

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلبيلدة
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك
Département d'Électronique



Mémoire de Projet de Fin d'Études

présenté par

ABEB Elias

&

CHAGUETMI Hikmat Elbarie Sakina

pour l'obtention du diplôme master en Electronique option
Réseaux & Télécommunications

Thème

Algorithme MMSE de faible
complexité pour les systèmes OFDM
sur les canaux sélectifs en fréquence

Proposé par : Mr AIT SAADI Hocine

Année Universitaire 2013-2014

Remerciements

Avant de vous convier à la présentation de ce travail, l'opportunité nous est donnée de témoigner notre gratitude et notre reconnaissance à toutes les personnes qui par leur aide et leurs encouragements nous ont permis de réaliser ce mémoire.

*On tient à exprimer notre immense reconnaissance à notre promoteur Monsieur **Ait SAADI Hocine** pour avoir accepté de nous encadrer et nous prodiguer ses conseils pertinents et ses critiques constructives et nous tenons à saluer en lui sa patience intarissable sans laquelle notre travail n'aurait jamais vu le jour.*

Un grand merci aussi à tous les membres de ce prestigieux et distingué jury qui nous ont fait l'honneur

d'accepter d'évaluer et de juger notre travail.

Nos remerciements s'adressent à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant nos années d'études à cette université.

Nous tenons à remercier tous nos amis et collègues pour leur soutien moral tout au long de la préparation de ce mémoire.

Sans oublier en fin de rendre un grand hommage à nos parents et frère(s) et sœur(s) qui nous ont encouragé et aidé par tous leurs moyens pour que l'on puisse terminer notre projet.

Spécialement à tous les étudiants de la promotion sortante sans exception.

Résume :

ملخص : في هذا العمل استخدمنا التشكيل متعددة الحامل OFDM في وجود قناة تردد انتقائية الموجهة، حيث التقدير والتسوية خطوتان أساسيتان. في هذا المشروع، نحن نهتم باثنين من المقدرات قناة الأكثر استخداما في أنظمة OFDM، وهي LSE و LMMSE. هذا الأخير يعطي أداء أفضل ولكن عيبه الرئيسي هو تعقيده. تغير الدافع لدينا لنسخة أقل تعقيدا من LMMSE باستخدام تجزئة القيمة المنفرد SVD لتبسيط، مقدر ذو رتبة أقل يتم التحصل عليه. أداء SER و EQM يكاد يكون متطابق مع LMMSE.

كلمات المفاتيح: OFDM; LSE ; LMMSE ;SVD ;SER ;EQM.

Résumé : Dans ce travail nous avons utilisé la modulation multi-porteuses OFDM en présence d'un canal sélectif en fréquence, d'où l'estimation et l'égalisation sont deux étapes incontournables. Dans notre mémoire, nous nous sommes intéressés aux deux estimateurs de canal les plus utilisés dans les systèmes OFDM, à savoir LSE, LMMSE. Ce dernier donne de meilleures performances mais son inconvénient principal est sa complexité. Notre motivation s'est donc tournée vers une version moins complexe du LMMSE en utilisant une décomposition en valeurs singulières SVD pour le simplifier, un estimateur avec un rang inférieur est déduit. Les performances en SER et EQM sont presque identiques à ceux en LMMSE.

Mots clés : OFDM; LSE ; LMMSE ;SVD ;SER ;EQM.

Abstract: In this work we used the modulation multi-carrier OFDM in the presence of a frequency selective channel, where the estimation and equalization are two essential steps. In our manuscript, we are interested in two channel estimators most widely used in OFDM systems, namely LSE, LMMSE. The latter gives better performance but requires more complexity. Our motivation is facing a less complex version of the LMMSE using a singular value decomposition SVD to simplify, an optimal low-rank estimator is derived. Where performance is essentially preserved, even for low computational complexities. The performances in terms of SER and MSE are almost identical to those in LMMSE.

Keywords : OFDM; LSE ; LMMSE ;SVD ;SER ;MSE.

Acronyms et Abbreviations :

AWGN	Additive W hite G aussian N oise.
ASK	Amplitude S hift K eying.
BBAG	Bruit B lanc A dditif G aussien.
BER	Bit E rror R ate.
CAN	Convertisseur A nalogique N umérique.
DFT	Discrete F ourier T ransform.
FFT	Fast F ourier T ransform.
FSK	Frequency S hift K eying.
IES	Interférences E ntre S ymboles.
IEP	Interférences E ntre P orteuses.
IFFT	Inverse F ast F ourier T ransform.
OFDM	O rthogonal F requency D ivision M ultiplexing.
LMMSE	Linear M inimum M ean S quare E rror.
LSE	Least S quare E rror.
MMSE	M inimum M ean S quare E rror.
MSE	M ean S quare E rror.
PSAM	P ilot S ymbol A ssisted M odulation.
PSK	P hase S hift K eying.
QAM	Q uadrature A mplitude M odulation.
SER	S ymbol E rror R ate.
SNR	S ignal to N oise R atio.
TEB	T aux d'Erreur B inaire.
ZF	Z ero F orcing.

Liste des notation :

x	Scalaire.
x^*	Conjugué de x .
x^H	La transposée conjugué de x .
$\hat{x}$	Estimation de la variable x .
g	La réponse impulsionnelle du canal.
H	La réponse fréquentielle du canal.
$E\{.\}$	Esperance mathématique.
E_b/N_0	Rapport entre énergie par bit et densité spectrale du bruit.
$ \cdot $	Module.
$\ \cdot\ $	Norme Euclidienne.
$\otimes$	Produit de convolution circulaire.
$N(\mu, \sigma_n^2)$	Loi normale de moyenne μ et de variance σ_n^2 .
$\delta(t)$	Impulsion de Dirac.
$erf(.)$	Fonction d'erreur.
$erfc(.)$	Fonction d'erreur complémentaire.
T_c	Temps de cohérence.
T_s	Temps symbole.
τ_m	L'étalement temporel maximal.
B_c	Bande de cohérence.
λ_m	Valeur propre de la matrice de covariance du canal.
σ_n^2	Variance du bruit.
(P)	Les pilotes.
R	Matrice de covariance.
Δf	Largeur de bande des sous canaux.
B	Largeur de bande utilisée.
B_c	Bande de cohérence.
N	Nombre de sous-porteuses.
C_k	Symbole d'indice k .
T_s	Durée totale d'un symbole OFDM.

T_u	Durée utile d'un symbole OFDM.
T_g	Durée de l'intervalle de garde.
T_e	Temps d'échantillonnage.
f_k	Fréquence porteuse d'indice k.
f_0	Fréquence porteuse originale.
F	Matrice TFD.
$s(t)$	Signal OFDM.
$S(n)$	Signal OFDM en discret.
K_t	Intervalle de temps.
K_f	Intervalle de fréquence.

Table des matières :

Remerciements

Résumé

Acronyms et Abbreviations:

Liste des notations

Introduction générale :	1
Chapitre 1 Généralités	5
1.1. Introduction :	5
1.2. La transmission numérique :	5
1.2.1. La source :	6
1.2.2. Codage source :	6
1.2.3. Codage canal :	7
1.2.4. La modulation :	7
1.2.5. Le canal de propagation :	8
1.2.6. Le bruit :	8
1.2.7. Décodage canal :	9
1.2.8. Décodage source :	9
1.3. Caractéristique d'un canal :	9
1.3.1. Le canal à Bruit Blanc Gaussien Additif (BBGA) :	9
1.3.2. Canal à évanouissements :	10
1.3.3. Évanouissement par trajets multiples :	11
a) <i>L'étalement temporel</i> :	12
b) <i>L'effet doppler</i> :	12
c) <i>Le modèle de Rayleigh</i> :	12
1.3.4. La sélectivité du canal :	13
a) <i>La sélectivité en fréquence</i> :	13
b) <i>La sélectivité en temps</i> :	13
1.4. Modulations numériques classiques :	14
1.4.1. La modulation à déplacement d'amplitude :	14
1.4.2. Modulation à déplacement de phase :	14
1.4.3. Modulation à déplacement de fréquence :	15

1.4.4.	Modulation d'amplitude en quadrature (QAM) :.....	15
1.5.	Conclusion :.....	17
	Chapitre 2 Système OFDM.....	18
2.1.	Introduction :.....	18
2.2.	Problème d'interférences.....	19
2.2.1.	Interférence entre symboles(IES).....	19
2.2.2.	Interférence entre porteuse(IEP).....	19
2.3.	Notion d'orthogonalité	20
2.4.	Préfixe cyclique (intervalle de garde):.....	21
2.5.	La chaine de transmission OFDM:.....	23
2.6.	La transformer de Fourier discrète:.....	24
2.7.	Principe de modulation OFDM:.....	25
2.8.	Principe de démodulation OFDM:.....	26
2.9.	Principes du modulateur et du démodulateur utilisant les transformées de Fourier discrètes :.....	27
2.10.	Avantages et inconvénients:.....	28
2.11.1.	Avantages :.....	28
2.11.2.	Inconvénients:.....	28
2.11.	Conclusion:.....	29
	Chapitre 3 Estimation du canal	30
3.1.	Introduction :.....	30
3.2.	Estimation du canal :.....	30
3.2.1.	Modèle du canal :.....	32
3.2.2.	L'arrangement des pilotes :.....	36
3.2.3.	Les critères d'estimation LSE et MMSE :.....	37
a.	<i>Estimateur LSE:</i>	37
b.	<i>Estimation LMMSE:</i>	38
c.	<i>Le LMMSE modifié:</i>	40
3.3.	L'interpolation :.....	44
3.3.1.	Interpolation linéaire (LI) :.....	44
3.3.2.	Interpolation du second ordre (SOI) :.....	44

3.3.3.	Interpolation par splines cubiques (SCI) :.....	45
3.3.4.	Interpolation passe-bas (LPI) :.....	45
3.4.	L'égaliseur ZF (zero forcing) :.....	45
3.5.	Conclusion :.....	46

Chapitre 4 paramètres et résultats des simulations47

1.1	Introduction :.....	47
1.2	Paramètres de la simulation :.....	47
1.2.1	Canal de transmission:.....	47
1.2.2	Le système OFDM :.....	49
	<i>a Nombre de sous-porteuses :.....</i>	49
	<i>b Modulation :</i>	49
	<i>c Intervalle de garde :.....</i>	50
1.2.3	Estimation du canal :.....	51
1.2.4	Critères d'évaluation :.....	52
	<i>a L'erreur quadratique moyenne (EQM) :.....</i>	52
	<i>b Le taux d'erreur par bit (BER) :.....</i>	52
1.2.5	Arrangement des pilotes :.....	52
1.2.6	L'égalisation :.....	53
1.3	Résultats des simulations:.....	53
1.3.1	Le canal utilisé:.....	53
1.3.2	Estimation du canal:.....	54
	<i>a Comparaison entre les critères d'estimation LS et LMMSE :.....</i>	54
	<i>b Comparaison entre les estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié :.....</i>	55
	<i>c Analyse de la complexité de calculs :.....</i>	55
	<i>d analyse des performances :.....</i>	57
1.4	Conclusion:.....	60
	Conclusion générale:.....	61
	Annexes:.....	62
	Bibliographie:.....	71

Liste des figures :

Figure 1.1 : Chaîne de transmission sans fil.....	6
Figure 1.2: Représentation d'un canal à BBAG.....	10
Figure 1.3 : Illustration du phénomène de trajets multiples sur le canal radio- mobile.....	11
Figure 1.4 : Constellations pour modulations E-QAM.....	17
Figure 2.1 : Réponse fréquentielle du canal et les sous bande.....	19
Figure 2.2 : Spectre du signal en sortie du modulateur OFDM, décomposé sur chaque porteuse.....	21
Figure 2.3 : Exemple d'intervalle de garde.....	22
Figure 2.4 : Signaux arrivant par différents trajets.....	23
Figure 2.5 : Schéma d'un système OFDM en bande de base.....	24
Figure 2.6 : Schéma d'une modulation analogique OFDM.....	26
Figure 2.7 : Schéma d'une démodulation analogique OFDM.....	27
Figure 3.1 canaux parallèles de Gaussiens.....	32
Figure 3.2 Les trois types de base d'arrangement des pilotes pour l'estimation du canal dans un système OFDM.....	37
Figure 3.3: Réduction de rang basée sur la décomposition en valeurs singulières....	43
Figure 4.1 : Exemple de la réponse impulsionnelle du canal.....	48
Figure 4.2 : La constellation 16-QAM.....	50
Figure 4.3 : La réponse fréquentiel du canal.....	53
Figure 4.4 : Une comparaison de l'EQM en fonction du SNR entre les estimateurs LSE et LMMSE.....	54
Figure 4.5 : Les éléments de λ_k de la matrice diagonale Λ	55
Figure 4.6 : Une comparaison de l'EQM en fonction du SNR entre les estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié pour différentes valeurs de p	57
Figure 4.7 : Une comparaison SER en fonction du SNR entre les estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié pour différentes valeurs de p	58
Figure 4.8 : L'évolution de l'EQM pour différentes valeur de p de l'estimateur LMMSE- modifié et un $SNR = 10dB$	59
Figure 4.9 : L'évolution du SER pour différentes valeur de p de l'estimateur LMMSE- modifié et un $SNR = 10 dB$	60

Lista des tableaux :

Tableau 4.1 : Paramètres de la réponse impulsionnelle du canal à générer.....	48
Tableau 4.2 : Paramètres utilisés dans nos simulations.....	51
Tableau 4.3 : Analyse de la complexité de calcul des estimateurs à l'aide des symboles pilotes en forme de bloc.....	56

Introduction générale

Dans les systèmes de communications sans fil, la connaissance de l'environnement de propagation ou encore le canal physique entre une antenne d'émission et une antenne de réception s'avère incontournable. En effet, dans la plupart des cas; le signal reçu est une somme de plusieurs versions retardées du signal émis. On dit alors que le signal émis se propage dans un canal multi-trajets. Ce canal peut engendrer plusieurs types d'évanouissements comme par exemple l'évanouissement sélectif ; c'est-à-dire des variations importantes dans le spectre du canal détériorant le signal. Une solution pour lutter contre ce canal est d'utiliser une modulation multi-porteuses.

Un canal est dit sélectif en fréquence lorsqu'il ne se comporte pas identiquement suivant la fréquence du signal. Certaines fréquences seront transmises plus rapidement que d'autres, ou encore seront atténuées plus que d'autres. Le signal sera alors déformé lors de la transmission ; les données seront dispersées dans le temps, pouvant mener à des interférences entre symboles communément appelées IES (Inter Symbole interférences). Ce phénomène de sélectivité en fréquence est aggravé par la présence de trajets multiples pour un même signal transmis. Du fait des nombreuses réflexions que le signal peut subir en environnement urbain, le récepteur recevra une série d'échos d'amplitudes et de retards variables. Cette problématique du canal à trajets multiples est critique dans le cas d'un canal radio-mobile, c'est-à-dire lorsque le récepteur et l'émetteur ne sont pas fixes l'un par rapport à l'autre. Les différents échos et amplitudes variant dans l'espace, ils varieront également dans le temps dans le cas d'un récepteur mobile.

La modulation multi-porteuses a été introduite à la fin des années 50, sa première utilisation était dans des systèmes de communications hautes fréquences militaires.

Quelques années plus tard, elle a été améliorée avec l'apparition du concept des signaux orthogonaux à bande limitée, concept que l'on appellera par la suite "Orthogonal Frequency Division Multiplexing" (OFDM) ou multiplex à division de fréquences orthogonales. La mise en œuvre de l'OFDM à l'époque consistait à utiliser des filtres de Nyquist [1]. Du fait de la complexité à générer des bancs de filtres de sinusoides, l'OFDM n'a pas tout de suite intéressé les industriels civils. 20 ans plus tard le schéma de modulation-démodulation a été simplifié avec l'utilisation de la transformée de Fourier discrète inverse (TFDI) à l'émission et de la TFD au niveau du récepteur, ce qui rend facile son implémentation numérique. Dans le milieu des années 1980, la technique OFDM a été développée dans les domaines industriels civils tels que le projet de radiodiffusion numérique DAB (Digital Audio Broadcasting).

