

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
Faculté de Technologie
Département de Mécanique

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Construction Mécanique

ANALYSE VIBRATOIRE DES PLAQUES COMPOSITES
FGM PIEZOELECTRIQUES

Par

Melha NOUGAL

devant le jury composé de :

Mohamed OUALI	Professeur, Univ. Blida1	Président
Abdelkader KIRAD	Professeur, Univ. Blida1	Examineur
Mouloud GUEMANA	Professeur, Univ. Médéa	Examineur
Adel ZEMIRLINE	Maître de conférences A, Univ. Médéa	Examineur
Ali MAHIEDDINE	Maître de conférences A, Univ. Kh MILIANA	Examineur
Rachid TIBERKAK	Professeur, Univ. Blida1	Directeur de thèse

Blida, Mars 2025

DEDICACES

Je pense à tout ce que ma famille m'apporte. Mes enfants Assala Aya et Mohamed Abderhmane pour leurs soutiens sont merveilleux. A mes parents, je ne trouve pas de mots pour exprimer ce que je voudrais, mais je sais qu'ils savent lire tout ce que l'amour qu'ils me portent fait naître de bon en moi.

MERCI

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à Monsieur Rachid TIBERKAK et à Monsieur Madjid EZZRAIMI qui ont initié et encadré mes travaux de thèse. Je leur suis reconnaissante de m'avoir accordé leur confiance et d'avoir su partager leurs connaissances scientifiques.

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Monsieur Mohamed OUALI qui m'a accueillie au sein du Laboratoire des Structures. Je lui suis reconnaissante d'avoir bien voulu présider ce jury.

Je remercie les membres du jury pour leurs précieux commentaires, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je voudrais aussi remercier les membres du post graduation du département de génie mécanique de l'université Saad Dahlab Blida.

Table des matières

Table des matières	4
ABSTRACT.....	7
RESUME	8
ملخص.....	9
LISTE DES GRAPHIQUES.....	10
LISTE DES TABLEAUX	12
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS.....	13
INTRODUCTION GENERALE	16
CHAPITRE 1	19
GENERALITES SUR LES MATERIAUX	20
FONCTIONNELLEMENT GRADUES ET PIEZOELECTRIQUES	20
1. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	20
1.1. Conception des matériaux a fonctionnel gradient FGM.....	20
1.2. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels ..	21
1.3 Méthodes d'élaboration des FGM	22
1.4 Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel.....	27
1.5 Loi de comportement de matériau FGM	28
2. Piézoélectricité	31
2.1 Classes principales de matériaux piézoélectriques	32
2.2 Caractéristique des matériaux piézoélectriques.....	33
2.3 Théorie des matériaux piézoélectriques	34
CHAPITRE 2	36
THEORIE DES PLAQUES	37
1. Loi de comportement élastique	38
1.1 Le champ de déplacement	38
1.2 Relation déformations- déplacements	38
1.3 Relation contraintes-déformations.....	39

1.4 Relations efforts résultants –déformations	41
2. Fonctionnelle de Hamilton	41
2.1 Energie cinétique	41
2.2 Energie potentielle.....	42
2.3 Travail.....	43
3. Approche local- théorie des plaques FGM	43
4. Approche local- théorie des plaques piézoélectriques	43
4.1 Champ électrique.....	43
4.2 Energie potentielle.....	44
4.3 Travail.....	46
CHAPITRE 3	47
MODELISATION PAR ELEMENT FINIS.....	48
1. Discrétisation de la géométrie	48
1.1 Fonctions d'interpolations	48
1.2 Formulation théorique avec représentation particulières du CT pour FGM plaque $Q9\gamma$ 49	
2. Approximation de la solution.....	52
2.1. Energie cinétique	52
2.2. Energie potentielle.....	52
2.3. Travail.....	53
3. Plaque a matériau fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques (PFGM)	54
3.1. Matrice de masse élémentaire.....	54
3.2. Matrice de rigidité élémentaire.....	54
3.3. Amortissement.....	55
3.4. Vecteur de force élémentaire.....	56
CHAPITRE 4	58
ANALYSE DE PLAQUE FONCTIONNELLEMENT GRADUEE	59
AVEC DES COUCHES PIEZOELECTRIQUES	59
1. Analyse modale	59
1.1. Equation du mouvement.....	59

2. Analyse dynamique	60
2.1. Equation du mouvement.....	60
2.2. Réponse d'un capteur piézoélectrique.....	61
2.3. Excitation par actionneur piézoélectrique.....	61
2.4. Résolution dynamique par la méthode de NEWMARK.....	61
3. Contrôle actif des vibrations	63
3.1. Algorithme de contrôle.....	64
CHAPITRE 5	66
APPLICATIONS ET DISCUSSIONS	67
1. Convergence et vérification	68
2. Analyse modale	69
3. Analyse statique	70
3.1. Réponse statique d'une plaque FGM.....	70
3.2. Réponse statique d'une plaque FGM intégré avec des couches piézoélectriques.....	71
4. Analyse dynamique	73
5. Algorithme de contrôle actif	75
5.1 Contrôle statique de la déflexion.....	75
5.2 Contrôle dynamique de la réponse.....	78
6 Conclusion	80
7. Perspectives Futures dans l'Analyse Dynamique et le Contrôle des Plaques FGM Piézoélectriques	82
REFERENCES	83

ABSTRACT

An efficient approach has been developed to simulate free vibrations, static and dynamic responses, and active control of functionally graded (FGM) plates with integrated piezoelectric layers. This approach enhances the standard first-order shear deformation theory (FSDT) by introducing new shear deformation fields, mitigating the shear locking problem, particularly in the analysis of thin structures. In particular, the introduction of the $Q_9\gamma$ parameter improves the representation of shear deformations by ensuring better consideration of coupling effects. These new fields accurately predict shear deformation fields, satisfying both compatibility and equilibrium equations while requiring less mesh refinement. Moreover, this current approach offers superior performance and accuracy in the analysis of FGM structures. A feedback control system has also been implemented, using either full piezoelectric layers or partial (patch) coatings as actuators and sensors in the analysis of static bending control and dynamic vibration control. The present work strengthens fundamental techniques for further research on finite element analysis across a broader spectrum of materials and applications.

Key words: Functionally Graded Plates (FGM); New Approach $Q_9\gamma$, FSDT; Piezoelectric layers; Dynamic Response; Active Vibration Control; Patch Layer.

RESUME

Une approche efficace a été développée pour simuler les vibrations libres, la réponse statique et dynamique ainsi que le contrôle actif de plaques fonctionnellement graduées (FGM) avec couches piézoélectriques intégrées. Cette approche renforce la théorie standard de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT) en introduisant de nouveaux champs de déformation en cisaillement, atténuant le problème du verrouillage par cisaillement, en particulier dans l'analyse de structures minces. En particulier, l'introduction du paramètre $Q_9\gamma$ permet d'améliorer la représentation des déformations en cisaillement en assurant une meilleure prise en compte des effets de couplage. Ces nouveaux champs prédisent avec précision les champs de déformation en cisaillement, satisfaisant à la fois les équations de compatibilité et d'équilibre, tout en nécessitant moins de raffinement du maillage. De plus, cette approche actuelle offre des performances et une précision supérieure dans l'analyse des structures FGM. Un système de contrôle par rétroaction a également été mis en œuvre, utilisant soit des couches piézoélectriques totales, soit un revêtement partiel (patch) comme actionneurs et capteurs dans l'analyse du contrôle de flexion statique et du contrôle dynamique des vibrations. Le présent travail renforce les techniques de base pour des recherches plus approfondies sur l'analyse par éléments finis sur un spectre plus large de matériaux et d'applications.

Mots clés : Plaques fonctionnellement graduées (FGM) ; Approche $Q_9\gamma$, FSDT ; Couches piézoélectriques ; Réponse dynamique ; Contrôle actif des vibrations ; Couche de patch.

ملخص

تم تطوير نهج فعال لمحاكاة الاهتزاز الحر والاستجابة الساكنة والديناميكية والتحكم النشط للألواح المتدرجة وظيفياً (FGM) مع طبقات كهر ضغطية متكاملة. يعزز هذا النهج نظرية تشوه القص القياسية من الدرجة الأولى (FSDT) عن طريق إدخال حقول جديدة لإجهاد القص $Q_{9\gamma}$ ، مما يخفف من مشكلة تجميد القص، خاصة في تحليل الهياكل الرقيقة. تتنبأ هذه الحقول بدقة تشوه القص، مما يحقق التوازن ويضمن توافق المعادلات مع الحاجة إلى تقليل دقة التجزئة. بالإضافة إلى ذلك، يوفر هذا النهج الحالي أداءً ودقة أعلى في تحليل هياكل المتدرجة وظيفياً. علاوة على ذلك، تم تنفيذ نظام التحكم في الانحراف باستخدام إما طبقات كهر ضغطية كاملة أو غطاء جزئي (الرقع) كمشغلات أو أجهزة استشعار في كل من التحكم في الانحناء الثابت وتحليل التحكم الديناميكي في الاهتزاز. يعزز العمل الحالي التقنيات الأساسية لإجراء مزيد من البحث في تحليل العناصر المحدودة عبر مجموعة واسعة من المواد والتطبيقات.

كلمات البحث: اللوحات المتدرجة وظيفياً (FGM)، نظرية $Q_{9\gamma}$; طبقات كهر ضغطية، الاجابة الديناميكية، التحكم النشط في الاهتزاز، الرقع، FSDT

LISTE DES GRAPHIQUES

Figure 1.1	Modèle d'une plaque FGM	20
Figure 1.2	La distribution composante des matériaux	22
Figure 1.3	Principe de la Méthode de Coulage en Bande	22
Figure 1.4	Vue schématique du montage de l'installation d'EPD pour la production des matériaux	24
Figure 1.5	Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué	24
Figure 1.6	Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	26
Figure 1.7	Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel	26
Figure 1.8	Plaque en matériau fonctionnellement gradué	28
Figure 1.9	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	29
Figure 1.10	Variation du module de Young de la plaque P-FGM	29
Figure 1.11	Variation du module de Young de la plaque S-FGM	30
Figure 1.12	Effet piézoélectrique	32
Figure 1.13	Répartition des classes cristallines selon certaines propriétés physiques du matériau	34
Figure 2.1	Cinématique de Reissner- Mindlin	38
Figure 3.1	Elément isoparamétrique quadratique à 9 nœuds	50
Figure 4.1	Schéma du contrôle actif de la plaque fonctionnellement graduée avec un actionneur et un capteur piézoélectriques liés en surface	64
Figure 5.1	Déflexion de l'axe central de la plaque FGPM en porte-à- faux pour différentes valeurs α sous une charge uniformément répartie	72
Figure 5.2	Déflexion de l'axe central de la plaque FGPM en porte-à- faux pour différentes valeurs α sous une charge uniformément répartie et différentes tensions d'actionneur	73
Figure 5.3	Analyse dynamique d'une plaque encastree avec différentes valeurs de α soumise à des charges différentes. (a) charge à pas ; (b) charge triangulaire ; (c) charge sinusoidale ; (d) charge exponentielle	74

Figure 5.4	Plaque FGM avec actionneur et capteur piézoélectrique intégrés	75
Figure 5.5	Effets du gain de contrôle de déplacement G_d sur la déviation statique d'une plaque FGM piézoélectrique simplement supportée sous une charge uniformément répartie	76
Figure 5.6	Trois différents positions de patch piézoélectriques pour condition limite porte à faux	76
Figure 5.7	Déflexion centrale d'une plaque FGM piézoélectrique pour différents positions de patches piézoélectrique sous une charge répartie uniforme et tension d'actionneur	77
Figure 5.8	Trois différents positions de patch piézoélectriques pour condition limite simplement supportée	77
Figure 5.9	L'effet du gain de contrôle de déplacement G_d et des différentes positions des patches sur la déviation statique d'une plaque simplement supportée	77
Figure 5.10	L'effet du gain de contrôle de vitesse G_v sur la réponse de déflexion de la plaque FGM Piézoélectrique en (CCCC) et $\alpha=2$	79
Figure 5.11	Réponse de déflexion transitoire d'une plaque FGM piézoélectrique FGM en CCCC et $\alpha=1$, sous chargement : (a) charge à pas, (b) charge triangulaire	80
Figure 5.12	Réponse de déflexion transitoire d'une plaque FGM piézoélectrique FGM en SSSS et $\alpha=1$, sous chargement : (a) charge à pas, (b) charge triangulaire.	80

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	21
Tableau 5.1	Propriétés des composant des matériaux FGM et piézoélectrique	67
Tableau 5.2	Paramètre de fréquences fondamentales $\omega = (\omega\alpha^2\sqrt{\rho_c/E_c})/h$ d'une FGM Al/ZrO ₂ sous conditions aux limites SSSS pour différents maillages	68
Tableau 5.3	Comparaison du paramètre de fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_c/E_c}$ pour différents rapports d'épaisseur (a/h) de plaques Al/Al ₂ O ₃ FG	69
Tableau 5.4	Fréquences naturelles (Hz) d'une plaque FGM carrée simplement supportée avec des couches piézoélectriques intégrées pour différentes valeurs de α .	70
Tableau 5.5	Fréquences naturelles (Hz) d'une plaque FGM carrée encastree avec des couches piézoélectriques intégrées pour différentes valeurs de α .	70
Tableau 5.6	Effet de l'exposant de la loi de puissance α et du chargement sur les flèches adimensionnelles d'une plaque carrée FGM sous charge uniforme.	71
Tableau 5.7	Effet de l'exposant de la loi de puissance α et du chargement dans les flèches adimensionnelle d'une plaque carrée FGM sous charge sinusoïdale	71

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

P_c	: Propriétés des composants céramiques de la plaque FGM
P_m	: Propriétés des composants métalliques de la plaque FGM
α	: Exposant de la loi de puissance ou paramètre du matériau
$V(z)$: Fraction volumique
z	: Epaisseur de coordonnée (m)
a	: Longueur de la plaque (m)
b	: Largeur de la plaque (m)
h	: Hauteur de la plaque (m)
h_f	: Epaisseur de la plaque FGM (m)
h_p	: Epaisseur de la couche piézoélectrique (m)
E_m	: Coefficient de Hook de la couche métallique (N/m ²)
E_c	: Coefficient de Hook de la couche céramique (N/m ²)
x, y	: Coordonnées réels
ξ, η	: Coordonnées cartésiennes
u, v, w	: Déplacements dans les directions x,y et z (m)
\dot{u}	: Vitesse (m/s)
\ddot{u}	: Accélération (m/s ²)
u_0, v_0, w_0	: Composantes du champ déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$: Rotations autour des axes x, y et z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales (N/m ²)
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$: Contraintes de cisaillement (N/m ²)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Déformations dans la direction x, y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$: Déformations de distorsion
δW_{int}	: Travail virtuel intérieur (J)
n	: Nombre des couches
N	: Effort normales (N)
M	: Moments de flexion (N.m)

Ω	: Surface supérieure
d_{ij}	: Opérateur différentiel
$\{D\}$: Vecteur des déplacements électriques (C/m ²)
$\{E\}$: Vecteur des champs électriques (V/m ou N/C)
$\{\phi\}$: Vecteur du potentiel électrique (Volt)
$\{\varepsilon\}$: Vecteur des déformations
$[C]$: Matrice des constants élastiques
$[e]$: Matrice des constantes piézoélectriques en déformation C/m ²
$[d]$: Matrice de permittivité électrique (F/m ou C.V ⁻¹ .m ⁻¹)
$\{\sigma_{mf}\}$: Vecteur des contraintes (membrane-flexion) N/m ²
$\{\varepsilon_{mf}\}$: Vecteur des déformations (membrane-flexion)
$\{C_{mf}\}$: Matrice des constants élastiques (membrane- flexion)
$\{\sigma_C\}$: Vecteur des contraintes (cisaillement)
$\{\varepsilon_C\}$: Vecteur des déformations (cisaillement)
$\{C_C\}$: Matrice des constantes élastiques associés au cisaillement
$\{N\}$: Vecteur des efforts normaux (N)
$[J]$: matrice jacobienne
$[L_t]$: Opérateur de localisation des variables de translation
$[L_r]$: Opérateur de localisation des variables de rotation
$\rho(z)$: Densité du matériau FGM en fonction de z (Kg/m ³)
ρ_m	: densité du métal (Kg/m ³)
ρ_c	: densité du céramique (Kg/m ³)
ρ_f	: densité du matériau FGM (Kg/m ³)
ρ_p	: densité de la couche piézoélectrique (Kg/m ³)
$[m_f]$: Matrice masse élémentaire de la plaque FGM
$[M_e]$: Matrice masse élémentaire de la plaque FGM avec des couches piézoélectriques
$\langle e \rangle$: Déformations de membrane
$\langle \chi \rangle$: courbures
$z\langle \chi \rangle$: Déformations de flexion

$\langle \gamma \rangle$: Déformations de cisaillement transversal

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Ces deux critères ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs des développements industriels.

Le concept de « Functionally Graded Material » a été inventé par un scientifique japonais en 1984 qui travaillait sur un matériau capable de tenir à des températures élevées pour des applications spatiales. La révolution et la conception de ces matériaux ont été définies au 21^{ème} siècle. Ils ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques.

Les matériaux fonctionnellement gradués FGM sont des composites produits en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs capacités à diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et déduire les contraintes thermiques.

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux matériaux fonctionnellement gradués (FGM), et plusieurs théories ont été proposées, à cet égard Reddy et al [1-3] ont analysé des plaques et des poutres en FGM. Zhao [4] et Hashemi [5] ont étudié les vibrations libres des plaques FGM en se basant sur les théories de déformation classique (CPT) et de premier ordre (FSDT) respectivement. Bien que la FSDT fournit un résultat suffisamment précis pour les plaques minces et modérément épaisses mais son utilisation n'est aussi assez pratique à cause de la difficulté de la détermination de la valeur correcte du facteur de correction de cisaillement. Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, de nombreuses théories de déformation de cisaillement de plaques à ordre élevé ont été élaborées, comme Matsunaga [6] a examiné les vibrations libres et la stabilité des plaques FGM en utilisant la théorie de déformation du deuxième ordre (SSDT). Talha [7], Merdaci [8] et Abdelaziz [9] sur la base de l'hypothèse d'une variation d'ordre supérieur du déplacement (HSDT) ont présenté l'analyse statique et dynamique des plaques FGM. Duc et al [10-12] ont développé l'analyse non linéaire des coques en FGM.

Le concept de développement de structures intelligentes a suscité une attention particulière au cours de la dernière décennie en raison du contrôle actif des structures flexibles. Dans ce contexte, l'utilisation de matériaux intelligents dans le contrôle des vibrations des structures de plaques, en particulier la réponse mécanique des plaques FGM avec des couches piézoélectriques liées en surface, a suscité l'intérêt des chercheurs. Cependant, en raison de la relative nouveauté de ce domaine, la littérature publiée sur les vibrations libres et forcées des plaques FGM est diverse et plusieurs théories ont été proposées ; Behjat [13] et Shakeri [14] ont examiné la réponse statique et dynamique des plaques FGM sous charge mécanique et électrique. He et al [15] ont étudié le contrôle actif des plaques FGM avec des capteurs et actionneurs piézoélectriques en utilisant la théorie de déformation classique (CPT) ainsi Jinqiang et al [16]. Bendine et al [17] ont proposé le contrôle des vibrations de la plaque piézoélectrique FGM basé sur la recherche génétique LQR. Nguyen et al [18] ont développé une méthode d'écart de cisaillement discret lissé basée sur des cellules (CS-DSG3) pour l'analyse et le contrôle de plaques FGM intégrées des capteurs et actionneurs piézoélectriques. Anshul [19] a présenté l'effet de la porosité sur le contrôle actif des vibrations d'une structure intelligente en utilisant un matériau piézoélectrique poreux à gradation fonctionnelle. Selim [20] a fourni la théorie de déformation d'ordre supérieur de Reddy avec la méthode IMLS-Ritz sans élément pour le contrôle actif des vibrations des plaques FGM avec des couches piézoélectriques. Plus récemment, Dat et al [21] ont proposé une approche analytique de la vibration magnéto-électro-élastique non linéaire d'une plaque sandwich intelligente avec un noyau nanocomposite renforcé de nanotubes de carbone dans un environnement hygrothermique.

