minéraux possédant les mêmes éléments de symétrie.

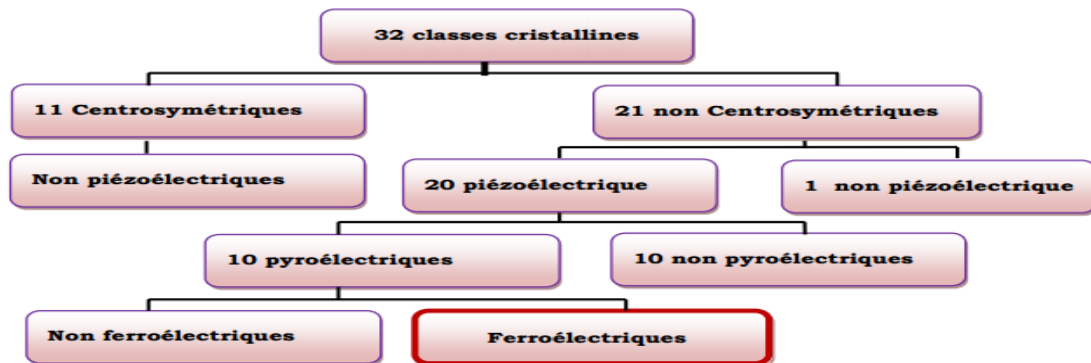


Figure (2.3) : classes cristallines

Parmi les 32 classes cristallines ou groupes ponctuels, 21 sont non Centro-symétriques ; c'est-à-dire dépourvues de centre de symétrie. Elles pourront donc conduire à la Piézoélectricité (Figure 2.3). Cependant, parmi les 21 classes, bien que non Centro symétrique, est non piézoélectrique. Il n'y a donc que 20 classes piézoélectriques, dans le sens où une contrainte mécanique entraîne une polarisation (effet direct) et un champ électrique peut induire une déformation (effet inverse).

Parmi ces 20 classes 10 d'entre elles présentent un axe polaire unique et correspondent à des cristaux polaires. Parmi ces 10 classes pyro-électriques, certaines offrent la possibilité d'une inversion de polarisation par l'application d'un champ électrique ; ce sont les ferroélectriques [16].

### 2.5 Equations de la piézoélectricité

La piézoélectricité est un phénomène de couplage entre les grandeurs électriques (champ électrique E, déplacement électrique D) et les grandeurs mécaniques (contrainte T, déformation S) sont reliés dans le tableau comme suit [19]:

$D = \varepsilon^T E + d \sigma$	$S = s^E \sigma + d^T E$
$E = \beta^T D - g \sigma$	$S = s^D \sigma + g^T D$
$D = \varepsilon^s E + e S$	$\sigma = C^E S - e^T E$
$E = \beta^s D - h S$	$\sigma = C^D S - h^T D$

Tableau (2.1) : Equations piézoélectriques et électromécanique



En considérant les symétries des cristaux de la céramique piézoélectrique et en supposant qu'il n'existe pas de contrainte mécanique selon les axes 1 et 2, les équations de ce mode s'écrivent [20]:

- **L'effet direct de la piézoélectricité**

$$\{D\} = [e] \{\varepsilon\} + [d]^T \{E\} \quad (2.1)$$

- **L'effet inverse de la piézoélectricité**

$$[\sigma] = [C] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (2.2)$$

Tableau (2.2) :Grandeurs électriques, mécaniques et piézoélectriques

Termes	Appellations/ Unités	Type	Dimension
D	Déplacement électrique (C/m)	électrique	(3x1)
E	Champ électrique (V/m)		(3x1)
$\varepsilon$ ou d	Permittivité électrique (F/m)		(3x3)
$\beta$	Constante d'imperméabilité diélectrique (m/F)		(3x3)
S ou $\varepsilon$	Déformation	mécanique	(6x1)
T ou $\sigma$	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )		(6x1)
S	Compliance ou susceptibilité élastique (m <sup>2</sup> /N)		(6x1)
C ou E	Module de Young (N/m <sup>2</sup> )		(6/6)
d	Constante piézoélectrique (proportionnalité entre la charge et la déformation)(C/N)	piézoélectrique	(3x6)
e	Constante piézoélectrique (proportionnalité entre la charge et la déformation (C/m <sup>2</sup> ))		(3x6)
g	Constante piézoélectrique (proportionnalité entre la contrainte et le champ (Vm/N))		(3x6)
h	Constante piézoélectrique (proportionnalité entre la déformation et le champ (V/m))		(3x6)

Tableau (2 3): Ecriture des tenseurs [c] [e] et [ε] selon la direction de polarisation pour les matériaux piézoélectriques

Polarisation	Tenseurs	
Selon Ox, direction 1	$\begin{bmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} \epsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix}$
Selon Oy, direction 2	$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix}$
Selon Oz, direction 3	$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$

## 2.6 Couplage électromécanique

Le couplage électromécanique définit la capacité d'un matériau piézoélectrique à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Il n'est pas relié aux pertes ni au rendement mais traduit plutôt une adaptation entre ces deux formes d'énergie du matériau. Le coefficient de couplage est obtenu à partir d'une étude thermodynamique du système considéré comme linéaire en négligeant les effets thermiques. Il peut s'écrire sous la forme suivante [19].

$$k_{ij}^2 = \frac{\text{énergimécaniquetransformée}(SetT)\text{ dansladirection } i}{\text{énergieélectriqueformée}(EetD)\text{ dansladirection } j}$$

La valeur de ce coefficient varie suivant la forme du matériau et la direction de sa déformation (Figure 2.4).

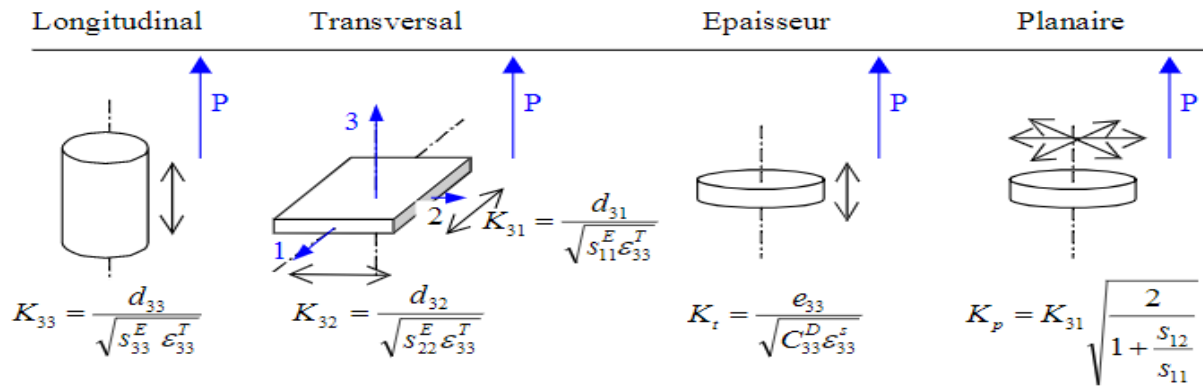


Figure (2.4): Facteurs de couplages pour les différents types de déformation

## 2.7 Types des matériaux piézoélectriques

Les matériaux piézoélectriques sont synthétisés sous différentes formes en utilisant différentes techniques [21].

- **Les céramiques:** ce sont généralement des solutions solides de structure pérovskite dans un système binaire ou ternaire. Comme PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou Lead-Zirconate-Titanate en anglais).
- **Les polymères :** l'effet piézoélectrique dans le polymère synthétique, Polyvinylidène Difluoride (PVDF) (-CH<sub>2</sub>-CF<sub>2</sub>-)<sub>n</sub> et ses dérivés sont couramment utilisés dans l'industrie.
- **Les cristaux :** ce sont généralement des oxydes des domaines ferroélectriques. Les coefficients piézoélectriques les plus élevés sont obtenus pour les cristaux polydomaines de BTNN (BaTiNaNbO<sub>3</sub>), Pb (Mg<sup>1/3</sup>Nb<sup>2/3</sup>)<sub>1-x</sub>Ti<sub>x</sub>O<sub>3</sub>, de symétrie rhomboédrique orientés suivant la direction [001].
- **Les composites :** ce sont des céramiques massives divisées et plongées dans une matrice non piézoélectrique (une résine). Ces matériaux possèdent des performances plus intéressantes, par rapport, à leurs meilleurs coefficients de couplage.

## 2.8 Choix du matériau piézoélectrique

La comparaison des valeurs caractéristiques de matériaux piézoélectriques permet de choisir le matériau le plus adapté à l'action qui sera utilisée. Le P.Z.T. apprécié pour ses excellentes propriétés piézoélectriques (surtout un bon coefficient de couplage) par rapport aux autres composants est utilisé dans l'élaboration de la majorité des céramiques piézoélectriques (tableau 2.4)[19].

	Quartz(SiO <sub>2</sub> )	LiNbO <sub>3</sub>	PVDF	PZT
Densité (g/cm <sup>3</sup> )	2.65	4.64	1.76	7.5
Constante diélectrique $\epsilon_r$	4.5	29	12	200-4000
Constante de charge $d_{33} \times 10^{-12}$ (C/N)	2	6	20	40-750
Constante de tension $g_{33} \times 10^{-3}$ (Vm/N)	50	20	6	15-40
Température de CURIE(C°)	573	1210	180	< 350
Coefficient de couplage K(%)	10	10	14	40-70

Tableau (2.4) : Caractéristiques piézoélectriques de matériaux piézoélectriques

## 2.9 Utilisation de la piézoélectricité

La piézoélectricité englobe plusieurs applications qu'on citera ci-dessous [16]:

### ➤ Générateur

L'objectif de ces systèmes est de récupérer de l'énergie mécanique à partir des vibrations mécaniques. Pour récupérer le maximum d'énergie de ces vibrations.

### ➤ Actionneur

Actionneur piézoélectrique est très utilisé dans le monde industriel. Cependant, le transfert entre la tension appliquée aux bornes du matériau et la déformation de celui-ci n'est cependant pas linéaire. Il est alors nécessaire de développer des commandes adaptées à ce type d'actionneur, en particulier pour compenser les non-linéarités.

### ➤ Transformateur

L'émergence des transformateurs piézoélectriques coïncident avec le développement dans les années 1950 des céramiques ferroélectriques. Ils offrent des performances remarquables en termes de gain en tension et rendement utiles pour des applications nécessitant une adaptation de tension.

### ➤ Capteur

Le capteur piézoélectrique est utilisé en tant que détecteur de chocs ou de percussions. Il capte les vibrations mécaniques qui se transforment en signal électrique (capteur de vitesse, capteur de force, capteur de pression, capteur ultrason, capteur de proximité, capteur de vibration).

## 2.10 Application de la piézoélectricité

Les matériaux piézoélectriques, connaissent un vaste champ d'application qui augmente au fil du temps, et ce dans différents domaines : les générateurs, les capteurs...