Dans les systèmes de communications, la modulation utilisée peut être classifiée en tant que différentielle ou cohérente. Pour le cas différentiel, l'information est codée par la différence entre les symboles consécutifs; ainsi on n'a pas besoin de détecter les atténuations des sous-porteuses et aucune estimation de canal n'est exigée [2]. Cependant, ce cas de figure limite le nombre de bits par symbole et donne une perte en SNR de 3 dB comparé à la modulation cohérente [2]. Le sacrifice en performance lié à ce genre de modulation est souvent motivé par sa structure de récepteur simple qui évite l'utilisation des symboles pilotes. Cependant, si les sous-porteuses sont modulées avec cohérence, l'estimation des atténuations du canal pour chaque sous-porteuse est nécessaire pour les utiliser dans l'égaliseur de canal. En plus, la modulation cohérente permet l'utilisation de constellations arbitraires, en permettant un débit binaire beaucoup plus élevé que la modulation différentielle et une meilleure efficacité.

L'estimation de canal peut être effectuée à l'aide de l'insertion de symboles pilotes sur toutes les sous-porteuses d'un symbole OFDM avec une période spécifique, connue sous le nom «estimation du canal par pilotes de type bloc». Elle peut aussi être réalisée en insérant des symboles pilotes dans chaque symbole OFDM, il s'agit des méthodes appelées «estimation du canal par pilotes de type peigne »

L'estimation du canal se fait généralement sur la réponse fréquentielle si le canal est invariant dans un symbole OFDM, ou sur la réponse impulsionnelle du canal discret équivalent si le canal varie dans un symbole OFDM. Dans le premier cas on peut

estimer la réponse fréquentielle du canal aux fréquences des différentes sous-porteuses pilotes, en utilisant les critères LS ou LMMSE et en faisant une interpolation fréquentielle pour obtenir la réponse du canal [3].

Le critère LS est le plus simple, et le LMMSE est plus précis mais en même temps très complexe pour des applications pratiques, dans notre travail on va s'intéresser à la réduction de cette complexité. L'idée est d'utiliser la décomposition en valeurs singulières SVD sur la matrice d'auto-corrélation fréquentielle du canal. Ensuite il est facile de remarquer que sur la matrice diagonale comportant les valeurs propres ; c'est-à-dire l'énergie du canal, cette énergie est concentrée sur les premières valeurs. Ainsi une approximation peut être faite ; avec une matrice de rang inférieur p . Une estimation optimale du rang p ; est également proposée.

Le manuscrit comprend 4 différents chapitres dont le contenu est décrit ci-dessous.

Un premier chapitre est introductif, il décrit brièvement le fonctionnement d'une chaîne de transmission. Nous rappelons aussi dans ce chapitre des caractéristiques du canal, l'effet Doppler et l'effet des trajets multiples. Nous discutons à la fin des modulations classiques et en particulier de la modulation QAM.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons les principes généraux de la technique de multiplexage par division en fréquences orthogonales (OFDM) utilisée afin de faire face aux évanouissements par trajets multiples, on commence par discuter des principes généraux de la modulation multi-porteuses ensuite on a discuté l'orthogonalité et l'utilité de l'intervalle de garde qui permettent de minimiser IES et IEP entre les sous porteuses, à la fin on a cité les différents avantages et inconvénients de l'OFDM.

Le chapitre trois, décrit l'étape d'estimation du canal au niveau du récepteur à l'aide des symboles pilotes. Les différentes formes d'arrangements des pilotes sont présentées à savoir: l'arrangement en forme de blocs, en forme de peignes et en forme de treillis. Ensuite, nous discutons des différents critères d'estimation et d'interpolation de canal en proposant une méthode pour la réduction de complexité du critère LMMSE. Ce chapitre se termine par une brève description sur l'égaliseur ZF.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré aux différentes étapes de la simulation; c'est-à-dire : paramètres, résultats et interprétation.

Nous terminerons ce manuscrit par une conclusion générale dans laquelle nous présentons les principaux points étudiés ainsi que les résultats obtenus à l'issue de ce travail.

Chapitre 1 Généralités

1.1 Introduction :

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques généralités sur les communications numériques qui serviront à la bonne compréhension de la suite de ce travail. Nous allons dans un premier temps décrire le fonctionnement d'une chaîne de transmission numérique, de la source d'information binaire au destinataire, par les étapes successives de codage, de modulation, de transmission dans un canal physique et de démodulation.

Après avoir indiqué brièvement le fonctionnement d'une chaîne de transmission et le rôle des principaux éléments, nous introduirons les caractéristiques du canal commençons par modèle classique du canal à bruit blanc additif gaussien. Ensuite, le canal à évanouissements et le phénomène du multi-trajet tout en définissant l'étalement temporelle et l'effet doppler, après nous expliquons la sélectivité du canal en fréquence et en temps ainsi que le canal de Rayleigh. Nous ferons par la suite un aperçu sur les modulations numériques en général, nous détaillons en particulier la modulation QAM.

1.2 La transmission numérique :

Les systèmes de transmission numérique véhiculent de l'information entre une source et un destinataire en utilisant un support physique comme le câble, la fibre optique ou encore, la propagation sur un canal radioélectrique. Les signaux transportés peuvent être soit directement d'origine numérique, comme dans les réseaux de données, soient d'origine analogique (parole, image...) mais convertis sous une forme numérique. Le principe du système de transmission est alors d'acheminer l'information

de la source vers le destinataire avec le plus de fiabilité possible. Le schéma de principe d'une chaîne de transmission numérique est représenté sur la figure 1.1 :

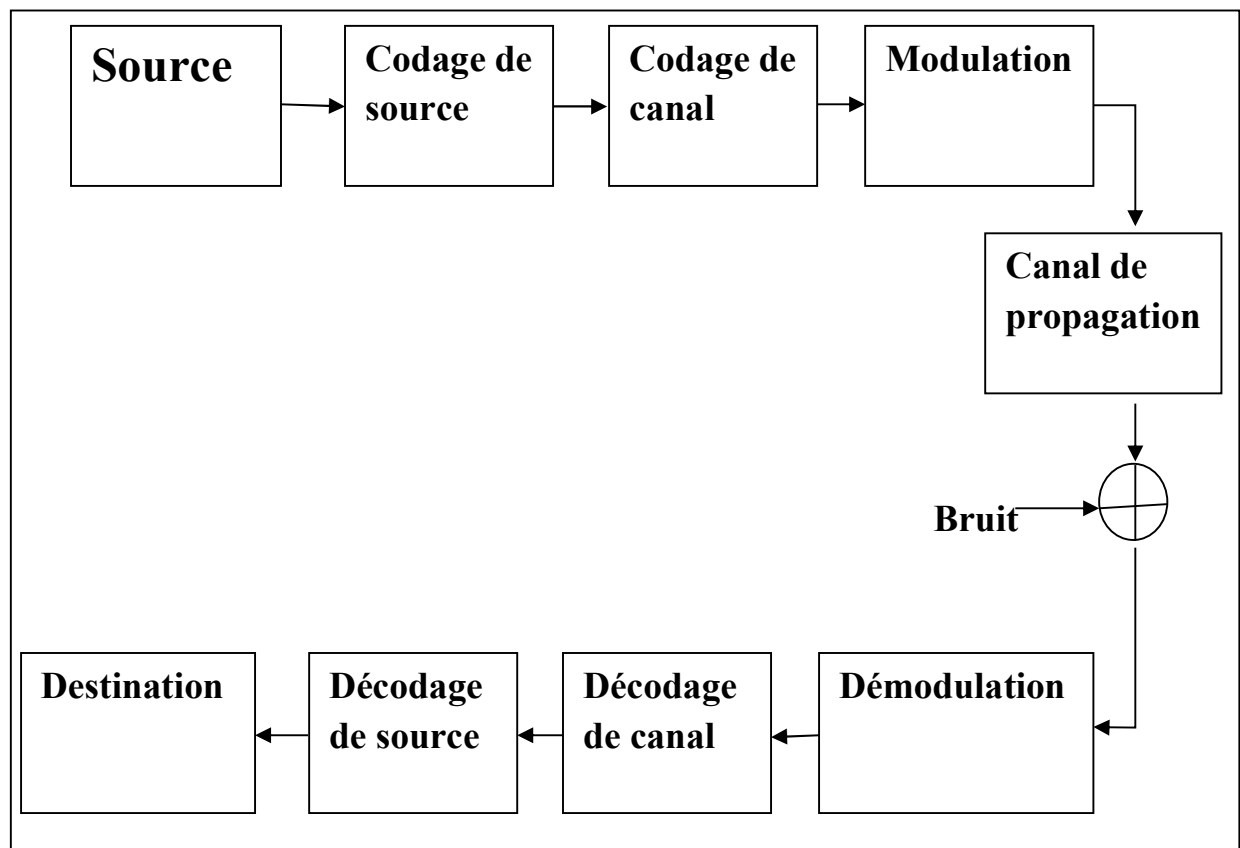


Figure 1.1 : Chaîne de transmission sans fil.

1.2.1 La source :

Dans de nombreux cas, on ne souhaite pas ou on ne peut pas transmettre directement un signal analogique. On le transmet alors après numérisation. Si la source délivre un message analogique on doit faire d'abord :

- l'échantillonnage : cette opération consiste à prélever sur le signal analogique dont l'évolution est continue dans le temps, des échantillons représentant l'amplitude aux instants de prélèvement, ces prélèvements sont réalisés régulièrement avec une périodicité constant T_e appelée période d'échantillonnage.

- Ensuite La quantification : pour quantifier un échantillon il suffit d'arrondir sa valeur à celle de l'échelon le plus proche sur une grille de niveaux. Lorsque les échelons sont à pas constant, la quantification est uniforme.
- A la fin on doit coder chaque échantillon quantifié sur m bits.

1.2.2 Codage source :

Le codage de source permet de compresser l'information moins utile sans perte d'information de façon à réduire le cout de la bande passante de la communication. Cette séquence binaire compressée de sortie du codeur de source est appelée séquence d'information. Le but du codage de source est de représenter la source avec un minimum de bits sans en diminuer la quantité d'information, c'est à dire de délivrer une source aussi proche que possible d'une source idéale.

1.2.3 Codage canal :

En pratique des erreurs peuvent se produire durant la communication, et elles sont principalement dues au bruit et aux interférences produites par le canal de transmission lui-même. Pour y remédier, on utilise Le codage canal qui est une fonction spécifique pour les transmissions numériques, elle vient juste après la numérisation et le codage de source, elle permet d'améliorer la qualité de transmission. son rôle principale est de détecter et/ou corriger des erreurs en réception, en insérant des éléments binaires dans la séquence d'information, ces éléments sont appelés "*Redondance*". Cette opération mène alors à une réduction du débit utile binaire de la transmission.

1.2.4 La modulation :

Le but de la modulation est d'adapter le signal à transmettre au canal de communication entre la source et le destinataire. On introduit donc deux opérations entre la source et le canal, une première opération appelée modulation et entre le canal et le destinataire, une seconde opération appelée démodulation.

Le modulateur génère un signal porteur, dont la forme d'onde est soit une onde sinusoïdale soit une suite d'impulsions. Dans le cas de la modulation numérique, le

modulateur transpose chaque ensemble de m bits du message entrant dans le modulateur en un signal physique de durée T , le tout formant alors un signal électrique susceptible d'être envoyé dans le canal en bande de base ou sur fréquence porteuse.

1.2.5 Le canal de propagation :

Le canal de transmission désigne le support, matériel ou non, qui sera utilisé pour véhiculer l'information de la source vers le destinataire, il peut être une ligne téléphonique, une liaison radio ou encore un support magnétique ou optique : bande magnétique ou disque compact.

Le canal sera généralement perturbé par un *bruit* qui dépendra de l'environnement et de la nature du canal : perturbations électriques, rayures, obstacles.

Les trois principaux aspects gênants lors de la transmission sur un canal radiofréquences sont donc le *bruit blanc gaussien additif*, les *multi trajets* et l'*effet Doppler*.

1.2.6 Le bruit :

Le bruit joue un rôle crucial dans les systèmes de communication, en théorie, il limite la capacité du canal; en pratique, il détermine le nombre d'erreurs. Le bruit est un signal aléatoire et on ne peut donc pas prédire sa valeur à un instant donné. La densité de probabilité d'une variable aléatoire x est définie comme étant la probabilité que la variable x prenne une valeur entre x_0 et $x_0 + dx$.

La probabilité que la variable x prenne une valeur comprise entre x_1 et x_2 est alors l'intégrale de la densité de probabilité entre les deux bornes x_1 et x_2 :

$$p\{x_1 < x < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \quad (1.1)$$

1.2.7 Décodage canal :

Le décodeur de canal exploite la redondance introduite par le codeur de canal pour détecter et puis corriger (si possible) les erreurs de transmission, il doit connaître le type de codage utilisé à l'émission pour qu'il puisse corriger les erreurs correctement. Sinon, il est possible de créer des erreurs en plus, lors de la sortie du décodage du canal. Certains types de codage ne sont pas très utilisés, car ils augmentent la complexité du système en émission et en réception.

1.2.8 Décodage source :

Le décodeur de source reçoit une séquence de données provenant du décodeur de canal, c'est un complément à l'encodeur de source. En connaissant le traitement réalisé par le codeur de source, il reconstitue le message original.

1.3 Caractéristique d'un canal :

1.3.1 Le canal à Bruit Blanc Gaussien Additif (BBGA) :

Le bruit blanc gaussien additif (« Additive White Gaussian Noise », « AWGN ») est une caractéristique fondamentale du canal de transmission, c'est le modèle de canal le plus fréquemment utilisé pour la simulation de transmissions numériques, qui est aussi un des plus faciles à générer et à analyser. Ce bruit est généré par des signaux parasites transitant sur le même canal (bruits d'origine externe) et par le bruit thermique des composants électroniques (bruits d'origine interne).

Pour le BBGA, on peut admettre que la distribution est gaussienne de la forme :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.2)$$

m est la valeur moyenne et σ^2 est la variance.

Dans le cas du bruit, cette valeur moyenne est nulle. Nous pouvons donc utiliser ces relations pour évaluer la probabilité que le bruit soit compris entre deux valeurs par exemple $-x_1$ et $+x_1$:

$$p\{-x_1 < x < x_1\} = \int_{-x_1}^{x_1} p(x) dx$$

On posant $u = \frac{x}{\sigma_x \sqrt{2}}$ on a $dx = \sigma_x \sqrt{2} du$

$$p\{-x_1 < x < x_1\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_1}^{x_1} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_1} e^{-u^2} du \quad (1.3)$$

Le bruit blanc n'explique pas l'évanouissement, la sélectivité de fréquence, et l'interférence entre symbole (IES). Le schéma de la figure 1.2 est une représentation d'un canal à BBAG qui s'exprime sous la forme :

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

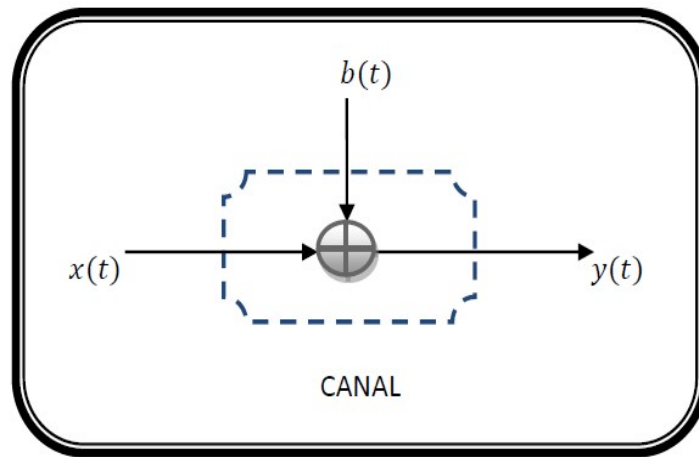


Figure 1.2: Représentation d'un canal à BBAG.

1.3.2 Canal à évanouissements :

Le signal reçu sur un canal radio-mobile résulte de la superposition de plusieurs répliques du signal émis caractérisées par des amplitudes, des phases et des angles d'arrivée différents. Ceci se traduit par des variations de l'amplitude et de la phase du signal reçu, appelées évanouissements multi-trajets [4]. On distingue alors deux types d'évanouissements dont les origines et les manifestations sont différentes: les évanouissements à grande échelle et les évanouissements à petite échelle.

Les évanouissements à grande échelle se manifestent par l'atténuation de la puissance moyenne du signal reçu occasionnée lorsque l'émetteur et le récepteur sont séparés par une grande distance. Ce phénomène résulte des contours saillants du terrain (forêts, collines, groupe d'immeubles...) situés entre l'émetteur et le récepteur. Des analyses statistiques sur les évanouissements à grande échelle ont permis de caractériser l'atténuation moyenne en fonction de la distance. La distribution de l'atténuation est de type log-normale.

L'évanouissement à petite échelle se traduit par des modifications de l'amplitude et de la phase du signal dues à des petits changements (de l'ordre d'une demi-longueur d'onde) du chemin parcouru par les signaux entre l'émetteur et le récepteur.