Kheirikhah et al [22] ont analysé le comportement vibratoire non linéaire de micro coquilles piézoélectriques à double courbure et à gradation fonctionnelle dans des environnements thermiques. Chiung et Guan [23] ont présenté une solution de série analytique de type Levy pour les vibrations tridimensionnelles dans une plaque rectangulaire sandwich comportant un noyau en FGM avec des couches piézoélectriques.

Par le présent sujet, on vise une contribution à la modélisation des structures plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM), par le développement d'éléments finis à matériau FGM. Cet élément sera destiné à l'analyse des différents comportements nodaux, statiques et dynamiques des plaques fonctionnellement graduées avec des couches piézoélectriques. Par ailleurs, un autre

objectif de ce travail est d'étudier une approche $Q_9\gamma$ intégrée dans la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). Cette approche prend en considération des nouveaux champs de déformations de cisaillement qui renforce la théorie standard du premier ordre (FSDT) en atténuant le problème du verrouillage de cisaillement, en particulier dans l'analyse des structures minces. De plus, un système de contrôle par rétroaction a été mis en œuvre en utilisant soit des couches piézoélectriques totales, soit un revêtement partiel (patch) comme actionneurs et capteurs dans le contrôle de flexion statique et l'analyse du contrôle de vibration dynamique des plaques en matériaux gradués.

Notre thèse s'articule autour de 5 chapitres

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux FGM et piézoélectriques.

Chapitre 2 : Théorie des plaques.

Chapitre 3 : Modélisation par éléments finis.

Chapitre 4 : Analyse des plaques fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques

Chapitre 5 : Applications et discussions.

Conclusion.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES ET PIEZOELECTRIQUES

1. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux à gradient évalués FGM, sont des matériaux composites produits en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé figure 1.1. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs capacités à diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et à réduire les contraintes thermiques. La variation continue des propriétés mécaniques donne au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicales.

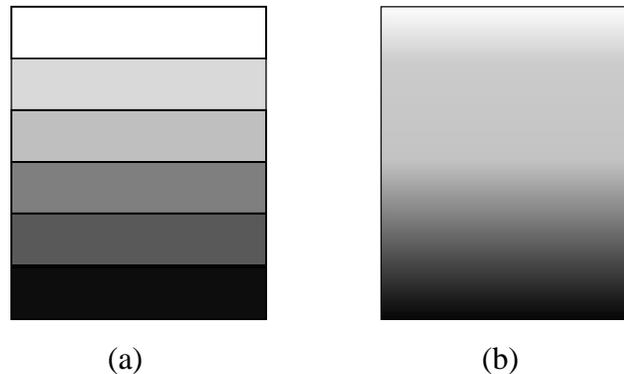


Figure 1.1: Modèle d'une plaque FGM.

1.1. Conception des matériaux a fonctionnel gradient FGM

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique.

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation de matériaux à gradient évalué. On peut imaginer un matériau dont la face

exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face inférieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal. C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient évalué dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. La plupart des FGM sont constitués des céramiques et des métaux, dont leurs propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau (1.1).

Tableau 1.1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance à l'oxydation ; bonne résistance thermique ; Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre (couche intermédiaires)	Céramique Métal	- Elimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée ; - Très bonne ténacité.

1.2. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

On peut facilement comparer les FGM aux composites car ils partent du même principe, si on prend les FGM on peut généralement dire que ce sont des matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non homogènes figure (1.2), et leur changement continue dans la composition et donc dans la microstructure. Dans certains cas on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente. Le matériau plan composé à une caractéristique plane. Le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux et le FGM présentent d'excellentes caractéristiques qui différencient les matériaux plan composés et reliés.

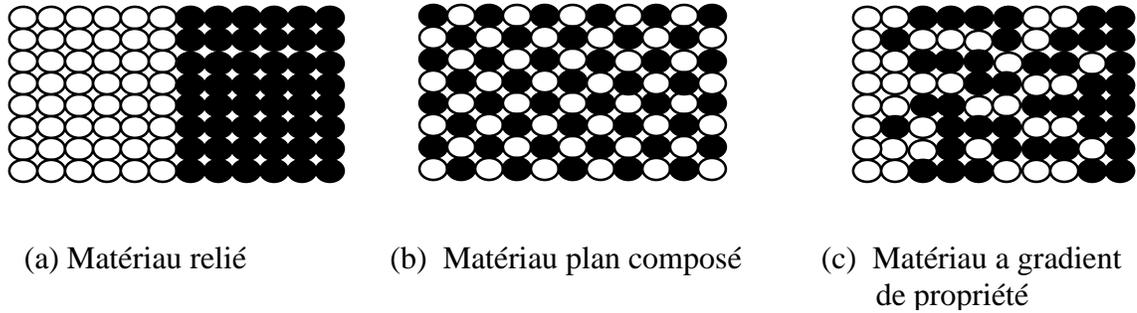


Figure 1.2. La distribution composante des matériaux.

1.3 Méthodes d'élaboration des FGM

Les méthodes de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisées en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient évalués, les techniques les plus employées sont :

a) Coulage en bande

Le coulage en bande à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières figure.1.3. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

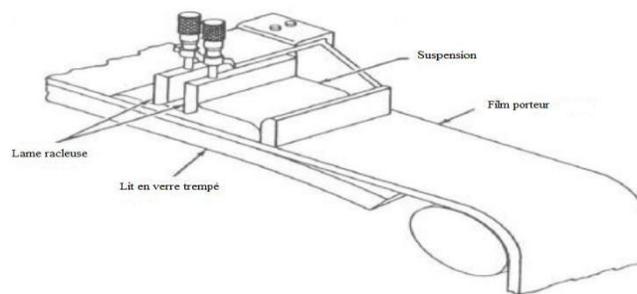


Figure1.3. Principe de la Méthode de Coulage en Bande [23].

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa

viscosité. Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

b) Coulage séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou "prise " ;
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion de la plate (coulage classique) ;
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

c) Dépôt par électrophorèse (EPD)

Est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dès lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique métal, WC/Co. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure.1.4.

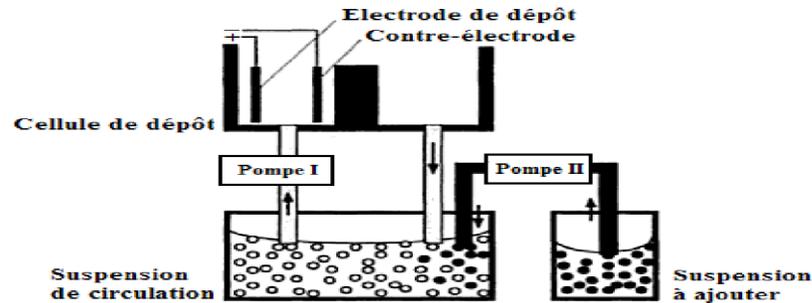


Figure 1.4. Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux [23].

d) Compaction sèche des poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale.

e) Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 $^{\circ}\text{C}$ et la vitesse 1000-1500 m/s voir figure 1.5. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure, à la corrosion ainsi que l'isolation thermique et électrique.

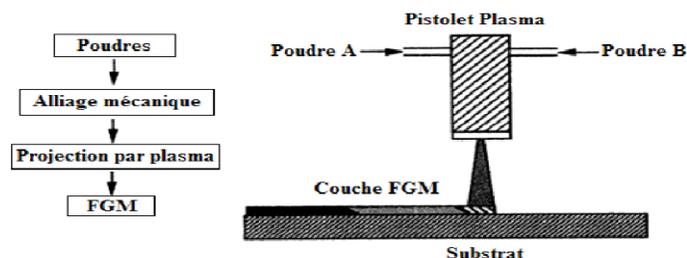


Figure 1.5. Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué [23].

f) Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le **FGM**. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 .

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD est que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, qui n'exigent pas la fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

g) Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la figure 1.6, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma.

Les **FGMs** peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

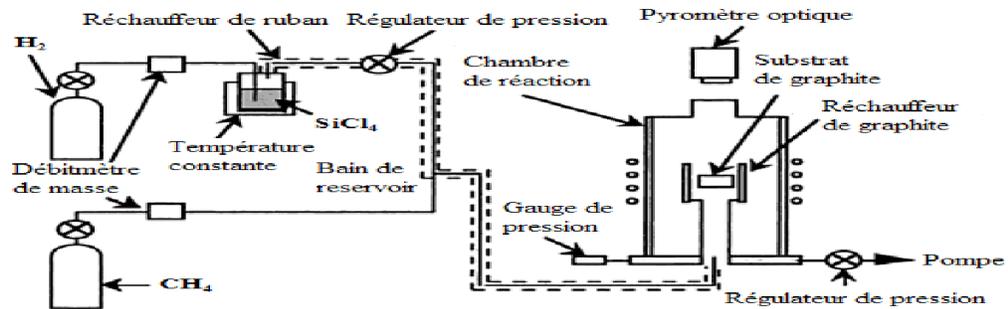


Figure 1.6. Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [23].

h) Frittage en infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapports aux autres.

i) Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI [38] a utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure 1.7, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé.

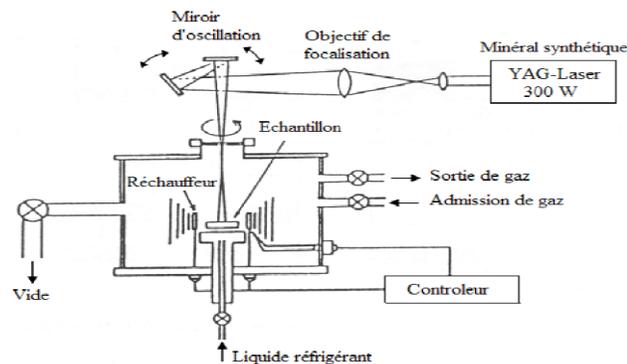


Figure 1.7. Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel [23].

j) **Implantation ionique (Sputtering)**

C'est une technique avancée pour la fabrication des **FGMs** permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

1.4 Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tel que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- Génie civil (pont à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques, réservoir de stockage).
- Aéronautique (composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux)
- Chimique (l'échangeur de chaleur, récipient de réaction, tube de chaleur).
- Ingénierie (outils de coupe, éléments de moteur).
- L'énergie nucléaire (composants des réacteurs nucléaires, pastilles des combustibles)
- Electronique (semi-conducteur a bande graduée)
- Optiques (fibres optiques, lentilles)
- Conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible)
- Matière biologiques (implants, peau artificielle)
- Produits en général (matériaux de constructions, corps de voiture, verre de fenêtre.

1.5 Loi de comportement de matériau FGM

Les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ce sont des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes ; le changement continu de la composition et de la microstructure du matériau génère un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Trois types de gradations sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants comme illustré sur la fig.1.8.

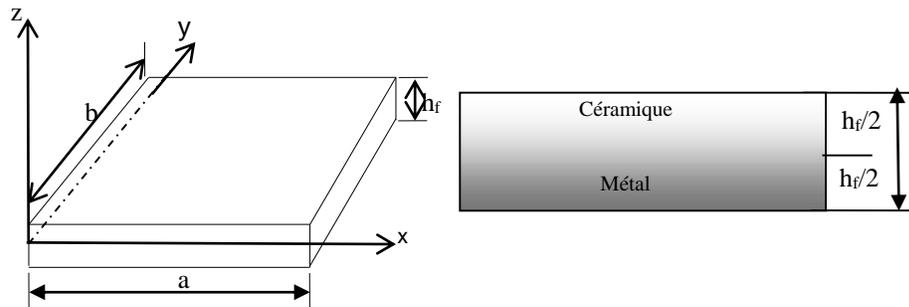


Figure 1.8. Plaque en matériau fonctionnellement gradué

a) La loi exponentielle (E-FGM)

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGM est très répandue dans les études de mécanique de la rupture. Pour une structure en FGM avec épaisseur uniforme h_f , les propriétés typiques des matériaux $P(z)$ à tout point situé à une distance ' z ' de la surface de référence est donné par [23] :

$$P(z) = A \cdot e^{B(z + \frac{h_f}{2})} \quad (1.1)$$

$$\text{Ou} \quad A = P_m \quad B = \frac{1}{h_f} \ln \left(\frac{P_c}{P_m} \right) \quad (1.2)$$

Où P_c et P_m sont respectivement les propriétés des composants céramiques et métal de la plaque FGM.

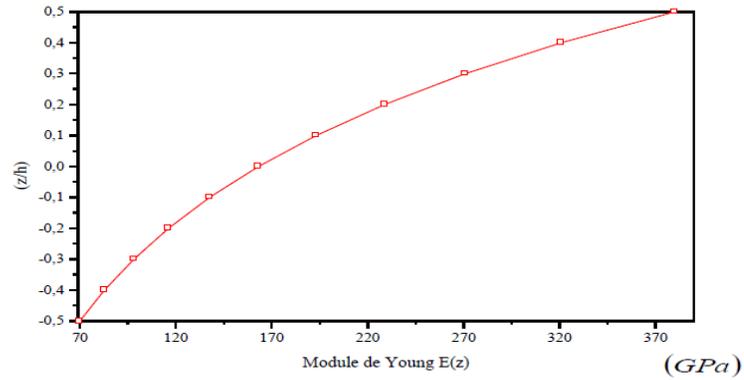


Figure 1.9. Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [23].

b) La loi de puissance (P-FGM)

Elle est la plus fréquente dans l'analyse des contraintes des FGM, la fraction volumique obéit à la loi de puissance [23] :

$$v_f(z) = \left(\frac{z}{h_f} + \frac{1}{2}\right)^\alpha \quad \alpha > 0. \quad (1.3)$$

Où α est l'exposant de la fraction volumique qui régit la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche FGM.

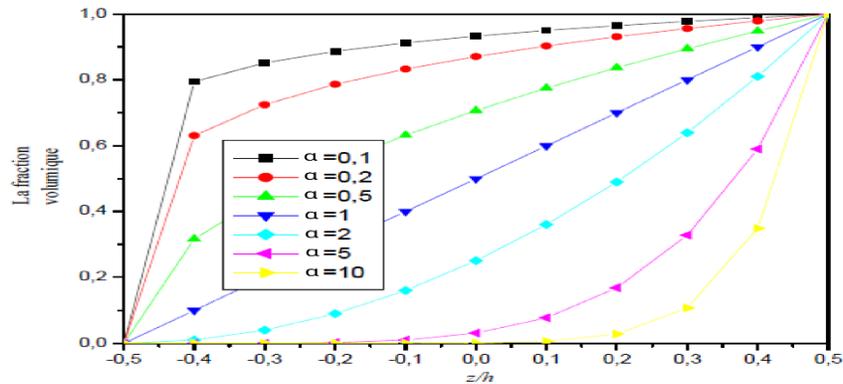


Figure 1.10. Variation du module de Young de la plaque P-FGM [23].

Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM peuvent être exprimées par la loi des mélanges, [23] :

$$P(z) = (P_c - P_m)v_f(z) + P_m \quad (1.4)$$

La variation de fraction volumique des phases en termes de α est représentée sur la figure 1.10.

c) La loi de puissance (S-FGM)

Pour réduire la variation rapide de la matière à proximité de la surface supérieure et inférieure, la distribution de matériaux à l'aide de deux fonctions en loi de puissance a été définie. Cette distribution est appelée la fonction sigmoïde. La fraction volumique du matériau est donc définie par [23] :

$$V_{f1}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^\alpha \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.5)$$

$$V_{f2}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^\alpha \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.6)$$

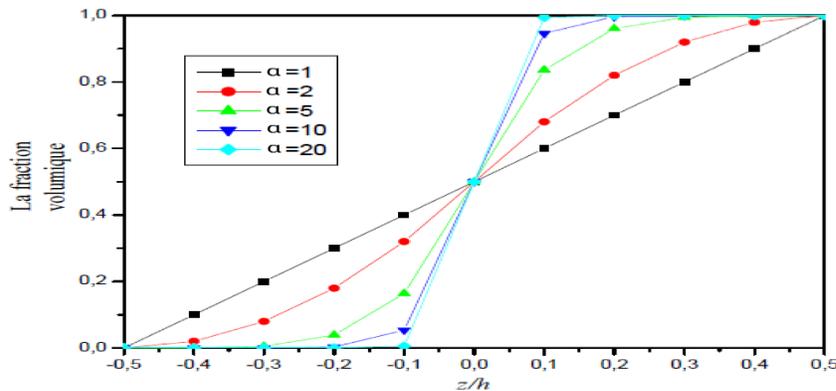


Figure 1.11. Variation du module de Young de la plaque S-FGM [23].

En utilisant la loi des mélanges, Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM peuvent être exprimées par la loi des mélanges, [23] :

$$P(z) = V_{f1}P_C + P_m(1 - V_{f1}) \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.7)$$

$$P(z) = V_{f2}P_C + P_m(1 - V_{f2}) \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.8)$$

La variation de la fraction volumique des distributions sigmoïdes dans les équations (1.5) et (1.6) est représentée dans la Figure.1.11.

Dans cette section nous avons présenté un aperçu sur le développement des FGM, leurs concepts, leurs propriétés, leurs principales étapes de fabrication ainsi les différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles. Dans le cadre de cette thèse, la loi de puissance (P-FGM) a été retenue pour la modélisation de la variation des propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée, en raison de sa formulation simple et de sa capacité à offrir une grande flexibilité dans l'estimation des propriétés effectives des matériaux.

Dans l'avenir, les FGM aux formes et propriétés complexes, intégrant des gradients en deux ou trois dimensions, seront produits grâce à des techniques de fabrication assistées par ordinateur. Ce progrès permettra aux concepteurs de ne plus se limiter à une palette de matériaux homogènes existants. Bien que de nombreuses recherches se soient concentrées sur l'analyse de ces matériaux, les scientifiques poursuivent leurs travaux dans le domaine de la conception des FGM. Leur objectif est de développer une méthodologie robuste permettant d'optimiser la composition d'un matériau à gradient en fonction des exigences spécifiques de chaque application.

2. Piézoélectricité

L'environnement recèle de nombreuses influences de grandeurs physiques : rayonnement solaire, échanges thermiques, déplacements d'air, mouvements aquatiques tels que les marées et vibrations mécaniques. Ces dernières sont produites par l'activité du corps humain, ainsi que par les machines utilisées dans l'automobile, le secteur naval, l'aéronautique ou le bâtiment. L'instabilité structurelle constitue un problème majeur et incontournable.

Par conséquent, il est essentiel de contrôler et de stabiliser les structures durant leur utilisation. Les méthodes conventionnelles pour traiter ces problèmes consistent soit à utiliser des techniques d'amortissement passif, en ajoutant une ou plusieurs couches de matériaux viscoélastiques sur les surfaces vibrantes, soit à reconcevoir le système. Les principaux inconvénients sont que la première méthode est peu efficace à basse fréquence, tandis que la seconde est généralement très coûteuse.

L'utilisation de structures intelligentes intégrant des capteurs et des actionneurs piézoélectriques constitue un outil efficace, fonctionnant de manière autoalimentée à partir de l'énergie ambiante. Les matériaux piézoélectriques sont nombreux. Parmi ceux les plus largement utilisés dans l'industrie, on trouve les céramiques synthétiques et le PZT.