'Tableau (2.5): Différentes applications de la piézoélectricité

Effet Piézoélectrique direct	Générateurs d'impulsion haute tension et micro générateur en continue	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Allumage des gaz.</li> <li>• Briquets.</li> <li>• Chaussures piézoélectriques.</li> <li>• Touches piézoélectriques d'un clavier d'ordinateur.</li> </ul>
	Capteurs	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Microphones.</li> <li>• Télécommande.</li> <li>• Accéléromètres.</li> </ul>
Effet Piézoélectrique inverse	Transducteurs ultrasonores de puissance	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Perçage et soudage par ultrasons.</li> <li>• Nettoyage ultrasonore.</li> </ul>
	Dispositifs de positionnement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrôle des mouvements en mécanique.</li> <li>• Moteurs piézoélectriques.</li> </ul>
Effets direct et inverse	Transducteurs ultrasonores de faible puissance	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrôle non destructif.</li> <li>• Diagnostic médical.</li> </ul>

## 2.11 Conclusion

Au cours de ce chapitre, une description du phénomène piézoélectrique est proposée à travers les effets direct et inverse, et une vue générale sur les diélectriques, ferroélectrique la polarisation et l'équation de la piézoélectricité.

Par exploitation de ces propriétés, on a présenté un modale de plaque équipé des éléments piézoélectrique permettant la contrôle des vibrations en mode actionneur.

# Chapitre 3

## Théorie des plaques

### 3.1 Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture). Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

### 3.2 Définition

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan(x,y) ) et par une petite épaisseur (notée  $h(x,y)$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur largeur), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes[22].

### 3.3 Classification des plaques

Les éléments de plaques en flexion de type déplacement pouvant être classés en deux catégories [23].

- ❖ les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff (cisaillement transversal à négliger).
- ❖ les éléments basés sur la théorie de Hencky- Mindlin-Reissner (avec cisaillement transversal).

#### 3.3.1 La théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff

La théorie classique des plaques(ou CLPT Classical Lamination Plate Theory)est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petites déplacements. En principe, les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces.

Cette théorie est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation

(figure 3.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation de cisaillement transverse.

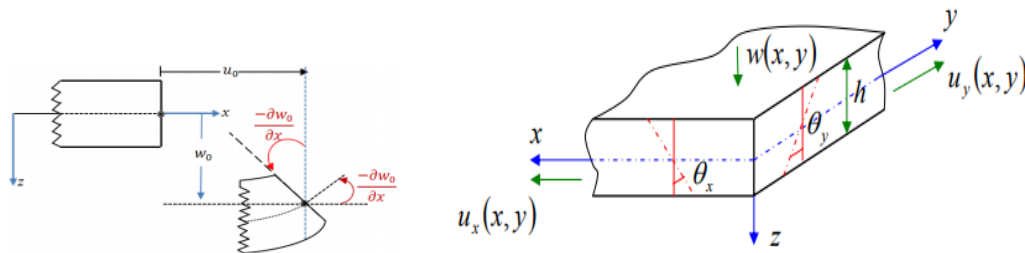


Figure (3.1): Illustration de la plaque de Love- Kirchhoff

### 3.3.1.1 Champs de déplacement

Lorsque les déformations de cisaillement transverses sont négligées  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \mathbf{0}$ .

A partir de cette dernière relation, il est possible d'écrire le déplacement en tout point M d'une plaque sous la forme [24]:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, z) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Sachant que les rotations ( $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) sont données par :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{ et } \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2)$$

Où :

- u et v: Les déplacements de la membrane dans le plan Z=0.
- w : Le déplacement transversal.
- $\theta_x$  et  $\theta_y$  Rotation totale par rapport à x et y respectivement.

### 3.3.1.2 Champs de déformation

On en déduit le champ des déformations correspondant :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} - Z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.3.2 La théorie des plaques épaisses du premier ordre de Reissner-Mindlin

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (ou FSDT First order Shear Deformation Theory) a prolongée la théorie Classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Et sont les mieux adaptés dans les cas de plaque d'épaisseur modérée ( $h/L > 0.1$ ). Leur formulation est basée sur une approximation des variables indépendantes  $u(x,y)$ ;  $v(x,y)$ ;  $w(x,y)$ ;  $\theta_x(x,y)$ ;  $\theta_y(x,y)$ , et dans ce cas les Déformations dues au cisaillement transverse ne sont pas négligées (c-a-d les sections droites après déformation ne restent pas perpendiculaires au plan neutre) [25].

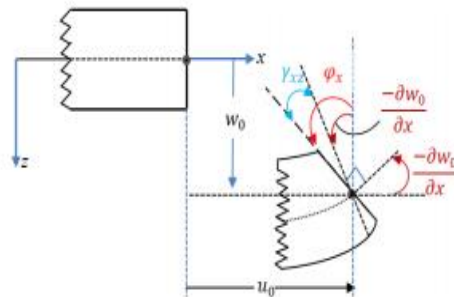


Figure (3.2) : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

#### 3.3.2.1 Champs de déplacement

Le champ de déplacement est de même forme que dans la théorie des plaques épaisses Sachant que les rotations ( $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) sont données par [26]:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_x \quad \text{et} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \quad (3.4)$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

- $\varphi_x$  : rotation de cisaillement des sections normales à l'axe x.
- $\varphi_y$  : rotation de cisaillement des sections normales à l'axe y.



### 3.3.2.2 Champs de déformation

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \equiv \{\varepsilon\} = [D_u] \cdot \{u\} \quad (3.5)$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Dans le cas où nous avons une théorie de Resser-Mindlin avec épaisseur constante, alors le champ de déformation on peut écrit sous forme matricielle [20]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha\} + z\{x\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Ou :

$[D_u]$  : Opérateur différentiel des déplacements.

$mf$  : effet membrane et flexion.

$c$  : effet cisaillement.

Le champ des déformations peut être sous-divisé en trois champs

- le champ des déformations en membrane :

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

- le champ des déformations en flexion :

$$\{\mathbf{x}\} = \mathbf{z}\{\bar{\mathbf{x}}\} = \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

- le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Où :  $[D_u]$  Opérateur différentiel des déplacements.

### 3.4 Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. Les relations contraintes-déformation pour la matrice isotrope s'écrivent sous la forme suivante :

$$\{\sigma_{mf}\} = [C] \cdot \{\varepsilon_{mf}\} = [C_{mf}] \cdot \{\varepsilon_t\} \quad \text{et} \quad \{\sigma_c\} = [C_c] \cdot \{\gamma_t\} \quad (3.11)$$

$$[C_{mf}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [C_c] = \frac{E}{2(1+\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{mf} \\ \sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{mf} & 0 \\ 0 & C_c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Où :

- $\{\sigma_{mf}\}$  et  $\{\sigma_c\}$  sont respectivement les contraintes de membrane et de cisaillement.
- $[C]$  : matrice de raideur.

#### 3.4.1 Résultantes des forces et des moments et loi constitutive

➤ Les résultantes en membrane :

$$\{N(x, y)\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{mf}\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([C_{mf}] \{\varepsilon_{mf}\}) dz =$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([C_{mf}] \cdot (\{\alpha\} + Z\{x\})) dz = [H_m]\{\alpha\} + [H_{mf}]\{x\} \quad (3.14)$$

Où :

$$[H_m] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C_{mf}] dz \quad \text{et} \quad [H_{mf}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z [C_{mf}] dz \quad (3.15)$$

➤ **Les moments de flexion et de torsion**

$$\begin{aligned} \{M(x, y)\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z \{\sigma_{mf}\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z ([C_{mf}] \{\epsilon_{mf}\}) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z ([C_{mf}] (\{\alpha\} + z\{x\})) dz = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z ([C_{mf}] \{\alpha\}) dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2 [C_{mf}] \{x\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z ([H_m]\{\alpha\} + \\ &[H_f]\{x\}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\text{Ou : } [H_f] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2 [C_{mf}] dz \quad (3.17)$$

➤ **Les résultantes en cisaillement**

$$\begin{aligned} \{Q(x, y)\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{mf}\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([C_c] \{\gamma_t\}) dz = \\ &[H_c]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\text{Ou : } [H_c] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C_c] dz \quad (3.19)$$

**Loi constitutive :**

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ sy & H_f & 0 \\ sy & sy & H_c \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.5 Principe de Hamilton

Le principe de Hamilton est appliqué pour déterminer les expressions des énergies cinétiques  $E_C$ , potentielles  $E_P$  et le travail  $T$ .

Donc le mouvement réel d'une plaque est celui qui rend stationnaire la fonction de Hamilton suivante [27]:

$$\delta \int (E_C - E_P + T) dt = 0 \quad (3.21)$$

$\delta$  : Variation subie pendant l'intervalle de temps considéré.

### 3.5.1 Energie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dv = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{u}\}^T [L]^T [L] \{\dot{u}\} dv = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{u}\}^T [L_t]^T [L_t] - Z([L_r]^T [L_t] + [L_t]^T [L_r]) + Z^2([L_r]^T [L_r]) \{\dot{u}\} dv \quad (3.22)$$

En intégrant dans la direction de l'épaisseur z entre  $(-\frac{h}{2}$  et  $\frac{h}{2})$ , on obtient :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_s \{\dot{u}\}^T (h \cdot [L_t]^T [L_t] + \left(\frac{h^3}{12}\right) \cdot ([L_r]^T [L_r])) \{\dot{u}\} ds \quad (3.23)$$

$$E_C = \frac{1}{2} \int_s \{\dot{u}\}^T [\bar{m}_e] \{\dot{u}\} ds \quad (3.24)$$

Par identification entre (3.24) et (3.23) on obtient :

$$[\bar{m}_e] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Avec :

$$[L_t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [L_r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

### 3.5.2 Energie potentielle

$$E_P = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\} \{\varepsilon\}^T = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv \quad (3.27)$$

Cette énergie comporte quatre parties :

$$E_P = E_{\text{membrane}} + E_{\text{flexion}} + E_{\text{membrane-flexion}} + E_{\text{cisaillement}} \quad (3.28)$$

- Effet membrane

$$E_{membrane} = \frac{1}{2} \int_v \{\alpha\}^T [C_{mf}] \{\alpha\} dv \quad (3.29)$$

❖ En intégrant selon l'épaisseur Z entre  $(-\frac{h}{2} \text{ et } \frac{h}{2})$  on obtient :

$$E_{membrane} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \int_s \{\alpha\}^T [C_{mf}] \{\alpha\} ds = E_{membrane} = \frac{1}{2} \int_s \{\alpha\}^T [H_m] \{\alpha\} ds \quad (3.30)$$

Ou :  $[H_m] = h[C_{mf}]$

- **Effet de la flexion**

$$E_{membrane} = \frac{1}{2} \int_v \{x\}^T [C_{mf}] \{x\} dv \quad (3.31)$$

❖ En intégrant par rapport à z :

$$E_{membrane} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^3}{12}\right) \cdot \int_s \{\bar{x}\}^T [C_{mf}] \{\bar{x}\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{x}\}^T [H_f] \{\bar{x}\} ds \quad (3.32)$$

- **Effet couplage membrane-flexion**

$$E_{membrane-flexion} = \frac{1}{2} \int_v (\{\alpha\}^T [C_{mf}] \{x\} + \{x\}^T [C_{mf}] \{\alpha\}) dv \quad (3.33)$$

❖ Après intégration, on a :

$$E_{membrane-flexion} = 0 \quad (3.34)$$

- **Effet de cisaillement :**

$$E_{cisaillement} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \int_v \{\gamma\}^T [C_c] \{\gamma\} dv \quad (3.35)$$

❖ Par intégration on aura :

$$E_{cisaillement} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot h \cdot \int_s \{\gamma\}^T [C_c] \{\gamma\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} ds \quad (3.36)$$

Ou:  $[H_c] = k \cdot h \cdot [C_c]$

Avec :

K : facteur de correction due au cisaillement généralement, il est pris égal à  $\frac{5}{6}$  (J F Imbert).