1.3.3 Évanouissement par trajets multiples :

L'environnement de système que nous allons examiner dans ce travail sera sans fil espaces intérieurs et urbains, où le chemin entre l'émetteur et le récepteur est bloqué par divers objets et obstacles. Par exemple, un environnement intérieur (indoor) a des murs et des meubles, alors que l'environnement extérieur contient des bâtiments et des arbres. Ceci peut être caractérisé par le multi-trajet comme indiqué ci-dessous par la figure 1.3.

La plupart des espaces intérieurs et urbains n'ont pas de ligne de propagation directe de vue entre l'émetteur et le récepteur. Le multi-trajet se produit à la suite de réflexions et diffractions par des objets du signal transmis dans un réseau sans fil.

Ces objets peuvent être des choses telles que les bâtiments et les arbres. Les signaux réfléchis arrivent avec des décalages de phase aléatoires comme chaque réflexion suit un chemin différent pour arriver au récepteur.

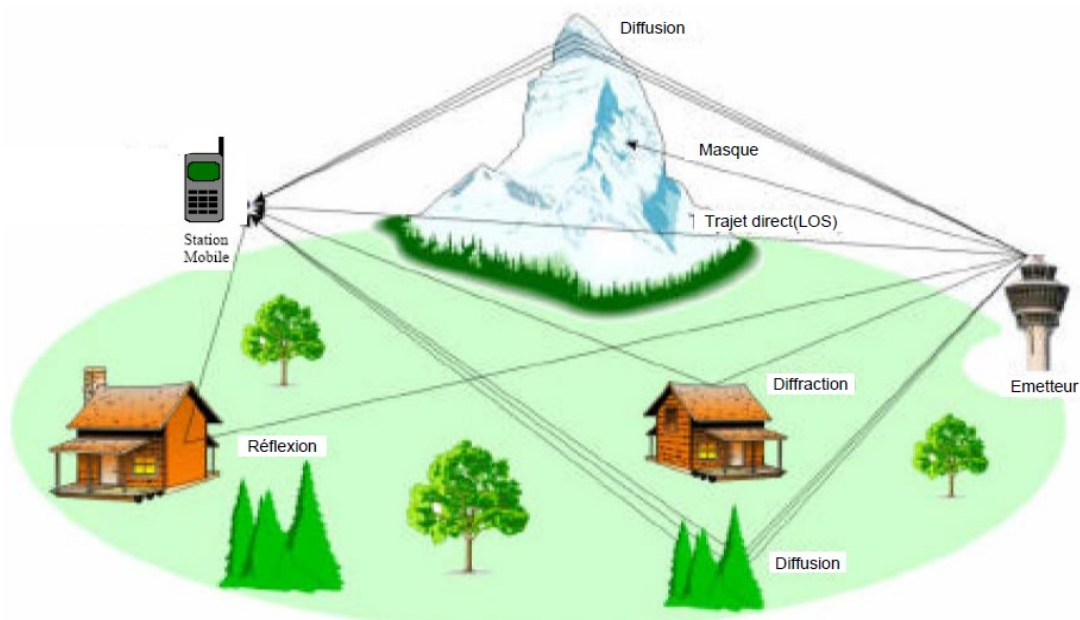


Figure 1.3 : Illustration du phénomène de trajets multiples sur le canal radio-mobile.

a) L'étalement temporel :

Le récepteur radio-mobile dispose de plusieurs répliques du signal émis, issues de trajets différents et retardés les uns par rapport aux autres. Le temps séparant l'arrivée du premier trajet de l'arrivée du dernier, noté τ_m est appelé étalement temporel maximal. Pour caractériser la dispersion temporelle du canal, on utilise la notion de bande de cohérence du canal, notée B_c , définie comme la gamme de fréquences sur laquelle les amplitudes des différentes composantes fréquentielles du signal ont une forte corrélation, i.e. subissent des atténuations semblables [4]. La bande de cohérence du canal est du même ordre de grandeur que l'inverse de l'étalement temporel maximal :

$$B_c = \frac{1}{\tau_m} \quad (1.4)$$

b) L'effet doppler :

Lors du déplacement du mobile ou des obstacles, on observe une modulation de la fréquence porteuse de l'onde émise : c'est l'effet Doppler. L'excursion de fréquence maximale est égale à $2f_{dmax}$, où f_{dmax} est la fréquence Doppler, fonction à la fois de la longueur d'onde émise λ et de la vitesse de déplacement du mobile v .

$$f_{dmax} = \frac{v}{\lambda} \quad (1.5)$$

L'effet doppler se manifeste par la variation de la fréquence instantanée de l'onde sur chacun des trajets. Si ϕ est l'angle d'arrivée du trajet, la variation de fréquence vaut :

$$f_{dmax} \cos \phi \quad (1.6)$$

L'effet Doppler peut poser des problèmes significatifs si la technique de transmission est sensible aux décalages de fréquences (ce qui est le cas des systèmes OFDM).

c) Le modèle de Rayleigh :

Le modèle de Rayleigh est utilisé dans la simulation de systèmes de type indoor car il tient compte des trajets multiples et permet donc de modéliser les phénomènes à petite échelle. Le modèle de Rayleigh représente les trajets multiples comme un unique coefficient complexe (une atténuation et un déphasage), variant dans le temps. Pour ce faire, on construit la variable aléatoire complexe représentant le coefficient

complexe du canal $h = X + Yj$, avec X et Y deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes $\sim N(0, \sigma^2)$.

L'atténuation du canal $\alpha = |h|$ est alors représentée comme une variable aléatoire suivant une loi de Rayleigh définie par sa densité de probabilité $p_B(\alpha)$ de paramètre σ

$$p_B(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right], \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (1.7)$$

Le canal de Rayleigh est généralement implémenté en choisissant X et $Y \sim N(0, \frac{1}{2})$ de sorte que $E\{\alpha^2\} = 1$. Ce choix permet de considérer les phénomènes à petites échelle, mais pas ceux à grande échelle.

1.3.4 La sélectivité du canal :

a) La sélectivité en fréquence :

La sélectivité en fréquence d'un canal est un concept lié au signal à transmettre. Il exprime le fait que le signal à transmettre a des composantes fréquentielles qui sont atténuées différemment par le canal de propagation. En d'autres termes le canal est dit sélectif en fréquence « *frequency selective* » si la largeur de bande B du signal est plus grande que la bande de cohérence B_c du canal. Dans le cas contraire le canal est dit non sélectif en fréquence ou à évanouissement plat « *flat fading* ».

Dans ce cas la réponse impulsionnelle du canal change d'une manière significative dans les limites de la bande du signal transmis et les composantes fréquentielles du signal transmis $s(t)$ séparées de la bande de cohérence subissent des atténuations différentes, en effet, le récepteur distingue plusieurs trajets multiples. Une sélectivité en fréquence ne fait que traduire une diminution du rapport signal sur bruit.

b) La sélectivité en temps :

Le canal est dit sélectif en temps « *time selective* » ou à évanouissements rapides « *fast fading* » si la durée T_s des symboles transmis est plus grande que la durée de cohérence T_c . Si ce n'est pas le cas le canal est dit non sélectif en temps ou à évanouissements lents « *slow fading* » ce qui correspond par exemple au cas de

transmissions en environnement indoor. Pour transmettre de manière fiable des signaux.

1.4 Modulations numériques classiques :

1.4.1 La modulation à déplacement d'amplitude : (ASK :Amplitude Shift Keying)

Consiste à faire varier l'amplitude du signal selon la loi de transcodage associée. Celui-ci s'exprime alors:

$$S(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.8)$$

Avec :
$$A(t) = \sum_k a_k f(t - kT_s)$$

Où $f(t)$ est un filtre de mise en forme des impulsions, appelé aussi (formant), par exemple une porte ($f(t) = 1$ si $t \in [0; T_s[$ et 0 ailleurs), ϕ est une phase de référence et $\{a_k\}$ la suite des symboles M-aires. Ce type de modulation est simple à réaliser, mais reste assez peu employé pour $M > 2$ car ses performances sont moins bonnes que celles d'autres modulations, notamment en ce qui concerne sa résistance au bruit.

1.4.2 Modulation à déplacement de phase : (PSK : phase shift keying)

Le seul paramètre susceptible de varier est la phase de l'onde porteuse. A la sortie du modulateur, le signal s'exprime:

$$S(t) = A \sum_k f(t - kT_s) \cos(\omega_0 t + \phi_k) \quad (1.9)$$

Où A représente l'amplitude constante de l'onde porteuse et ϕ_k la valeur de la phase pendant un intervalle de temps $[kT_s; (k+1)T_s[$. Pour une modulation M-PSK, ϕ_k prend ses valeurs dans un alphabet de M éléments:

$$\begin{cases} \phi_k = (2k+1)\frac{\pi}{M} & \text{pour } M > 2 \\ \phi_k = 0 \text{ ou } \pi & \text{pour } M = 2 \end{cases}$$

Avec $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

La complexité de l'ensemble émission/réception de la PSK augmente avec M , mais reste raisonnable, ce qui en fait une modulation fréquemment utilisée pour M allant de 2 à 16 avec de bonnes performances. Dans les inconvénients de cette, citons l'existence de sauts de phase importants qui font apparaître des discontinuités d'amplitude. Les modulations décalées ou tournées peuvent être une solution à ce problème.

1.4.3 Modulation à déplacement de fréquence : (FSK : frequency shift keying)

C'est la fréquence instantanée, dérivée de la phase instantanée, qui peut prendre plusieurs valeurs associées aux états possibles. Après modulation, le signal a pour expression:

$$S(t) = A \cos [(\omega_0 + 2\pi a_k \Delta F)t] \quad (1.10)$$

Avec les symboles a_k appartenant à $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$ et l'excursion en fréquence $2\Delta F = \frac{M}{T_s}$ où M est l'indice de modulation. Une modulation fréquemment utilisée considère le cas particulier $M=0.5$. Le spectre est alors concentré autour de la fréquence porteuse et cette modulation prend naturellement le nom de modulation à déplacement minimum de fréquence.

1.4.4 Modulation d'amplitude en quadrature (QAM) :

Les modulations précédentes ne constituent pas une solution satisfaisante pour utiliser efficacement l'énergie émise lorsque le nombre de points M est grand. En effet, dans la ASK les points de la constellation sont sur une droite, et dans la PSK les points sont sur un cercle. Or, la probabilité d'erreur est fonction de la distance minimale entre les points de la constellation, et la meilleure modulation est celle qui maximise cette distance pour une puissance moyenne donnée. Un choix plus rationnel est alors une modulation qui répartit les points uniformément dans le plan.

Pour ce faire, on écrit le signal modulé $S(t)$ sous la forme suivante:

$$S(t) = a(t) \cos (\omega_0 t + \phi_0) - b(t) \sin (\omega_0 t + \phi_0) \quad (1.11)$$

Où les deux signaux $a(t)$ et $b(t)$ ont pour expression :

$$a(t) = \sum_k a_k f(t - kT) \quad \text{et} \quad b(t) = \sum_k b_k f(t - kT)$$

Le signal modulé $S(t)$ est donc la somme de deux porteuses en quadrature, modulées en amplitude par les deux signaux $a(t)$ et $b(t)$.

On considère généralement que les symboles a_k et b_k prennent respectivement leurs valeurs dans le même alphabet à M éléments donnant ainsi naissance à une modulation possédant $E = M^2$ états. Chaque état est donc représenté par un couple $(a_k; b_k)$ ou ce qui revient au même par un symbole complexe $c_k = a_k + jb_k$.

Dans le cas particulier mais très fréquent où M peut s'écrire $M = 2^n$, alors les a_k représentent un mot de n bits et les b_k représentent aussi un mot de n bits. Le symbole complexe $c_k = a_k + jb_k$, peut par conséquent représenter un mot de $2n$ bits. L'intérêt de cette configuration est que le signal $S(t)$ est alors obtenu par une combinaison de deux porteuses en quadrature modulées en amplitude par des symboles a_k et b_k indépendants. Cette modulation prend naturellement le nom de modulation d'amplitude en quadrature (QAM) et si sa constellation comporte E états, on la note E-QAM.

Par exemple, la 16-QAM est construite à partir de symboles a_k et b_k qui prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{\pm d, \pm 3d\}$; où d est une constante donnée. La 16-QAM a été souvent utilisée, notamment pour la transmission sur ligne téléphonique du RTC (à 9600 bits/s) et pour les faisceaux hertziens à grande capacité (140 Mbits/s) développés dans les années 1980. Plus généralement lorsque les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{\pm d, \pm 3d, \pm 5d, \dots, (M-1)d\}$ avec $M = 2^n$, on obtient une modulation à 2^{2n} états et une constellation avec un contour carré dont font partie la 4-QAM, la 16-QAM, la 64-QAM et la 256-QAM.

La figure 1.4 représente les constellations de modulations de type QAM pour plusieurs nombres d'états. Lorsque le signal $S(t)$ est obtenu par une combinaison de deux porteuses en quadrature modulées en amplitude par des symboles a_k et b_k indépendants, cela simplifie le modulateur et le démodulateur. La réception d'un signal QAM fait appel à une démodulation cohérente et par conséquent nécessite l'extraction d'une porteuse synchronisée en phase et en fréquence avec la porteuse à

l'émission. Le signal reçu est démodulé dans deux branches parallèles, sur l'une avec la porteuse en phase et sur l'autre avec la porteuse en quadrature. Les signaux démodulés sont convertis par deux convertisseurs analogiques numériques (CAN), puis une logique de décodage détermine les symboles et régénère le train de bits reçus.

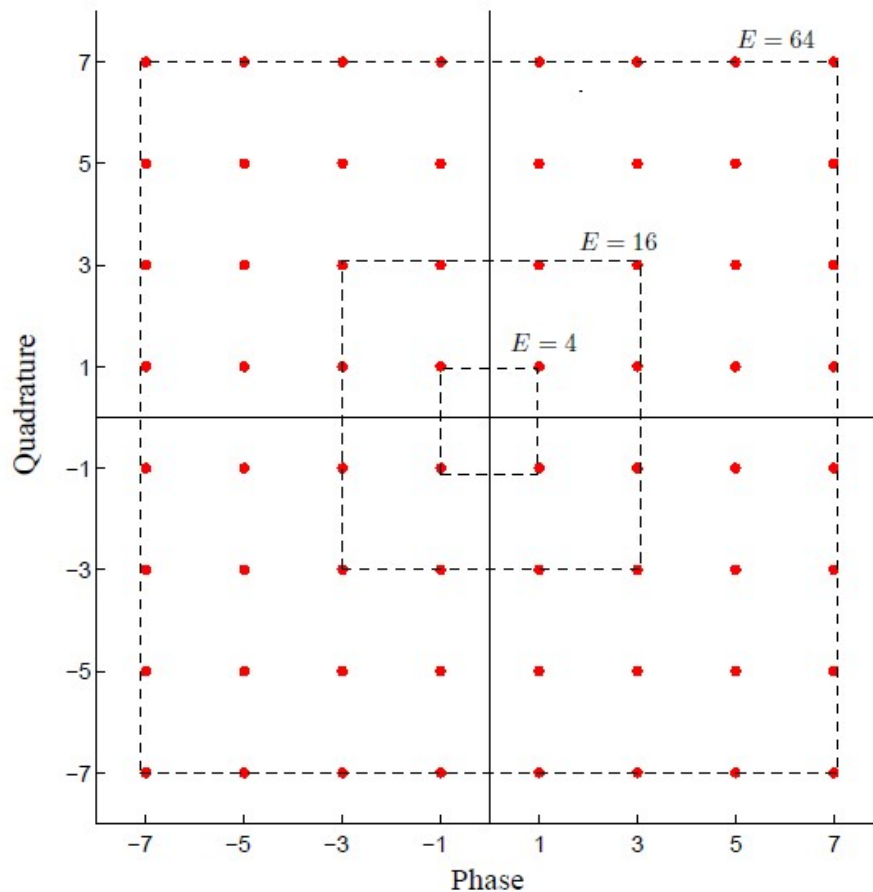


Figure 1.4 : Constellations pour modulations E-QAM.

1.5 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques généralités sur les transmissions numériques. Nous avons détaillé une chaîne classique de transmission. Les caractéristiques du canal que nous utiliserons dans ce mémoire ont été décrites, en particulier les évanouissements à trajets multiples. Un paragraphe a été consacré pour définir la sélectivité du canal en temps et en fréquence. Nous avons également présenté les types de modulation classiques.

Nous allons maintenant aborder dans le deuxième chapitre la technique modulation multi-porteuses OFDM.