En 1880, les frères Curie furent à la base de la découverte de l'effet piézoélectrique sur des cristaux de sel de la rochelle. Etymologiquement, le préfixe 'PIEZO' provient du grec et signifie presser ou serrer. La première application de la piézoélectricité fut le sonar développé par Paul Langevin et ses collaborateurs pendant la première guerre mondiale. Peu de temps après, au début des années 1920, le premier oscillateur à quartz est mis au point par Walter Cady, ouvrant la voie de contrôle de fréquence ; Le succès de ces projets suscita un grand intérêt pour la

piézoélectricité, relança les recherches et conduisit à travers les années qui suivirent au développement de nouveaux dispositifs pour une large palette d'applications dans la vie quotidienne, l'industrie et la recherche.

Le comportement spontané dans plusieurs cristaux naturels ou synthétiques tels que le quartz ou le sel de Seignette, se manifeste à l'échelle de la maille cristalline : une action mécanique provoque l'apparition d'un dipôle électrique dans chaque maille du matériau par déplacement des centres des charges positives et négatives. C'est l'effet piézoélectrique direct. Réciproquement, l'application d'un champ électrique induit une déformation mécanique du matériau. C'est l'effet inverse (figure 1-12).

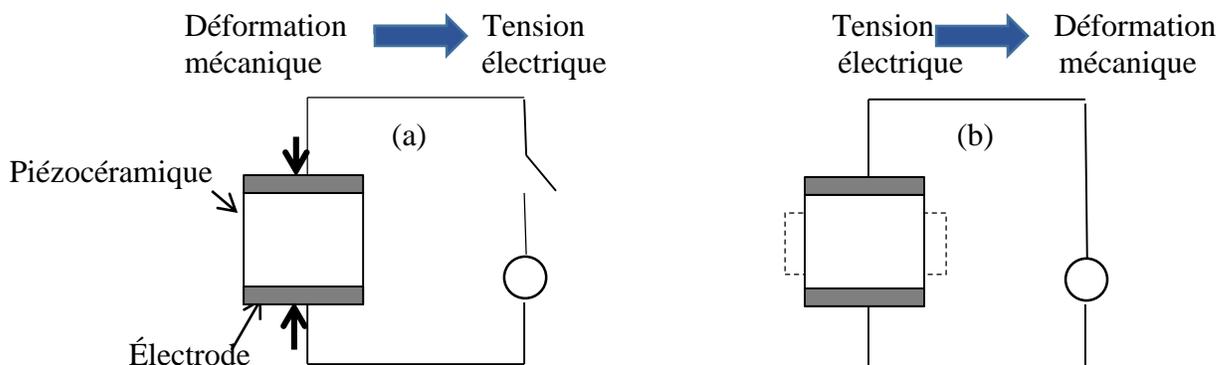


Figure 1.12. Effet piézoélectrique :(a) direct et (b) indirect.

2.1 Classes principales de matériaux piézoélectriques

Il existe quatre classes principales de matériaux piézoélectriques : les cristaux qui possèdent une piézoélectricité naturelle, les céramiques, les polymères et les composites qui doivent être polarisés [25]

- **Les cristaux** : Le cristal piézoélectrique le plus connu est le quartz, mais ses performances en vibration sont peu attrayantes pour les applications industrielles. D'autres matériaux, tels que le niobate de lithium (LiNbO_3) ou la tantalite de lithium (LiTaO_3), affichent des coefficients de couplage plus élevés. Toutefois, leur coût élevé et leur fragilité expliquent leur rare présence dans les produits actuels Harari [25].
- **Les céramiques** : Les premiers matériaux piézoélectriques de synthèse à base de Titanate de Baryum apparaissent après 1945. Zirconium Titanate de Plomb (PZT), élaborés dès 1945 se répandent très rapidement car leurs caractéristiques supplantent de loin celles de tous les autres matériaux piézoélectriques. Ils sont utilisés en contrôle actif

de structure en tant qu'actionneurs et capteurs ils peuvent intervenir dans la composition de matériaux composites actifs Bouzid [26].

- **Les polymères :** Certains polymères tels que le PVDF et des copolymères tels que le PVDF-TrFE peuvent acquérir des propriétés piézoélectriques. Ils possèdent une épaisseur pouvant être très faible et une grande flexibilité.
- **Les composites :** Ce sont des céramiques massives. Ces matériaux, d'abord développés pour des applications sonar, ont fait leur apparition au début des années 80 et représentent l'avancée majeure dans le domaine des matériaux piézoélectriques, depuis l'apparition des PZT dans les années 60 Bouzid [26].

2.2 Caractéristique des matériaux piézoélectriques

Un milieu cristallin étant constitué de particules électriquement chargées, l'apparition de charges de polarisation sous l'effet d'une déformation mécanique est donc prévisible. Les conditions de symétrie de l'édifice cristallin permettent de déterminer les arrangements atomiques susceptibles de produire un effet piézoélectrique.

Pour qu'un cristal présente cet effet, il ne doit pas posséder de centre de symétrie. Comme le montre la figure 1.13, parmi les 32 classes cristallines, 21 sont non Centro symétriques (dépourvues d'un centre d'inversion). 20 classes cristallines sont piézoélectriques : sous l'application d'une contrainte mécanique, le cristal se déforme, entraînant une séparation des centres de gravité des charges positives et négatives au sein de chaque maille du réseau cristallin. Cet effet génère un moment dipolaire. Parmi ces vingt classes, dix possèdent une polarisation spontanée en l'absence de champ électrique ou de contrainte extérieure. Les cristaux appartenant à ces dix classes sont dits pyroélectriques en raison de la variation de leur polarisation en fonction de la température.

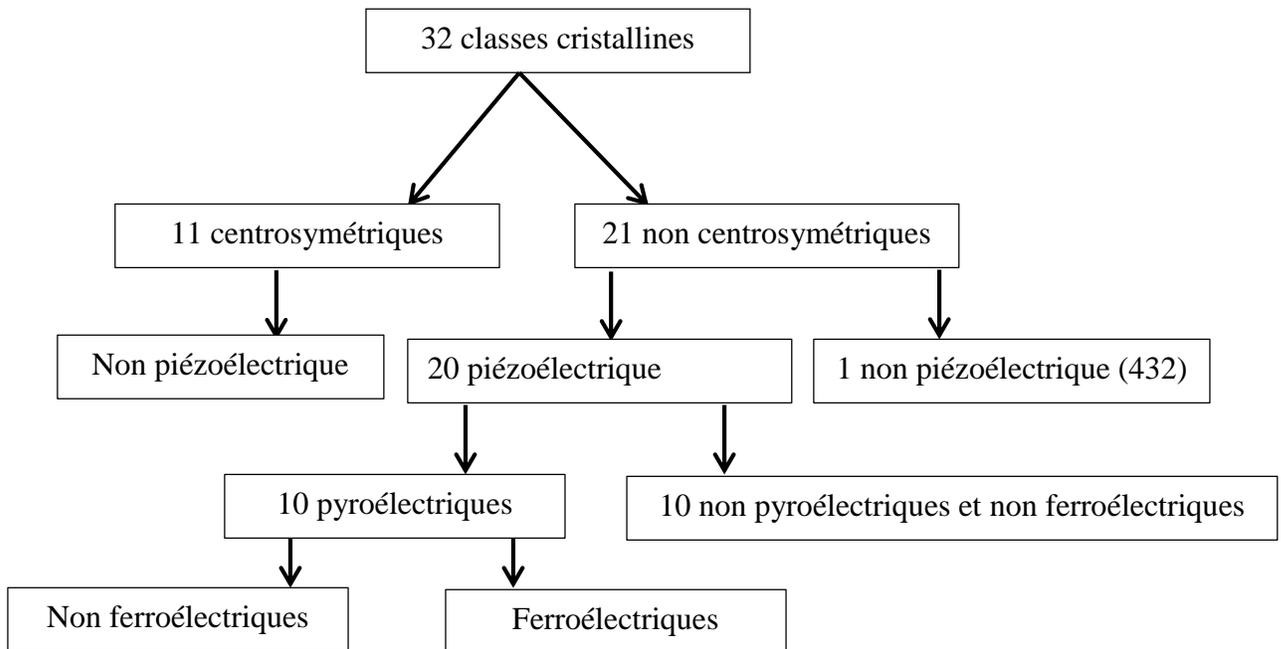


Figure 1.13. Répartition des classes cristallines selon certaines propriétés physiques du matériau.

2.3 Théorie des matériaux piézoélectriques

La piézoélectricité peut se définir comme un phénomène de couplage entre le domaine mécanique (énergie élastique) et le domaine électrique (énergie électrique). La différentielle exacte de l'énergie interne du système peut donc se mettre comme suit [25] :

$$U(\varepsilon, \vec{D}) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i \quad (1.9)$$

$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$: Energie élastique

$E_i dD_i$: Energie électrique

Les lois de comportement d'un matériau piézoélectrique traduisent les relations de couplage existant entre les grandeurs mécaniques (contraintes et déformations) et les grandeurs électriques (champs électriques et déplacements électriques). Ce couplage met en évidence la capacité du matériau à générer un champ électrique sous l'effet d'une sollicitation mécanique (effet direct), ou inversement, à se déformer sous l'action d'un champ électrique appliqué (effet inverse). Ce phénomène, par sa nature réversible, constitue un aspect fondamental du comportement piézoélectrique des matériaux [39] :

a) Effet direct de la piézoélectricité

$$\begin{aligned} \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} - [d]^T\{E\} \\ &= [e_{mf}]\{\varepsilon_{mf}\} + [e_c]\{\varepsilon_c\} - [d]^T\{E\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\text{Soit } \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

b) L'effet inverse de la piézoélectricité :

En négligeant l'effet du changement de température, on suppose que la dilatation thermique n'influence pas la déformation du matériau. Cela permet d'isoler uniquement l'effet électromécanique induit par la piézoélectricité, sans interférence d'autres phénomènes thermiques.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} \quad (1.12)$$

$$\text{Où } \{\sigma_{mf}\} = [C_{mf}]\{\varepsilon_{mf}\} - [e]^T\{E\} \quad (1.13)$$

$$\{\sigma_c\} = [C_c]\{\varepsilon_c\} - [e]^T\{E\} \quad (1.14)$$

Soit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

Avec $\{\sigma\}$ vecteur des contraintes

$\{\varepsilon\}$ Vecteur de déformation

$[C]$ Matrice du comportement élastique.

Le champ électrique est E est le gradient du potentiel électrique ϕ . Les relations entre le champ électrique E et le potentiel électrique ϕ sont définies :

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\phi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\phi}{dz} \quad (1.16)$$

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synoptique sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM et matériaux piézoélectriques. Un aperçu a été exposé sur le développement des FGMs et piézoélectriques, leurs concepts, leurs propriétés, leurs domaines d'applications et différentes lois de comportement.

CHAPITRE 2

THEORIE DES PLAQUES

Pour pouvoir étudier un comportement quel que soit statique ou dynamique des structures ayant comme éléments structuraux des poutres, des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de bien choisir la théorie adéquate qui peut décrire correctement leurs comportements vis-à-vis des charges mécanique, thermique on pourra ainsi résoudre les différents problèmes de structures. En général, le comportement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) plaques sous des chargements mécaniques peut être prédit en utilisant l'une des théories des plaques comme la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développé par Mindlin .Cette théorie prend en considération la déformation de cisaillement par la voie d'une variation linéaire et des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur, de ce fait un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque ; cela oblige l'introduction d'un facteur de correction ; pour les plaques homogènes le facteur de correction de CT généralement admis est $= 5/6$.

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur h petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

La théorie des plaques est basée sur [28] :

- La formulation est limitée au comportement de matériau élastique linéaire (petits déplacements et contraintes).
- L'hypothèse des sections droite : les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée reste droite et non perpendiculaire à la déformée.
- Cette formulation utilise l'hypothèse de Reissner/Mindlin (cinq variables cinématiques indépendantes (les déplacements de membrane u et v dans le plan de référence $z \equiv 0$, le déplacement transversal w et les rotations θ_x et θ_y de la normale a la surface moyenne dans le plan xz et yz respectivement).

1. Loi de comportement élastique

1.1 Le champ de déplacement

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement ; Le champ de déplacement en admettant la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) est défini [28] :

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z\beta_x \\ v &= v_0(x, y) + z\beta_y \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

u, v, w sont les déplacements en membrane suivant x, y, z et β_x et β_y les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x, y respectivement.

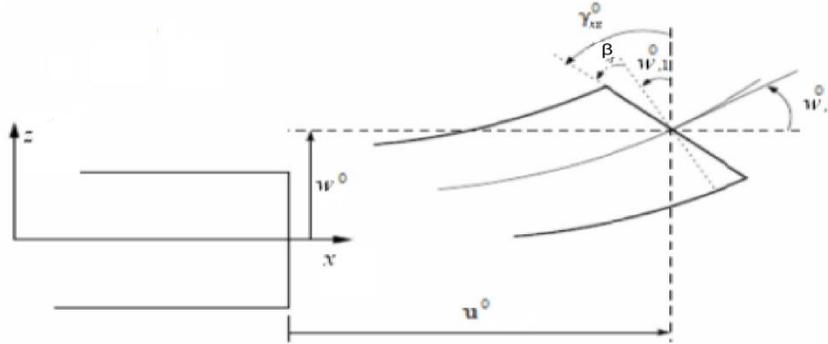


Fig. 2.1. Cinématique de Reissner- Mindlin [28].

Le champ déplacement peut être exprimé sous forme matricielle comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{Soit} \quad \{U\} = [L_t]\{u\} + [L_r]\{u\} \quad (2.3)$$

1.2 Relation déformations- déplacements

Les relations déformations - déplacements est [28] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{aligned}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\chi\} \quad (2.5)$$

Avec $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle$

$$\langle e \rangle = \langle u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x} \rangle$$

$$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle ; \langle \gamma \rangle = \langle \beta_x + w_{,x} \quad \beta_y + w_{,y} \rangle \quad (2.6)$$

Ou l'effet de membrane

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [B_m]\{u\} \quad (2.7)$$

L'effet de flexion

$$\{\chi\} = z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [B_f]\{u\} \quad (2.8)$$

L'effet de cisaillement

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [B_c]\{u\} \quad (2.9)$$

1.3 Relation contraintes-déformations

Pour un matériau dit élastique linéaire, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. La forme générale est comme suit :

$$\{\sigma\} = [C]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (2.10)$$

[C] Matrice de comportement

{σ} Tenseur des contraintes

{ε} Tenseur des déformations

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (2.12)$$

$$\gamma = \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (2.13)$$

L'équation (2.5) peut être écrite sous la forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Où $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composantes des contraintes et de déformations respectivement. En utilisant les caractéristiques des matériaux définies à l'équation (1.4), les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \nu Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (2.15)$$

En substituant l'équation (2.2) dans l'équation (2.10), les contraintes peuvent être

Exprimées en fonction des déplacements par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & z\partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & z\partial/\partial y \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 1 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & z\partial/\partial y & z\partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

La matrice du comportement matérielle $[C]$ peut être décrite comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_{mf} & H_f & 0 \\ 0 & 0 & H_c \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ou $H_m = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz$, $H_{mf} = \int_{-h/2}^{h/2} z Q_{ij} dz$, $H_f = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 Q_{ij} dz$, $i=1,2,6$

Et $H_c = k \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz$, $i=4,5$ (2.18)

Ce coefficient k est généralement pris égal à 5/6 ; L'objectif de l'utilisation du facteur de correction de cisaillement est d'améliorer la précision de l'estimation de la contrainte de cisaillement dans l'analyse de la plaque. Les lettres d'indice m , mf , f et c désignent respectivement membrane, couplage de membrane /flexion, flexion et cisaillement.

Le modèle d'éléments finis utilisé dans cette analyse emploie un élément isoparamétrique à neuf nœuds ; A chaque nœud, il y a cinq degrés de liberté, constitués de trois déplacements u, v, w et de deux rotations β_x, β_y de la normale transversale autour des axes x et y , respectivement. Les déformations de la plaque incluent $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ et γ_{yz} , qui représentent respectivement la déformation axiale dans la direction x , la déformation axiale dans la direction y et la déformation de cisaillement transverse.

1.4 Relations efforts résultants –déformations

Les efforts résultants sont [28] :

$$\begin{aligned} \text{Membrane } \{N\} &= \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= [H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Flexion } \{M\} &= \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ &= [H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Cisaillement } \{T\} &= \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \\ &= [H_c]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La loi constitutive peut être décrite :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_{mf} & H_f & 0 \\ 0 & 0 & H_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

2. Fonctionnelle de Hamilton

Selon le principe de Hamilton, le mouvement réel d'une plaque est celui qui rend stationnaire la fonctionnelle de Hamilton H suivante [30-39-41] :

$$H = \delta \int_{-t}^t (E_c - E_p + W) dt = 0 \quad (2.23)$$

2.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique est définie comme suit :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_V \langle \dot{U} \rangle \{ \dot{U} \} dV \quad (2.24)$$

En substituant l'expression matricielle du champ déplacements (2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \rho \int_V \langle \dot{u} \rangle ([L_t]^t - z[L_r]^t)([L_t] - z[L_r]) \{ \dot{u} \} dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_V \langle \dot{u} \rangle ([L_t]^t [L_t] - z([L_t]^t [L_r] + [L_r]^t [L_t]) + z^2 [L_r] [L_r]^t) \{ \dot{u} \} dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{Soit} \quad E_c = \frac{1}{2} \int_S \langle \dot{u} \rangle [m_f] \{ \dot{u} \} dS \quad (2.26)$$

$$\text{Où} \quad [m_f] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\text{Avec} \quad (I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \quad (2.28)$$

2.2 Energie potentielle

Pour un milieu continu élastique, l'énergie potentiel E_p correspond à l'énergie de déformation qui est définie :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_V \langle \bar{\varepsilon} \rangle \{ \sigma \} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [\sigma] + \langle \gamma \rangle \{ \tau \} dV \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pour le cas d'une plaque de Mindlin, l'énergie de déformation peut être décomposé en quatre composantes

$$E_p = V_m + V_{mf} + V_f + V_c \quad (2.30)$$

En intégrant l'énergie potentiel dans la direction z de $(-h/2, h/2)$; nous obtenons l'expression de l'énergie de déformation

- Effet de membrane

A partir du vecteur de déformation (2.5) et des lois de comportement (2.7) et (2.14), l'énergie de déformation due à l'effet de membrane :

$$V_m = \frac{1}{2} \int_S \langle e \rangle [H_m] \{ e \} ds \quad (2.31)$$

- Effet de couplage membrane-flexion

$$V_{mf} = \frac{1}{2} \int_S (\langle e \rangle [H_{mf}] \{ \chi \} + \langle \chi \rangle [H_{mf}] \{ e \}) ds \quad (2.32)$$

- Effet de flexion

$$V_f = \frac{1}{2} \int_S \langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \} ds \quad (2.33)$$

- Effet de cisaillement

$$V_c = \frac{1}{2} \int_S \langle \gamma \rangle [H_c] \{ \gamma \} ds \quad (2.34)$$

Finalement, nous obtenons l'expression de l'énergie de déformation de la plaque Mindlin :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_S (\langle e \rangle [H_m] \{e\} + \langle e \rangle [H_{mf}] \{\chi\} + \langle \chi \rangle [H_{mf}] \{e\} + \langle \chi \rangle [H_f] \{\chi\} + \langle \gamma \rangle [H_c] \{\gamma\}) dS \quad (2.35)$$

2.3 Travail

Pour un milieu continu élastique, le travail fait par les efforts externes W est défini comme suit :

$$W = \int_V \langle u \rangle \{F\} dV + \int_S \langle u \rangle \{f\} dS + \langle u \rangle \{P\} \quad (2.36)$$

Où F , f et P sont des forces volumiques, surfaciques et ponctuelle.

3. Approche local- théorie des plaques FGM

La loi de puissance utilisé pour le calcul des propriétés matérielles est (P-FGM) ou le coefficient de poisson ν est considéré constant et coefficient de Hook $E(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ sont variables suivant l'épaisseur.