### 3.5.3 Travail des efforts externes

$$T = \int_v [U]^T \{F\} dv + \int_s [U]^T \{f\} ds + [U]^T \{p\} \quad (3.37)$$

Avec :

- $\{F\}$  : Forces volumiques
- $\{f\}$  : Forces surfaciques
- $\{P\}$  : Forces ponctuelles

### 3.6 Matériau composite

Si on suppose un comportement dans un problème bidimensionnel d'élasticité, et en état de contraintes planes est un état de contraintes à deux dimensions pour lequel les composants du tenseur des contraintes sont indépendants de la coordonnée Z les relations suivantes sont indiqués pour un pli unidirectionnel ou un pli tissu. Pour un état de contrainte plane on a :  $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ .

#### 3.6.1 Relations contraintes et déformations

Pour un état de contraintes déformation du pli dans son repère d'orthotrope (1, 2, 3)(locale) [3]:

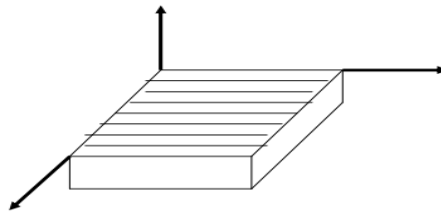


Figure (3.3): Directions principales dans un pli

La relation contrainte déformation par rapport à ce système d'axe s'écrit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \{ \quad \} \quad (3.38)$$

Avec :  $[Q_{ij}]$  : matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1, 2, 3)

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} ; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} ; \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3.39)$$

Où :

- $[Q_{ij}]$  : matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1, 2, 3)
- $E_1$  : Module de Young longitudinal.
- $E_2$  : Module de Young transversal.

- $G_{12}$  : Module de cisaillement longitudinal.
- $\nu_{12} = \nu_{21}$  : coefficients de poisson.

Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (3.38) par rapport au système d'axes global  $(x, y, z)$ , cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations.

➤ Pour le champ des contraintes :

$$\{\sigma_{xyz}\} = [T]^{-1}\{\sigma_{123}\} \quad (3.40)$$

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

➤ Pour le champ des déformations :

$$\{\varepsilon_{xyz}\} = [T']^{-1}\{\varepsilon_{123}\} \quad (3.42)$$

$$T' = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Ou :

- $C = \cos \theta$  et  $S = \sin \theta$
- $T$  : est la matrice de changement de base des contraintes.
- $T'$  : est la matrice de changement de base des déformations.

Par substitution de (3.38) et (3.42) dans (3.40), la relation contrainte déformation devient:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

$[Q'_{ij}]$ : Est la matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux  $(x, y, z)$ .

$[Q'_{ij}]$  Exprimé respectivement comme suivant :

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{11}C^2 + Q_{22}S^2 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 \\ Q_{12} = (Q_{11} + Q_{22} + Q_{66})S^2C^2 + Q_{12}(S^4 + C^4) \\ Q_{16} = (Q_{11} - Q_{22} - Q_{66})S^2C^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})CS^3 \\ Q_{22} = Q_{11}S^4 + Q_{22}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 \\ Q_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]S^2C^2 + Q_{66}(C^2 + S^2) \\ Q_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})S^3C + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})SC^3 \end{cases} \quad (3.45)$$

### 3.7 Théorie classique des stratifiées

La théorie des stratifié a été développée au début des années 1960. Cette théorie est basé sur les déformations, de cisaillement, de flexion et de torsion que subit un élément de stratifié fin Lors de la mise en charge de la structure.

#### 3.7.1 Comportement d'un stratifié

On appelle stratifié ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelle ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli.

- **comportement en membrane:**

$$[N(x, y)] = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y). \quad (3.46)$$

- ❖ En introduisant les matrices :

$$A = [A_{ij}] \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \text{ et } B = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad (3.47)$$

- **Comportement en flexion et de torsion**

$$[M(x, y)] = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x, y) \quad (3.48)$$

Soit :

$$M(x, y) = [B] \varepsilon_m(x, y) + [D] k(x, y) \quad (3.49)$$

- ❖ En introduisant les matrices :

$$D = [B_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \quad (3.50)$$

Les coefficients de la matrice de cisaillement  $[F]$  sont définis par :

$$[F_{ij}] = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (3.51)$$

Où :

$\alpha_{ij}$  sont les facteurs de correction en cisaillement permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse, on reprend aussi la valeur de 5/6.



### 3.7.2 Equation constitutive d'un stratifié

L'équation constitutive des stratifiés s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Avec :

- N : Résultantes en membrane.
- A : La matrice de rigidité en membrane.
- B : La matrice de couplage membrane-flexion-torsion.
- M<sub>F</sub> : Moments de flexion et de torsion
- D : La matrice de rigidité en flexion.
- F : La matrice de rigidité en cisaillement.

### 3.8 Matériau piézoélectrique

La propriété que présentent certains corps de se polariser électriquement soit de générer un champ ou un potentiel électrique sous l'action d'une contrainte mécanique. On parle d'effet piézoélectrique direct. D'autre part l'effet piézoélectrique inverse est également observé, ou une tension électrique appliquée à un matériau présentant des propriétés piézoélectriques entraîne une modification des dimensions de ce matériau.

#### 3.8.1 Loi de comportement

Pour un matériau piézoélectrique polarisé dans la direction de l'épaisseur (z), les lois de comportement sont [28]:

❖ L'effet direct de la piézoélectricité :

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [d]^T\{E\}$$

$$\text{Ou : } \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

❖ L'effet inverse de la piézoélectricité :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & 0 & C_{55} & 0 \\ & & & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Ou :

- $\{D\}$  : Vecteur de déplacement électrique.
- $\{\varepsilon\}$  : Vecteur des déformations.
- $\{E\}$  : Vecteur des champs électriques.
- $[e]$  : Matrices des constantes piézoélectriques ou de couplage électro- mécanique.
- $[d]$  : Matrice de permittivité électrique.
- $\{\sigma\}$  : Vecteur de contrainte.
- $[C]$  : Matrice des constantes élastiques.

### 3.8.2 Champ électrique

Le champ électrique  $\{E\}$  est le gradient du potentiel électrique  $\{\phi\}$ , et c'est constant suivant l'épaisseur  $h_p$  de la couche piézoélectrique [27]:

$$E_x = E_y = 0$$

$$E_z = -\frac{\phi}{h_p} \quad (3.55)$$

Sous forme matricielle :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\phi}{h_p} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Ou :

- $\{E\}$  : Le champ électrique.
- $\{\phi\}$  : Potentiel électrique.
- $h_p$  : Epaisseur de la couche électrique.

### 3.8.3 Energie cinétique

L'énergie cinétique de la couche piézoélectrique a la même forme que celle d'un matériau purement élastique, donnée par [27] :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dv = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{u}\}^T [\bar{m}_p] \{\dot{u}\} ds \quad (3.57)$$

$$\text{Avec : } [\bar{m}_e] = \rho \begin{bmatrix} h_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.8.4. Energie potentielle

Par contre l'énergie potentielle est différente à cause de l'effet piézoélectrique, pour un milieu continu, elle comporte initialement une partie élastique et une autre électrique :

$$E_P = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\} \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v [D] \{E\} dv = E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-électrique}} \quad (3.59)$$

En substituant les expressions (3.53) et (3.54) dans (3.59), on obtient :

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon\}^T \{e\}^T [E] + \{E\}^T \{e\} \{\varepsilon\}) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^T [D] \{E\} dv \\ &= E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-piezoélectrique}} - E_{p\text{-diélectrique}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

La composante élastique de cette énergie a aussi la même forme que celle d'une couche élastique, mais avec la différence de la matrice  $[C]$ , car le matériau piézoélectrique est généralement orthotrope.

La deuxième composante est l'énergie potentielle piézoélectrique qui représente le couplage :

$$\begin{aligned} E_{p\text{-piézo}} &= -\frac{1}{2} \int_v (\{\alpha\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}]^T \{\alpha\} + \{x\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{x\}^T [e_{mf}]^T \{x\} + \\ &\quad \{\gamma\}^T [e_c]^T \{E\} + \{E\}^T [e_c]^T \{\gamma\}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ou :

$$[e_{mf}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [e_c] = \begin{bmatrix} e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sachant que de cisaillement pour cette dernière est nulle étant donnée que  $E_x = E_x = 0$ , et en intégrant suivant l'épaisseur on obtient :

$$E_{p\text{-piézo}} = -\frac{1}{2} \int_S h_p (\{\alpha\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}]^T \{\alpha\}) ds \quad (3.62)$$

Alors que la composante diélectrique de l'énergie potentielle est donnée par :

$$E_{p\text{-diélectrique}} = -\frac{1}{2} \int_S h_p (\{E\}^T [d]^T \{E\}) ds \quad (3.63)$$

### 3.8.5 Travail pour plaque piézoélectrique

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique [27].

$$T_{\text{mécanique}} + T_{\text{électrique}} \quad (3.64)$$

Pour la première composante on reprend la relation (3.37), par contre la deuxième est donnée par :

$$T_{\text{électrique}} = - \int_S \{\phi\}^T \{D\} ds \quad (3.65)$$

Ou :

- $\{\phi\}$  : Potentiel électrique.
- $\{D\}$  : charge électrique surfacique ou déplacement électrique.

### 3.9 Plaque sandwich (multicouches)

L'importance de cette partie est d'aboutir à l'étude d'une plaque sandwich piézoélectrique jouant le rôle d'une structure intelligente permettant le contrôle actif des vibrations.

La formulation traite un sandwich intégrant une couche centrale élastique (isotrope ou composite) entre deux sous couches piézoélectriques (en rôles d'actionneurs et/ou capteurs).

On adopte les hypothèses suivantes [3] :

- l'épaisseur de l'âme (couche centrale) est plus élevée que celles des deux peaux.
- Le déplacement de l'âme (u et v) suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de z.
- Le déplacement transverse (w) est indépendant de z, d'où la déformation  $\varepsilon_z$  est négligeable.