Chapitre 1 Estimation du canal

1.1 Introduction :

Le canal de propagation vu par le récepteur peut varier d'une façon significative d'un symbole OFDM à l'autre, ou encore à l'intérieur d'un même symbole OFDM. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur. En fait, dans les systèmes de communication surtout à large bande, le canal radio est souvent à évanouissement sélectif en fréquence et variant dans le temps pour les canaux radio mobiles (Outdoor). Une estimation dynamique du canal devient une étape incontournable permettant d'assurer une démodulation correcte des symboles OFDM. Pour les canaux Indoor, le canal est considéré statique (pas de mobilité) mais peut être sélectif en fréquence notamment pour les applications très haut débit.

Dans ce chapitre on va s'intéresser à estimer les variations du canal à travers le temps, vu que le signal OFDM est très sensible à la sélectivité en fréquence, cela est due au recouvrement spectral plus au moins large d'où l'estimation et l'égalisation sont incontournables.

1.2 Estimation du canal :

L'estimation de canal peut être exécutée en insérant des symboles pilotes soit sur toutes les sous-porteuses d'un symbole OFDM avec une période bien précise connue sous le nom « estimation du canal par pilotes de type bloc », soit dans chaque symbole OFDM connu sous le nom « estimation du canal par pilotes de type peigne ». Ces méthodes, dites **PSAM** (Pilot Symbol Assisted Modulation), se divisent en trois grandes

classes suivant le type d'insertion effectué : **pilotes type blocs**, **pilotes type peignes** ou **pilotes en treillis**.

L'estimation du canal par pilotes de type bloc a été développée sous l'hypothèse d'un canal à évanouissement lent (canal invariant sur plusieurs symboles OFDM). Par contre, l'estimation du canal par pilotes de type peigne a été présentée pour satisfaire le besoin de l'égalisation quand le canal change d'un symbole OFDM à un autre ou dans un même symbole OFDM.

Deux principaux problèmes surgissent face à l'estimation du canal, premièrement la quantité de symboles pilotes à insérer et la complexité calculatoire de l'estimateur pouvant poursuivre correctement le canal.

Ces deux problèmes sont bien évidemment liés puisque les performances de l'estimateur dépendent de la quantité des pilotes insérés. Alors qu'il y a des méthodes qui n'utilisent aucune information pilote. Ces méthodes dites «aveugles».

Généralement si le canal est invariant dans un symbole OFDM, l'estimation du canal se fait sur la réponse fréquentielle, et si le canal varie dans un symbole OFDM elle se fait sur le canal discret équivalent. Dans le premier cas, des méthodes classiques (que nous appellerons conventionnelles) estiment la réponse fréquentielle du canal aux fréquences des différentes sous-porteuses pilotes, en utilisant le critère des moindres carrés (LS : "Least Square") ou le critère de l'erreur quadratique moyenne (MMSE : "Minimum Mean Square Error"). D'un symbole à l'autre le canal est corrélé, le critère LS ne permet pas de profiter de cette corrélation donc sa mise en œuvre revient à réaliser une estimation du canal symbole par symbole. En revanche le critère MMSE permet de prendre en compte cette corrélation.

Ces deux critères font une interpolation fréquentielle pour obtenir la réponse du canal [2, 8,9]. Le critère LMMSE a montré une meilleure performance que le critère LS [8].

L'interpolation du canal par pilotes de type peigne peut être basée sur l'interpolation linéaire, l'interpolation du second ordre, l'interpolation passe-bas, l'interpolation du spline cubique. L'interpolation du second ordre a montré une meilleure performance que l'interpolation linéaire. L'interpolation passe-bas a montré la meilleure performance de toutes les techniques d'interpolation [2].

1.2.1 Modèle du canal :

Cette section va montrer comment le canal deviendra diagonalisé d'une convolution cyclique du fait de l'insertion du préfixe cyclique. Si le préfixe cyclique est plus long que la réponse impulsionnelle du canal, nous pouvons montrer que le système OFDM peut être considéré comme un ensemble de canaux parallèles gaussiens, schématisé dans la figure 3.1.

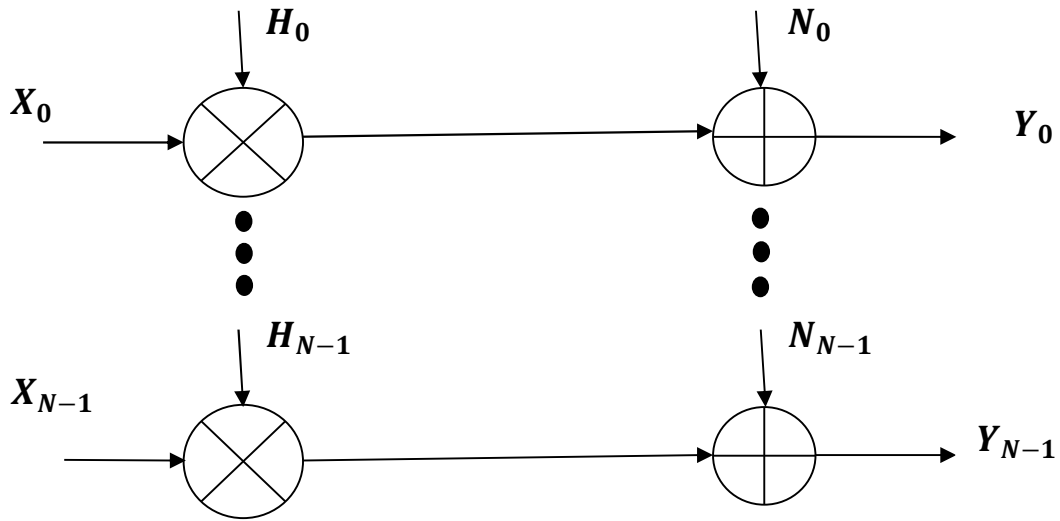


Figure 3.1 canaux parallèles de Gaussiens.

Soient X_n les symboles de données ayant des valeurs complexes prises dans un alphabet fini selon la constellation de la modulation choisie, T_s représente la durée d'un symbole (trame) OFDM, et les N sous-porteuses sont distantes de Δf . Les symboles d'entrée X_n sont organisés en blocs de taille $N \times 1$. Le $k^{ième}$ bloc est donné par :

$$X = \begin{bmatrix} X_{k,0} \\ X_{k,1} \\ \vdots \\ X_{k,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Où les éléments $X_{N,k}$ sont les symboles à émettre à l'instant n sur la $k^{ième}$ sous-porteuse, avec l'application de l>IDFT au bloc de symboles X . on obtient le vecteur :

$$x = F^H X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Où F désigne la matrice TFD de taille $N \times N$, donnée par la relation. La matrice F^H désigne donc l'opération inverse (TDFI), avec $(.)^H$ qui indique le transposé conjugué.

Dans les systèmes OFDM, c'est l'ajout d'une extension cyclique à chaque bloc qui permet de prendre en compte le comportement sélectif du canal. A partir du vecteur x de taille $N \times 1$, on forme un nouveau vecteur $\tilde{x}$ de taille $N_s \times 1$, tel que :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_{N-N_g} \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{Soit } g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{m-1} \end{bmatrix} \text{ et } n = \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La réponse impulsionnelle du canal et le bruit AWGN respectivement. On peut donc définir

$$H = DFT_N(g) = Fg \quad (3.5)$$

$$\text{Et} \quad N = Fn \quad (3.6)$$

Au récepteur, le vecteur reçu est donné par :

$$\tilde{y} = \tilde{x} \otimes g + \tilde{n} \quad (3.7)$$

Où $\otimes$ dénote l'opération de convolution!!!!!!.

On supprime le préfixe cyclique, donc les N premiers symboles qui contiennent de l'interférence entre les blocs sont supprimés, c'est-à-dire :

$$y = \begin{bmatrix} y_{N_0} \\ y_{N_0-1} \\ \vdots \\ y_{N+N_0-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Sous la supposition que les interférences sont complètement éliminés, on peut dériver le vecteur reçu y de taille $N \times 1$ comme suit :

$$y = \tilde{H}\tilde{x} + n \quad (3.9)$$

Où $\tilde{H}$ est une matrice de taille $N \times N_s$, qui représente l'effet du canal. Elle est donnée par :

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{L-1} & g_{L-2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & g_{L-1} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Puisque les N_g premiers éléments de $\tilde{x}$ sont identiques aux N_g derniers, on peut écrire

$$y = H_c x + n \quad (3.11)$$

Où H_c est une matrice de taille $N \times N$ obtenue à partir de (3.10), en superposant les N_g premières colonnes aux N dernières, ce qui donne :

$$H_c = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & g_{L-1} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & g_{L-1} \\ g_{L-1} & g_{L-2} & \ddots & g_0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & g_{L-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{L-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

H_c Étant une matrice circulante, on peut exprimer sa décomposition en valeurs propres comme suit :

$$H_c = F^H H F \quad (3.13)$$

Avec la matrice H qui contient dans sa diagonale la réponse fréquentielle du canal est

donnée par :

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Avec

$$\mathbf{H}_k = \sum_{m=0}^{L-1} g_m e^{-j2\pi km/N} \quad (3.15)$$

En d'autres mots, H contient sur sa diagonale la DFT à N points de la réponse impulsionnelle du canal. On peut écrire le signal reçu comme :

$$\begin{aligned} y &= H_c x + n \\ &= F^H H F x + n \\ &= F^H H F F^H X + n \\ &= F^H H X + n \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour retrouver les symboles émis, on applique la DFT au vecteur y . ce qui donne :

$$\begin{aligned} Y &= F y \\ &= F F^H H X + F n \\ &= H X + N \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ou sous la forme scalaire suivante :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{N}_k \quad k = 0, \dots, N \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) montre que l'on peut égaliser très facilement en multipliant chaque sortie de la DFT par le coefficient H_k^{-1} correspondant. Cependant, selon la valeur de H_k , la transmission sur une sous-bande est dite bonne ou mauvaise.

L'atténuation est donné par :

$$H[k] = G\left(\frac{k}{NT_s}\right), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

Où $G(.)$ est la réponse en fréquence du canal au cours de l'OFDM courant et le symbole T_s est la période d'échantillonnage du système. La réponse impulsionnelle du canal peut être exprimée sous la forme :

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k \delta(\tau - \tau_k T_s) \quad (3.20)$$

Où α_k sont des variables indépendantes de moyenne nulle, aléatoires complexes gaussiennes, et τ_k est le retard du k -ième impulsion.

1.2.2 L'arrangement des pilotes :

Pour effectuer l'estimation on utilise des porteuses dites "pilotes" se sont des porteuses dont le gain, la phase et la position dans la trame OFDM sont connus de l'émetteur et du récepteur.

On les inserts sur certains points à l'entrée de l'IFFT. L'utilisation des symboles pilotes réduit le taux de transmission de l'information et il faut garder leurs aussi petit que possible. Le motif des pilotes dans la trame OFDM dépend de la sélectivité du canal [5] Tel que:

- pour un canal très sélectif en fréquence mais à évanouissement lent, on utilisera un arrangement dans le domaine fréquentiel, ou chaque sous porteuse d'un symbole OFDM donné est dédiée à l'estimation du canal (figure3.a). Dans cette configuration, les symboles pilotes sont distribués d'une façon périodique sous forme de blocs. Puisque dans ce cas le canal est à évanouissement lent, les symboles pilotes de ce bloc (trame) sont insérés sur toutes les sous-porteuse, donc pour toutes les fréquences mais à des intervalles de temps K_t .
- Pour un canal moyennement sélectif en fréquence, mais très sélectif en temps (à évanouissement rapide), on utilisera un arrangement dans le domaine temporel. Dans cette configuration, certaines fréquences sont exclusivement dédiées à l'estimation de canal (figure3.b) à des intervalles K_f , mais présentes sur chaque trame pour suivre l'évolution temporelle du canal qui varie rapidement.
- Il existe aussi d'autres motifs par exemple une configuration qui fait combiner entre les deux précédentes, pilotes en treillis, où les symboles pilotes sont placés à des intervalles de temps K_t et des intervalles de fréquence K_f (figure3.c).

La figure suivante illustre ces trois principales dispositions : les porteuses pilotes sont en noir et les porteuses d'information en blanc.

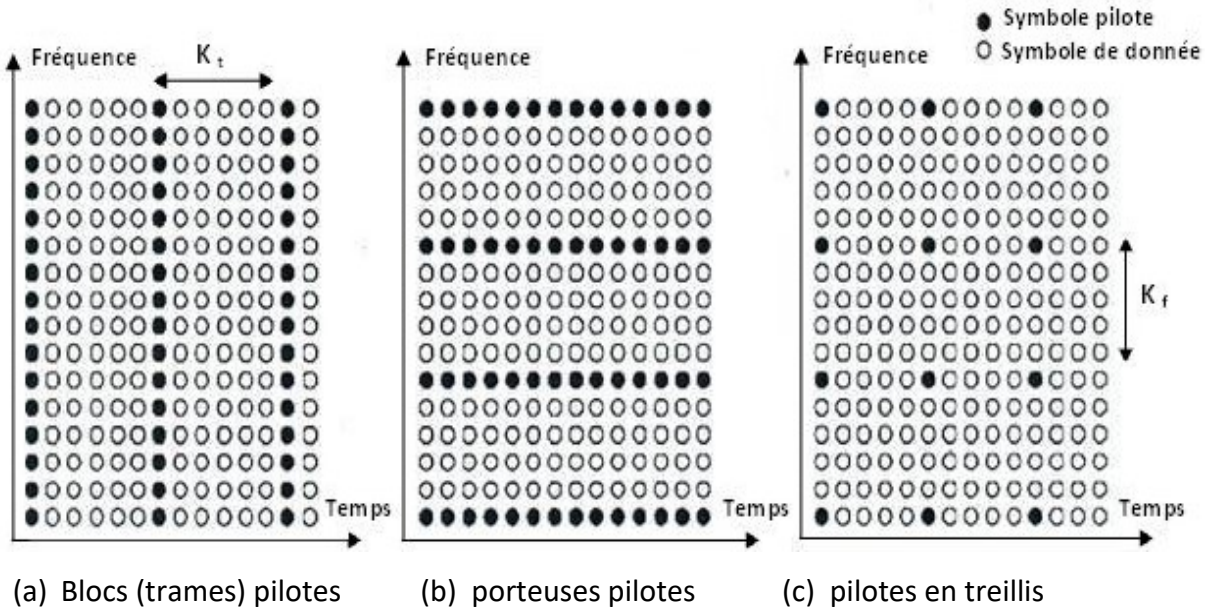


Figure 3.2 Les trois types de base d'arrangement des pilotes pour l'estimation du canal dans un système OFDM.

1.2.3 Les critères d'estimation LSE et MMSE :

Parmi les méthodes d'estimation, celles basées sur le critère des moindres carrés ou LSE (Least Square Error en anglais) et sur le critère de l'erreur quadratique moyenne minimum ou MMSE (Minimum Mean Square Error) sont celles les plus étudiées. Les développements suivants donnent les coefficients des deux estimateurs :

a Estimateur LSE :

Le critère des moindres carrés vise à minimiser le paramètre J_{LS} , définie Par

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS})^H (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS})$$

comme suit:

$$J_{LS} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS})^H (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS}) \quad (3.21)$$

$$J_{LS} = (\mathbf{y}^H - \hat{\mathbf{g}}_{LS}^H \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H) (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS})$$

$$J_{LS} = (\mathbf{y}^H \mathbf{y} - \hat{\mathbf{g}}_{LS}^H \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS} + \hat{\mathbf{g}}_{LS}^H \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X}\mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{LS}) \quad (3.22)$$

Pour minimiser J_{LS} , nous devons faire sa dérivée de l'équation (3.22) par rapport à $\hat{\mathbf{g}}_{LS}^H$, soit :

$$\partial J_{LS} / \partial \hat{\mathbf{g}}_{LS}^H = [\mathbf{0} - \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} - \mathbf{0} + \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F} \hat{\mathbf{g}}_{LS}]$$

$$\mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F} \hat{\mathbf{g}}_{LS} = \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{g}}_{LS} = (\mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} \quad (3.23)$$

Puisque les colonnes de $\mathbf{F}$ sont orthonormées, $\hat{\mathbf{g}}_{LS}$ génère l'estimation du canal $\hat{\mathbf{H}}_{LS}$ dans le domaine fréquentiel.