En intégrant les expressions (2.18) selon l'épaisseur z ($-\frac{h_f}{2}, \frac{h_f}{2}$) de la plaque FGM, on résulte :

$$\text{Membrane} \quad H_m = h_f \frac{(E_m + \frac{(E_c - E_m)}{\alpha + 1})}{1 - \nu^2} = h_f C_m \quad (2.37)$$

$$\text{Couplage membrane /flexion} \quad H_{mf} = \frac{h_f^2 (E_c - E_m) \frac{\alpha \nu}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}}{1 - \nu^2} = \frac{h_f^2}{2} C_{mf} \quad (2.38)$$

$$\text{Flexion} \quad H_f = \frac{h_f^3 (E_m + 3(E_c - E_m) \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)})}{12(1 + \nu)} = \frac{h_f^3}{12} C_f \quad (2.39)$$

$$\text{Cisaillement} \quad H_c = h_f k \frac{(E_m + \frac{(E_c - E_m)}{\alpha + 1})}{2(1 + \nu)} = h_f C_c \quad (2.40)$$

4. Approche local- théorie des plaques piézoélectriques

Afin de traiter des problèmes des plaques piézoélectriques, des hypothèses ont été imposé pour simplifier les équations tridimensionnelles de la piézoélectricité linéaire. En plus de l'hypothèse de plaque de Mindlin pour la composante élastique, une hypothèses du champ électrique unidirectionnel ($E_x = E_y = 0$) a été imposée pour la composante électrique.

4.1 Champ électrique

Le potentiel électrique ϕ est défini linéaire dans la direction de l'épaisseur et constant sur le plan xy de la couche piézoélectrique. Cette hypothèse est valide étant donné que l'épaisseur des couches piézoélectriques est faible comparativement à l'épaisseur des autres couches.

$$E_z = -\frac{\phi}{h_p} \quad (2.41)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{h_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \emptyset \end{Bmatrix} = [D_\emptyset] \{\emptyset\} \quad (2.42)$$

Etant donné que la valeur de la tension est constante sur la surface de chacune du capteur et actionneur, un seul degré de liberté par couche est suffisant pour modéliser le potentiel électrique.

4.1. Energie cinétique

La composante électrique d'un matériau piézoélectrique ne contribue pas à l'énergie cinétique. Par conséquent, l'énergie cinétique E_c est la même que celle présentée à la section précédente 2.1 soit :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s \langle \dot{u} \rangle [M_e] \{ \dot{u} \} ds \quad (2.43)$$

Ou

$$[M_e] = \rho_p \begin{bmatrix} h_p & 0 & 0 & \frac{h_p^2}{2} & 0 \\ 0 & h_p & 0 & 0 & \frac{h_p^2}{2} \\ 0 & 0 & h_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

4.2 Energie potentielle

Pour un milieu continu piézoélectrique, l'énergie potentielle E_p comporte deux composantes :

Une composante élastique et un composante électrique :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V \langle \bar{\varepsilon} \rangle \{ \sigma \} dV - \frac{1}{2} \int_V \langle D \rangle \{ E \} dV \quad (2.45)$$

A partir des lois de comportement d'un matériau piézoélectrique (2.2) et (2.4), l'expression de l'énergie potentielle s'écrit comme suit :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V \langle \bar{\varepsilon} \rangle [C] \{ \bar{\varepsilon} \} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle [e]^t \{ E \} - \langle E \rangle [e] \{ \bar{\varepsilon} \} - \langle E \rangle [d]^t \{ E \} dV \quad (2.46)$$

Soit $E_p = V_{\text{élastique}} + V_{\text{piézoélectrique}} + V_{\text{diélectrique}}$ (2.47)

a) Energie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique est définie comme suit :

$$V_{élastique} = \frac{1}{2} \int_V \langle \bar{\epsilon} \rangle [C] \{ \bar{\epsilon} \} dV \quad (2.48)$$

En utilisant les vecteurs de déformations due à l'effet de membrane, à la flexion, au couplage membrane-flexion et au cisaillement (section précédente 2.2), nous pouvons détailler l'expression de l'énergie potentielle élastique :

$$V_{élastique} = \frac{1}{2} \int_S (\langle e \rangle [H_m] \{ e \} + \langle e \rangle [H_{mf}] \{ \chi \} + \langle \chi \rangle [H_{mf}] \{ e \} + \langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \} + \langle \gamma \rangle [H_c] \{ \gamma \}) ds \quad (2.49)$$

Avec ;

$$\text{Membrane} \quad H_m = \sum_{i=1}^2 i h_p \frac{E}{1-\nu^2} = \sum_{i=1}^2 i h_p C_{mp} \quad (2.50)$$

$$\text{Couplage membrane/flexion} \quad H_{mf} = \sum_{i=1}^2 i \frac{h_p^2}{2} \frac{E}{1-\nu^2} = \sum_{i=1}^2 i \frac{h_p^2}{2} C_{mfp} \quad (2.51)$$

$$\text{Flexion} \quad H_f = \sum_{i=1}^2 i \frac{h_p^3}{12} \frac{E}{2(1+\nu)} = \sum_{i=1}^2 i \frac{h_p^3}{12} C_{fp} \quad (2.52)$$

$$\text{Cisaillement} \quad H_c = \sum_{i=1}^2 i k h_p \frac{E}{2(1+\nu)} = \sum_{i=1}^2 i h_p C_{cp} \quad (2.53)$$

Où E module de Young de la couche piézoélectrique.

b) Energie potentielle piézoélectrique

L'énergie potentielle piézoélectrique est défini comme suit :

$$V_{piézoélectrique} = -\frac{1}{2} \int_V \langle \bar{\epsilon} \rangle [e]^t \{ E \} + \langle E \rangle [e] \{ \bar{\epsilon} \} dV \quad (2.54)$$

Sachant que l'énergie potentielle piézoélectrique due au cisaillement est nulle étant donné que $E_x = 0$, l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique est décrite comme suit :

$$V_{piézoélectrique} = -\frac{1}{2} \int_S \langle e \rangle [e_{mf}]^t \{ E \} + \langle \chi \rangle [e_{mf}]^t \{ E \} + \langle E \rangle [e_{mf}]^t \{ e \} + \langle E \rangle [e_{mf}]^t \{ \chi \} ds \quad (2.55)$$

c) Energie potentielle diélectrique

L'énergie potentielle diélectrique est comme suit :

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2} \int_V \langle E \rangle [d]^t \{ E \} dV \quad (2.56)$$

En intégrant l'énergie potentiel diélectrique dans la direction z ($-\frac{h_p}{2}, \frac{h_p}{2}$), nous obtenons :

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2} h_p \int_S \langle E \rangle [d]^t \{ E \} ds \quad (2.57)$$

Où h_p est l'épaisseur de la couche piézoélectrique.

4.3 Travail

Le travail fait par les efforts externes sur une plaque piézoélectrique peut être de nature mécanique, s'il est fait par une force mécanique, et/ou de nature électrique, s'il est fait par une charge électrique.

$$W = W_{méc} + W_{éle} \quad (2.58)$$

a) Travail mécanique

Pour un milieu continu piézoélectrique, le travail mécanique $W_{méc}$ est comme suit :

$$W_{méc} = \int_V \langle u \rangle \{F\} dV + \int_S \langle u \rangle \{f\} dS + \langle u \rangle \{P\} \quad (2.59)$$

En intégrant la composante volumique du travail mécanique dans la direction z ($-\frac{h_p}{2}, \frac{h_p}{2}$)

nous obtenons :

$$W_{méc} = \int_S (h_p \langle u \rangle \{F\} + \langle u \rangle \{f\}) dS + \langle u \rangle \{P\} \quad (2.60)$$

Ou $\langle u \rangle$ transposé du vecteur déplacement

$\{F\}$ Force volumique

$\{f\}$ Force surfacique

$\{P\}$ Force ponctuelle

b) Travail électrique

Pour un milieu continu piézoélectrique, le travail électrique $W_{élec}$ est comme suit :

$$W_{élec} = - \int_S \langle \phi \rangle \{D\} ds \quad (2.61)$$

Ou $\langle \phi \rangle$ transposé du vecteur potentiel électrique

$\{D\}$ Charge électrique surfacique.

Un rappel sur la théorie des plaques a été fait pour pouvoir modéliser le comportement linéaire des plaques en FGM et les couches piézoélectriques. La théorie utilisée tient compte aux effet de cisaillement du premier degré (théorie de Reissner/Mindlin). Les relations obtenues seront reprises lors du développement de la formulation rationnelle d'une plaque en matériau fonctionnellement gradué FGM et piézoélectrique.

CHAPITRE 3

MODELISATION PAR ELEMENT FINIS

En analyse numérique, la méthode des éléments finis (MEF) est utilisée pour la modélisation des structures en les discrétisant en un nombre fini d'éléments interconnectés par des nœuds et résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles.

Un élément fini quadrilatère à 9 nœuds sera développé. Dans un premier temps, les fonctions d'interpolation utilisées pour discrétiser le milieu seront présentées. Par la suite on propose une discrétisation pour l'élément Q9 γ en intégrant de nouveaux champs de cisaillement. Les expressions des termes énergétiques contenus dans le principe de Hamilton seront approximées à partir des fonctions d'interpolation ; les matrices élémentaires, telles que la matrice de rigidité, la matrice de masse et le vecteur des forces nodales seront obtenues.

1. Discrétisation de la géométrie

1.1 Fonctions d'interpolations

La solution par éléments finis de la plaque FGM peut être obtenue en divisant le domaine borné Ω en N éléments finis et satisfait les conditions et où $m \neq n$. Les déplacements mécaniques peuvent être approximés comme suit :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \{u_i\} = [N_u] \{u_i\} \quad (3.1)$$

Où N_i , u_i sont des fonctions d'interpolations et des vecteurs de déplacements nodaux respectivement.

Dans cette étude on utilise un élément de plaque isoparamétrique quadrilatère à neuf nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud ($u, v, w, \beta_x, \beta_y$) dont les fonctions de forme sont définis comme suit :

Nœuds d'interfaces : $N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i$, $\xi_i = 0$ et $\eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)\xi\xi_i, \xi_i = \pm 1 \text{ et } \eta_i = 0 \quad (3.2)$$

Nœuds des sommets : $N_i = \frac{1}{4}(1 + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)\xi\eta, \xi_i = \pm 1$ et $\eta_i = \pm 1$ (3.3)

Nœud du centre : $N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$, $\xi_i = 0$ et $\eta_i = 0$ (3.4)

La relation permettant d'obtenir les dérivées d'une fonction quelconque $\{u\}$ par rapport aux coordonnées réel (x, y) en fonction des dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes (ξ, η) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Soit,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Avec $[J]$ est la matrice jacobéenne.

Si $d\Omega$ est un élément du surface dans l'espace réel (x,y) alors on peut évaluer $d\Omega$ en fonction (ξ, η) de la façon suivante :

$$d\Omega = dx dy = [J] d\xi d\eta \quad (3.7)$$

Pour la partie piézoélectrique étant donné que le potentiel électrique constant sur la surface piézoélectrique, l'approximation nodale du potentiel électrique $\{\phi\}$ est :

$$\begin{aligned} \{\phi\} &= [N_\phi] \{\phi_i\} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{i=n} \begin{bmatrix} N_{\phi i} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\phi i} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\phi i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ou $\{\phi_i\}$ vecteur des potentiels électriques nodaux.

$[N_i]$ Matrice d'interpolation des potentiels électriques.

1.2 Formulation théorique avec représentation particulières du CT pour FGM plaque (Q9 γ)

Les difficultés rencontrées pour obtenir des éléments finis avec CT, ayant un nombre réduit de nœuds et de variables nodales, ont conduit plusieurs chercheurs à formuler des éléments très satisfaisants (sans mode parasite et blocage en CT).

La théorie Q9 γ est une version améliorée de la théorie standard de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT) couramment utilisée dans l'analyse des plaques. Elle étend les hypothèses FSDT en introduisant de nouveaux champs de déformations de cisaillement, notés γ_{xz} et γ_{yz} . En incorporant ces champs de déformation de cisaillement supplémentaires, la théorie Q9 γ fournit une représentation plus précise de la déformation par cisaillement transversal dans les plaques. Ceci est particulièrement avantageux pour les structures présentant une charge non uniforme ou une épaisseur importante.

Par rapport au FSDT standard, la théorie Q9 γ ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et surmonte ses limites en prenant en compte un comportement de déformation en cisaillement plus complexe. En conséquence, cela permet des prédictions plus précises des réponses et des comportements structurels. Les expressions spécifiques des nouveaux champs de déformation de cisaillement dans la théorie Q9 γ peuvent être trouvées dans la référence [28], qui propose un cadre mathématique pour la formulation et l'application de la théorie.

a) Élément à neuf nœuds avec CT constant par coté (Q9 γ)

Considérons un élément quadrilatère à 9 nœuds avec une approximation bilinéaire de la géométrie (x, y) et de w, β_x, β_y .

$$\{\gamma_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,\xi} + \beta_\xi \\ w_{,\eta} + \beta_\eta \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\langle u \rangle = \langle \dots w_i \beta_{xi} \beta_{yi} \dots \rangle, \quad i=1,9 \quad (3.10)$$

$$\text{Où} \quad [B_\xi] = \begin{bmatrix} \dots & N_{i,\xi} & \xi_i N_{i,\xi} J_{11} & \xi_i N_{i,\xi} J_{12} & \dots \\ \dots & N_{i,\eta} & \eta_i N_{i,\eta} J_{21} & \eta_i N_{i,\eta} J_{22} & \dots \end{bmatrix} \quad \xi_i, \eta_i = \mp 1 \quad (3.11)$$

$$\text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \beta_{\xi i} \\ \beta_{\eta i} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

D'où finalement :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \{\gamma_\xi\} = [B_c] \{u_n\} \quad (3.13)$$

Avec,

$$[B_c] = [J]^{-1} [B_\xi] \quad (3.14)$$

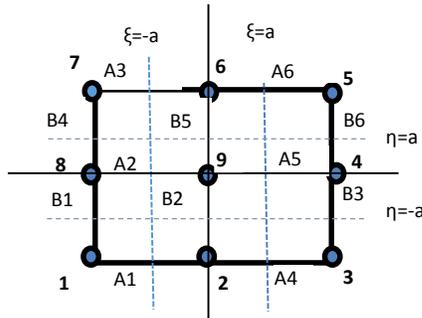


Figure 3.1. Élément isoparamétrique quadratique à 9 nœuds.

$$\gamma_{\xi z} = (N_1 \gamma_\xi^{A1} + N_2 \gamma_\xi^{A4}) \frac{1}{2} \eta (1 - \eta) + (N_1 \gamma_\xi^{A2} + N_2 \gamma_\xi^{A5}) (1 - \eta^2) + (N_1 \gamma_\xi^{A3} + N_2 \gamma_\xi^{A6}) \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) \quad (3.15)$$

$$\gamma_{\eta z} = (N_1 \gamma_{\eta}^{B1} + N_2 \gamma_{\eta}^{B4}) \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) + (N_1 \gamma_{\eta}^{B2} + N_2 \gamma_{\eta}^{B5}) (1 - \xi^2) + (N_1 \gamma_{\eta}^{B3} + N_2 \gamma_{\eta}^{B6}) \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (3.16)$$

$$\text{Où} \quad N_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right), \quad N_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi}{a}\right), \quad a = 1/\sqrt{3} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Et} \quad \gamma_{\xi}^{A1} = \gamma_{\xi}^{A4} = \sum_{i=1,2,3} (\bar{N}_{i,\xi} w_i + \bar{N}_i \beta_{\xi i}) \quad , \quad \gamma_{\eta}^{B1} = \gamma_{\eta}^{B4} = \sum_{i=1,8,7} (\bar{N}_{i,\eta} w_i + \bar{N}_i \beta_{\eta i}) \\ \gamma_{\xi}^{A2} = \gamma_{\xi}^{A5} = \sum_{i=8,9,4} (\bar{N}_{i,\xi} w_i + \bar{N}_i \beta_{\xi i}) \quad , \quad \gamma_{\eta}^{B2} = \gamma_{\eta}^{B5} = \sum_{i=2,9,6} (\bar{N}_{i,\eta} w_i + \bar{N}_i \beta_{\eta i}) \\ \gamma_{\xi}^{A3} = \gamma_{\xi}^{A6} = \sum_{i=7,6,5} (\bar{N}_{i,\xi} w_i + \bar{N}_i \beta_{\xi i}) \quad , \quad \gamma_{\eta}^{B3} = \gamma_{\eta}^{B6} = \sum_{i=3,4,5} (\bar{N}_{i,\eta} w_i + \bar{N}_i \beta_{\eta i}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où

Pour $\gamma_{\xi z}$: aux points A1 à A3 ($\xi = -a$ et $\eta = -1, 0, 1$)

Aux points A4 à A6 ($\xi = a$ et $\eta = -1, 0, 1$)

Pour $\gamma_{\eta z}$: aux points B1 à B3 ($\eta = -a$ et $\xi = -1, 0, 1$)

Aux points B4 à B6 ($\eta = a$ et $\xi = -1, 0, 1$)

Pour $\xi = -a$ et \bar{N}_i quadratique en ξ :

$$[\bar{N}] = \left[-\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \quad 1 - \xi^2 \quad \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \right] \quad (3.19)$$

En plus ,pour $\eta = -a$ and \bar{N}_i quadratique en η :

$$[\bar{N}] = \left[-\frac{1}{2} \eta (1 - \eta) \quad 1 - \eta^2 \quad \frac{1}{2} \eta (1 + \eta) \right] \quad (3.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_{c1}] & 0 \\ 0 & [N_{c2}] \end{bmatrix} [D_c] \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{\xi i} \\ \beta_{\eta i} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[N_{c1}] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} N_1 \eta (1 - \eta) & N_1 (1 - \eta^2) & \frac{1}{2} N_1 \eta (1 + \eta) & \frac{-1}{2} N_2 \eta (1 - \eta) & N_2 (1 - \eta^2) & \frac{1}{2} N_2 \eta (1 + \eta) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$[N_{c2}] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} N_1 \xi (1 - \xi) & N_1 (1 - \xi^2) & \frac{1}{2} N_1 \xi (1 + \xi) & \frac{-1}{2} N_2 \xi (1 - \xi) & N_2 (1 - \xi^2) & \frac{1}{2} N_2 \xi (1 + \xi) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[D_c] = \begin{bmatrix} \bar{N}_{,\xi i} & \bar{N}_i & 0 \\ \bar{N}_{,\eta i} & 0 & \bar{N}_i \end{bmatrix} \quad i=1, 9 \quad (3.24)$$

L'intégration numérique des matrices $[K_f]$ et $[K_c]$ est effectuée avec un schéma de Gauss 3x3

2. Approximation de la solution

Dans cette section, nous introduisons les expressions d'interpolation nodales dans chacune des expressions des composantes énergétiques ; de cette manière nous obtiendrons des expressions énergétiques approximatives et discrètes.