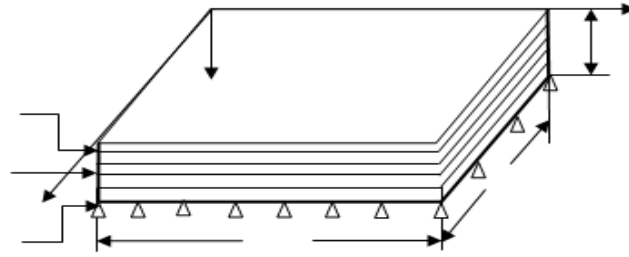


Figure (3.4) : Plaque sandwich piézoélectrique

L'hypothèse de Mindlin pour le premier ordre d'approximation tenant compte du cisaillement transverse est maintenue, ainsi on reprend les mêmes relations pour le champ des déplacements (3.1) et des déformations (3.5).

### 3.9.1 Hypothèses

#### 3.9.1.1 Energie cinétique du sandwich [27]

$$E_C = \frac{1}{2} \rho_v \int_v \{\dot{u}\}^T \left( [L_t]^T [L_t] - z([L_r]^T [L_t] + [L_t]^T [L_r]) + z^2([L_r]^T [L_r]) \right) \{\dot{u}\} dv \quad (3.66)$$

En intégrant dans l'intervalle  $\left[-\frac{h_c}{2}, +\frac{h_c}{2}\right]$  pour l'âme (cœur), l'intervalle  $\left[-\frac{h_c}{2} - h_p, -\frac{h_c}{2}\right]$  pour la couche piézoélectrique inférieure, et l'intervalle  $\left[+\frac{h_c}{2}, +\frac{h_c}{2} + h_p\right]$  pour la couche supérieure, on obtient :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_s \{\dot{u}\}^T [\bar{m}_s] \{\dot{u}\} ds \quad (3.67)$$

$$[\bar{m}_s] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & m_1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & m_1 & & & \\ & & & m_1 + m_1 & 0 & \\ & 0 & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & m_1 + m_1 & \end{bmatrix}$$

Ou :

- $s$  : indice pour plaque Sandwich,
- $h_c$  : Épaisseur de l'âme (cœur)
- $h_p$  : Épaisseur de la sous-couche piézoélectrique
- $m_1 = \rho_c \cdot h_c + 2\rho_p \cdot h_p$
- $m_2 = \rho_c \frac{h_c^3}{12}$

- $m_3 = \rho_p \frac{2}{3} \left( \left( \frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right)$

### 3.9.1.2 Energie potentielle du sandwich

Elle prend la même forme que la relation (3.60), mais avec l'apport des trois sous couche.  
 $E_p$ -élastique -  $E_p$ -piezoélectrique -  $E_p$ -diélectrique.

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v (\{\epsilon\}^T \{e\}^T [E] + \{E\}^T \{e\} \{\epsilon\}) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^T [D] \{E\} dv \quad (3.68)$$

❖ Pour la composante élastique, on a :

$$E_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \int_s (\{\alpha\}^T [H_m] \{\alpha\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\bar{x}\}^T [H_f] \{\bar{x}\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} ds)$$

$$E_{\text{élastique}} = E_{\text{membrane}} + E_{\text{flexion}} + E_{\text{cisaillement}} \quad (3.69)$$

Ou :

- $[H]_m = h_c [C_{mf}]_{\text{coeur}} + 2h [C_{mf}]_{\text{piezo}}$
- $[H]_f = \frac{h_c^3}{12} [C_{mf}]_{\text{coeur}} + \frac{2}{3} \cdot \left( \left( \frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right) [C_{mf}]_{\text{piezo}}$
- $[H]_c = k \cdot h_c \cdot [C_c]_{\text{coeur}}$

La composante piézoélectrique du sandwich est l'apport que des deux sous-couches piézoélectriques, c'est donnée par :

$$E_{\text{piézo}} = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot (\{\alpha\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}] \{\alpha\}) ds \quad (3.70)$$

La même remarque sur la partie diélectrique :

$$E_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot (\{E\}^T [d]^T \{E\} ds) \quad (3.71)$$

### 3.9.1.3 Travail des efforts extérieurs

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique.

=

$$T = T_{\text{mécanique}} + T_{\text{électrique}} \quad (3.72)$$

Pour la première composante on reprend la relation (3.30) :

$$T_{\text{électrique}} = \int_v \{U\}^T \{F\} dv + \int_s \{U\}^T \{f\} ds + \{U\}^T \{P\} \quad (3.73)$$

Par contre la deuxième est donnée par :

$$T_{\text{électrique}} = - \int_s \{\phi\}^T \{D\} ds \quad (3.74)$$

### 3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement exposés concepts de base de la mécanique des matériaux composites et piézoélectrique. En outre, nous avons mis en lumière les concepts de forces, les moments résultants, les équations d'équilibres et les lois de comportement nécessaires pour la formulation d'éléments multicouche piézoélectrique.

# *Chapitre 4*

## *Discrétisation en éléments finis*

### **4.1 Introduction**

La méthode des éléments finis fait maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels, c'est l'une des méthodes les plus efficaces et les plus générales, pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : mécanique, aérospatial, automobile, nucléaire, génie civil....etc

C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles couplées à des modèles physiques, elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques [29].

### **4.2 Notation de base**

#### **A. Choix du modèle**

En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane (maillage paramétrique), axisymétrique, mince ou épaisse, tridimensionnel. A ces modèles mathématiques correspondent des familles des éléments finis [30].

#### **B. Choix de type l'élément finis**

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème. On choisira les éléments des mieux adaptés dans les familles disponibles.

#### **C. Approximation nodale**

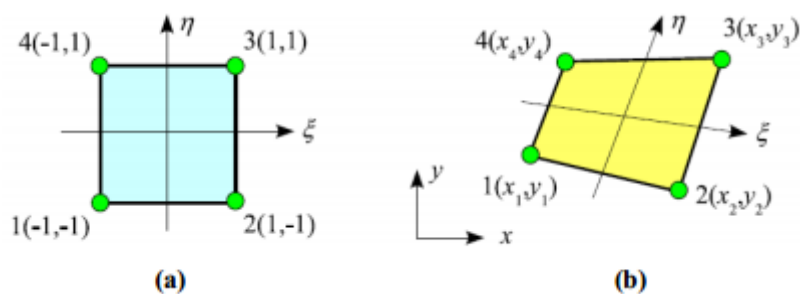
La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation  $\mathbf{u}$  du champ des variables  $\bar{\mathbf{u}}$  par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

### **4.3 Représentation de la géométrie**

Un élément de plaque quadrilatérale iso paramétrique bidimensionnel (à chaque élément réel, on associe un élément de référence) à 4 nœuds (interpolation linéaire) et à 5 degrés de liberté



par nœud (3 déplacements  $u$   $v$   $w$  et 2 rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) [31]



Elément de référence

Elément réel

Figure (4.1): Elément rectangulaire à quatre nœuds

❖ **Justification du choix de l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec 5 degré de liberté [32]**

Des recherches récentes ont montré que les éléments rectangulaires à quatre nœuds sont les plus efficaces pour le traitement des problèmes de plaques (isotropes, orthotropes et anisotropes). Les éléments rectangulaires à huit et à neuf nœuds (interpolation quadratique) donnent aussi de bons résultats pour ce type de problème, cependant ces derniers se détériorent avec l'introduction de la distorsion dans le maillage ou lorsque les nœuds internes sont légèrement décalés de leur position initiale. L'utilisation des éléments rectangulaire à 4 nœuds est une condition nécessaire pour éviter le phénomène du verrouillage numérique (ou blocage en cisaillement transverse)

**4.4 Fonctions d'interpolation**

Les variables du problème peuvent être exprimées selon l'approximation nodale suivante [32] :

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot v_i \\
 w &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot w_i \\
 \theta_x &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{xi} \\
 \theta_y &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{yi}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Où :

- $N_i$  : fonctions d'interpolation
- $nn$  : nombre de nœuds par élément

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds, la matrice des fonctions d'interpolation est donnée par :

$$[N] = [G].[C]^{-1} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (4.2)$$

Où :  $[G] = [1 \ \xi\eta \ \eta\xi]$  (4.3)

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases}$$

Les relations (4.1) sont réorganisées sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\{u\} = [N_u] \{\bar{u}\} \quad (4.5)$$

Où :

- $\{\bar{u}\}$  vecteur de déplacements nodaux

La matrice jacobéenne de la transformation est :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\det[J(\xi, \eta)] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} > 0 \quad (4.8)$$

Ce qui implique que l'élément de référence et l'élément réel soient numérotés dans le même sens (en général positif)

Avec :

[J]: matrice Jacobienne (2×2) de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées naturelle, et inversement.

L'utilisation des coordonnées naturelles simplifie le domaine sur lequel les intégrales sont définies, et les éléments de surfaces sont exprimées par :

$$dx = dx \cdot dy = [J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.9)$$

$(\xi_i, \eta_i)$  : sont les coordonnées du nœud  $i^e$  de l'élément de référence. On en déduit :

$$N_j = (\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.10)$$

Etant donné que le potentiel électrique est constant sur la surface des couches piézoélectriques, alors l'interpolation du potentiel électrique est donnée par [27] :

$$\{\phi\} = [N_\phi]\{\bar{\phi}\} = [I]\{\bar{\phi}\} \quad (4.11)$$

Ou :

- $\{\phi\}$  : vecteur des potentiels électrique
- $\{\bar{\phi}\}$  : vecteur des potentiels électrique nodaux
- $\{N_\phi\} = [I]$  : matrice d'interpolation (matrice identité)

## 4.5 Approximation de la solution

Pour obtenir les expressions énergétiques approximatives et discrètes, on introduit les expressions d'interpolation nodale [31].