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{g}}_{LS} = \mathbf{F} (\mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{F} (\mathbf{F}^H)^{-1} (\mathbf{X}^H)^{-1} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y} \quad (3.24)$$

Donc les coefficients de l'estimateur LS sont donnés par la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \left[\frac{y_0}{X_0}, \frac{y_1}{X_1}, \dots, \frac{y_{N-1}}{X_{N-1}} \right]^T \quad (3.25)$$

Les estimateurs LS sont calculés avec une très faible complexité, mais ils souffrent d'une haute erreur quadratique moyenne.

b Estimation LMMSE :

L'estimateur MMSE emploie les statistiques du second ordre sur le canal pour minimiser l'erreur quadratique moyen. Le critère du minimum d'erreur quadratique moyenne vise à minimiser la fonction de cout J_{MMSE} , définie comme l'erreur quadratique moyenne entre le canal réel et estimé en utilisant la corrélation fréquentielle du canal :

$$J_{MMSE} = E[\|e\|^2] = E[\|(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}_{MMSE})\|^2] \quad (3.26)$$

$$J_{MMSE} = E[\|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{y}\|^2]$$

$$J_{MMSE} = E[(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{y})(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{y})^H]$$

$$J_{MMSE} = E[(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{y})(\mathbf{g}^H - \mathbf{y}^H \mathbf{A}^H)]$$

$$J_{MMSE} = E[gg^H - gy^H A^H - Ayg^H + Ayy^H A^H] \quad (3.27)$$

Pour minimiser J_{MMSE} on doit faire la dérivée de (3.27) par rapport à A^H , soit :

$$\begin{aligned} \partial J_{MMSE} / \partial A^H &= \mathbf{0} - E[gy^H] - \mathbf{0} + A * E[yy^H] = \mathbf{0} \\ -R_{gy} + AR_{yy} &= \mathbf{0} \\ A &= R_{gy} R_{yy}^{-1} \\ \hat{g}_{MMSE} &= Ay = R_{gy} R_{yy}^{-1} y \end{aligned} \quad (3.28)$$

Notons que :

$$\begin{aligned} R_{gy} &= E[gy^H] = E[g(XFg + n)^H] \\ R_{gy} &= E[gg^H F^H X^H] + E[gn^H] = E[gg^H F^H X^H] + \mathbf{0} \\ R_{gy} &= R_{gg} F^H X^H \end{aligned} \quad (3.29)$$

Et :

$$\begin{aligned} R_{yy} &= E[yy^H] = E[(XFg + n)(XFg + n)^H] \\ R_{yy} &= E[XFgg^H F^H X^H] + E[nn^H] \\ R_{yy} &= XFR_{gg}F^H X^H + \sigma_n^2 I_N \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} R_{hh} &= E[hh^H] = E[(Fg)(Fg)^H] = FE[gg^H]F^H \\ R_{hh} &= FR_{gg}F^H \end{aligned} \quad (3.31)$$

R_{gy} et R_{yy} Sont respectivement la matrice de covariance entre g et y et la matrice d'auto covariance de y .

R_{gg} et R_{hh} sont respectivement les matrices d'auto covariance de g et h , et σ_n^2 est la variance du bruit. Puisque les colonnes de F sont orthonormées, $\hat{g}_{MMSE}$ génère l'estimation du canal $\hat{H}_{MMSE}$ dans le domaine fréquentiel.

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{g}}_{MMSE}$$

D'après l'équation (3.28) on trouve :

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{F}\mathbf{R}_{gy}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{y} \quad (3.32)$$

En remplaçant les équations (3.29) et (3.30) dans (3.32) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_N)^{-1}\mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H + (\sigma_n^2\mathbf{X}^H)^{-1})^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H(\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H + \sigma_n^2(\mathbf{X}^H)^{-1})^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H(\mathbf{F}\mathbf{R}_{gg}\mathbf{F}^H + \sigma_n^2(\mathbf{X}^H)^{-1}\mathbf{X}^{-1})^{-1}\mathbf{X}^{-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{R}_{hh}(\mathbf{R}_{hh} + \sigma_n^2(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^{-1})^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS} \quad (3.33)$$

Enfin, un estimateur MMSE est utilisé pour estimer la réponse fréquentiel du canal. Cet estimateur tiens compte des corrélations du canal et du modèle du bruit. Il donne de meilleures performances en termes du SER et EQM par rapport aux autres estimateurs par pilotes de type peigne tant que le canal est invariant dans un symbole OFDM. Le problème avec l'estimateur MMSE c'est à sa complexité relativement élevé. On remarque qu'une inversion et une multiplication sont nécessaires dans l'expression (3.33), ce qui rend LMMSE plus complexe que LSE, surtout pour une matrice $\mathbf{R}_{hh}$ de grande taille. Cependant, cet estimateur est optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne. De plus, comme il est montré dans [7]. Bien que cet estimateur soit optimal, son utilisation est limitée par deux inconvénients majeurs: sa complexité, et la nécessité de connaître la matrice de covariance $\mathbf{R}_{hh}$ qui est a priori inconnue du récepteur.

La réduction de la complexité de cet estimateur est l'objectif de ce mémoire et sera traité par la suite.

c Le LMMSE modifié :

La complexité de l'estimateur LMMSE peut être réduite en utilisant la décomposition en valeur singulière de la matrice d'autocorrélation R_{hh} . Par conséquent nous pouvons appliquer une réduction de rang et utiliser seulement les éléments les plus significatifs de R_{hh} . Les estimateurs LMMSE modifiés sont largement étudiés [11, 12, 13] pour réduire la complexité qui caractérise le modèle LMMSE la figure 3.3 illustre la simplification qu'on va faire dans notre travail, on s'intéresse à l'estimateur LMMSE utilisant la décomposition en valeur singulière, qui combine les techniques de simplification suivantes :

1. La première simplification est de remplacer le terme $(XX^H)^{-1}$ dans l'équation (3.33) par son espérance tel que :

$$E\{(XX^H)^{-1}\} = E\left|\frac{1}{x_k}\right|^2 I \quad (3.34)$$

Donc, notre estimateur simplifié peut être exprimée comme suit :

$$\hat{H}_{MMSE} = R_{hh}(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR}I)^{-1}\hat{H}_{LS} \quad (3.35)$$

Où I est la matrice d'identité, SNR est le rapport moyen signal sur bruit est défini comme $E|x_k|^2/\sigma_n^2$. β est une constante dépendant de constellation de signaux. Pour le cas de 16-QAM :

$$\beta = E|x_k|^2 E|1/x_k|^2 = 17/9$$

Ainsi, l'inverse ne doit être calculé qu'une seule fois par estimation de canal.

2. La deuxième simplification consiste en l'utilisation de la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice R_{hh} comme suit :

$$R_{hh} = U\Lambda U^H \quad (3.36)$$

Où U est une matrice avec des colonnes orthonormées et Λ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{N-1} \geq 0$ sur sa diagonale.

Le LMMSE minimise l'erreur quadratique moyenne entre le canal actuel et estimé en utilisant la corrélation de la fréquence du canal d'évanouissement lent, son équation est la suivante [14]:

$$\hat{H}_p = R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1} \hat{H}_{LS} \quad (3.37)$$

Ou $\mathbf{R}_{h\hat{h}_{ls}}$ est la corrélation croisée entre le canal atténuation vecteur $\mathbf{h}$ et l'estimation LSE. Et $\mathbf{R}_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}$ matrice d'auto-corrélation de l'estimation LS donner par :

$$\mathbf{R}_{h\hat{h}_{ls}} = E\{\mathbf{h}\hat{\mathbf{h}}_{ls}^H\} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{R}_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}} = E\{\hat{\mathbf{h}}_{ls}\hat{\mathbf{h}}_{ls}^H\} \quad (3.39)$$

Puisque le bruit blanc n'est pas corrélé avec l'atténuation du canal, la corrélation croisée entre le canal $\mathbf{h}$ et $\mathbf{h}_{ls}$ est le même que l'autocorrélation du canal . Ainsi, nous pouvons remplacer $\mathbf{R}_{h\hat{h}_{ls}}$ avec $\mathbf{R}_{hh}$.Aussi l'auto-corrélation de $\mathbf{R}_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}$ est équivalente à $\mathbf{R}_{hh}$ plus la puissance du bruit σ^2 et la puissance du signal.

En appliquant la décomposition en valeurs singulières comme suit :

$$\mathbf{R}_{h\hat{h}_{ls}}\mathbf{R}_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1/2} = \mathbf{Q}_1\mathbf{D}\mathbf{Q}_2^H \quad (3.40)$$

Où $\mathbf{Q}$ est une matrice avec des colonnes orthonormées et $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières $\mathbf{d}_0 \geq \mathbf{d}_1 \geq \mathbf{d}_2 \geq \dots \mathbf{d}_{N-1} \geq \mathbf{0}$ sur sa diagonale.

Puisque $\mathbf{R}_{h\hat{h}_{ls}} = \mathbf{R}_{hh}$ et $\mathbf{R}_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}} = \mathbf{R}_{hh} + \frac{\beta}{SNR}\mathbf{I}$ partagent tous les mêmes valeurs singulières que $\mathbf{R}_{hh}$ de sorte que nous pouvons simplifier l'expression :

$$\mathbf{R}_{h\hat{h}_{ls}}\mathbf{R}_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1/2} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \left(\mathbf{U} \left(\mathbf{\Lambda} + \frac{\beta}{SNR}\mathbf{I} \right) \mathbf{U}^H \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda} \left(\mathbf{\Lambda} + \frac{\beta}{SNR}\mathbf{I} \right)^{-1/2} \mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{Q}_1\mathbf{D}\mathbf{Q}_2^H \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = \mathbf{U} \text{ et } \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} \left(\mathbf{\Lambda} + \frac{\beta}{SNR}\mathbf{I} \right)^{-1/2}$$

Le meilleur rang p estimateur est alors :

$$\hat{H}_p = Q_1 \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_2 R_{h_{ls}h_{ls}}^{-1/2} \hat{H}_{LS} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= U \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (U(\Delta + \frac{\beta}{SNR} I) U^H)^{-1/2} \hat{H}_{LS} \\ &= U \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\Delta + \frac{\beta}{SNR} I)^{-1/2} U^H \hat{H}_{LS} \\ &= U \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \hat{H}_{LS} \end{aligned} \quad (3.44)$$

En prenant notamment que les p premières valeurs singulières correspondant à la plupart des valeurs importantes de R_{hh} correspondant au coin supérieur gauche de D_p , la meilleure approximation rang p de l'estimateur est :

$$\hat{H}_p = U \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \hat{H}_{LS} \quad (3.45)$$

Où $\Delta_p = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N)$ est une matrice diagonale définie par :

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{\beta}{SNR}}, & k = 1, 2, \dots, p \\ 0, & k = p + 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.46)$$

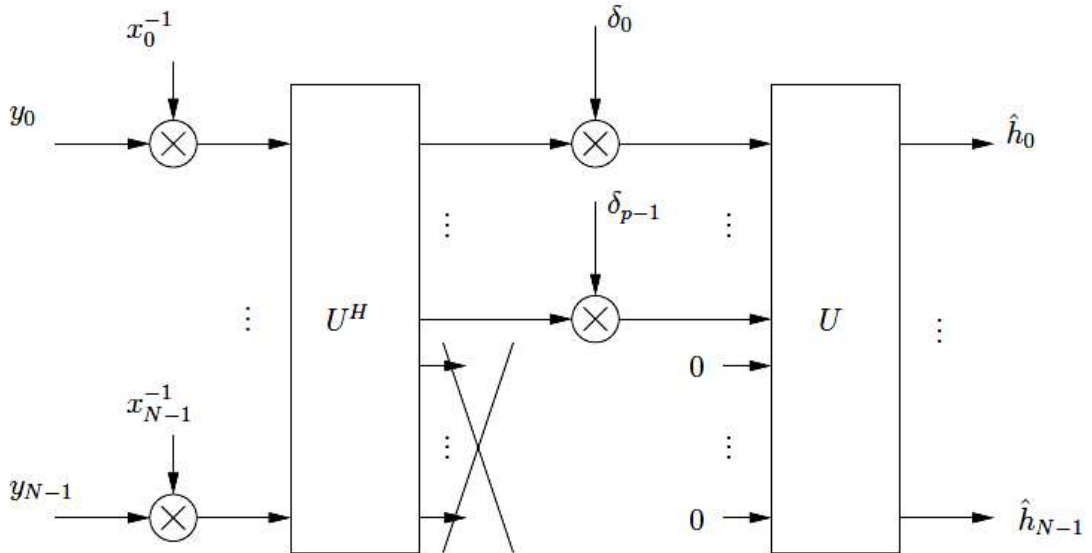


Figure 3.3: Réduction de rang basée sur la décomposition en valeurs singulières.

1.3 L'interpolation :

L'estimation LSE permet d'obtenir la réponse fréquentielle (bruitée) sur les porteuses pilotes. Dans un grand nombre de cas, il est alors nécessaire d'effectuer une **interpolation** entre les sous-porteuses pilotes pour pouvoir estimer le canal sur l'ensemble du réseau temps-fréquence. On a vu que LMMSE pouvait servir de filtre interpolateur. Cependant, sa complexité fait qu'on préfère souvent utiliser des interpolations plus simples, telles que celles présentées dans cette partie.

1.3.1 Interpolation linéaire (LI) :

L'interpolation linéaire a été étudiée dans [3], [4], elle est utilisée pour estimer le canal aux sous-porteuses de données entre deux sous-porteuses pilotes adjacentes $\hat{H}^{(p)}(m)$ et $\hat{H}^{(p)}(m+1)$ est donnée par :

$$\hat{H}(mK_f + l) = \hat{H}^{(p)}(m) + \frac{l}{K_f} \left(\hat{H}^{(p)}(m+1) - \hat{H}^{(p)}(m) \right) \quad 0 \leq l < K_f \quad (3.48)$$

1.3.2 Interpolation du second ordre (SOI) :

Avec cette méthode l'estimation de canal aux sous-porteuses de données est obtenue par la combinaison linéaire des trois estimations des sous-porteuses pilotes adjacentes. Cette méthode s'exécute mieux que la méthode linéaire.

Le canal estimé par l'interpolation de second ordre est donné par:

$$\hat{H}(mK_f + l) = c_1 \hat{H}^{(p)}(m-1) + c_0 \hat{H}^{(p)}(m) + c_{-1} \hat{H}^{(p)}(m+1) \quad (3.49)$$

Tel que :

$$\begin{cases} c_1 = \alpha(\alpha-1)/2 \\ c_0 = -(\alpha-1)(\alpha+1) \\ c_{-1} = \alpha(\alpha+1)/2 \\ \alpha = l/N \end{cases}$$

1.3.3 Interpolation par splines cubiques (SCI) :

Cette méthode consiste à produire un polynôme continu entre les points de données (la fonction spline dans Matlab). Dans [6], [4], il est démontré que l'interpolation par splines cubiques s'exécute mieux que l'interpolation linéaire.

1.3.4 Interpolation passe-bas (LPI) :

La méthode LPI s'exécute en insérant des zéros dans la séquence originale $\hat{H}^{(p)}$ et puis en appliquant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie (FIR) (la fonction "interp" dans Matlab), qui permet aux données originales de passer sans changement. Cette méthode minimise l'erreur quadratique moyenne entre les points interpolés.

1.4 L'égaliseur ZF :

L'égalisation dans les systèmes OFDM est très simple. C'est l'un des avantages principaux de l'utilisation de l'OFDM au lieu des systèmes à simple porteuse.

L'égalisation de canal dans les systèmes OFDM peut être faite par juste une simple division dans le domaine fréquentiel.

Dans l'OFDM tant que le préfixe cyclique demeure assez long par rapport à la réponse impulsionnelle du canal pour maintenir l'orthogonalité entre les sous-porteuses, l'égalisation peut être réalisée simplement par l'égaliseur ZF [1]. L'égaliseur ZF minimise la distorsion maximale entre les symboles à la sortie de l'égaliseur.

Une prolongation cyclique plus longue que la réponse impulsionnelle de canal peut supprimer l'IES et l'IEP. Dans l'OFDM, l'égaliseur ZF aura lieu dans le domaine fréquentiel. Donc, le rôle de l'égaliseur devient juste une opération d'ajustement de gain et de phase sur chaque sous-porteuse.

1.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié une méthode d'estimation de canal MMSE présentant une sélectivité en fréquence pour les systèmes de type OFDM, pour des données non codées. Cette méthode présente de très bonnes performances par rapport aux autres estimateurs, mais son inconvénient majeur est sa complexité.

Cependant, pour lutter contre cet inconvénient on propose une modification dans l'équation de cet estimateur, qui élimine le calcul de la matrice inverse. Ensuite on décrit brièvement les méthodes d'interpolation et de l'égalisation ZF, on donne aussi dans ce chapitre le modèle du canal parallèle Gaussien.