2.1. Energie cinétique

On reprend l'expression de l'énergie (2.24), et en substituant le dérivé de l'équation (3.1), on obtient :

$$\{\dot{u}\} = [N_u]\{\dot{u}_i\} \quad (3.25)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_S \langle \dot{u} \rangle [M_e] \{\dot{u}\} dS = \frac{1}{2} \int_S \langle \dot{u}_i \rangle [N_u]^t [M_e] [N_u] \{\dot{u}_i\} ds \quad (3.26)$$

2.2. Energie potentielle

Pour une plaque de matériaux fonctionnels Intégré aux couches piézoélectriques, l'énergie potentielle est composée de trois composants l'équation (2.46) :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V \langle \bar{\epsilon} \rangle [C] \{\bar{\epsilon}\} - \langle \bar{\epsilon} \rangle [C]^t \{E\} - \langle E \rangle [C] \{\bar{\epsilon}\} - \langle E \rangle [d]^t \{E\} dV \quad (3.27)$$

$$E_p = V_{élastique} + V_{piézoélectrique} + V_{diélectrique} \quad (3.28)$$

a) Energie potentielle élastique

A partir de l'équation (2.49), et en substituant les expressions des approximations (3.1), (2.7), (2.8) et (2.9)

$$\begin{aligned} V_{élastique} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_S (\langle e \rangle [H_m] \{e\} + \langle e \rangle [H_{mf}] \{\chi\} + \langle \chi \rangle [H_{mf}] \{e\} + \langle \chi \rangle [H_f] \{\chi\} + \langle \gamma \rangle [H_c] \{\gamma\}) ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_S (\langle u_i \rangle [N_u]^t [B_m]^t [H_m] [B_m] [N_u] \{u_i\} + \langle u_i \rangle [N_u]^t [B_f]^t [H_f] [B_f] [N_u] \{u_i\} + \\ &\quad \langle u_i \rangle [N_u]^t [B_f]^t [H_{mf}] [B_m] [N_u] \{u_i\} + \langle u_i \rangle [N_u]^t [B_m]^t [H_{mf}] [B_f] [N_u] \{u_i\} + \\ &\quad \langle u_i \rangle [N_u]^t [B_c]^t [H_c] [B_c] [N_u] \{u_i\}) ds \end{aligned} \quad (3.29)$$

b) Energie potentielle piézoélectrique

A partir de l'équation (2.51), et en substituant les expressions des approximations (2.42), (3.1) et (3.8).

$$\begin{aligned}
V_{\text{piézoélectrique}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_S h_{pi} (\langle u_i \rangle [N_u]^t [B_m]^t [e_{mf}]^t [D_\emptyset] [N_\phi] \{\emptyset_i\} + \\
& \langle u_i \rangle [N_u]^t [B_f]^t [e_{mf}]^t [D_\emptyset] [N_\phi] \{\emptyset_i\} + \\
& \langle \emptyset_i \rangle [D_\emptyset]^t [N_\phi]^t [e_{mf}]^t [B_m] [N_u] \{u_i\} + \\
& \langle \emptyset_i \rangle [D_\emptyset]^t [N_\phi]^t [e_{mf}]^t [B_f] [N_u] \{u_i\}) ds \quad (3.30)
\end{aligned}$$

c) Energie potentielle diélectrique

En utilisant l'équation (2.53), et en substituant les expressions de l'équation (2.42) et (3.8) :

$$V_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_S h_{pi} \langle \emptyset_i \rangle [D_\emptyset]^t [N_\phi]^t [d]^t [D_\emptyset] [N_\phi] \{\emptyset_i\} ds \quad (3.31)$$

2.3. Travail

Le travail sur une plaque fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques est compose de travail mécanique et/ou électrique.

a) Travail mécanique

L'expression du travail mécanique fait sur une plaque fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques pour un milieu continu

$$\begin{aligned}
W_{\text{mec}} = & \sum_{i=1}^n \int_S ((h_f + ih_{pi}) \langle u \rangle \{F\} + \langle u \rangle \{f\}) ds + \langle u \rangle \{P\} \\
= & \sum_{i=1}^n \int_S ((h_f + ih_{pi}) \langle u_i \rangle [N_u]^t \{F\} + \langle u_i \rangle [N_u]^t \{f\}) ds + \langle u_i \rangle [N_u]^t \{P\} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

h_i Epaisseur de chaque couche i .

b) Travail électrique

L'expression du travail électrique fait sur une plaque fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques (chapitre 2 - section 2.3) pour un milieu continu

$$\begin{aligned}
W_{\text{elec}} = & - \int_S \langle \emptyset \rangle \{D_\emptyset\} ds \\
= & - \int_S \langle \emptyset \rangle [N_\emptyset]^t \{D_\emptyset\} ds \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Finalement en combinant les expressions du travail mécanique et électrique, nous obtenons l'expression discrète complète du travail fait sur une plaque fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques.

$$W = \sum_{i=1}^n \int_S \left((h_f + ih_{pi}) \langle u_i \rangle [N_u]^t \{F\} + \langle u_i \rangle [N_u]^t \{f\} \right) - \langle \emptyset \rangle [N_\emptyset]^t \{D\} ds + \langle u_i \rangle [N_u]^t \{P\} \quad (3.34)$$

3. Plaque a matériau fonctionnellement gradué avec des couches piézoélectriques (PFGM)

Nous reprendrons les expressions discrètes des énergies cinétiques, potentielles et du travail

Fait par les efforts externes pour déterminer l'expression des matrices de masse et de rigidité et du vecteur des efforts externes.

En intégrant dans l'intervalle $\left(\frac{-h_f}{2}, \frac{h_f}{2}\right)$ pour l'âme (FGM), et pour les couches piézoélectriques inférieure et supérieure dans l'intervalle $\left(\frac{-h_f}{2} - h_p, \frac{-h_f}{2}\right)$ et $\left(\frac{h_f}{2}, \frac{h_f}{2} + h_p\right)$ respectivement, on obtient :

3.1. Matrice de masse élémentaire

L'expression de l'énergie cinétique de la relation (3.26) est définie :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s \langle \dot{u} \rangle [M_e] \{ \dot{u} \} ds = \frac{1}{2} \int_s \langle \dot{u}_i \rangle [N_u]^t [M_e] [N_u] \{ \dot{u}_i \} ds \quad (3.35)$$

$$\text{Ou} \quad [M_e] = \int_s [N_u]^t [M_e] [N_u] ds \quad (3.36)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$m_1 = \sum_{i=1}^2 i h_p \rho_p + h_f \left(\rho_m + \frac{(\rho_c - \rho_m)}{\alpha + 1} \right)$$

$$m_2 = \frac{h_f^2}{2} (\rho_c - \rho_m) \frac{\alpha}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$$

$$m_3 = \sum_{i=1}^2 \frac{i}{3} \left(\left(\frac{h_f}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_f}{2} \right)^3 \right) \rho_p + \frac{h_f^3}{12} (\rho_m + 3(\rho_c - \rho_m) \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)})$$

3.2. Matrice de rigidité élémentaire

a) Rigidité élastique

L'expression de l'énergie potentielle de la relation (3.29) peut être définie :

$$V_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \langle u \rangle [K_{uu}] \{ u \} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Où} \quad [K_{uu}] &= \int_s [N_u]^t [B_m]^t [H_m] [B_m] [N_u] ds \\ &+ \int_s [N_u]^t [B_f]^t [H_f] [B_f] [N_u] ds \\ &+ \int_s [N_u]^t [B_m]^t [H_{mf}] [B_f] [N_u] ds \\ &+ \int_s [N_u]^t [B_f]^t [H_{mf}] [B_m] [N_u] ds \\ &+ \int_s [N_u]^t [B_c]^t [H_c] [B_c] [N_u] ds \end{aligned} \quad (3.39)$$

Où $[K_{uu}]$ Est la composante de la matrice de rigidité élémentaire due à l'élasticité.

b) Rigidité piézoélectrique

L'expression de l'énergie piézoélectrique de la relation (3.30) peut être exprimée :

$$V_{piézoélectrique} = -\frac{1}{2}\{u\}^t [K]_{u\emptyset} \{\emptyset\} + \frac{1}{2}\{\emptyset\}^t [K]_{\emptyset u} \{u\} \quad (3.40)$$

Par identification, on a

$$\begin{aligned} [K]_{u\emptyset} &= -\sum_{i=1}^2 ih_p \int_s [N_u]^t [B_m]^t [e_{mf}] [B_\emptyset] [N_\emptyset] ds \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \frac{i}{2} \left(\left(\frac{h_f}{2} - h_p \right)^2 - \left(\frac{h_f}{2} \right)^2 \right) \int_s [N_u]^t [B_f]^t [e_{mf}] [B_\emptyset] [N_\emptyset] ds \\ &= [K]_{\emptyset u}^t \end{aligned} \quad (3.41)$$

Où $[K]_{u\emptyset}$, $[K]_{\emptyset u}$ sont les composantes des matrices de rigidité élémentaires due au couplage piézo-mécanique.

c) Rigidité diélectrique

L'expression de l'énergie piézoélectrique de la relation (3.31) est exprimée :

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2}\langle \emptyset \rangle [K_{\emptyset\emptyset}] \{\emptyset\} \quad (3.42)$$

Où

$$[K_{\emptyset\emptyset}] = -\sum_{i=1}^n \int_s h_p [D_\emptyset]^t [N_\emptyset]^t [d]^t [D_\emptyset] [N_\emptyset] dS \quad (3.43)$$

$[K_{\emptyset\emptyset}]$ Est la composante de la matrice de rigidité élémentaire due à la diélectricité.

Finalement en combinant chacune des composantes de la matrice de rigidité, nous obtenons une matrice de rigidité élémentaire construite sous forme suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\emptyset} \\ K_{\emptyset u} & K_{\emptyset\emptyset} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Chaque terme des matrices élémentaires fait objet d'une intégration numérique ou quadrature de Gauss [28].

3.3. Amortissement

En génie des structures et en mécanique, les systèmes subissent des vibrations après avoir été soumis à des forces ou à des perturbations extérieures. Ces vibrations peuvent persister même après la suppression des forces externes, en raison de l'énergie stockée dans le système. L'amortissement Rayleigh permet de prendre en compte la dissipation d'énergie au sein de la structure, conduisant à une représentation plus précise de son comportement dynamique

L'amortissement proportionnel dit l'amortissement Rayleigh est généralement représenté par une combinaison linéaire de matrices de masse et de rigidité. Mathématiquement,

cela peut s'exprimer comme suit [29] :

$$[C]_a = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.45)$$

Où

$[C]_a$ Matrice d'amortissement

$[M]$ Matrice de masse

$[K]$ Matrice de rigidité

α et β sont des constants (coefficient de Rayleigh).

Pour les structures présentant un grand nombre de degrés de liberté, seuls les premiers modes influencent de manière significative le comportement dynamique. Il est désormais possible d'évaluer le nombre de modes contribuant de façon notable à la réponse globale. Toutefois, dans la plupart des ouvrages d'art [29-41], le nombre de modes significatifs mobilisant environ 95 % de la masse varie généralement entre un minimum de 3 et un maximum d'environ 25.

Sur la base d'une solution à valeurs propres et d'un résultat modal de participation de masse, on peut identifier les modes significatifs (= m). [29]

$$\text{Soit} \quad \beta = \frac{2\zeta_1\omega_1 - 2\zeta_m\omega_m}{\omega_1^2 - \omega_m^2} \quad (3.46)$$

$$\text{Et} \quad 2\zeta_1\omega_1 = \alpha + \beta\omega_1^2 \quad (3.47)$$

ζ_1 Le taux d'amortissement du 1^{er} mode.

ζ_m Le taux d'amortissement du m^{ième} mode

ω_1 La valeur propre du 1^{er} mode

ω_m La valeur propre du m^{ième} mode

3.4. Vecteur de force élémentaire

a) Force mécanique

Nous pouvons exprimer la composante mécanique du vecteur de force élémentaire $\{F\}$ à partir de l'équation (3.32) :

$$\{F\} = \sum_{i=1}^n \int_s h_i ([N_u]^t \{F\} + [N_u]^t \{f\}) ds + [N_u]^t \{P\} \quad (3.48)$$

b) Force électrique

L'expression de la composante électrique du vecteur de force élémentaire $\{Q\}$ à partir de l'équation (3.33) est :

$$\{Q\} = - \int_s [N_\phi]^t \{D_\phi\} ds \quad (3.49)$$

En résumé, ce chapitre présente l'utilisation d'un élément fini pour discrétiser le milieu continu en intégrant de nouveaux champs de cisaillement. Les expressions des matrices élémentaires, incluant les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement, ainsi que le vecteur des forces, ont été établies. Une fois ces éléments déterminés, leur assemblage permet de construire des matrices et vecteurs globaux adaptés à des structures de géométrie arbitraire. Ouvrant ainsi la voie à diverses analyses, qu'elles soient modales, statiques ou dynamiques.

CHAPITRE 4

ANALYSE DE PLAQUE FONCTIONNELLEMENT GRADUEE AVEC DES COUCHES PIEZOELECTRIQUES

Cette section présente les équations du mouvement régissant le comportement modal, statique et dynamique d'une plaque en matériau fonctionnellement gradué FGM avec des couches piézoélectriques. Ce chapitre est structuré en deux parties :

- Analyse d'une plaque élastique avec des couches piézoélectriques, couvrant les aspects modaux, statiques et dynamiques.
- Le contrôle actif de la plaque en FGM avec des couches piézoélectriques.

Les expressions des matrices et vecteurs élémentaires, développées dans le chapitre précédent, permet la construction des matrices et vecteurs globaux par assemblage des contributions élémentaires.

1. Analyse modale

L'analyse modale caractérise les vibrations libres d'une structure ; elle permet de déterminer les fréquences de vibration (valeurs propres) et les déformés modales (vecteurs propres) de la structure fonctionnellement graduée avec des couches piézoélectriques.

1.1. Equation du mouvement

La forme discrétisée de l'équation différentielle décrivant les vibrations libres d'une plaque FGPM est :

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (4.1)$$

Soit

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Il est possible d'écrire la solution sous la forme suivante :

$$\{u(t)\} = \{\psi\}e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

$$\{\phi(t)\} = \{\varphi\}e^{j\omega t} \quad (4.4)$$

Où ψ , φ représentent les vecteurs propres et ω les valeurs propres.

En substituant la forme (4.3) et (4.4) dans l'équation du mouvement (4.2), nous obtenons le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \{0\} \quad (4.5)$$

Soit
$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.6)$$

Le nombre de solutions possibles à cette équation est égal à la dimension des matrices $[K]$ et $[M]$; chacune de ces solutions représente les valeurs propres ω et les vecteurs propres $\{\psi\}$ de la structure.

En décomposant l'expression (4.6) en deux parties (élastique et électrique) :

$$[K_{uu}]\{\psi\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} - \omega^2[M]\{\psi\} = \{0\} \quad (4.7)$$

$$[K_{\phi u}]\{\psi\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{0\} \quad (4.8)$$

En combinant les deux dernières équations, on aura une nouvelle expression du problème des valeurs propres :

$$([\bar{K}] - \omega^2[M])\{\psi\} = 0 \quad (4.9)$$

Où,
$$[\bar{K}] = [K_{uu}] - [K_{u\phi}][K_{\phi\phi}][K_{\phi u}] \quad (4.10)$$

2. Analyse dynamique

L'analyse dynamique permet d'étudier les vibrations d'une structure sous l'effet d'une excitation externe en déterminant sa réponse. Pour le cas des couches piézoélectriques, l'excitation est induite par un actionneur et la réponse fournie par un capteur.

2.1. Equation du mouvement

Pour déterminer la réponse dynamique d'une plaque FGM piézoélectrique, l'équation du mouvement est définie comme suit [34-37] :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Où

K_{uu} : la matrice de rigidité

$K_{u\phi}$: la matrice de rigidité due au couplage piézo-mécanique

$K_{\phi\phi}$: la matrice de rigidité diélectrique.

F : la charge mécanique.

Q : la charge électrique.

Les couches piézoélectriques peuvent être utilisées soit comme capteur, via l'effet direct de la piézoélectricité, soit comme actionneur, via l'effet inverse de la piézoélectricité en fonction de leurs utilisations.

2.2. Réponse d'un capteur piézoélectrique

Supposons une plaque élastique possédant uniquement des capteurs piézoélectriques. Dans ce cas, le vecteur des potentiels électriques est inconnu dans l'équation du mouvement. Par conséquent le vecteur de force ne comporte que les efforts d'excitations mécaniques. De plus aucune charge n'est accumulée sur les capteurs piézoélectriques, donc $\{Q\} = \{0\}$. L'équation du mouvement de la plaque devient [39] :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Les valeurs des tensions obtenues au bornes des capteurs piézoélectriques $\{\phi\}$ sont obtenues en résolvant l'équation précédente.

2.3. Excitation par actionneur piézoélectrique

Supposons une plaque élastique, ne possédant aucun capteur piézoélectrique, excitée par actionneurs piézoélectriques, dans ce cas le potentiel électrique est supposé connu constituant l'excitation des actionneurs. Par conséquent, la deuxième expression (4.11) est négligée et l'équation du mouvement de la plaque devient :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]_a\{\dot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} = \{F\} - [K_{u\phi}]\{\phi\}_a \quad (4.13)$$

Nous remarquons dans l'équation précédente que l'excitation d'une plaque à partir d'actionneur piézoélectrique revient à modifier le vecteur force de l'équation de mouvement. Les valeurs des tensions imposées aux bornes d'actionneurs sont stockées à l'intérieur du vecteur des potentiels électriques forcés $\{\phi\}$.

L'équation (4.11) peut être modifiée dans le contexte de la tension du capteur et la tension de l'actionneur qui seront utilisées pour le contrôle [19] :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]_a\{\dot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]_s\{\phi\}_s = \{F\} - [K_{u\phi}]_a\{\phi\}_a \quad (4.14)$$

2.4. Résolution dynamique par la méthode de NEWMARK

La méthode implicite de Newmark implique la résolution d'un système matriciel. Lorsque les solides sont supposés élastiques linéaires, cela conduit à la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps.

L'un des principaux atouts de cette méthode réside dans sa stabilité inconditionnelle, permettant ainsi l'intégration des équations de la dynamique avec un pas de temps relativement important, tout en assurant une représentation fidèle des modes de plus basse fréquence de la structure.

De manière générale les équations régissant l'équilibre dynamique prennent la forme

suivante [39-40] :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]_a\{\dot{X}\} + [K_{uu}]\{X\} = \{F(t)\} \quad (4.15)$$

a) Présentation du schéma

NEWMARK a introduit deux paramètres γ et β pour le calcul des positions et vitesses aux pas de temps $t+\Delta t$:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t[(1-\gamma)\ddot{X}_t + \gamma\ddot{X}_{t+\Delta t}] \quad (4.16)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t\dot{X}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t + \beta\ddot{X}_{t+\Delta t} \right] \quad (4.17)$$

Considérons les équations d'équilibre au temps $t+\Delta t$:

$$[M]\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} + [C]_a\{\dot{X}\}_{t+\Delta t} + [K_{uu}]\{X\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (4.18)$$

Ou, X_t , \dot{X}_t et \ddot{X}_t sont les vecteurs des positions, vitesses et accélérations respectivement au temps t .

La méthode de NEWMARK utilisée de manière assez répandue dans le domaine mécanique, possède une très bonne précision. De plus elle est inconditionnellement stable si :

$$\gamma > 0.5 \text{ et } \beta > \frac{(2\gamma+1)^2}{4}$$

Une combinaison très souvent employé est $\gamma > \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$, c'est le choix qui a été fait dans l'opérateur.

b) Algorithme complet de la méthode de NEWMARK

1. Initialisations

- Conditions initiales X_0 , \dot{X}_0 et \ddot{X}_0
- Choix de Δt , γ et β et calculs des coefficients a_0, \dots, a_7 (ci-dessous)

$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}, a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right), a_6 = \Delta t(1-\gamma), a_7 = \gamma\Delta t$$

- Assemblage matrice de rigidité $[K]$, de masse $[M]$ et d'amortissement $[C]_a$.
- Former la matrice de rigidité effective $[\tilde{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]_a$
- Factoriser $[\tilde{K}]$

2. A chaque pas de temps

- Calcule le chargement effectif \tilde{F} :

$$\tilde{F} = F_{t+\Delta t} + C_a(a_1 X_t + a_4 \dot{X}_t + a_5 \ddot{X}_t) + M(a_0 X_t + a_2 \dot{X}_t + a_3 \ddot{X}_t)$$

- Résoudre $[\tilde{K}]X_{t+\Delta t} = \{\tilde{F}\}$
- Calcule les vitesses et accélérations au temps $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_{t+\Delta t} &= a_0(X_{t+\Delta t} - X_t) - a_2 \dot{X}_t - a_3 \ddot{X}_t \\ \dot{X}_{t+\Delta t} &= \dot{X}_t + a_6 \ddot{X}_t + a_7 \ddot{X}_{t+\Delta t}\end{aligned}$$

- Calcul du pas de temps suivants (retour au 2).