### 4.5.1 Approximation du champ de déplacement

Le champ de déplacement est donné par l'équation suivante :  $\{u\} = [N_u]\{\bar{u}\}$

### 4.5.2 Approximation déformation

Expression des déformations en fonction des variables nodales :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \mathbf{0} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \mathbf{0} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \mathbf{0} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \mathbf{0} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

### 4.5.3 Approximation de l'énergie cinétique sur un élément

On dérive l'expression (4.5) on obtient [27] :

$$\{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}_u] \{\dot{\bar{\mathbf{u}}}\} \quad (4.13)$$

On remplace cette expression dans l'équation (3.67), on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s \{\dot{\mathbf{U}}\}^t \{\dot{\mathbf{U}}\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{\dot{\mathbf{u}}}\}^t [\mathbf{N}_u]^t [\bar{m}_s] [\mathbf{N}_u] \{\dot{\mathbf{u}}\} ds \quad (4.14)$$

### 4.5.4. Approximation de l'énergie potentielle élémentaire

Pour une plaque sandwich piézoélectrique, l'énergie potentielle est aussi composée de trois parties comme c'est motionné en relation (3.67).

$$E_p = \frac{1}{2} \int_s \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} d\mathbf{v} - \frac{1}{2} \int_s \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{e}]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \{\mathbf{E}\}^T [\mathbf{e}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} d\mathbf{v} - \frac{1}{2} \{\mathbf{E}\}^T [\mathbf{D}] \{\mathbf{E}\} d\mathbf{v} \quad (4.15)$$

$$E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-piézoélectrique}} - E_{p\text{-diélectrique}}$$

#### a-Energie potentielle élastique

A partir de la relation (3.69) et en substituant les expressions des approximations des relations (4.5) ; (3.8) ; (3.9) ; (3.10), on aura :

$$\left( \begin{array}{l} E_p = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{\mathbf{u}}\}^T ([\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{H}_m] [\boldsymbol{\alpha}] [\mathbf{N}_u]) \\ + [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{x}]^T [\mathbf{H}_f] [\mathbf{x}] [\mathbf{N}_u] \\ - [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{H}_{mf}] [\mathbf{x}] [\mathbf{N}_u] \\ - [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{H}_{mf}] [\boldsymbol{\alpha}] [\mathbf{N}_u] \\ + [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{H}_c] [\boldsymbol{\alpha}] [\mathbf{N}_u] \{\bar{\mathbf{u}}\} ds \end{array} \right) \quad (4.16)$$

)

#### b-Energie potentielle piézoélectrique

On prend l'expression (3.70), et en substituant les expressions des approximations des relations (4.5), (3.6), (4.11), l'énergie devienne :

$$E_p = -\frac{1}{2} \int_s \mathbf{2} \cdot \mathbf{h}_p \{\bar{\mathbf{u}}\}^T ([\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{e}_{mf}]^T [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] d\mathbf{s} - \frac{1}{2} \int_s \mathbf{2} \cdot \mathbf{h}_p \{\bar{\phi}\}^T ([\mathbf{D}_\phi]^T [\mathbf{N}_\phi]^T [\mathbf{e}_{mf}]^T [\mathbf{N}_u] [\boldsymbol{\alpha}]) \{\bar{\mathbf{u}}\} d\mathbf{s} \quad (4.17)$$

### c-Energie potentielle diélectrique

Cette énergie est la participation des couches piézoélectriques présentée dans l'expression (3.71), et en substituant les expressions des approximations de la relation (4.5) :

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{2}(\mathbf{2h}_p) \int_s \overline{\{\phi\}}^T [\mathbf{N}_\phi]^T [\mathbf{D}_\phi]^T [\mathbf{d}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] \overline{\{\phi\}} \mathbf{d}s \quad (4.18)$$

### 4.6.5 Travail des forces extérieures pour le sandwich

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique.

#### a-Mécanique

On reprend l'expression (3.81), en tenant compte de la relation (4.5) :

$$\mathbf{T} = \int_v (\mathbf{h}_c + \mathbf{2h}_p) \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{N}_u]^T \{\mathbf{F}_v\} \mathbf{d}v + \int_s \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{N}_u]^T \{\mathbf{F}_s\} \mathbf{d}s + \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{N}_u]^T \{\mathbf{P}\} \quad (4.19)$$

Ou :

- $\{\mathbf{F}_v\}$  et  $\{\mathbf{F}_s\}$  sont respectivement les forces volumiques et surfaciques

#### b-Électrique

Le travail électrique est le produit du chargement des actionneurs :

$$\mathbf{T} = \int_s \overline{\{\phi\}}^T [\mathbf{N}_\phi]^T [\mathbf{D}] \mathbf{d}s \quad (4.20)$$

### 4.6 Calcul des matrices élémentaires

Si on introduit les fonctions d'interpolation nodales dans les expressions des composantes énergétiques définies auparavant, afin d'aboutir aux expressions approximatives des énergies, ces expressions seront définies dans le but de déterminer les matrices de masse, et de rigidité.

#### 4.6.1 Matrice de masse élémentaire

L'expression de l'énergie cinétique de la relation (4.15) peut être réécrite comme :

$$\mathbf{E}_c \frac{1}{2} \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{M}]_e \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (4.21)$$

Avec :

$$[\mathbf{M}]_e = \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\bar{\mathbf{m}}_s] [\mathbf{N}_u] \mathbf{d}s \quad (4.22)$$

#### 4.6.2 Matrice élémentaire de rigidité

L'énergie potentielle pour une plaque sandwich piézoélectrique comporte trois parties : Une partie élastique, une partie piézoélectrique et une partie diélectrique.

##### a- Matrice élémentaire élastique

L'énergie potentielle de la relation (4.16) est réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{K}_{uu}]_e \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (4.23)$$

Avec :  $[\mathbf{k}_{uu}]_e$  : matrice de rigidité élémentaire due à l'élasticité est donnée par :

$$\left[ \begin{aligned} & [\mathbf{K}_{uu}]_e = \sum_i \mathbf{h}_i \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\boldsymbol{\alpha}] [\mathbf{N}_u] \mathbf{d}s \\ & + \sum_i \frac{h_i^3}{12} + \mathbf{z}_i \mathbf{h}_i \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\boldsymbol{\chi}] [\mathbf{N}_u] \mathbf{d}s \\ & - \sum_i (\mathbf{z}_i \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\boldsymbol{\chi}] [\mathbf{N}_u] \mathbf{d}s \\ & - \sum_i (\mathbf{z}_i \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\chi}]^T [\mathbf{C}_{mf}] [\boldsymbol{\alpha}] [\mathbf{N}_u] \mathbf{d}s \\ & + \sum_i (\mathbf{k} \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\alpha}]^T [\mathbf{C}_c] [\boldsymbol{\alpha}] [\mathbf{N}_u] \mathbf{d}s \end{aligned} \right] \quad (4.24)$$

- $z_i$  : la position par rapport au plan moyen de la  $i^e$  couche

##### b- Matrice élémentaire piézoélectrique

Cette partie représente le couplage électromécanique, et en écrivant l'expression (4.17) sous la forme :

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{K}_{u\phi}]_e \{\bar{\phi}\} + \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [\mathbf{K}_{\phi u}]_e \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (4.25)$$

Ou :

- $[\mathbf{K}_{u\phi}]_e$  et  $[\mathbf{K}_{\phi u}]_e$  : est composante de la matrice de rigidité due au couplage piézo-mécanique

$$[\mathbf{K}_{u\phi}]_e = - \sum_i \mathbf{h}_i \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{C}_{mf}]^T [\mathbf{e}_{mf}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] \mathbf{d}s - \sum_i (\mathbf{z}_i \mathbf{h}_i) \int_s [\mathbf{N}_u]^T [\boldsymbol{\chi}]^T [\mathbf{e}_{mf}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] \mathbf{d}s \quad (4.26)$$

##### c- Matrice élémentaire diélectrique

On fait la même chose avec l'expression potentielle diélectrique, on trouve :

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e \{\bar{\phi}\} \quad (4.27)$$

Ou :  $[\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e$  : matrice de rigidité élémentaire due à la diélectricité est donnée par :

$$[\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e = - \sum_i \mathbf{h}_i \int_s [\mathbf{N}_\phi]^T [\mathbf{D}_\phi]^T [\mathbf{d}] [\mathbf{D}_\phi] [\mathbf{N}_\phi] \mathbf{d}s \quad (4.28)$$

D'après la matrice (élastique, piézoélectrique, diélectrique) on construit la matrice de rigidité élémentaire [33] :

$$[\mathbf{K}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}]_e & [\mathbf{K}_{u\phi}]_e \\ [\mathbf{K}_{\phi u}]_e & [\mathbf{K}_{\phi\phi}]_e \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

L'expression matricielle de la formulation variationnelle donne les équations de mouvement de la structure:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{Q}\} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

**N.B** : la matrice masse intervient seulement avec les composantes mécaniques. Sous forme explicite, les équations de mouvement sont donnée par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_{uu}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{u\phi}]\{\phi\} &= \{\mathbf{F}\} \\ [\mathbf{K}_{\phi u}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{\phi\phi}]\{\phi\} &= \{\mathbf{Q}\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ou :

- $\{\mathbf{F}\}$  : Vecteur de forces extérieures
- $\{\mathbf{Q}\}$  : Vecteur de charge électrique

#### 4.7 Amortissement

Toute structure réelle est plus ou moins amortie, ce qui provoque une dissipation de l'énergie lors des vibrations. Si cette énergie absorbée par la structure est très faible, ce qui implique un amortissement très faible, alors cette structure est dite conservative et si la structure dissipe de l'énergie ce qui implique un amortissement important, alors la structure est dite dissipative [34].

Les amortissements les plus courants sont :

- **Amortissement visqueux** : le modèle d'amortissement visqueux est le plus couramment utilisé. Il correspond à la modélisation d'une énergie dissipée proportionnelle à la vitesse du mouvement.
- **Amortissement structural** : la force d'amortissement est proportionnelle au déplacement et elle est en phase avec la vitesse.
- **Amortissement visqueux proportionnel « globale »** : La matrice d'amortissement symétrique est exprimée comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur.

Cet amortissement est le plus utilisé pour plusieurs avantages, on cite :

- Facile à mettre en œuvre après avoir assemblé les matrices de rigidité et de masse à coefficients réels.
- utile pour la validation d'algorithmes de résolution propriétés d'orthogonalité des modes propres réels solution du problème aux valeurs.
- historiquement, son succès est attaché aux méthodes d'analyse transitoire par recombinaison modale à partir d'une base de modes propres réels.

On peut introduire la matrice d'amortissement  $[C]$  comme paramètre dans l'équation de mouvement. On choisit un amortissement proportionnel de type Rayleigh qui considère l'amortissement comme une application linéaire entre les matrices de masse et de rigidité tel que :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.32)$$

Où :

- $\alpha$  : Coefficient de proportionnalité de la masse
- $\beta$  : Coefficient de proportionnalité de la rigidité

#### 4.7.1 Influence des coefficients d'amortissement proportionnel

- amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie :  $\alpha=0, \beta=\beta_i$ , dans ce cas les modes élevés seront très peu amortis et les modes basse fréquence très amortis.
- amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité :  $\alpha=\alpha_j, \beta=0$ , dans ce cas aussi les modes élevés seront très amortis.
- amortissement proportionnel complet :  $\alpha=\alpha_j, \beta=\beta_j$ ,

Les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [C]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [K_{uu}]\{\mathbf{u}\} + [K_{u\emptyset}]\{\emptyset\} &= \{\mathbf{F}\} \\ [K_{\emptyset u}]\{\mathbf{u}\} + [K_{\emptyset\emptyset}]\{\emptyset\} &= \{\emptyset\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

## 4.8 Utilisation de la matrice d'amortissement

### 4.8.1 Analyse dynamique linéaire directe

La matrice d'amortissement visqueux  $C$ , quel que soit son mode d'élaboration et son caractère proportionnel ou non proportionnel, est utilisable pour l'analyse dynamique linéaire directe avec les opérateurs :



- ❖ D'analyse transitoire : est un mouvement oscillatoire quelconque. Il décrit des mouvements à caractère aléatoire.
- ❖ D'analyse harmonique : est le mouvement oscillatoire de base, il décrit des mouvements oscillatoires (de type sinusoïdaux) au voisinage d'une position d'équilibre stable.