Chapitre 2 système OFDM

2.1 Introduction:

Dans ce deuxième chapitre nous nous intéressons aux modulations multi-porteuses type OFDM, qui est le multiplexage par division en fréquences orthogonales.

Afin de mettre en évidence les progrès apporté par l'OFDM, revenons d'abord à la fin des années 50 et au début des années 60 lors de l'apparition des modulations multi porteuses. On constate qu'il y avait deux problèmes majeurs, le premier étant une faible efficacité spectrale (pour éviter l'interférence entre porteuses), le second étant une difficulté de mise en œuvre vu le besoin d'un grand nombre d'oscillateurs associés à chaque fréquence porteuse. Pour éviter le premier inconvénient et augmenter l'efficacité spectrale, l'OFDM consiste en premier lieu à diviser la bande passante en N sous bandes étroites avec une largeur Δf plus petite devant la bande de cohérence B_c du canal ($\Delta f < B_c$). Le sous-canal est considéré constant sur chaque sous bande, comme l'illustre la figure 2.1. La notion d'orthogonalité a été suggérée, garantissant l'absence des interférences entre les différentes porteuses. En ce qui concerne la complexité requise l'apparition de la transformée de Fourier rapide et de son inverse FFT/IFFT pour la modulation et la démodulation a permis de réduire considérablement la complexité et résolvant ainsi le deuxième inconvénient[5][6][7].

A l'heure actuel, l'OFDM est présente dans de nombreux standards tels que la radio diffusion numérique terrestre la DAB, la norme de télévision numérique terrestre ou DVB-T, la technologie ADSL et les réseaux sans-fils WLAN définis par les normes IEEE 802.11a, 802.11g (Wifi), 802.16g (Wimax) et HIPERLAN et dernièrement le LTE.

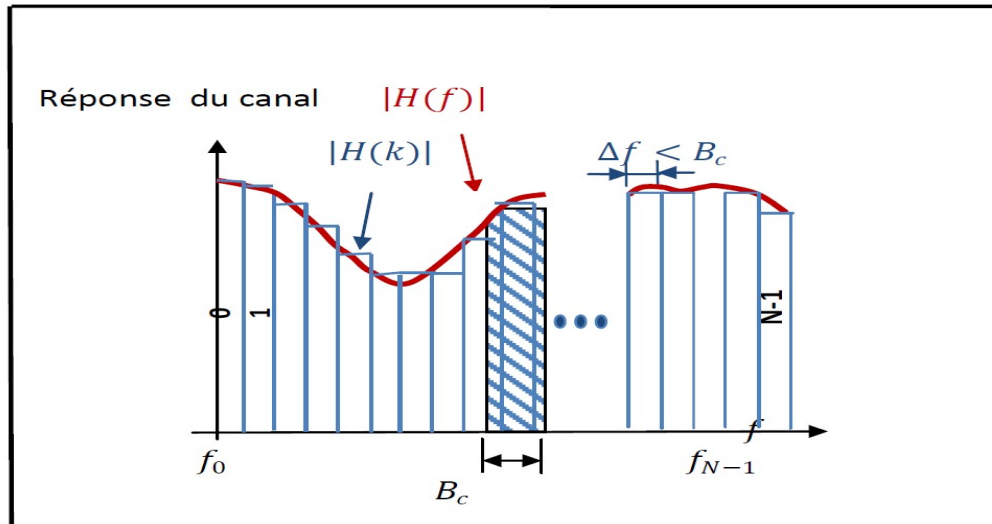


Figure 2.1 : Réponse fréquentielle du canal et les sous bande.

2.2 Problème d'interférences:

2.2.1 Interférence entre symboles(IES):

Dans un environnement à trajets multiples, un symbole transmis prend différents retards pour arriver au récepteur par différents chemins de propagation. Du point de vue du récepteur, le canal présente une dispersion temporelle dans laquelle la durée du symbole reçu est étalée. Prolonger la durée de symbole fait chevaucher le symbole reçu à l'instant t avec les symboles reçus aux autres instants. C'est le phénomène des interférences entre symboles (IES). Dans le but de surpasser ce problème l'OFDM utilise un intervalle garde qu'on aura l'occasion de détailler dans la suite du chapitre.

2.2.2 Interférence entre porteuse(IEP):

Ce genre d'interférence (IEP) peut apparaitre dans les systèmes de transmissions multi-porteuses lors des chevauchements des spectres des différentes sous-porteuses. Ces interférences sont causées principalement par une perte de l'orthogonalité entre les différentes sous-porteuses adjacentes.

Afin d'éliminer ces interférences la notion d'orthogonalité qui sera développé au paragraphe 2.3 s'avère incontournable. Dans les systèmes OFDM, les spectres des sous-porteuses se recouvrent mais demeurent orthogonaux entre eux, ceci signifie

qu'au maximum de chaque spectre de sous-porteuse, tous les spectres des autres sous-porteuses s'annulent.

2.3 Notion d'orthogonalité:

La différence fondamentale entre les différentes techniques classiques de modulation multi-porteuses et l'OFDM est que cette dernière autorise un fort recouvrement spectral entre les sous-porteuses, ce qui permet d'augmenter sensiblement leur nombre. Cependant, pour que ce recouvrement n'aurait pas d'effet néfaste, les porteuses doivent respecter une contrainte d'orthogonalité, à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel.

L'utilisation d'un très grand nombre de porteuses nécessite beaucoup de modulateurs/démodulateurs et des filtres. Il faut aussi davantage de largeur de bande. Il est heureusement simple de résoudre ces deux problèmes en spécifiant un espacement rigoureusement régulier de $1/T_u$ entre les sous-porteuses [1], où T_u est la période du symbole OFDM. Les porteuses représentées par la figure 2.2, forment alors ce que les mathématiciens appellent un ensemble orthogonal.

En considérant d'abord le signal OFDM comme un simple multiplexage en fréquence, la k-ième sous-porteuse (en bande de base) peut s'écrire sous la forme :

$$\Psi_k(t) = e^{j2\pi f_k t}$$

Avec $f_k = f_0 + k \frac{1}{T_s}$

Les porteuses doivent satisfaire la condition d'orthogonalité suivante:

$$\int_t^{t+T_s} \Psi_k(t) \Psi_m^*(t) dt = \int_t^{t+T_s} e^{j2\pi f_k t} e^{-j2\pi f_m t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases} \quad (2.1)$$

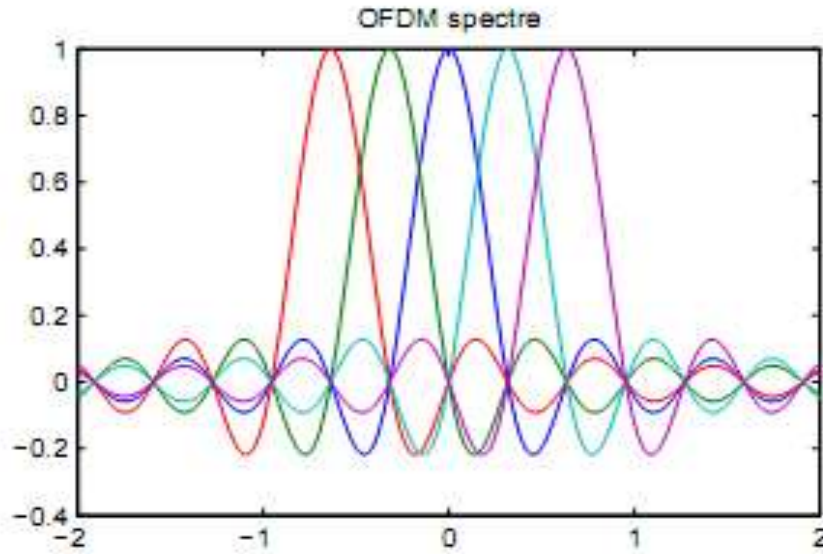


Figure 2.2 : Spectre du signal en sortie du modulateur OFDM, décomposé sur chaque porteuse.

2.4 Préfixe cyclique et intervalle de garde :

Prenons une même suite de symboles arrivant à un récepteur par deux chemins différents qui se présente comme une même information arrivant à deux instants différents. Elles vont donc s'additionner provoquant ainsi une interférence entre symboles (IES). Entre chaque symbole transmis, on insère une zone "morte" appelée intervalle de garde. De plus, la durée utile d'un symbole sera choisie suffisamment grande par rapport à l'étalement des échos. Cette précaution va limiter l'interférence entre symbole. La durée T_u pendant laquelle est émise l'information diffère de la période symbole T_s car il faut prendre en compte, entre deux périodes utiles, un "temps de garde" T_g qui a pour but d'éliminer l'IES qui subsiste malgré l'orthogonalité des porteuses.

$$T_{OFDM} = T_u + T_g \quad (2.2)$$

Pour que cet intervalle de garde soit efficace, sa durée doit être au moins égale à l'écho non négligeable le plus long (c'est-à-dire, le retard maximal).

L'intervalle de garde peut être un temps de garde "blanc" [8], pendant lequel on n'émet rien, mais aussi il peut être rempli d'une copie de la fin de la trame OFDM. Si cette méthode est efficace pour lutter contre l'IES, elle pénalise cependant

sensiblement le débit de transmission, et certains systèmes OFDM profitent des progrès dans le domaine de l'égalisation pour s'en affranchir.

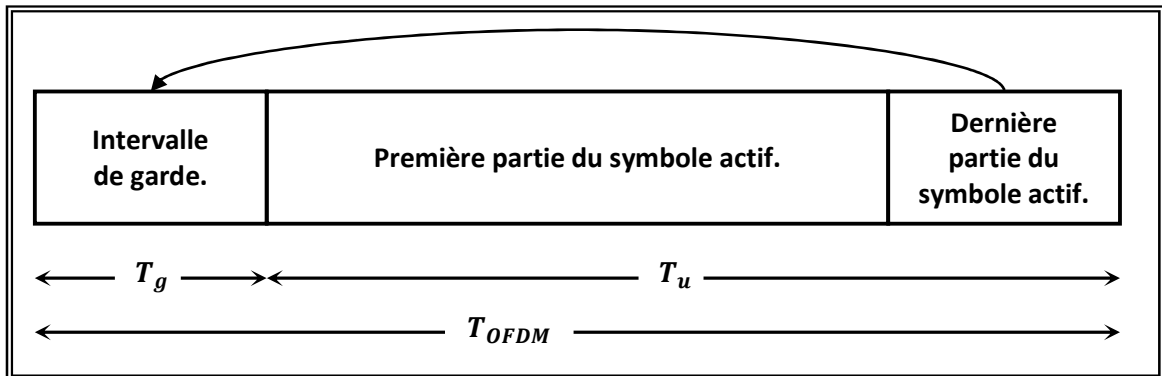


Figure 2.3 : Exemple d'intervalle de garde.

La figure 2.3, illustre l'ajout d'un intervalle de garde. La période du symbole est prolongée de manière à être supérieure à la période utile T_u . Le segment ajouté au début du symbole pour former l'intervalle de garde est donc identique au segment de même longueur à la fin du symbole. Tant que le retard d'un trajet par rapport au trajet principal (le plus court trajet) est inférieur à l'intervalle de garde, les composantes du signal à l'intérieur de la période d'intégration viennent toutes du même symbole : Le critère d'orthogonalité est satisfait. Les brouillages IEP et IES ne se produisent que lorsque le retard relatif est plus long que l'intervalle de garde. La longueur de l'intervalle est choisie de manière à correspondre au niveau de trajets multiples prévu. Elle ne devrait pas représenter une trop grande partie de T_u , pour ne pas sacrifier trop de capacité en données (et de rendement spectral).

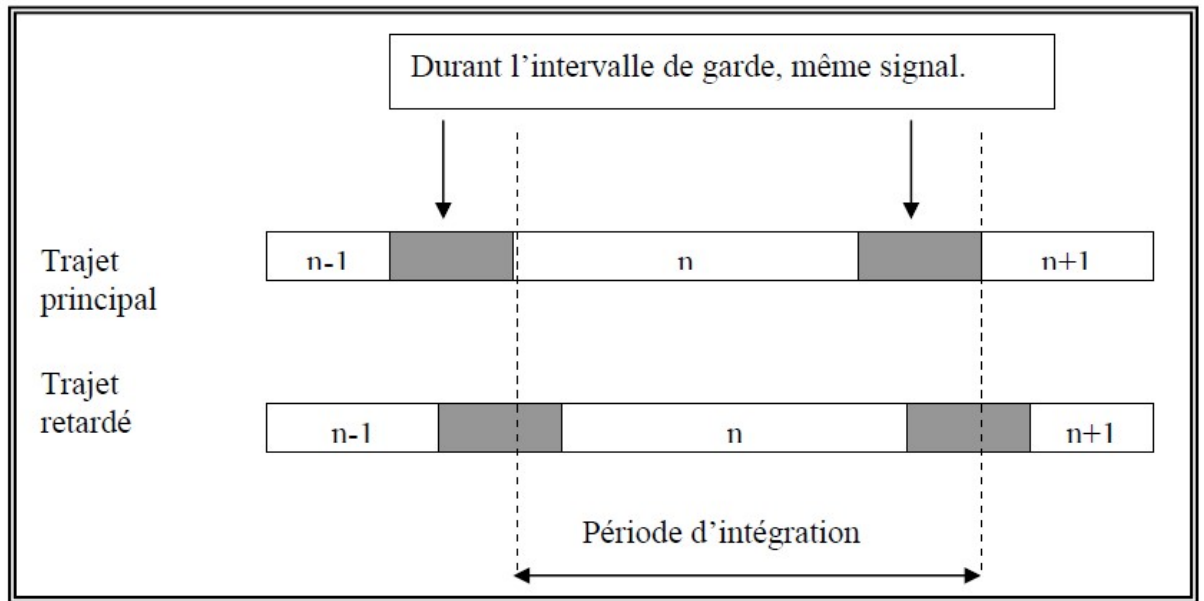


Figure 2.4 : Signaux arrivant par différents trajets.

Les signaux, arrivant des différents trajets comme le montre la Figure 2.4, peuvent s'ajouter de manière constructive ou destructive.

Grace à l'OFDM, l'étape d'égalisation du canal se simplifie, en fait, il est possible de montrer que le signal démodulé à partir d'une porteuse donnée est très similaire au signal émis multiplié par la réponse fréquentielle équivalente du canal sur la même fréquence porteuse.

2.5 La chaîne de transmission OFDM :

Le synoptique de la Figure 2.5, illustre les différents blocs qui composent la chaîne de transmission OFDM. Le modulateur numérique (M-QAM) transforme les données binaires b_i de durée T_b en symboles complexes C_k de durée $T_s = \log_2 MT_b$, où M est la taille de la constellation de la modulation numérique (QAM) utilisée. Le convertisseur série-parallèle dispose les symboles C_k en groupes (trames) de N symboles, la durée d'une trame T_u est N fois plus grande que la durée d'un symbole en série T_u . Par conséquent, l'effet de canal devient moins nuisible. En appliquant ensuite une transformée de Fourier discrète inverse, on obtient la trame (symbole) OFDM. La TFDI est utilisée afin de transformer le spectre du signal OFDM au domaine temporel pour la transmission à travers le canal. Un préfixe cyclique de durée T_g copie les N_g derniers symboles de la trame OFDM et les ajoute ensuite au début de la trame. Après

conversion parallèle-série, on obtient enfin le symbole OFDM qui contient $N = N_u + N_g$ symboles de durée totale $T_{OFDM} = T_u + T_g$ que l'on transmet à travers le canal.