L'avantage numérique des schémas d'intégration implicite réside dans le fait que le pas de temps peut être substantiellement grand par rapport à la plus petite période propre du système sans causer une instabilité des résultats.

3. Contrôle actif des vibrations

L'un des défis majeurs rencontrés dans de nombreux secteurs industriels, tels que l'automobile, l'aérospatiale et la défense, réside dans la gestion des vibrations mécaniques ou structurelles. Afin de concevoir un système optimisé, tant la structure que le mécanisme de contrôle doivent évoluer de manière interactive et être traités comme une seule entité. Le concept fondamental du contrôle actif des structures repose sur la conception de la structure pour répondre aux conditions de charge normales, suivie de la conception du contrôleur pour atténuer les effets des perturbations externes. Pour minimiser ou éliminer les vibrations structurelles indésirables, une stratégie de contrôle actif peut être mise en œuvre, utilisant des matériaux intelligents associés à un algorithme de contrôle en boucle fermée, comme illustré sur la Figure 4.1 [18,31]. Les structures intelligentes sont considérées comme des structures en couches délimitées par des couches de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques. La structure hôte est prise en sandwich entre deux couches piézoélectriques. La couche piézoélectrique supérieure agit comme actionneur tandis que la couche piézoélectrique inférieure fonctionne en tant que capteur.

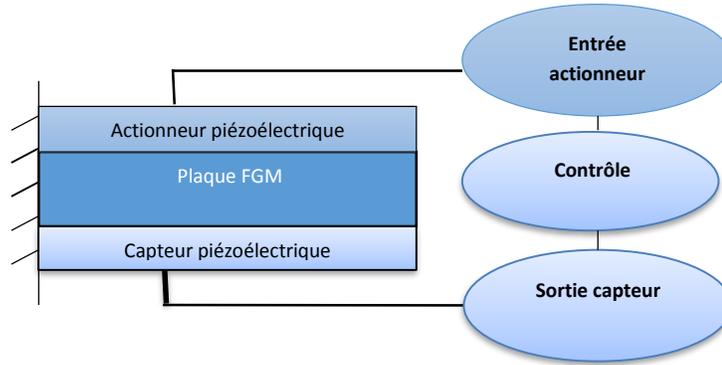


Figure 4.1. Schéma du contrôle actif de la plaque fonctionnellement graduée avec un actionneur et un capteur piézoélectriques liés en surface.

3.1. Algorithme de contrôle

Dans la présente étude, un algorithme simple de rétroaction de vitesse négative est mis en œuvre pour le contrôle actif des vibrations et pour étudier les performances de différentes plaques fonctionnellement graduées avec des couches piézoélectrique liés en surface (FGPM) à l'étude.

En outre, une approche cohérente [19] est mise en œuvre pour anticiper les réactions dynamiques de la plaque piézoélectrique intelligente en FGM. Les gains de contrôle par rétroaction du déplacement G_d et de contrôle par rétroaction de vitesse G_v sont utilisés pour coupler le vecteur de tension d'entrée de l'actionneur ϕ_a et la tension de sortie du capteur ϕ_s [18,19,31].

$$\{\phi\}_a = G_d\{\phi\}_s + G_v\{\dot{\phi}\}_s \quad (4.19)$$

Les indices s et a désignent respectivement les termes associés au capteur et à l'actionneur. La tension de sortie du capteur ϕ_s est calculée à partir de l'équation (4.13).

$$\{\phi\}_s = [K_{\phi\phi}]_s^{-1}[K_{\phi u}]_s\{u\} \quad (4.20)$$

En intégrant $\{\phi\}_s$ dans l'équation (4.14) :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]_a\{\dot{u}\} + ([K_{uu}] + [K_{u\phi}]_s[K_{\phi\phi}]_s^{-1}[K_{\phi u}]_s)\{u\} = \{F\} - [K_{u\phi}]_a\{\phi\}_a \quad (4.21)$$

Le principe du contrôle rétroactif implique que lorsque la plaque oscille, des charges électriques sont générées dans la couche capteur en raison de l'effet piézoélectrique direct. Ces charges sont ensuite amplifiées par un système de rétroaction en boucle fermée pour être converties en un signal de tension. Ce signal converti est ensuite transmis et appliqué à l'actionneur distribué. En

conséquence, les contraintes et déformations induites par l'effet piézoélectrique inverse génèrent une force résultante qui permet de contrôler activement la réponse dynamique de la plaque piézoélectrique FGM.

Par conséquent, l'équation (4.21), peut en outre être modifiée comme :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]_a\{\dot{u}\} + ([K_{uu}] + [K_{u\phi}]_s [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s)\{u\} = \{F\} - [K_{u\phi}]_a (G_v\{\dot{\phi}\}_s) \quad (4.23)$$

Dans le cas du contrôle rétroactif statique l'équation (4.21), est écrite sous la forme :

$$([K_{uu}] + [K_{u\phi}]_s [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s)\{u\} = \{F\} - [K_{u\phi}]_a (G_d\{\phi\}_s) \quad (4.24)$$

Dans ce chapitre on a présenté l'équation du mouvement régissant sur le comportement d'une plaque fonctionnellement graduée avec des couches piézoélectriques liées comme actionneur et capteur. Dans ce contexte on a traité :

- L'analyse modale
- L'analyse dynamique (contrôle des vibrations en mode d'actionneur et mode de capteur)
- Algorithme du contrôle actif.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS ET DISCUSSIONS

Dans ce chapitre, la formulation avancée de type cisaillement $Q9\gamma$ a été développée pour l'analyse des plaques sandwich en matériaux fonctionnellement gradués (FGM). L'efficacité de cette approche a été évaluée à travers une étude comparative avec des résultats issus de la littérature, obtenus à partir de différentes théories de déformation par cisaillement, afin d'apprécier sa précision et sa rapidité de convergence des résultats numériques.

Des analyses modale, statique et dynamique ont été menées sur des plaques en matériau fonctionnellement gradué, avec ou sans couches piézoélectriques collées en surface. Ces investigations ont été réalisées en considérant diverses conditions aux limites, notamment les configurations simplement appuyée, encastrée et en porte-à-faux. Le modèle développé, fondé sur la méthode des éléments finis utilisant l'élément $Q9\gamma$, a été implémenté numériquement à l'aide d'un code de calcul élaboré sous le langage FORTRAN.

Les propriétés des matériaux du FGPM considérées dans ce chapitre sont récapitulées dans le tableau suivant (5.1).

Tableau. 5.1. Propriétés des composant des matériaux FGM et piézoélectrique.

Propriétés	matériaux				
	<i>Aluminium oxide</i>	<i>Ti-6Al-4V</i>	<i>Aluminium Al</i>	<i>Zirconia ZrO2</i>	<i>G1195N</i>
$E(N/m^2)$	320.24E9	105.70E9	70E9	151E9	63E9
ν	0.26	0.29	0.3	0.3	0.3
Mass density $\rho(kg/m^2)$	3750	4429	2707	3000	7600
Piezoelectric coefficient c/m^2					
E_{31}					22.86
E_{32}					22.86
E_{33}					0
Electric permittivity F/m					
K_{11}					0
K_{22}					0
K_{33}					1.5E-8

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ (Farad/m)}.$$

1. Convergence et vérification

Avant d'aborder l'étude détaillée du comportement vibratoire, la réponse statique et dynamique des structures considérées, la précision et la fiabilité de la formulation proposée (Q9 γ) ont été examinées à travers une confrontation avec les résultats obtenus avec les données numériques disponibles dans la littérature, portant sur les fréquences propres adimensionnelles.

La convergence de la méthode proposée est vérifiée à travers le calcul des fréquences naturelles d'une plaque FGM carrée simplement supportée sur les quatre côtés (SSSS) avec dimensions $a = b = 100$ mm, $h_f = 10$ mm .

Tableau. 5.2. Paramètres de fréquences fondamentales $\omega = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$ d'une plaque FGM Al/ZrO₂ sous conditions aux limites SSSS pour différents maillages.

a/h	mesh size	α					
		0	0.5	1	5	8	10
Present Q9 γ	12x12	5.7693	5.1931	4.9502	4.6314	4.5495	4.5070
	10x10	5.7693	5.1930	4.9502	4.6314	4.5495	4.5070
	8x8	5.7693	5.1931	4.9502	4.6314	4.5495	4.5070
	6x6	5.7692	5.1930	4.9501	4.6313	4.5494	4.5069
	4x4	5.7687	5.1925	4.9497	4.6309	4.5491	4.5065
Zhao[4]	17x17	5.6763	5.1105	4.8713	4.5549	4.4741	4.4323
Matsunaga[6]		5.7769	-	5.3216			
Hashemi[5]		5.7693	5.3176	5.2532	5.2940	5.2312	5.1893

Quatre maillages différents, de tailles 12×12 , 10×10 , 8×8 , 6×6 et 4×4 sont illustrés dans le Tableau 5.2, Il est observé que les fréquences fondamentales obtenues avec différents niveaux de raffinement de maillage convergent rapidement vers des valeurs stables ; et à partir d'un maillage 6×6 , les variations des fréquences naturelles deviennent insignifiantes, indiquant ainsi une bonne précision même avec un maillage relativement peu dense.

Par ailleurs, les résultats obtenus sont en très bon accord avec les données de la littérature, notamment celles rapportées par Matsunaga [6] et Hashemi [5]. En comparaison avec les résultats de Zhao [4], obtenus à partir d'un maillage plus fin (17×17), les valeurs calculées par la méthode actuelle restent très proches, confirmant la validité et la performance du modèle développé.

2. Analyse modale

Une plaque en matériau fonctionnellement gradué, constituée d'une combinaison aluminium et alumina, simplement appuyée (SSSS), a été étudiée différents rapports différent entre l'épaisseur et la longueur de la plaque FGM : $a/h = 5, 10, 20$ (plaque épaisse et mince).

Le tableau 5.3 présente les paramètres fondamentaux des fréquences naturelles d'une plaque FGM carrée de 1 m de côté, pour différentes valeurs de l'exposant de la loi de puissance α , et comparés aux résultats obtenus par Zhao et al [4], Hashemi et al [5] et Muntsunaga [6].

Tableau. 5.3. Comparaison du paramètre de fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$ pour différents rapports d'épaisseur (a/h) de plaque Al/Al₂O₃ FG.

a/h	mesh size	α				
		0	0.5	1	4	10
5						
Present	Q9γ 6x6	0,21099	0,1802	0,1627	0,13925	0,13203
Present	FSDT 12x12	0,2110	0,1802	0,1627	0,13925	0,13204
Zhao	[4] 17x17	0,2055	0,1757	0,1587	0,1356	0,1284
Matsunaga	[6]	0,2121	0,1819	0,1640	0,1383	0,1306
10						
present	Q9γ 6x6	0,05759	0,04888	0,04406	0,03810	0,03644
Present	FSDT 12x12	0,05758	0,04888	0,04406	0,03810	0,03644
Zhao	[4] 17x17	0,05673	0,04818	0,04346	0,03757	0,03591
Matsunaga	[6]	0,05769	0,0492	0,04454	0,03825	0,03627
20						
Present	Q9γ 6x6	0.01474	0.01248	0.01124	0.009	0.009362
Present	FSDT 12x12	0,01474	0,01248	0,01125	0,00981	0,009364
Zhao	[4] 17x17	0,01464	0,01241	0,01118	0,0097	0,00931
Hashemi	[5]	0,01480	0,01281	0,0115	0,01013	0,00963

On remarque que les résultats obtenus par la méthode FSDT et l'approche Q9 γ sont confinés entre ceux FSDT [4] et 2D HAPT [6] et ils sont en excellent accord avec ceux cités précédemment. Les résultats obtenus pour Q9 γ témoignent de la validité et la précision de

L'approche avec un maillage minimum. Ceci probablement est dû à l'intégration des nouveaux champs de cisaillement dans la théorie FSDT.

Dans le deuxième exemple, on traite les fréquences propres d'une plaque (Al₂O₃/Ti-6Al-4V) avec couches inférieures et supérieure en piézoélectriques GN1195 avec deux conditions de limites : plaques serrées (CCCC) et simplement supportées (SSSS) sur quatre bords. Les solutions

présentées ici sont réalisées pour une plaque quadratique avec $a=b=400$ mm, une épaisseur de la plaque FG de $h_f=5$ mm et des couches piézoélectriques de $h_p=0.1$ mm et sont calculées par deux méthodes basées sur les théories FSDT.

Les résultats numériques ont été comparés à ceux de He et al [9] et Selim [12]. Ceux obtenus avec l'approche Q9 γ ont montré une précision satisfaisante avec un maillage de 5x5 éléments ou d'ordre moins, en outre les résultats obtenus du FSDT avec un maillage de 10x10 éléments ou plus. On constate un bon accord des résultats actuels avec ceux du CLPT [9] et du HSDT [12]. De plus, il est observé qu'en augmentant la contribution de la raideur au cisaillement, notre modèle converge plus rapidement vers les solutions disponibles dans la littérature, comme l'illustrent les Tableaux 5.4 et 5.5

Tableau. 5.4. Fréquences naturelles (Hz) d'une plaque FGM carrée simplement supportée avec des couches piézoélectriques intégrées pour différentes valeurs de α .

Method	α							
	0	0.2	0.5	1	5	15	100	1000
Present Q9 γ	143.67	168.19	185.13	199.36	231.60	248.78	261.05	263.48
Present FSDT	144.15	168.56	185.55	199.81	232.14	249.36	261.65	264.08
Selim[12]	145.156	169.478	186.201	200.224	231.918	248.724	260.709	263.077
He and al[9]	144.25	168.74	185.45	198.92	230.46	247.30	259.35	261.73

Tableau. 5.5. Fréquences naturelles (Hz) d'une plaque FGM carrée encastree avec des couches piézoélectriques intégrées avec différents exposants de la loi de puissance α .

Method	α							
	0	0.2	0.5	1	5	15	100	1000
Present Q9 γ	262.74	307.52	337.31	363.25	422.04	453.32	475.65	480.02
Present FSDT	263.18	307.74	338.79	364.88	423.97	455.35	477.73	482.15
Selim[12]	263.401	307.576	337.973	363.474	421.086	451.602	473.354	477.652
He and al[9]	262.53	306.42	337.45	363.00	420.26	450.85	472.79	477.14

3. Analyse statique

3.1. Réponse statique d'une plaque FGM

Les réponses statiques des plaques FG sont analysées sous une charge surfacique sinusoïdale et charge surfacique uniforme avec une condition aux limites simplement supportée (SSSS) pour la combinaison en aluminium/alumine de la plaque.

Les paramètres adimensionnels sont :

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (5.1)$$

La charge uniforme sinusoïdale :

$$F(x, y) = F_0 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (5.2)$$

Tableau. 5.6. Effet de l'exposant de la loi de puissance α et du chargement sur les flèches adimensionnelles d'une plaque carrée FGM sous charge uniforme.

Method	α								
	ceramic	1	2	4	5	6	8	10	Metal
Present Q9 γ	0.4667	0.9290	1.1913	1.3774	1.4209	1.4560	1.5162	1.5700	2.5176
Present FSDT	0.4665	0.9288	1.1909	1.3769	1.4204	1.4555	1.5157	1.5696	2.5167
Zenkour[32]	0.4665	0.9287	1.1940	1.3890	1.4356	1.4727	1.5343	1.5876	2.5327

Tableau. 5.7. Effet de l'exposant de la loi de puissance α et du chargement sur les flèches adimensionnelles d'une plaque carrée FGM sous charge sinusoïdale.

Method	α								
	ceramic	1	2	4	5	6	8	10	Metal
Present Q9 γ	0.2961	0.5891	0.7554	0.8739	0.9016	0.9241	0.9625	0.9969	1.5974
Present FSDT	0.2960	0.5889	0.7552	0.8736	0.9014	0.9238	0.9622	0.9966	1.5969
Zenkour[32]	0.2960	0.5889	0.7573	0.8819	0.9118	0.9356	0.9750	1.0089	1.6070
Abdelaziz[9]	0.2961	0.5890	0.7573	0.8816	0.9112	0.9352	0.9743	1.0085	1.6074

Les tableaux 5.6 et 5.7 évaluent la flèche adimensionnelle \bar{w} pour des distributions de charges uniformes et sinusoïdales. La méthode Q9 γ a montré une concordance satisfaisante avec un maillage de (6x6), tandis que la méthode FSDT nécessitait un maillage de (12x12). De plus, l'étude a révélé que la différence entre les résultats obtenus et ceux publiés dans les références [9] et [32] est négligeable.

3.2. Réponse statique d'une plaque FGM intégré avec des couches piézoélectriques

Cette section présente une formulation de cisaillement Q9 γ appliquée à l'analyse statique d'une plaque piézoélectrique carrée en porte-à-faux constituée de matériau FGM. La plaque est

composée d'un mélange d'oxyde d'aluminium et de Ti-6Al-4V à température ambiante (300 K). Ses faces supérieure et inférieure sont revêtues de couches piézoélectriques G-1195N. Les dimensions de la plaque sont $a=b=400$ mm avec une épaisseur de 5 mm pour le FGM et 0,1 mm pour chaque couche piézoélectrique. L'objectif de cette étude est d'évaluer la déflexion de l'axe central de la plaque en porte-à-faux. Dans la première phase de l'étude statique, la plaque FGM est soumise à une charge répartie uniforme de $F_m = 100\text{N/m}^2$ appliquée sur sa face supérieure. Différentes valeurs de α , l'exposant de la loi de puissance, sont utilisées. Les résultats, représentés sur la figure 5.1, présentent un bon accord avec ceux calculés dans [15] et [18]. On peut observer que la théorie Q9 α fonctionne bien, et les résultats se stabilisent rapidement en utilisant une discrétisation d'un maillage 4x4.

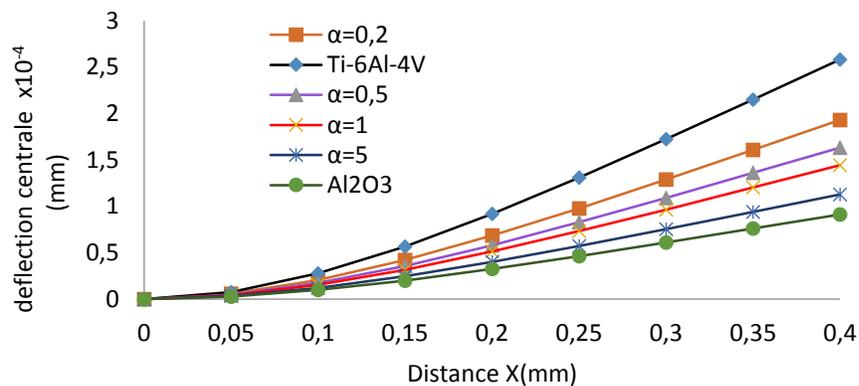


Figure 5.1. Déflexion de l'axe central de la plaque FGPM en porte-à-faux pour différentes valeurs de α sous une charge uniformément répartie.

Dans la phase suivante ; les couches piézoélectriques supérieure et inférieure sont utilisées comme actionneur intégrés, comme le montre la figure 4.1. Nous analysons la déviation de la ligne centrale de la plaque FGM en porte-à-faux sous une charge uniformément répartie et différentes tensions externes 0 V, 20 V et 40 V pour un exposant de de la loi de puissance α varié. La figure 5.2 illustre les résultats de ce cas.

Comme le montre la Figure 5.2, on observe donc que l'effet de la tension d'entrée sur la déflexion de la plaque ; en d'autres termes, la valeur de la déflexion diminue à mesure que la tension de l'actionneur augmente, de plus la similarité entre les résultats actuels et ceux obtenus [10] est considérable.