#### 4.8.2 Analyse dynamique par recombinaison modale

- Pour les analyses par recombinaison modale, on doit projeter cette matrice dans le sous-espace défini par un ensemble  $\varphi$  de modes propres réels, obtenus sur le problème non amorti associé.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

- Pour le calcul de la réponse dynamique en force ou en mouvement imposé dans l'espace modal, on dispose de possibilités suivantes : utilisation de la matrice d'amortissement généralisée :

$$[\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varphi}\} \quad (4.35)$$

- Pour la diagonaliser la matrice  $[\mathbf{C}]$  est donnée :

$$[\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varphi}\} = [\bar{\mathbf{C}}] \quad (4.36)$$

- Les propriétés d'orthogonalité des modes propres réels solution du problème aux valeurs propres, se traduisent par la diagonalisation simultanée dans le passage en coordonnées modales généralisées de :

$$\{\boldsymbol{\varphi}\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\varphi}\} = [\bar{\mathbf{M}}] \quad \text{et} \quad \{\boldsymbol{\varphi}\}^T [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\varphi}\} = [\bar{\mathbf{K}}] \quad (4.37)$$

Ou :  $[\bar{\mathbf{M}}]$  et  $[\bar{\mathbf{K}}]$  et  $[\bar{\mathbf{C}}]$  Sont des matrices diagonales.

#### 4.8.3 Analyse modale

D'après l'équation de mouvement (4.30) la solution harmonique complexe est écrite sous la forme suivante :

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{t})\} = \{\boldsymbol{\psi}\} e^{j\omega t} \quad (4.38)$$

$$\{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\} = \{\boldsymbol{\varphi}\} e^{j\omega t} \quad (4.39)$$

Ou :

- $\omega$  La valeur propre.
- $\{\psi\}$  et  $\{\varphi\}$  Les vecteurs propres.

Substituant l'expression (4.36) dans la relation (4.30) et après dans la relation (4.34), on obtient l'équation caractéristique du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi \\ \varphi \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

D'où :

$$\left( \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Cette équation peut être séparée en deux parties, une partie élastique et l'autre électrique présenté comme suit :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_{uu}]\{\Psi\} + \{\mathbf{K}_{u\phi}\}\{\varphi\} - [\mathbf{M}]\{\Psi\} = \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{K}_{\phi u}\}\{\Psi\} + [\mathbf{K}_{\phi\phi}]\{\varphi\} = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (4.42)$$

#### 4.8.4 Analyse dynamique

La piézoélectrique peut être utilisé soit comme capteur (effet direct), soit actionneur (effet inverse) dépendant de leur utilisation, les conditions aux limites électriques sont différentes.

##### 4.10.4 .1 Mode capteur

Dans ce cas, le vecteur des potentiels électriques reste inconnu dans l'équation de mouvement. Par conséquent le vecteur d'excitation ne comporte que les efforts mécaniques. On note aussi qu'aucune charge n'est accumulée sur les couches piézoélectriques ( $\{\phi\} = \{\mathbf{0}\}$ ) Donc l'équation de mouvement devienne :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{\phi u}] & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{Q}\} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

##### 4.8.4.2 Mode Actionneur

Dans ce cas, le vecteur des potentiels électriques ( $\{\phi\} \neq \mathbf{0}$ ) est connu. Constituant d'excitation des actionneurs, alors transféré de même coté du vecteur forces. Alors d'après (4.30) l'équation de mouvement devienne :

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}_u\} - [\mathbf{K}_{u\phi}]\{\phi_n\} \quad (4.44)$$

## 4.9 Résolution par la méthode de NEWMARK

La méthode de Newmark permet la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre. Elle convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non-linéaires avec une matrice de masse et une force appliquée qui peuvent dépendre à la fois de la position et du temps [35].

### 4.9.1 Principe de l'algorithme de NEWMARK

On considère la forme générale de l'équation de la dynamique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (4.45)$$

Avec :

- $\mathbf{M}$  : la matrice de masse du système.
- $\mathbf{C}$  : la matrice d'amortissement du système.
- $\mathbf{K}$  : la matrice de rigidité du système.
- $\mathbf{F}$  : vecteur de force extérieur.

Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité la position et la vitesse à l'instant  $t$  à partir des mêmes grandeurs à l'instant  $t - \Delta t$ . Ce développement contient un terme d'erreur du troisième ordre proportionnel à la dérivée de l'accélération. Diverses hypothèses permettent de remplacer cette dérivée troisième par l'accélération au temps précédent en introduisant deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . On peut écrire le schéma correctif suivant :

$$x_{n+t} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{x}_n + 2\beta\ddot{x}_n] \quad (4.46)$$

$$\dot{x}_{n+t} = \dot{x}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{x}_n + \gamma\ddot{x}_n \quad (4.47)$$

- $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  : le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'état  $n$ .
- $\Delta t$  : est l'incrément du temps.
- $\gamma$  et  $\beta$  : sont des paramètres qui définissent la méthode.

### 4.9.2 Conditions de stabilité de NEWMARK

La méthode de NEWMARK utilisée de façon assez répandue dans le domaine de la mécanique, car il permet de choisir l'ordre de l'intégration, d'introduire ou non de l'amortissement numérique, et possède une très bonne précision.

Domaine	Stabilité
$\gamma \leq \frac{1}{2}$	Instable
$\frac{1}{2} \leq \gamma < 2\beta \leq \gamma$	Conditionnellement stable
$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta$	inconditionnellement stable

➤ La liste de méthodes classiques associées à des valeurs particulières de  $\gamma$  et  $\beta$ :

Nom de la méthode	$\gamma$	$\beta$	Propriétés
Différences centrées	$\frac{1}{2}$	0	Explicite et conditionnellement stable
Fox Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Conditionnellement stable
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	Conditionnellement stable
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Conditionnellement stable

#### 4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le développement et la formulation d'un élément élastique, composite, piézoélectrique et multicouche basé sur une cinématique après nous avons détaillé les hypothèses considérées dans le modèle éléments finis pour nous arrivons à matrice masse, matrice rigidité et l'équation du mouvement. En outre, nous avons mis en lumière sur la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre par la méthode de NEWMARK.

# *Chapitre 5*

## *Applications et Discussions*

### 5.1 Introduction

L'un des objectifs de notre étude est l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences et modes propres,..) des plaques composites et piézoélectrique en vibration de flexion.

Lors de la recherche des fréquences et modes propres, les équations de mouvement sont résolues par la méthode de Rayleigh-Ritz.

Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendant des rigidités des matériaux constitutifs toutefois la recherche systématique des modes n'est pas aisée car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différentes modes.

Le but consisté de calculer les paramètres fréquentiels d'une plaque composite et piézoélectrique rectangulaire (orthotrope ).

- **Utilisation de logiciel ANSYS**

Dans le but de valider le programme élaboré, les résultats issus de ce dernier sont confrontés aux fréquences et déformées propres d'une plaque composite, piézoélectrique et multicouche (composite-piézoélectrique) rectangulaire symétrique, obtenues en calcul de structures par éléments finis sous logiciel ANSYS.

### 5.2 Analyse modale

On utilise comme exemple de calcul le modèle d'une plaque en matériaux composites rectangulaire orthotrope de dimensions (a=200 et b=200 mm) en graphite-époxy (T300/976), constituée de quatre plis de 0.25 mm chacune avec une configuration d'angle antisymétrique (-45/45/-45/45). La plaque est encastrée d'un seule coté et libre des trois autres (CFFF), de

caractéristiques mécaniques :  $E_{11} = 150\text{GPa}$      $E_{22} = E_{33} = 9\text{GPa}$      $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{GPa}$      $G_{23} = 2.5\text{GPa}$      $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$      $\rho = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Cette structure a été utilisée aussi par Lam et al [36].

La figure (5.1) représente la plaque discrétisée en éléments finis dans le cas de la configuration CFFF.

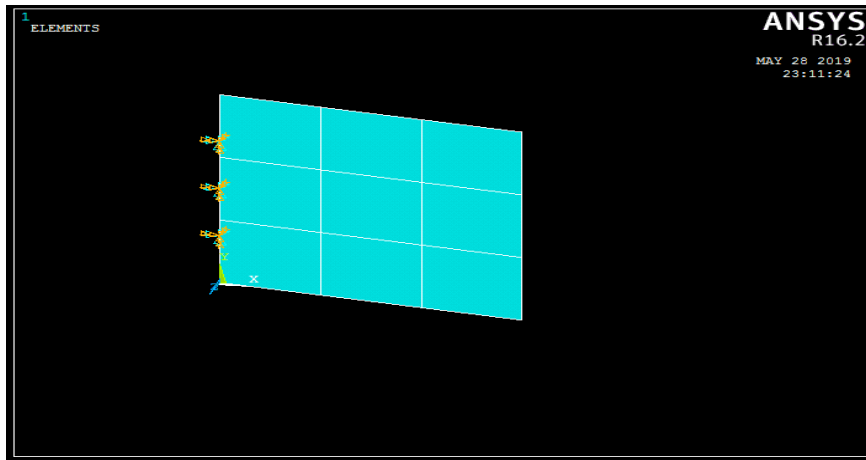


Figure (5.1):Maillage et condition aux limites appliquées à la plaque.

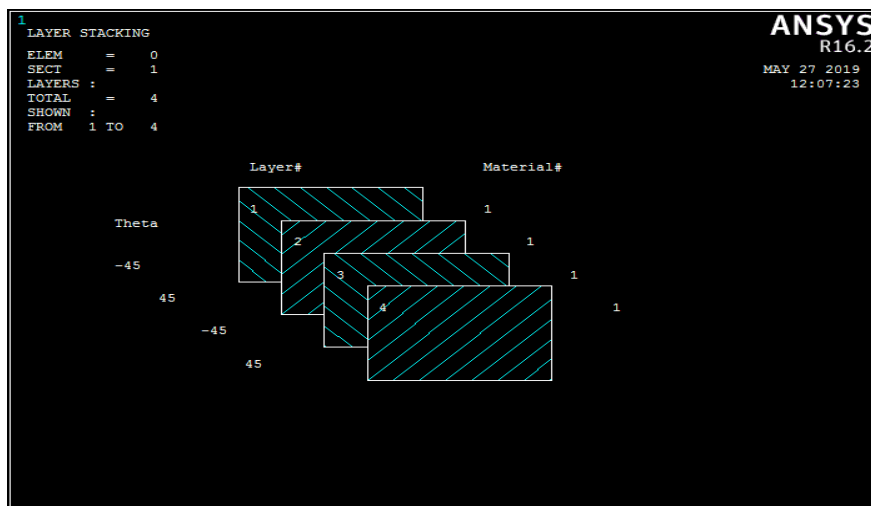


Figure (5.2):Empilement des couches.

Les fréquences propres sont présentées sur le tableau suivant (tab 5.1).