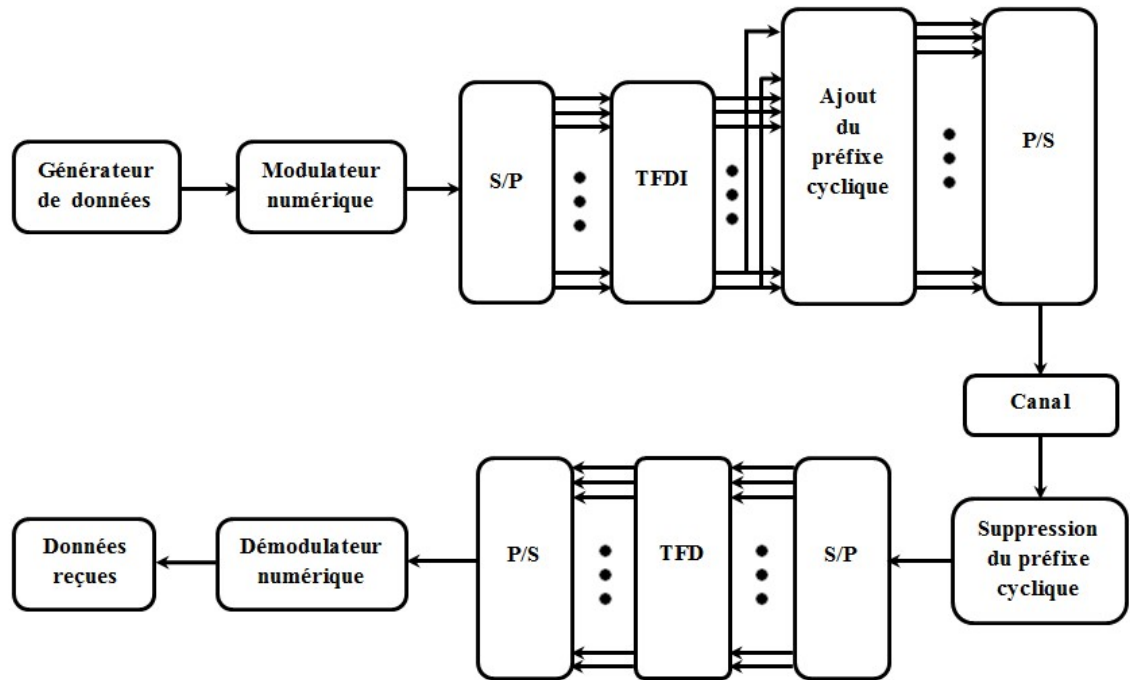


Figure 2.5 : Schéma d'un système OFDM en bande de base.

2.6 La transformée de Fourier discrète :

Au tout début de l'utilisation des systèmes parallèles, les opérations de modulation et de démodulation nécessitaient plusieurs banques d'oscillateurs pour générer les fréquences porteuses nécessaires pour la transmission des sous-porteuses. Puisque cela s'est avéré difficile à accomplir, la représentation a été considérée comme infaisable.

Grâce aux travaux de Weinstein et Ebert [9], la transformée de Fourier, en particulier l'algorithme de la transformée de Fourier discrète, a éliminé la complexité initiale du schéma OFDM. La transformée de Fourier et son inverse sont utilisés pour mettre en application les processus de modulation et de démodulation des systèmes OFDM.

Dans les systèmes numériques, la forme traditionnelle de la transformée de Fourier est remplacée par la transformée de Fourier discrète (TFD). La TFD d'un signal $x(n)$ est définie comme suit :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi \frac{k}{N} n} \quad 1 \leq n \leq N \quad (2.3)$$

Et son inverse associé IDFT est dénoté par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2j\pi \frac{k}{N} n} \quad 1 \leq n \leq N \quad (2.4)$$

Où N représente la taille de la TFD/TFDI.

La matrice de la TFD est composée d'exponentielles complexes. Elle est définie comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j2\pi 2/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{-j2\pi 2/N} & e^{-j2\pi 4/N} & \dots & e^{-j2\pi 2(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j2\pi 2(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi/(N-1)(N-1)N} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.7 Principe de la modulation OFDM:

Le principe du multiplexage en fréquence est de grouper des données numériques par paquets de N , qu'on appellera symbole OFDM et de moduler par chaque donnée une porteuse différente en même temps.

Considérons une séquence de N données $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$. Appelons T_s la durée symbole c'est-à-dire le temps qui sépare 2 séquences de N données. Chaque donnée c_k module un signal à la fréquence f_k . Le signal individuel s'écrit sous forme complexe :

$$C_k e^{2j\pi f_k t}$$

Le signal $s(t)$ total correspondant à toutes les données d'un symbole OFDM est la somme des signaux individuels :

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi f_k t}$$

Le multiplexage est orthogonal si l'espace entre les fréquences est $1/T_u$

$$\text{Alors } f_k = f_0 + \frac{k}{T_u} \text{ et } s(t) = e^{2j\pi f_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{kt}{T_u}} \quad (2.6)$$

Voici le schéma de principe de la modulation illustré par la figure 2.6.

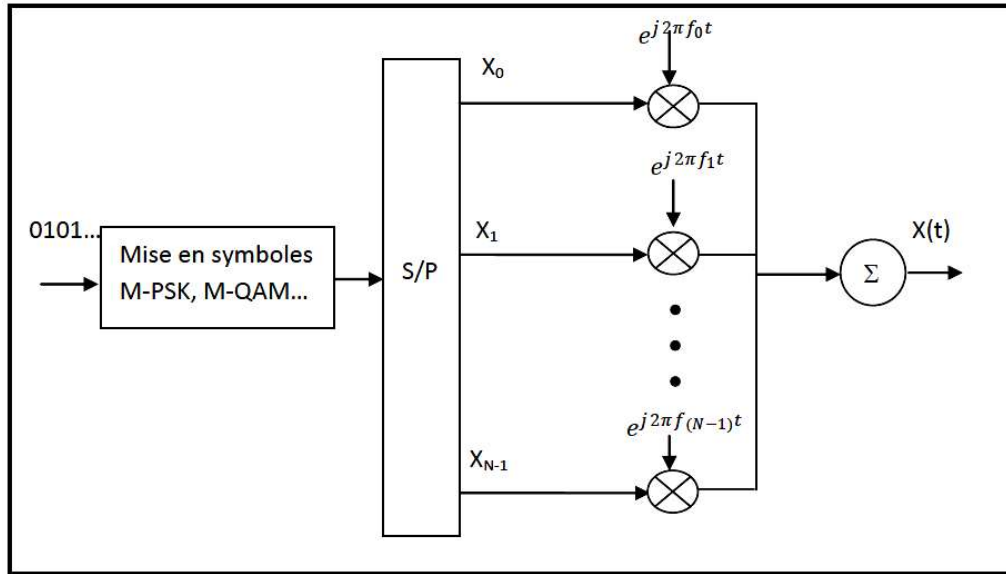


Figure 2.6 : Schéma d'une modulation analogique OFDM.

2.8 Principe de la démodulation OFDM:

Le signal parvenant au récepteur peut s'écrire sur une durée symbole T_s par :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(C_k H_k(t) e^{2j\pi(f_0 + \frac{k}{T_s})t} \right) \quad (2.7)$$

$H_k(t)$ est la fonction de transfert du canal autour de la fréquence f_k et au temps t . Cette fonction est une approximation de la vraie réponse fréquentielle et elle est supposée constante sur la période T_s . La démodulation classique consisterait à démoduler le signal suivant les N sous-porteuses selon le schéma classique.

Voici le schéma de principe de la démodulation illustré par la figure 2.7.

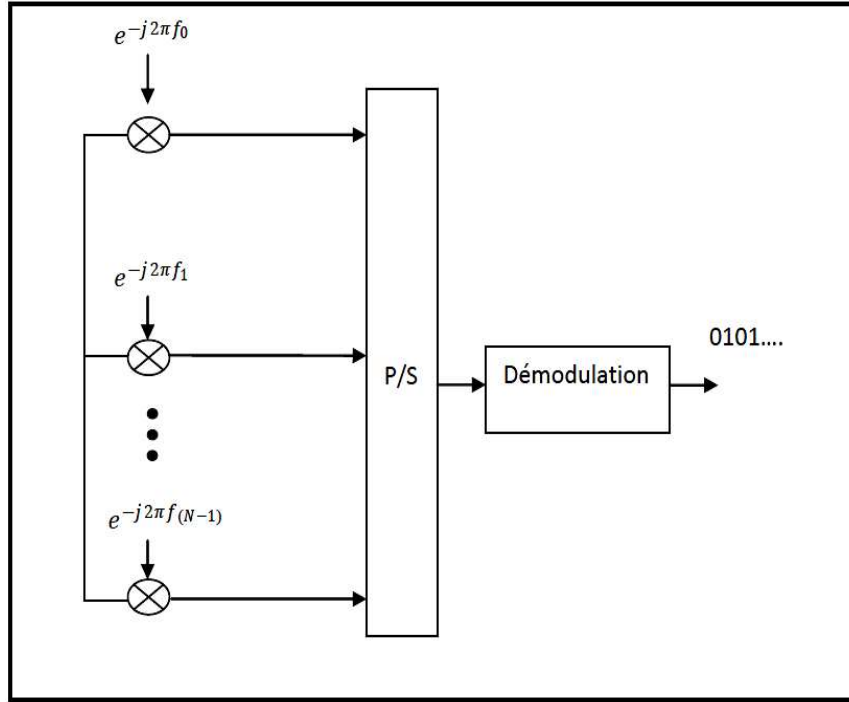


Figure 2.7 : Schéma d'une démodulation analogique OFDM.

2.9 Principes du modulateur et du démodulateur utilisant les transformées de Fourier discrètes :

Envisageons maintenant un échantillonnage du signal $S(t)$ obtenu dans l'équation (2.6) avec une période $T_e = T_u/N$. A chaque instant $t = nT_e$ avec $n \in [1:N]$, le signal échantillonné $S(nT_e)$, que l'on notera $S(n)$ pour simplifier s'écrit :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{k}{T_u} n T_e} \quad (2.8)$$

En tenant compte de la relation liant T_u et T_e , la relation précédente devient:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{k}{N} n} \quad (2.9)$$

Le terme $S(n)$ sera appelé symbole OFDM, l'ensemble de ces symboles, pour n variant de 1 à N et noté $\{S\}_{1:N}$, constituera la trame OFDM.

A ce stade de la démonstration, il est intéressant de rappeler la définition de la transformée inverse de Fourier discrète, qui associe aux symboles X_k pour $k \in [1:N]$ les symboles $x(n)$ avec $n \in [1:N]$ de la façon suivante:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2j\pi \frac{k}{N}n} \quad (2.10)$$

Au facteur N près, le signal $S(n)$ de l'expression (2.9) apparaît comme la transformée de Fourier inverse et discrète (TFDI) des symboles C_k , l'indice k faisant référence à la k -ième sous-porteuse. Si on introduit ainsi ces symboles associés à la modulation numérique, dans un module de TFDI, on obtiendra en sortie l'ensemble des symboles complexes S_n du signal en bande de base, c'est-à-dire la trame OFDM. A la réception, il suffira d'effectuer la transformée de Fourier discrète directe (TFD) sur les symboles reçus pour restituer le message désiré.

2.10 Avantages et inconvénients:

2.10.1 Avantage:

- Une haute efficacité spectrale.
- Une réalisation digitale simple par utilisation du **TFD** et **TFDI**.
- Réduction de la complexité des récepteurs due à la possibilité d'éviter les **IES** et **IEP** par l'orthogonalité des porteuses et insertion d'un intervalle de garde.

2.10.2 Inconvénients:

- Les signaux multi-porteuses ont un coefficient **PAPR** (Peak to Average Power ratio) élevé, ce qui nécessite l'utilisation des amplificateurs à haute linéarité.
- La perte dans l'efficacité spectrale due à l'addition d'un intervalle de garde.
- La sensibilité à l'effet Doppler est supérieure par rapport aux systèmes de modulation mono-porteuse.
- Une synchronisation parfaite en temps et en fréquence est nécessaire.

2.11 Conclusion:

En conclusion, dans ce chapitre, le principe de base des modulations multi-porteuses à fréquences orthogonales a été expliqué. Nous avons vu les problèmes d'interférence entre porteuses (IEP), et entre symboles (IES); et comment les éliminer grâce à la notion d'orthogonalité qui offre de meilleures performances, et l'intervalle de garde. Par la suite on a vu qu'une réalisation en terme de la transformée de Fourier discrète permet de surpasser les difficultés liées à la mise en œuvre des systèmes à porteuses multiples. Et on a terminé par discuter les avantages et inconvénients.

Chapitre 3 Estimation du canal

3.1 Introduction :

Le canal de propagation vu par le récepteur peut varier d'une façon significative d'un symbole OFDM à l'autre, ou encore à l'intérieur d'un même symbole OFDM. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur. En fait, dans les systèmes de communication surtout à large bande, le canal radio est souvent à évanouissement sélectif en fréquence et variant dans le temps pour les canaux radio mobiles (Outdoor). Une estimation dynamique du canal devient une étape incontournable permettant d'assurer une démodulation correcte des symboles OFDM. Pour les canaux Indoor, le canal est considéré statique (pas de mobilité) mais peut être sélectif en fréquence notamment pour les applications très haut débit.

Dans ce chapitre on va s'intéresser à estimer les variations du canal à travers le temps, vu que le signal OFDM est très sensible à la sélectivité en fréquence, cela est due au recouvrement spectral plus au moins large d'où l'estimation et l'égalisation sont incontournables.

3.2 Estimation du canal :

L'estimation de canal peut être exécutée en insérant des symboles pilotes soit sur toutes les sous-porteuses d'un symbole OFDM avec une période bien précise connue sous le nom « estimation du canal par pilotes de type bloc », soit dans chaque symbole OFDM connu sous le nom « estimation du canal par pilotes de type peigne ». Ces méthodes, dites **PSAM** (Pilot Symbol Assisted Modulation), se divisent en trois grandes

classes suivant le type d'insertion effectué : **pilotes type blocs**, **pilotes type peignes** ou **pilotes en treillis**.

L'estimation du canal par pilotes de type bloc a été développée sous l'hypothèse d'un canal à évanouissement lent (canal invariant sur plusieurs symboles OFDM). Par contre, l'estimation du canal par pilotes de type peigne a été présentée pour satisfaire le besoin de l'égalisation quand le canal change d'un symbole OFDM à un autre ou dans un même symbole OFDM.

Deux principaux problèmes surgissent face à l'estimation du canal, premièrement la quantité de symboles pilotes à insérer et la complexité calculatoire de l'estimateur pouvant poursuivre correctement le canal.

Ces deux problèmes sont bien évidemment liés puisque les performances de l'estimateur dépendent de la quantité des pilotes insérés. Alors qu'il y a des méthodes qui n'utilisent aucune information pilote. Ces méthodes dites «aveugles».

Généralement si le canal est invariant dans un symbole OFDM, l'estimation du canal se fait sur la réponse fréquentielle, et si le canal varie dans un symbole OFDM elle se fait sur le canal discret équivalent. Dans le premier cas, des méthodes classiques (que nous appellerons conventionnelles) estiment la réponse fréquentielle du canal aux fréquences des différentes sous-porteuses pilotes, en utilisant le critère des moindres carrés (LSE : "Least Square") ou le critère de l'erreur quadratique moyenne (MMSE: "Minimum Mean Square Error"). D'un symbole à l'autre le canal est corrélé, le critère LSE ne permet pas de profiter de cette corrélation donc sa mise en œuvre revient à réaliser une estimation du canal symbole par symbole. En revanche le critère MMSE permet de prendre en compte cette corrélation.

Ces deux critères font une interpolation fréquentielle pour obtenir la réponse du canal [10, 3,11]. Le critère LMMSE a montré une meilleure performance que le critère LSE[3]. L'interpolation du canal par pilotes de type peigne peut être basée sur l'interpolation linéaire, l'interpolation du second ordre, l'interpolation passe-bas, l'interpolation du spline cubique. L'interpolation du second ordre a montré une meilleure performance que l'interpolation linéaire. L'interpolation passe-bas a montré la meilleure performance de toutes les techniques d'interpolation [10].

3.2.1 Modèle du canal :

Cette section va montrer comment le canal deviendra diagonalisé d'une convolution cyclique du fait de l'insertion du préfixe cyclique. Si le préfixe cyclique est plus long que la réponse impulsionnelle du canal, nous pouvons montrer que le système OFDM peut être considéré comme un ensemble de canaux parallèles gaussiens, schématisé dans la figure 3.1.

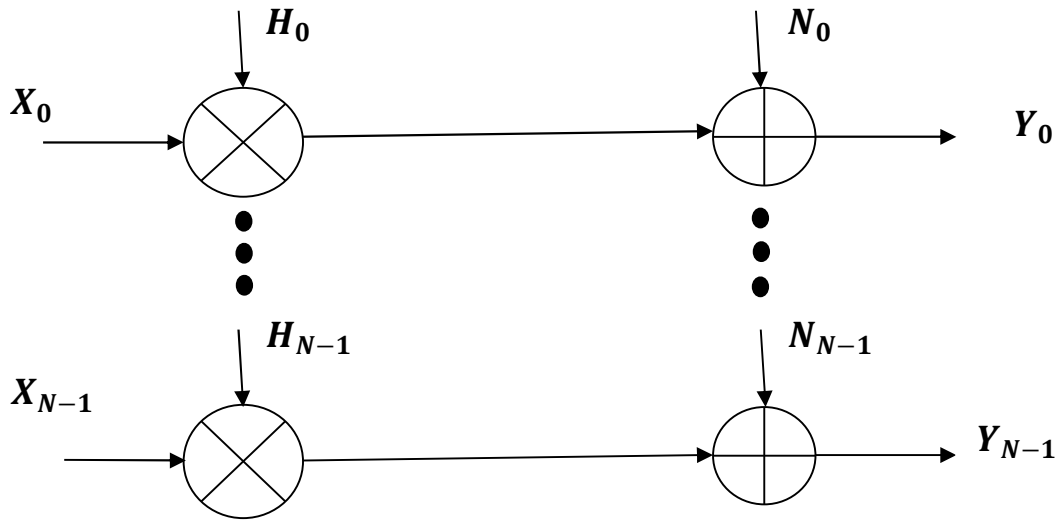


Figure 3.1 canaux parallèles de Gaussiens.