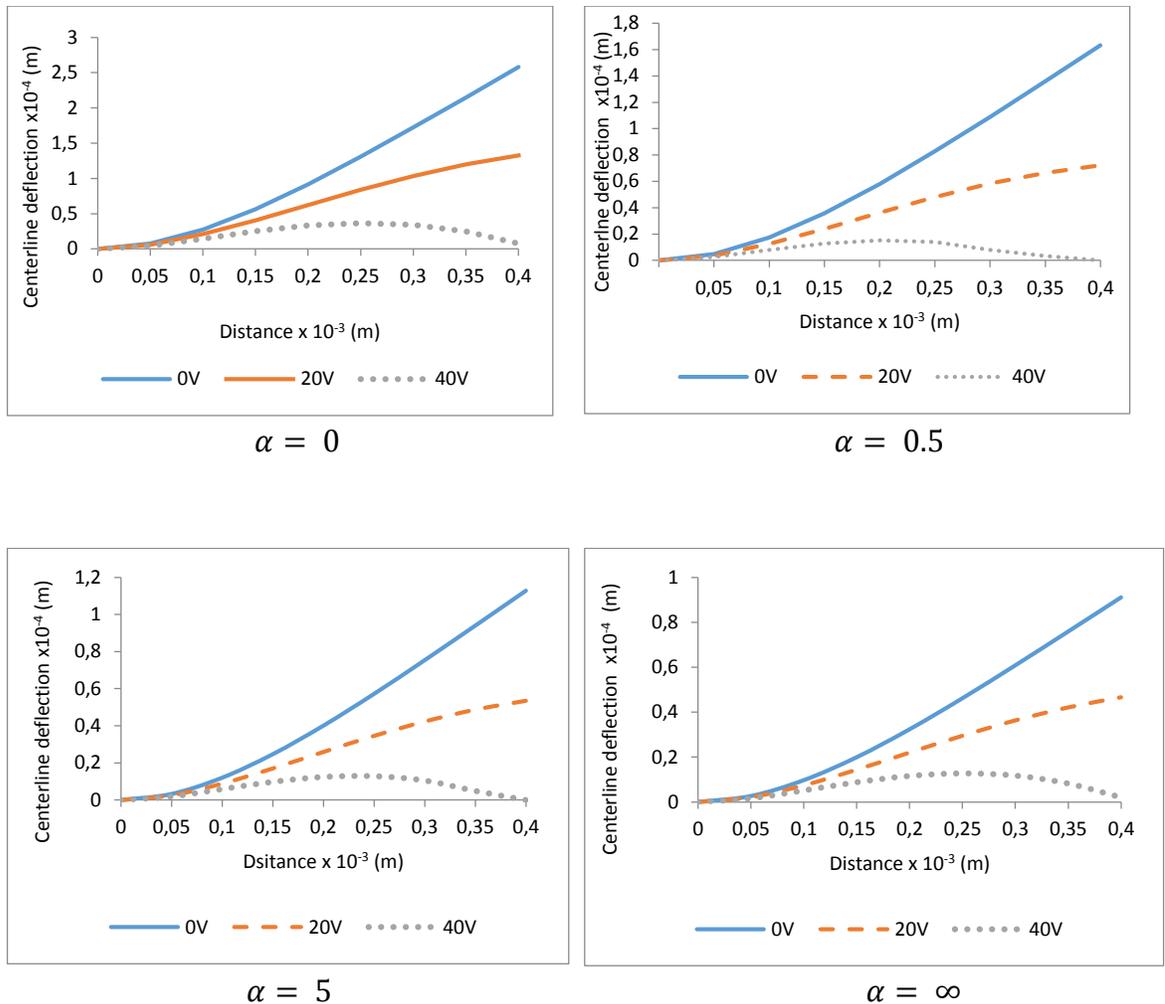


Figure. 5.2. Déflexion de la ligne centrale de la plaque FGPM en porte-à-faux pour différentes valeurs de α sous une charge uniformément répartie et différentes tensions d'actionneur.

4. Analyse dynamique

Dans cette étape, l'étude se concentre sur l'obtention des propriétés dynamiques optimales d'une plaque FGM piézoélectrique entièrement serrée en étudiant l'impact du paramètre de l'exposant de la loi de puissance. La plaque a le même matériau que la plaque FGPM utilisée précédemment et a des dimensions $a=b=200$ mm, avec une épaisseur de couche FGM de $h_f=20$ mm et une épaisseur de couche piézoélectrique de $h_p=2$ mm. La réponse vibratoire est déterminée à l'aide de la méthode d'intégration directe Newmark- β , avec des valeurs α et β fixées respectivement à 0,5 et 0,25. En introduisant l'amortissement de Rayleigh, l'analyse de l'espace modal a pris en compte les six premiers modes et un taux d'amortissement modal initial de 0,8 % a été supposé pour chaque mode.

La réponse aux déflexions transitoires de la plaque est présentée dans la figure 5.3. Les différentes charges transversales distribuées sinusoidalement sont appliquées sur le dessus de la plaque FGPM et sont définies comme :

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) F(t) \quad (5.3)$$

Ou l'expression $F(t)$ est comme

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & 0 \leq t \leq t_1 \quad \text{charge à pas} \\ 1 - \frac{t}{t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \quad \text{charge triangulaire} \\ \sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) & 0 \leq t \leq t_1 \quad \text{charge sinusoidale} \\ e^{-\gamma t} & \text{charge exponentielle} \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

$$F(t) = 0 \quad t > t_1 \quad (5.5)$$

Et $q_0 = -\frac{10^4 N}{m^2}$, $\gamma = 330 s^{-1}$, $t_1 = 0.001 s$.

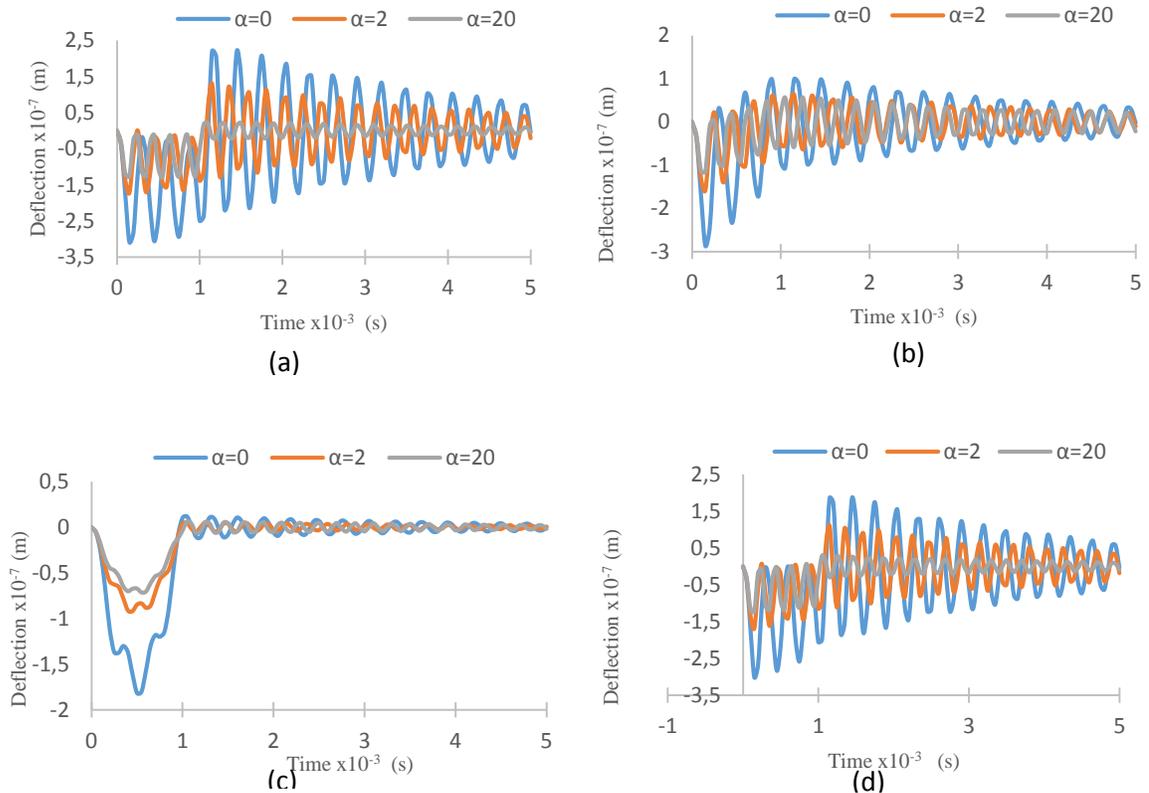


Figure.5.3. Analyse dynamique d'une plaque encadrée avec différentes valeurs de α soumise à des charges différentes. (a) charge à pas ; (b) charge triangulaire ; (c) charge sinusoidale ; (d) charge exponentielle

La figure 5.3 illustre l'effet de l'exposant de la loi de puissance sur la réponse de déflexion transitoire du point central de la plaque FGM intégrée à des couches piézoélectriques pour quatre

charges d'excitation différentes. Comme on peut le constater, l'amplitude de la vibration est minimale à $\alpha=20$. Avec l'augmentation de la valeur de α , les propriétés de la structure en FGM tendent vers celles de l'oxyde d'aluminium, entraînant une diminution de l'amplitude des vibrations. En revanche, pour $\alpha=0$, amplitude est maximale. La diminution de α rend la structure plus flexible, ce qui accentue les vibrations structurelles sous l'effet des charges externes.

5. Algorithme de contrôle actif

Pour le contrôle des vibrations, une plaque FGM piézoélectrique, comme illustré sur la figure 5.4.a, a été envisagée. La couche supérieure agit comme un actionneur piézoélectrique et celle du bas comme un capteur piézoélectrique. La couche intermédiaire est une plaque carré FGM dont les dimensions sont fixées à 200 mm, l'épaisseur h_f est de 1 mm et l'épaisseur de chaque couche piézoélectrique G-1195N h_p est 0,1 mm ; Les propriétés de la plaque FGM sont les mêmes que celles de la section 2.2. La plaque FGM piézoélectrique est discrétisée par 6x6 éléments quadratiques uniformes à 9 nœuds, comme le montre la Figure. 5.4.b et α est fixé à 2.

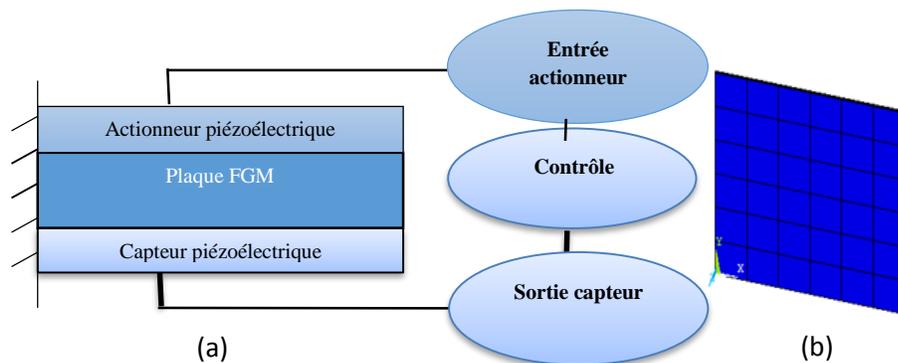


Figure 5.4. Plaque FGM avec actionneur et capteur piézoélectrique intégrés :
 (a) diagramme schématique, (b) une discrétisation 6x6 éléments
 Quadratiques uniformes à 9 nœuds.

5.1 Contrôle statique de la déflexion

Dans cette partie de l'analyse, le contrôle statique en boucle fermée de la plaque FGM intégrée à des couches piézoélectriques est étudié. La figure 5.5 montre la décroissance de la réponse en flexion. Il est clair que la décroissance de la réponse observée à mesure que la commande de rétroaction de déplacement G_d augmente, cette conclusion est similaire à celle observée par Nguyen et al [17].

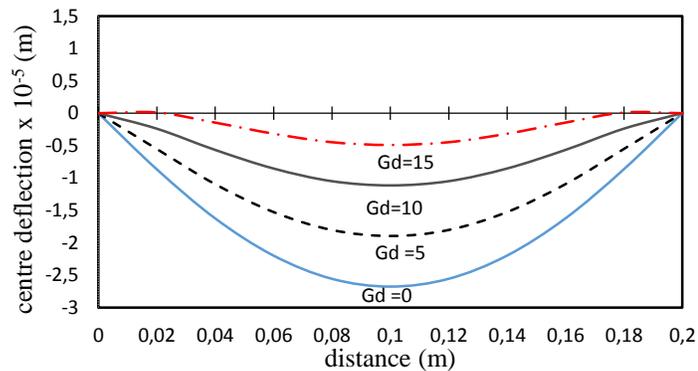


Figure 5.5. Effets du gain de contrôle de déplacement G_d sur la déviation statique d'une plaque FGM piézoélectrique simplement supportée sous une charge uniformément répartie.

Dans cette partie, la même structure de matériau fonctionnellement gradué (FGM) avec des couches piézoélectriques liées est utilisée. De plus, au lieu d'utiliser des couches piézoélectriques complètes, le test se concentre sur trois emplacements différents de patches piézoélectriques. Ces patches couvrent exclusivement un tiers de la surface totale de la plaque. La structure FGM piézoélectriques est soumise à une charge répartie 100N/m^2 pour illustrer l'influence de la position des patches piézoélectriques sur le contrôle [35-39] nous testons trois types de configurations A, B et C comme le montre la Figure 5.6 pour les conditions limites en porte-à-faux CFFF et sur la Figure 5.8 pour les conditions aux limite simplement supportées et totalement encastées.

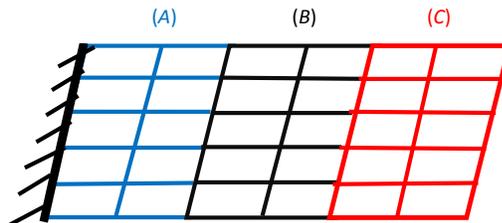


Figure 5.6. Trois différentes positions de patch piézoélectriques pour conditions aux limites porte à faux

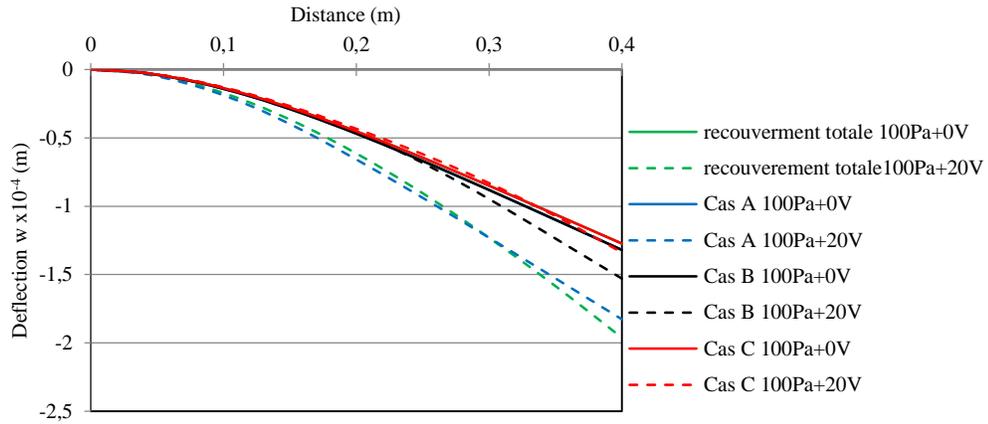


Figure 5.7. Déflexion centrale d'une plaque FGM piézoélectrique pour différentes positions de patches piézoélectrique sous une charge uniformément répartie

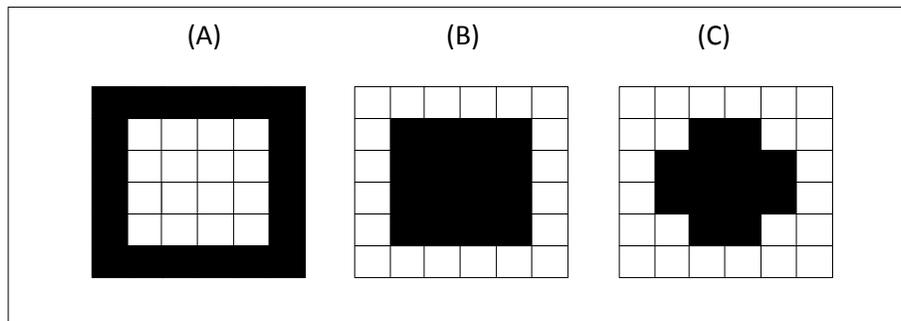


Figure 5.8. Trois différentes positions de patch piézoélectriques pour conditions aux limites simplement supportées.

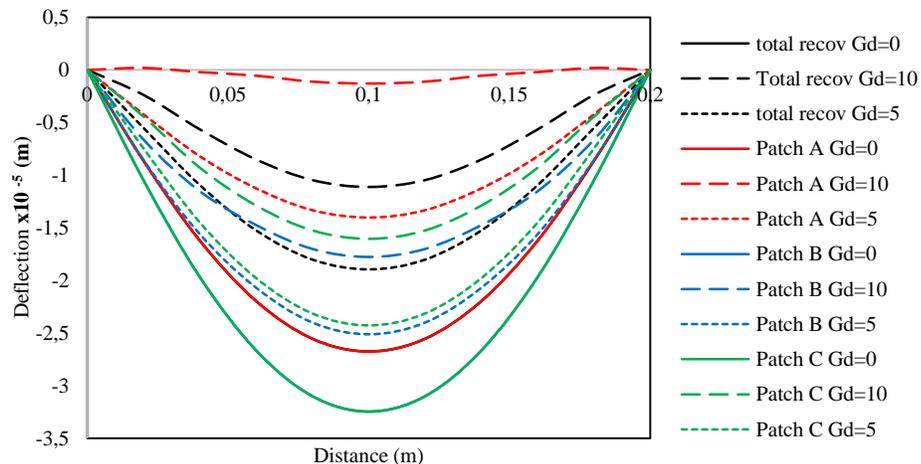


Figure 5.9. L'effet du gain de contrôle de déplacement Gd et des différentes positions des patches sur la déviation statique d'une plaque simplement supportée.

L'analyse des figures 5.7 et 5.9 met en évidence l'influence notable de la position des couches piézoélectriques (patches) sur l'amplitude des déflexions induites. D'après la figure 5.7, il ressort que la configuration (C) entraîne une déflexion plus faible comparativement aux autres configurations, même dans le cas d'un recouvrement total de la structure en porte-à-faux (CFFF). De manière similaire, pour une plaque FGM piézoélectrique soumise à des conditions aux limites simplement appuyées (SSSS), la figure 5.9 montre que la configuration (A) offre une performance supérieure en termes de réduction de la déflexion, par rapport aux configurations (B), (C) ainsi qu'à recouvrement totale. Ces résultats permettent de conclure à l'existence d'un emplacement optimal des patches piézoélectriques, influençant significativement l'efficacité du dispositif de suppression des déplacements.

5.2 Contrôle dynamique de la réponse

Pour étudier le contrôle actif des vibrations des plaques FGM intégrées à des couches piézoélectriques, l'algorithme de contrôle de réaction à vitesse constante décrit ci-dessus au chapitre 4 à la section 3 est utilisé pour contrôler ou supprimer la vibration de la plaque FGM piézoélectrique. L'étude considère une plaque FGM carrée, entièrement encadrée (CCCC), présentant les mêmes caractéristiques matérielles et géométriques que celles utilisées précédemment, à l'exception d'une épaisseur du noyau FGM fixée à 20 mm, et de couches piézoélectriques d'une épaisseur de 2 mm chacune. Pour évaluer l'efficacité du schéma de contrôle actif, une charge transversale distribuée de manière sinusoïdale (charge à pas) utilisée précédemment est appliquée à la plaque. La figure 5.10 illustre la déflexion centrale de la structure pour différents niveaux de gains de contrôle. Les résultats révèlent une atténuation marquée des oscillations avec l'augmentation du gain de vitesse G_v , confirmant ainsi l'efficacité de la stratégie de contrôle adoptée, les observations sont en accord avec ceux rapportés par Nguyen et al. [17] et Liu et al [30].