Tableau 5.1. Les quatres premières fréquences propres

Fréquences	Lam et Al [36]	Présent	Différence en	La différence %
Mode 1	21.4657	19.743	1.72	0.0172
Mode 2	63.3491	68.059	4.70	0.047
Mode 3	130.8221	118.36	12.46	0.12
Mode 4	182.4224	187.78	5.35	0.0535

D'après la comparaison avec Lam et AL [36], on constate que les fréquences sont très proches de se de l'article donc l'erreur est acceptable.

Les modes propres sont représentés dans la figure suivante :

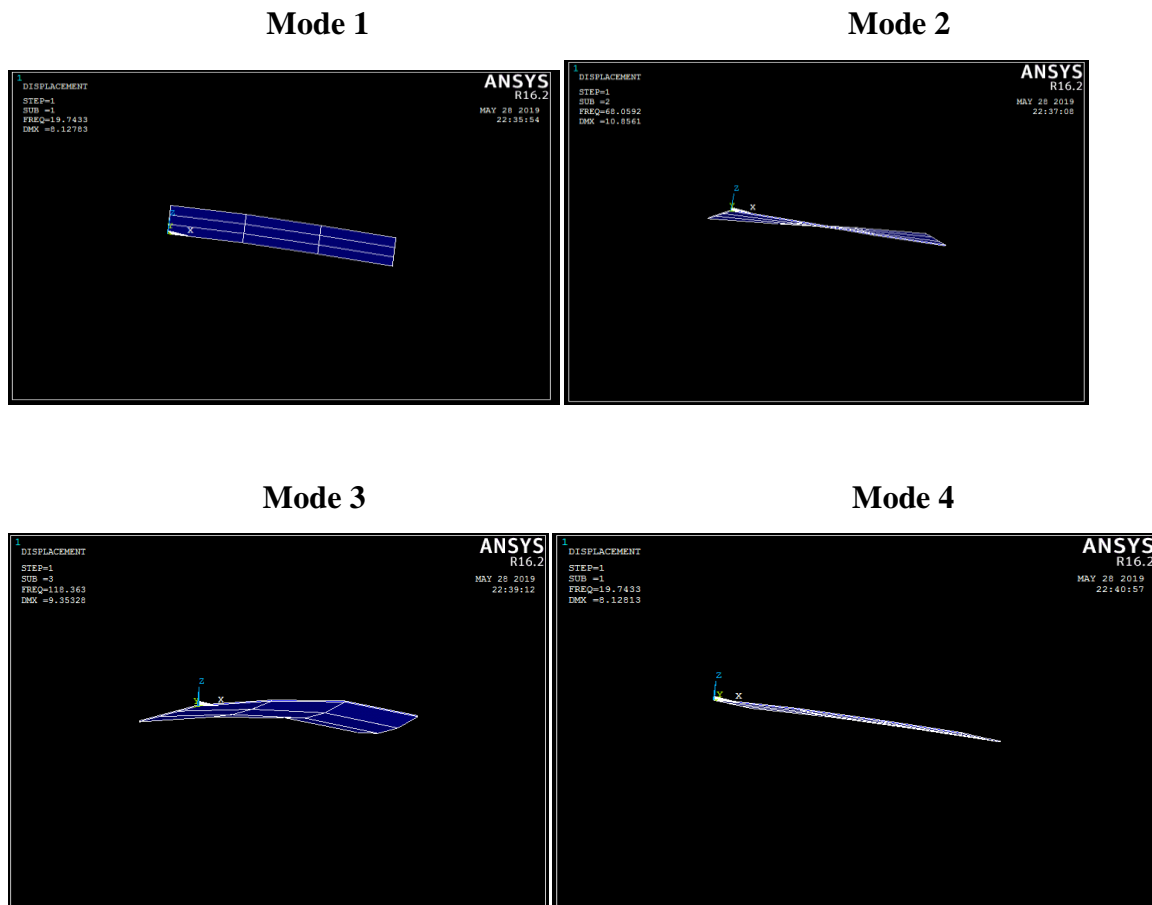


Figure (5.3): Modes propres.

### 5.3 Effet inverse de la piézoélectrique

Dans cette application on traite une plaque piézoélectrique (PZTG1195N) de dimensions  $a \times b$  ( $100 \times 100 \text{mm}^2$ ) d'une épaisseur totale de  $h$  ( $h=0.3 \text{mm}$ ). La plaque est encastree d'un seul coté et libre des trois autres (CFFF) et une tension de  $(0v / 50v)$  est appliquée.

Les caractéristiques des deux matériaux sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau (5.2) : Propriétés des matériaux

Propriétés	PZTG1195N	
Module de Young(GPa)	$E_{11}$	63
	$E_{22}= E_{33}$	63
Coefficients de poisson	$\nu_{23}$	0.3
	$\nu_{12}= \nu_{13}$	0.3
Module de Cisaillement (GPa)	$G_{12}=G_{13}$	24.2
	$G_{23}$	24.2
masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	7600
Constantes piézoélectrique (C/m <sup>2</sup> )	$e_{31}=e_{32}$	22.86
Permittivité électrique	$\epsilon_{11}= \epsilon_{22}$	$15.3 \times 10^{-9}$
	$\epsilon_{33}$	$15 \times 10^{-9}$

**A. Sans la charge mécanique (p=0Pa) et avec potentiel électrique (0v/100v)**

La figure (5.4) représente la plaque discrétisée en éléments finis dans le cas de la configuration CFFF.

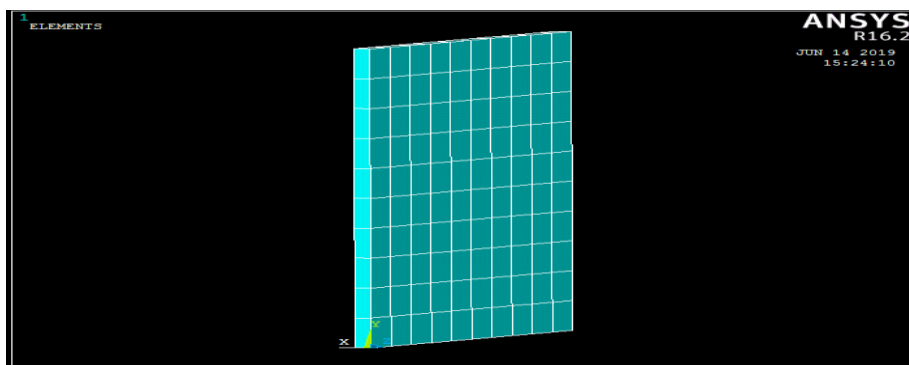


Figure (5.4) : Maillage et condition aux limites appliquées à la plaque.

La figure (5.5) représente la plaque lorsqu'on applique un potentiel électrique :



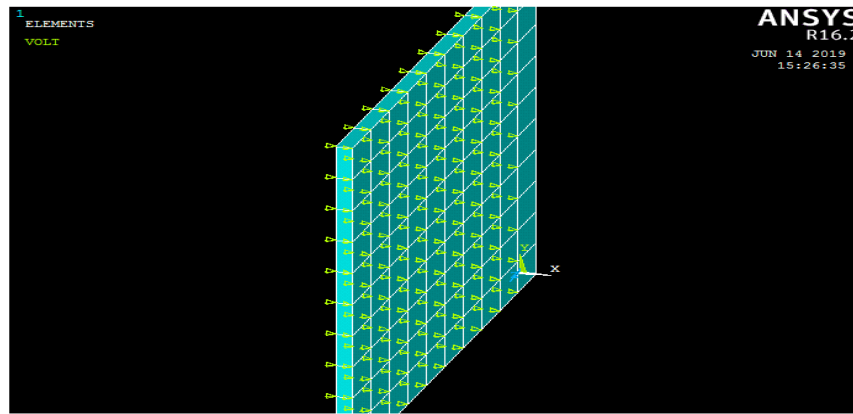


Figure (5.5): La plaque avec un potentiel électrique.

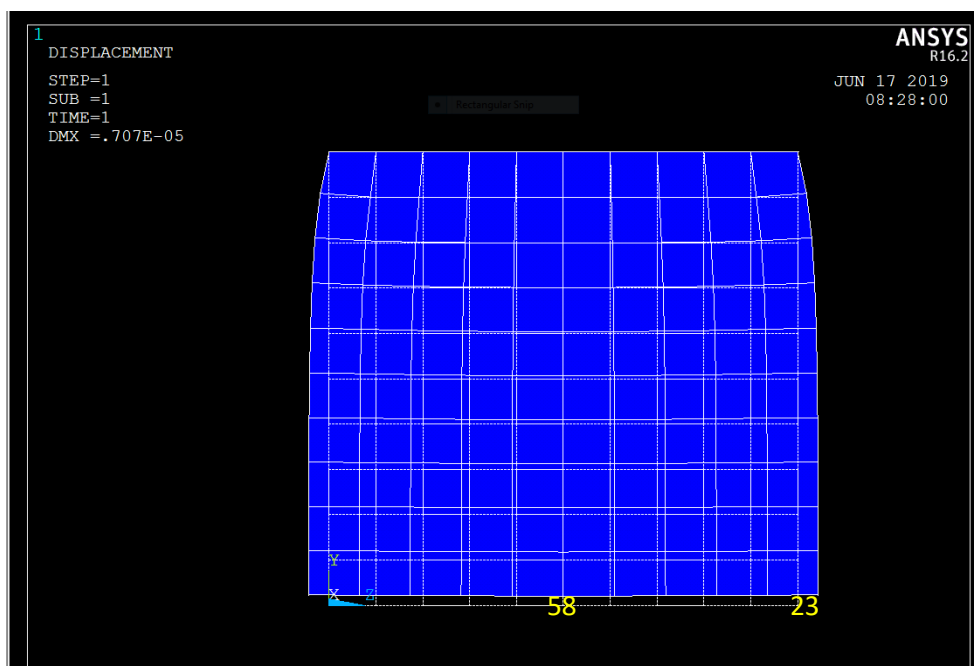


Figure (5.6) : déformation de la plaque.

Dans cette partie, les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (5.3) suivant :

Nœuds	$U_z (m)$	$U_y(m)$	$U_x(m)$
23	$0.62709 \times 10^{-5}$	$0.32717 \times 10^{-5}$	$-0.78115 \times 10^{-8}$
58	$0.24144 \times 10^{-16}$	$0.29184 \times 10^{-5}$	$-0.30696 \times 10^{-7}$

D'après la figure (5.6) et le tableau (5.3) on remarque que les deux nœuds (23 et 58), se déplacent verticalement (allongement suivant l'axe z) et horizontalement (rétrécissement suivant l'axe y) sous l'effet de la piézoélectricité.

### B. Avec charge mécanique (P=100Pa) et potentiel électrique (0v/100v)

En appliquant une charge mécanique de (100Pa) suivant l'axe Z ; les résultats devient :



Figure (5.7) : déformation de la plaque avec charge mécanique.