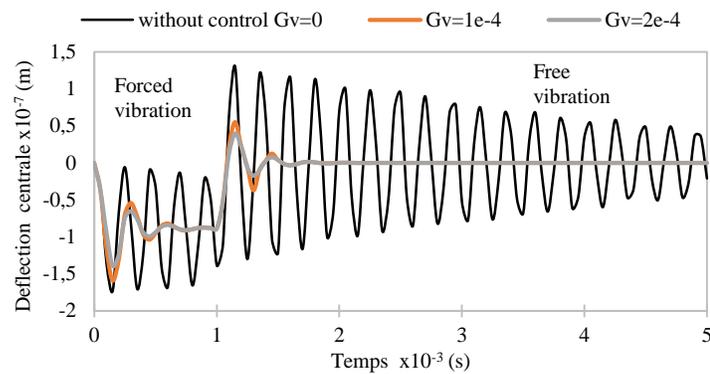


Figure 5.10. L'effet du gain de contrôle de vitesse G_v sur la réponse de déflexion de la plaque FGM Piézoélectrique encastrée (CCCC) et $\alpha=2$.

Dans cette dernière section, nous analysons l'effet de différentes positions de couches piézoélectriques (patches) implantées comme actionneurs et capteurs, sur le contrôle actif des vibrations d'une plaque en matériau fonctionnellement gradué. Les conditions aux limites de type simplement appuyé et encastrement complet sont prises en compte. La plaque piézoélectrique FGM est soumise à deux charges transversales différentes réparties de manière sinusoïdale : (a) charge échelonnée, (b) charge triangulaire avec $q_0 = -10^{-3} N/m^2$ et $\alpha=1$. L'analyse du contrôle actif des vibrations de la plaque FGM, intégrant des couches piézoélectriques et soumise à ces deux chargements dynamiques, est réalisée afin d'évaluer l'influence de différentes positions de patches piézoélectriques sur la réponse vibratoire. Cette étude est menée pour des conditions aux limites simplement supportées et encastrées, comme illustré dans les figures 5.6 et 5.8. Il est important de noter que la valeur des gains de contrôle $G_v = 1e - 4$ pour les vibrations actives est maintenue constante afin d'évaluer spécifiquement l'impact de la position des patches piézoélectriques sur l'efficacité du contrôle actif en boucle fermée. Comme le montrent les figures 5.11 et 5.12, la réponse en boucle fermée dans le cas de recouvrement totale est légèrement améliorée en termes de performances par rapport à l'emplacement du patch A pour des conditions aux limites encastrement et à l'emplacement du patch B pour des conditions aux limites simplement supportées.

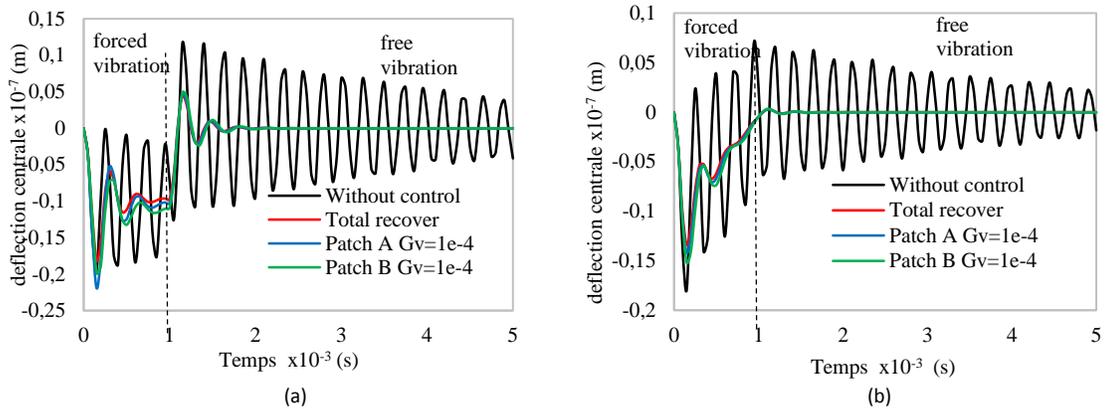


Figure 5.11. Réponse de déflexion transitoire d'une plaque FGM piézoélectrique en CCCC et $\alpha=1$, sous chargement : (a) charge à pas, (b) charge triangulaire.

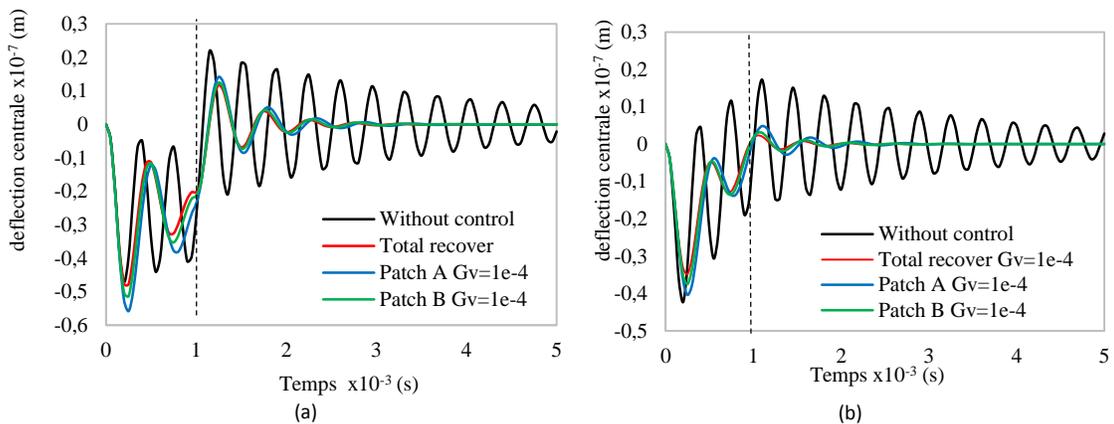


Figure 5.12. Réponse de déflexion transitoire d'une plaque FGM piézoélectrique en SSSS et $\alpha=1$, sous chargement : (a) charge à pas, (b) charge triangulaire.

6 Conclusion

En conclusion, une approche basée sur un modèle quadratique par éléments finis est introduite pour étudier les plaques FGM intégrant des couches piézoélectriques en tant que capteurs et actionneurs. Cette étude intègre des champs de déformation par cisaillement supplémentaires basés sur la théorie du premier ordre de la déformation par cisaillement, avec une supposition de variation linéaire du potentiel électrique à travers l'épaisseur de chaque sous-couche

piézoélectrique. Les résultats des divers cas étudiés sont comparés à ceux de la littérature, démontrant l'exactitude, une stabilité et une précision élevées de la formulation actuelle à travers l'analyse FEM pour les plaques minces et épaisses.

Les points suivants résument les principales conclusions de cette analyse :

- La théorie $Q9\gamma$ atténue les imprécisions dues au verrouillage par cisaillement rencontrées dans FSDT.
- La formulation $Q9\alpha$, en prenant en compte des modes de déformation par cisaillement supplémentaires, offre une représentation plus précise des effets de cisaillement dans les structures de plaques.
- L'analyse des vibrations libres, les réponses statiques et dynamiques des plaques FGM avec des couches piézoélectriques liées fonctionnent efficacement avec une précision suffisante en utilisant la formulation $Q9\alpha$ basée sur le modèle d'éléments finis.
- L'efficacité de la théorie $Q9\gamma$ peut varier selon l'application et les caractéristiques de la structure analysée, et son utilisation peut nécessiter des méthodes numériques plus avancées en raison de sa complexité accrue.
- Les constantes du matériau, telles que le rapport d'épaisseur et l'exposant de la loi de puissance α , influent significativement sur les fréquences propres et les déplacements transversaux des plaques.
- Pour le contrôle actif des vibrations, l'ajustement du gain de retour de déplacement G_d et du contrôle de retour de vitesse G_v permet de réduire ou d'éliminer la réponse statique et le déplacement dynamique.
- La variation continue des propriétés mécaniques des FGM modifie la répartition des contraintes et des champs électromécaniques. Cette distribution impacte directement la performance des actionneurs piézoélectriques et doit être prise en compte dans la conception des stratégies de contrôle.
- L'emplacement des couches piézoélectriques partielles (patches) impacte les résultats d'analyse statique en boucle fermée, dépendant des conditions aux limites.
- Pour le contrôle dynamique des vibrations, la position des patches piézoélectriques présente une légère différence par rapport à une couverture totale de la couche piézoélectrique sur la réponse dynamique.

En résumé, le modèle d'éléments finis proposé se révèle efficace pour analyser les plaques FGM et offre des indications sur leur comportement et leurs applications potentielles dans le contrôle des vibrations. L'utilisation de patches piézoélectriques correctement positionnés est cruciale pour garantir une bonne contrôlabilité de la structure.

7. Perspectives Futures dans l'Analyse Dynamique et le Contrôle des Plaques FGM Piézoélectriques

L'analyse dynamique et le contrôle des structures composites fonctionnellement gradués (FGM) intégrant des couches piézoélectriques constituent un domaine de recherche en pleine évolution. Les défis actuels et les perspectives futures portent sur l'amélioration des modèles analytiques et numériques, le développement de nouvelles stratégies de contrôle, ainsi que l'optimisation des matériaux et de leurs applications industrielles.

- Une validation expérimentale de la méthode proposée permettrait d'évaluer sa faisabilité pour des applications réelles.
- Développement de Modèles Multi physiques Avancés tel que l'intégration des effets couplés électromécaniques, thermomécaniques et électromagnétiques pour une modélisation plus réaliste des plaques FGM piézoélectriques, et Prise en compte des non-linéarités géométriques et matérielles pour l'analyse des grandes déformations et des effets post-flambement.
- Développement de méthodes numériques hybrides combinant éléments finis, volumes finis et différences finies pour une meilleure efficacité dans la résolution des problèmes multi physiques.
- Conception de nouvelles architectures de FGM intégrant des nanomatériaux et des matériaux intelligents pour une meilleure réponse dynamique et un contrôle efficace.
- Intégration de stratégies de contrôle actif et semi-actif basées sur les capteurs et actionneurs piézoélectriques.
- Développement de contrôleurs robustes et adaptatifs (contrôle prédictif, commande floue, apprentissage automatique) pour optimiser la réponse dynamique en fonction des variations environnementales.
- Utilisation des circuits de mise en forme d'énergie (Energy Harvesting) pour récupérer l'énergie vibratoire et améliorer l'autonomie des systèmes.

REFERENCES

1. Reddy.J.N, “Analysis of functionally graded plates”. International journal for numerical methods in engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng. (2000),47, 663-684. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3%3C663::AID-NME787%3E3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3%3C663::AID-NME787%3E3.0.CO;2-8) .
2. Reddy.J.N, Chin.C. D, “Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates”. Journal of Thermal Stresses, (1998),21:6, 593-626. <https://doi.org/10.1080/01495739808956165> .
3. Reddy.J.N, Chakraborty.A,Gopalakrishnan, “a new beam finite element for the analysis of functionally graded materials”. International journal of mechanical sciences, (2003), V.45, 519-539. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4) .
4. Zhao.X, Lee.Y.Y, “Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method”. Journal of sound and vibration 319 (2009), 918-939. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.025> .
5. Hosseini-Hashemi.Sh, Rokni Damavandi Taher.H, “Free vibration graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”. Applied Mathematical Modeling, (2010), 34 ,1276-1291. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.08.008> .
6. Matsunaga.H, “Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory”. Compos Struct; (2008),82:499–512. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.030> .
7. Talha.M, Singh.B.N, “ Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, Applied Mathematical Modeling, (2010),34, 3991-4011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.034> .
8. Merdaci.S, H.Belghoul, “ High-order shear theory for static analysis of functionally graded plates with porosities”, Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences, C. R. Mecanique 347 (2019), 207–217. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.01.001> .
9. Abdelaziz.H. H, Ait.H, Mechab.I, Boumia.L, “ Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using an Efficient and Simple Refined Theory”, Chinese J. Aeronaut., (2011), V. 24, N°4, pp. 434–448, [https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(11\)60051-4](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(11)60051-4) .
10. Khoa.N.D, Thiem.H.T, Duc.N.D, “ Nonlinear buckling and post buckling of imperfect piezoelectric S-FGM circular cylindrical shells with metal-ceramic-metal layers in thermal environment using Reddy's third-order shear deformation shell theory ”,Journal Mechanics of Advanced Materials and Structures, (2017), <https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1341583> .
11. Duc.N.D, “ Nonlinear thermal dynamic analysis of eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations using the Reddy’s third-order shear deformation shell theory”, J.European Journal of Mechanics - A/Solids, (2016),Vol.58, p.10- 30. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.01.004> .
12. Duc.N.D, Chan D.Q, Thanh. N.V, Khoa. N.D, “Nonlinear dynamic analysis of piezoelectric functionally graded porous truncated conical panel in thermal environments”, Thin Walled Structures, (2020),154, 106837. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106837> .
13. Behjat. B, Salehi.M, Armin.A, Sadighi.M , Abbasi.M, “Static and dynamic analysis of

- functionally graded piezoelectric plates under mechanical and electrical loading”. (2011), vol.18,pp986- 994, <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.07.009> .
14. M.Shakeri.M; R.Mirzaeifar.R , “Static and dynamic analysis of thick functionally graded plates with piezoelectric layers using layerwise finite element model”. *mechanics of advanced materials and Structures.* (2009), 561-575, <https://doi.org/10.1080/15376490802625514> .
 15. He.X.Q, Ng.T.Y, Sivashanker.S, Liew.K. M, “Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators”. *International journal of solids and structures*,vol. 38-Issue 9 ,(Fevrier 2001), 1641-1655. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00050-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00050-0) .
 16. Jinqiang.Li; Xue.Yu, “Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate”, *Composite Structure*, S0263-8223(18)30473-2 (2018), <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.09.053> .
 17. Bendine.K, Wankhade.R. L, “Vibration control of FGM piezoelectric plate based on LQR genetic search” . *Open Journal of Civil Engineering*, (2016), 6, 1-7. <http://dx.doi.org/10.4236/ojce.2016.61001> .
 18. Nguyen-Quang.K, Dang-Trung.H, Ho-Huu.V, Luong-Van.H, Nguyen-Thoi.T, “Analysis and control of FGM plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) ”, *Compos. Struct*, (2017), vol. 165, pp. 115–129, Apr. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.006> .
 19. Sharma.A, “Effect of porosity on active vibration control of smart structure using porous functionally graded piezoelectric material”. *Compos. Struc.*,280,114815,(2022). [https://doi.org/10.1016/j.compstruct.\(2021\).114815](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.(2021).114815).
 20. Selim.B.A, Zhang.L.W, Liew.K.M, “Active vibration control of FGM plates with piezoelectric layers based on Reddy's higher-order shear deformation theory”. *Compos. structures.* (2016), <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.059> .
 21. Dat.N.D, Quan. T.Q, Mahesh. Vinyas, Duc.N. D, “Analytical solutions for nonlinear magneto- electro-elastic vibration of smart sandwich plate with carbon nanotube reinforced nanocomposite core in hygrothermal environment”. *international journal of mechanical sciences* (2020).<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105906>.
 22. Kheirikhah.M.M, Movahedfar.V, Mohammedi.Y, Farzad.E, “Nonlinear vibration behavior of doubly-curved functionally graded piezoelectric micro shells in thermal environments”. *Wave in random and complex media*,(2021), <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1944702>.
 23. Chiung.S.H,Guan.H.C, “levy-type analytical series solution for the three-dimensional free vibrations of functionally graded material rectangular plates with piezoelectric layers”. *Smart materials and Structures* (2023),32(12). <http://dx.doi.org/10.1088/1361-665X/acfde1>.

24. Merdaci.S, “ L ’analyse de la flexion statique des plaques épaisses en FGM”. Editions universitaires européennes,(2012).
25. Harari. S, “Contrôle modal semi-actif et actif à faible consommation énergétique par composants piézoélectriques ”. Thèse de doctorat de laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité (LGEF) et Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, (2009). <https://theses.hal.science/tel-00443734v1> .
26. Bouzid. A , “Contribution à la compréhension des phénomènes de dissipation d’énergie dans les céramiques piézo-électriques de type PZT : Effets du dopage au potassium et au niobium ”. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquée de Lyon, (2002), 150p, France. <https://www.sudoc.fr/246707828> .
27. H. F. Tiersten, “Linear Piezoelectric and Plate Vibrations”, Plenum publishing corporation, NewYork (1969).
28. J.L.Batoz and G.Dhatt, “modélisation des structures par element finis”, V.2, (1990), Hermes,Paris.
29. I.Chowdhury and S.Dasgupta, “computation of rayleigh damping coefficients for large systems”, Electronic journal of geotechnical engineering, 43:6855-6868 (2003).
30. Imbert, J. F., “Analyse des structures par éléments finis”, CEPADUES Editions, (1991).
31. T.Liu , C.Li , C.Wang ,J.W.Lai and K.H.Cheong, “A Simple-FSDT-based isogeometric method for piezoelectric functionally graded plates”. *Mathematics*, Decembre (2020). <https://doi.org/10.3390/math8122177> .
32. Ashraf M. Zenkour, “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”. *applied mathematical modeling* 30 (2006) 67–84. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009>
33. Yi-Yuan Yu, “Vibrations of Elastic Plates”, Springer-Verlag New York Inc, (1996).
34. A. Zemirline, M.Ouali, A. Mahieddine, “ Dynamic behavior of piezoelectric bimorph beams with a delamination zone ”, *Structure en acier et composites* (19)3 :759-776,(2015). <https://doi.org/10.12989/scs.2015.19.3.759> .
35. M.Ezzraimi, R. Tiberkek, A. Melbous, S. Rechak, “LQR and PID Algorithms for Vibration Control of Piezoelectric Composite Plates”. *Mechanika*, V.24, N°5(2018) 734-740. <https://doi.org/10.5755/j01.mech.24.5.20645> .
36. A. Zemirline, A.Elhadj, A.Shayfull, M.Ouali , “ Design and Optimization of a Linear Piezoelectric Motor using Response Surface Method ”, *mechanic of solids* 56(5):873-884,

- (2021). <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654421050204> .
37. A. Zemirline, M.Ouali, A. Mahieddine, “Actuation using piezoelectric bimorph beams under the effects of structural damping ”, Contech'13, Université yeldiz, istanbul, turquie, (2013).
 38. M.YUKI, T. Murayama, T. Irisawa, “Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally gradient Material by Laser Beam Heating”, proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials, Japan,1991.
<https://doi.org/10.2497/jjspm.37.929>.
 39. M.Ezzraimi, “ Contrôle actif des vibrations de plaque composites multicouches”, Thèse de doctorat de laboratoire de Génie Mécanique (2019). <http://di.univ-blida.dz:8080/jspui/handle/123456789/9086> .
 40. A. Mahieddine, “ Les effets de la piézoélectricité et de l'amortissement structural sur le contrôle des vibrations des poutres ”, Thèse de magister, laboratoire de génie mécanique (2002). <http://di.univ-blida.dz:8080/jspui/handle/123456789/6517> .
 41. T. Gmur, “Dynamique des structures - analyse modale numérique ”, Presses polytechniques et universitaires romandes (2009).
 42. G. R.Liu, S. S.Quek , “The Finite Element Method” , Elsevier Science Ltd, (2003).
 43. S. Brischetto and E. Carrera, “Refined 2D models for the analysis of functionally graded piezoelectric plates”, J. Intell. Mater. Syst. Struct, V. 20, N°15, (2009)1783–1797.
<https://doi.org/10.1177/1045389X08098444> .