Dans cette partie, les résultats obtenus sont résumées dans le tableau (5.4) suivant :

Nœuds	$U_z(m)$
23	$-0.80293 \times 10^{-2}$
58	$-0.80840 \times 10^{-2}$

On constate que l'orsque on applique une charge mécanique, tout fois a la présence d'un potentiel électrique, la plaque subit une flexion par rapport l'axe transversal (Z)

#### 5.4 Centrale de la déflexion en mode actionneur

Dans cette section, la plaque est en sandwich avec une couche en composite (graphite-époxy T300/976) de dimensions (100×100) mm<sup>2</sup> d'une épaisseur totale de h=3mm, avec une couches piézoélectriques (PZTG1195N) d'épaisseur (h<sub>p</sub>=0.3mm), et une tension de (0v /100v) est appliquée.

Les caractéristiques des deux matériaux sont présentes dans le tableau suivant (Tab 5.5).

Tableau (5.5) Propriétés des matériaux

Propriétés		PZT G1195N	T300/976
Module de Young(GPa)	$E_{11}$	63.0	150
	$E_{22}=E_{33}$	63.0	9
Coefficients de poisson	$\nu_{23}$	0.3	0.3
	$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.3	0.3
Module de Cisaillement (GPa)	$G_{12}=G_{13}$	24.2	7.1
	$G_{23}$	24.2	2.5
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	7600	1600
Constante piézoélectrique	$e_{31}=e_{32}$	22.86	
Permittivité électrique	$\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$	$15.3 \times 10^{-9}$	
	$\epsilon_{33}$	$15.0 \times 10^{-9}$	

**A. Sans potentiel électrique (0v) et sans charge mécanique (P=0)**

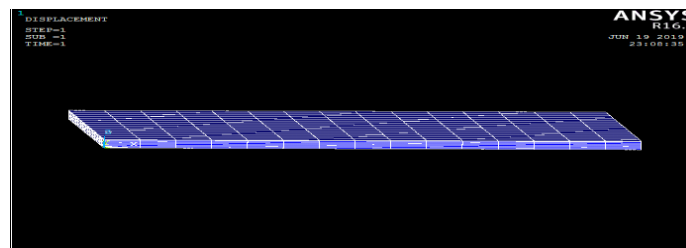


Figure (5.8) : la plaque non déformée.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (5.6) suivant :

Nœuds	Uz
333	0
355	0
356	0
358	0
360	0

On constate que le déplacement des nœuds suivant l'axe z est nul alors on dit que la plaque n'a pas fléchi.

**B. Avec potentiel électrique (0v/100v) et sans charge mécanique (p=0Pa)**

La figure (5.9) représente la plaque lorsqu'on applique un potentiel électrique

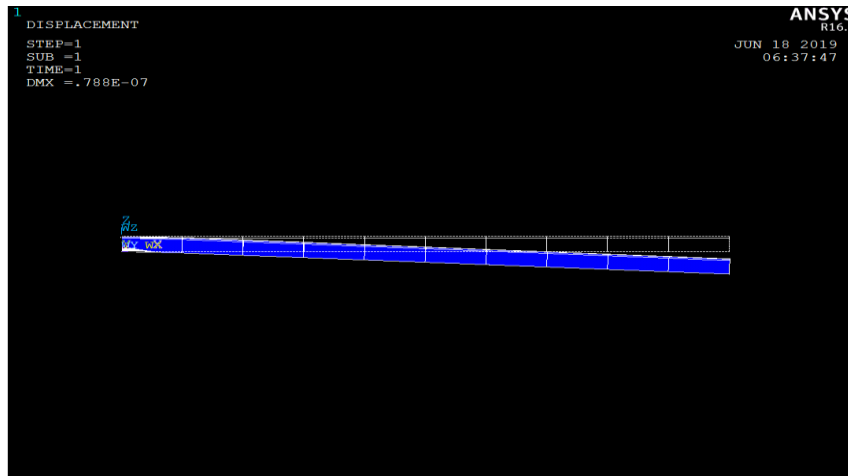


Figure (5.9) : déformation de la plaque.

Dans cette partie, les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (5.7) suivant :

Nœuds	Uz
333	$-0.78719 \times 10^{-7}$
355	$-0.78209 \times 10^{-7}$
356	$-0.77864 \times 10^{-7}$
358	$-0.77435 \times 10^{-7}$
360	$-0.77436 \times 10^{-7}$

On constate que la plaque composite collé a la plaque piézoélectrique a subie une flexion suivant l'axe (oz), cela a été provoqué par l'induction de la différence du potentiel émit dans la plaque piézoélectrique d'une valeur (0v/100v). L'induction d'une différence de potentiel dans la plaque piézoélectrique conduit une flexion si seulement si elle est collée a une plaque d'une caractéristique différente.

**C. Avec un potentiel électrique et avec une charge mécanique**

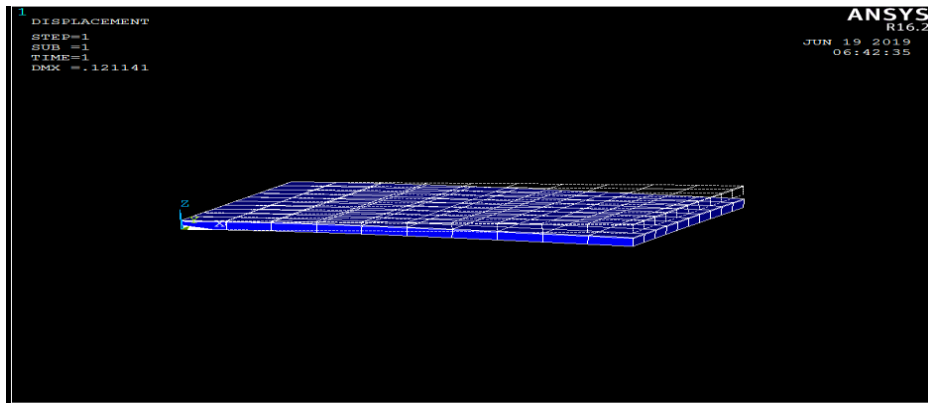


Figure (5.10) : Déformation de la plaque..

Dans ce cas, les résultats obtenus sont résumées dans le tableau (5.8) suivant :

Nœuds	Uz
273	$-0.12209 \times 10^{-3}$
244	$-0.12083 \times 10^{-3}$
249	$-0.11818 \times 10^{-3}$
252	$-0.12083 \times 10^{-3}$
273	$-0.12209 \times 10^{-3}$

Lors de l'application d'une charge mécanique répartie et une tension sur surface de la plaque piézoélectrique, la plaque fléchi d'avantage par rapport a l'axe (Z).

**D. On va changer le voltage (0/-50) on obtient**

Les résultats obtenus sont résumées dans le tableau (5.9) suivant :

Nœuds	Uz
273	$-0.16559 \times 10^{-7}$
244	$-0.16486 \times 10^{-7}$
249	$-0.16328 \times 10^{-7}$
252	$-0.16480 \times 10^{-7}$
273	$-0.16559 \times 10^{-7}$

Lorsqu'on inverse le potentiel électrique on remarque que la plaque ne subit pas la même flexion, les nouvelles valeurs sont petites par rapport au précédentes.

### E. Sans potentiel et avec une charge mécanique P=100Pa

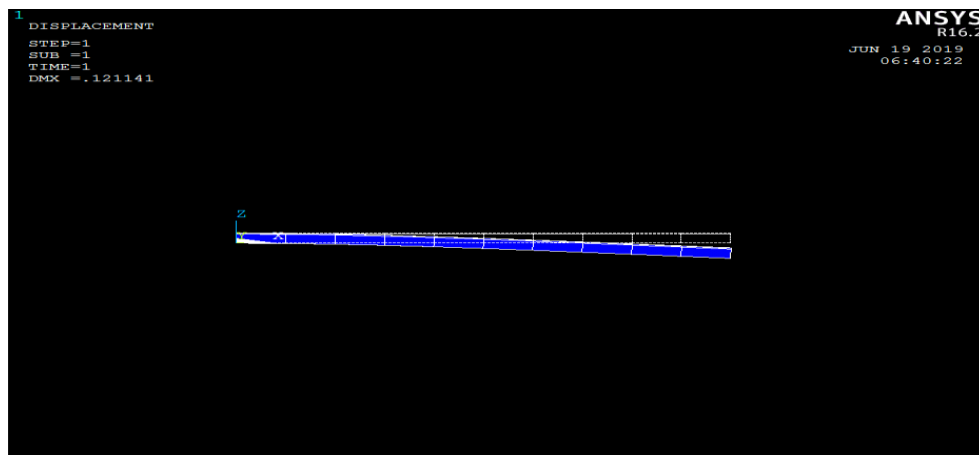


Figure (5.11) : Déformation de la plaque.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (5.10) suivant :

Nœuds	Uz
273	$-0.12111 \times 10^{-3}$
244	$-0.11994 \times 10^{-3}$
249	$-0.11741 \times 10^{-3}$
252	$-0.11984 \times 10^{-3}$
273	$-0.12111 \times 10^{-3}$

On remarque que lorsqu'on applique la charge répartie sur de la surface de la plaque piézoélectrique, la plaque subi une flexion par rapport à la dimension de la plaque, et l'élément piézoélectrique (actionneur) redresse le déflexion de revient de  $0.12 \times 10^{-3}$  m à  $0.11 \times 10^{-3}$  m

### 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a put constater l'influence des plaques piézoélectriques et la tension électrique et mets sur ces dernières.

Ces plaques réagies suivant une différence de potentiel comme on a montré précédemment dans les applications.

Les plaques piézoélectriques avec une tension peuvent fléchir d'avantage ou inversement contrôler cette déflexion et de t'atténuer a nue valeur acceptable.

## ***Conclusion générale***

Les travaux décrits dans ce mémoire ont porté sur une étude théorique des plaques composites et piézoélectriques. Notre premier objectif fut d'établir un modèle facilitant la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et l'interprétation des calculs. Ainsi, grâce à l'écriture des équations constitutives, des conditions aux limites mécaniques et électriques, une formulation matricielle du système d'équations d'équilibres a été proposée.

Deuxième objectif nous avons brièvement fait l'étude des concepts de base de la mécanique des matériaux composites et piézoélectriques. En outre, nous avons mis en lumière les concepts de forces, les moments résultants, les équations d'équilibres et les lois de comportement nécessaires pour la formulation d'éléments composite, piézoélectrique et multicouche (composite- piézoélectrique).

Ensuite nous avons présenté la formulation des éléments élastique, composite et piézoélectrique, puis les hypothèses considérées dans le modèle éléments finis pour obtenir les matrices masses, matrices rigidités et l'équation du mouvement et résolution numérique d'équations différentielles du second ordre par la méthode de NEWMARK.

Aussi nous avons utilisé logiciel ANSYS pour calculer et discuter les résultats des plaques composite, piézoélectrique et multicouche des différents cas.

Finalement, nous avons offert au concepteur une voie de la structure à l'étape de l'utilisation des structures intelligentes et cela en effectuant une étude de sensibilité permettant de prédire quels sont les paramètres qui influent sur les résultats et de quelle façon.