Soient X_n les symboles de données ayant des valeurs complexes prises dans un alphabet fini selon la constellation de la modulation choisie, T_s représente la durée d'un symbole (trame) OFDM, et les N sous-porteuses sont distantes de Δf . Les symboles d'entrée X_n sont organisés en blocs de taille $N \times 1$. Le $k^{ième}$ bloc est donné par :

$$X = \begin{bmatrix} X_{k,0} \\ X_{k,1} \\ \vdots \\ X_{k,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Où les éléments $X_{N,k}$ sont les symboles à émettre à l'instant n sur la $k^{ième}$ sous-porteuse, avec l'application de l'IDFT au bloc de symboles X . On obtient le vecteur :

$$x = F^H X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Où F désigne la matrice TFD de taille $N \times N$, donnée par la relation. La matrice F^H désigne donc l'opération inverse (TDFI), avec $(.)^H$ qui indique le transposé conjugué.

Dans les systèmes OFDM, c'est l'ajout d'une extension cyclique à chaque bloc qui permet de prendre en compte le comportement sélectif du canal. A partir du vecteur x de taille $N \times 1$, on forme un nouveau vecteur $\tilde{x}$ de taille $N_s \times 1$, tel que :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_{N-N_g} \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{Soit } g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{m-1} \end{bmatrix} \text{ et } n = \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La réponse impulsionnelle du canal et le bruit AWGN respectivement. On peut donc définir

$$H = DFT_N(g) = Fg \quad (3.5)$$

$$\text{Et } N = Fn \quad (3.6)$$

Au récepteur, le vecteur reçu est donné par :

$$\tilde{y} = \tilde{x} \otimes g + \tilde{n} \quad (3.7)$$

Où $\otimes$ dénote l'opération de convolution.

On supprime le préfixe cyclique, donc les N premiers symboles qui contiennent de l'interférence entre les blocs sont supprimés, c'est-à-dire :

$$y = \begin{bmatrix} y_{N_0} \\ y_{N_0-1} \\ \vdots \\ y_{N+N_0-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Sous la supposition que les interférences sont complètement éliminées, on peut dériver le vecteur reçu y de taille $N \times 1$ comme suit :

$$y = \tilde{H}\tilde{x} + n \quad (3.9)$$

Où $\tilde{H}$ est une matrice de taille $N \times N_s$, qui représente l'effet du canal. Elle est donnée par :

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{L-1} & g_{L-2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & g_{L-1} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Puisque les N_g premiers éléments de $\tilde{x}$ sont identiques aux N_g derniers, on peut écrire

$$y = H_c x + n \quad (3.11)$$

Où H_c est une matrice de taille $N \times N$ obtenue à partir de (3.10), en superposant les N_g premières colonnes aux N dernières, ce qui donne :

$$H_c = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & g_{L-1} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & g_{L-1} \\ g_{L-1} & g_{L-2} & \ddots & g_0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & g_{L-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{L-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

H_c Étant une matrice circulante, on peut exprimer sa décomposition en valeurs propres comme suit :

$$H_c = F^H H F \quad (3.13)$$

Avec la matrice H qui contient dans sa diagonale la réponse fréquentielle du canal est

donnée par :

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Avec

$$H_k = \sum_{m=0}^{L-1} g_m e^{-j2\pi km/N} \quad (3.15)$$

En d'autres mots, H contient sur sa diagonale la DFT à N points de la réponse impulsionnelle du canal. On peut écrire le signal reçu comme :

$$\begin{aligned} y &= H_c x + n \\ &= F^H H F x + n \\ &= F^H H F F^H X + n \\ &= F^H H X + n \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour retrouver les symboles émis, on applique la TFD au vecteur y . ce qui donne :

$$\begin{aligned} Y &= F y \\ &= F F^H H X + F n \\ &= H X + N \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ou sous la forme scalaire suivante :

$$Y_k = H_k X_k + N_k \quad k = 0, \dots, N \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) montre que l'on peut égaliser très facilement en multipliant chaque sortie de la DFT par le coefficient H_k^{-1} correspondant. Cependant, selon la valeur de H_k , la transmission sur une sous-bande est dite bonne ou mauvaise.

L'atténuation est donné par :

$$H[k] = G\left(\frac{k}{NT_s}\right), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

Où $G(\cdot)$ est la réponse en fréquence du canal au cours de l'OFDM courant et le symbole T_s est la période d'échantillonnage du système. La réponse impulsionnelle du canal peut être exprimée sous la forme :

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k \delta(\tau - \tau_k T_s) \quad (3.20)$$

Où α_k sont des variables indépendantes de moyenne nulle, aléatoires complexes gaussiennes, et τ_k est le retard du k -ième impulsion.

3.2.2 L'arrangement des pilotes :

Pour effectuer l'estimation on utilise des porteuses dites "pilotes" ce sont des porteuses dont le gain, la phase et la position dans la trame OFDM sont connus de l'émetteur et du récepteur.

On les inserts sur certains points à l'entrée de l'IFFT. L'utilisation des symboles pilotes réduit le taux de transmission de l'information et il faut garder leurs aussi petit que possible. Le motif des pilotes dans la trame OFDM dépend de la sélectivité du canal [12] Tel que:

- pour un canal très sélectif en fréquence mais à évanouissement lent, on utilisera un arrangement dans le domaine fréquentiel, ou chaque sous porteuse d'un symbole OFDM donné est dédiée à l'estimation du canal (figure3.a). Dans cette configuration, les symboles pilotes sont distribués d'une façon périodique sous forme de blocs. Puisque dans ce cas le canal est à évanouissement lent, les symboles pilotes de ce bloc (trame) sont insérés sur toutes les sous-porteuse, donc pour toutes les fréquences mais à des intervalles de temps K_t .
- Pour un canal moyennement sélectif en fréquence, mais très sélectif en temps (à évanouissement rapide), on utilisera un arrangement dans le domaine temporel. Dans cette configuration, certaines fréquences sont exclusivement dédiées à l'estimation de canal (figure3.b) à des intervalles K_f , mais présentes sur chaque trame poursuivre l'évolution temporelle du canal qui varie rapidement.
- Il existe aussi d'autres motifs par exemple une configuration qui fait combiner entre les deux précédentes, pilotes en treillis, où les symboles pilotes sont placés à des intervalles de temps K_t et des intervalles de fréquence K_f (figure3.c).

La figure suivante illustre ces trois principales dispositions : les porteuses pilotes sont en noir et les porteuses d'information en blanc.

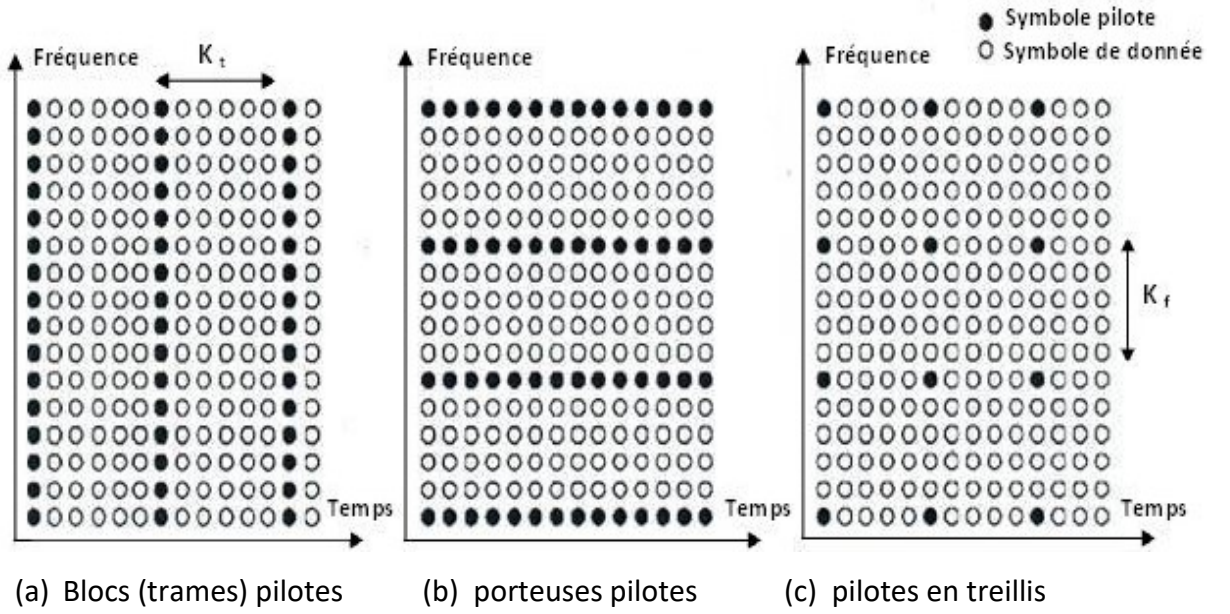


Figure 3.2 Les trois types de base d'arrangement des pilotes pour l'estimation du canal dans un système OFDM.

3.2.3 Les critères d'estimation LSE et MMSE :

Parmi les méthodes d'estimation, celles basées sur le critère des moindres carrés ou LSE (Least Square Error en anglais) et sur le critère de l'erreur quadratique moyenne minimum ou MMSE (Minimum Mean Square Error) sont celles les plus étudiées. Les développements suivants donnent les coefficients des deux estimateurs :

a Estimateur LSE :

Le critère des moindres carrés vise à minimiser le paramètre J_{LS} , définie Par

$$(y - XF\hat{g}_{LS})^H (y - XF\hat{g}_{LS})$$

Comme suit:

$$J_{LS} = (y - XF\hat{g}_{LS})^H (y - XF\hat{g}_{LS}) \quad (3.21)$$

$$J_{LS} = (y^H - \hat{g}_{LS}^H F^H X^H) (y - XF\hat{g}_{LS})$$

$$J_{LS} = (y^H y - \hat{g}_{LS}^H F^H X^H y - y^H XF\hat{g}_{LS} + \hat{g}_{LS}^H F^H X^H XF\hat{g}_{LS}) \quad (3.22)$$

Pour minimiser J_{LS} , nous devons faire sa dérivée de l'équation (3.22) par rapport à $\hat{g}_{LS}^H$, soit :

$$\begin{aligned}
 \partial J_{LS} / \partial \hat{\mathbf{g}}_{LS}^H &= [0 - \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} - 0 + \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F} \hat{\mathbf{g}}_{LS}] \\
 \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F} \hat{\mathbf{g}}_{LS} &= \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} \\
 \hat{\mathbf{g}}_{LS} &= (\mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Puisque les colonnes de $\mathbf{F}$ sont orthonormées, $\hat{\mathbf{g}}_{LS}$ génère l'estimation du canal $\hat{H}_{LS}$ dans le domaine fréquentiel.

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{LS} &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{g}}_{LS} = \mathbf{F} (\mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} \\
 \hat{H}_{LS} &= \mathbf{F} (\mathbf{F}^H)^{-1} (\mathbf{X}^H)^{-1} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{X}^H \mathbf{y} \\
 \hat{H}_{LS} &= \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Donc les coefficients de l'estimateur LS sont donnés par la formule suivante :

$$\hat{H}_{LS} = \left[\frac{y_0}{X_0}, \frac{y_1}{X_1}, \dots, \frac{y_{N-1}}{X_{N-1}} \right]^T \tag{3.25}$$

Les estimateurs LSE sont calculés avec une très faible complexité, mais ils souffrent d'une haute erreur quadratique moyenne.

b Estimation LMMSE :

L'estimateur LMMSE emploie les statistiques du second ordre sur le canal pour minimiser l'erreur quadratique moyen. Le critère du minimum d'erreur quadratique moyenne vise à minimiser la fonction de cout J_{MMSE} , définie comme l'erreur quadratique moyenne entre le canal réel et estimé en utilisant la corrélation fréquentielle du canal :

$$J_{MMSE} = E[\|e\|^2] = E[\|(g - \hat{g}_{MMSE})\|^2] \tag{3.26}$$

$$J_{MMSE} = E[\|g - Ay\|^2]$$

$$J_{MMSE} = E[(g - Ay)(g - Ay)^H]$$

$$J_{MMSE} = E[(g - Ay)(g^H - y^H A^H)]$$

$$J_{MMSE} = E[gg^H - gy^H A^H - Ayg^H + Ayy^H A^H] \quad (3.27)$$

Pour minimiser J_{MMSE} on doit faire la dérivée de (3.27) par rapport à A^H , soit :

$$\begin{aligned} \partial J_{MMSE} / \partial A^H &= 0 - E[gy^H] - 0 + A * E[yy^H] = 0 \\ &- R_{gy} + AR_{yy} = 0 \\ A &= R_{gy} R_{yy}^{-1} \\ \hat{g}_{MMSE} &= Ay = R_{gy} R_{yy}^{-1} y \end{aligned} \quad (3.28)$$

Notons que :

$$\begin{aligned} R_{gy} &= E[gy^H] = E[g(XFg + n)^H] \\ R_{gy} &= E[gg^H F^H X^H] + E[gn^H] = E[gg^H F^H X^H] + 0 \\ R_{gy} &= R_{gg} F^H X^H \end{aligned} \quad (3.29)$$

Et :

$$\begin{aligned} R_{yy} &= E[yy^H] = E[(XFg + n)(XFg + n)^H] \\ R_{yy} &= E[XFgg^H F^H X^H] + E[nn^H] \\ R_{yy} &= XFR_{gg}F^H X^H + \sigma_n^2 I_N \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} R_{hh} &= E[hh^H] = E[(Fg)(Fg)^H] = FE[gg^H]F^H \\ R_{hh} &= FR_{gg}F^H \end{aligned} \quad (3.31)$$

R_{gy} et R_{yy} Sont respectivement la matrice de covariance entre g et y et la matrice d'auto covariance de y .

R_{gg} et R_{hh} sont respectivement les matrices d'auto covariance de g et h , et σ_n^2 est la variance du bruit. Puisque les colonnes de F sont orthonormées, $\hat{g}_{MMSE}$ génère l'estimation du canal $\hat{H}_{MMSE}$ dans le domaine fréquentiel.

$$\hat{H}_{MMSE} = F\hat{g}_{MMSE}$$

D'après l'équation (3.28) on trouve :

$$\hat{H}_{MMSE} = FR_{gy}R_{yy}^{-1}y \quad (3.32)$$

En remplaçant les équations (3.29) et (3.30) dans (3.32) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MMSE} &= FR_{gg}F^HX^H(XFR_{gg}F^HX^H + \sigma_n^2I_N)^{-1}y \\ \hat{H}_{MMSE} &= FR_{gg}F^HX^H(XFR_{gg}F^H + (\sigma_n^2X^H)^{-1})^{-1}y \\ &= FR_{gg}F^H(XFR_{gg}F^H + \sigma_n^2(X^H)^{-1})^{-1}y \\ &= FR_{gg}F^H(FR_{gg}F^H + \sigma_n^2(X^H)^{-1}X^{-1})^{-1}X^{-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{H}_{MMSE} = R_{hh}(R_{hh} + \sigma_n^2(XX^H)^{-1})^{-1}\hat{H}_{LS} \quad (3.33)$$

Enfin, un estimateur MMSE est utilisé pour estimer la réponse fréquentiel du canal. Cet estimateur tiens compte des corrélations du canal et du modèle du bruit. Il donne de meilleures performances en termes du SER et EQM par rapport aux autres estimateurs par pilotes de type peigne tant que le canal est invariant dans un symbole OFDM. Le problème avec l'estimateur MMSE c'est à sa complexité relativement élevé. On remarque qu'une inversion et une multiplication sont nécessaires dans l'expression (3.33), ce qui rend LMMSE plus complexe que LSE, surtout pour une matrice R_{hh} de grande taille. Cependant, cet estimateur est optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne. De plus, comme il est montré dans [7]. Bien que cet estimateur soit optimal, son utilisation est limitée par deux inconvénients majeurs: sa complexité, et la nécessité de connaître la matrice de covariance R_{hh} qui est a priori inconnue du récepteur.

La réduction de la complexité de cet estimateur est l'objectif de ce mémoire et sera traité par la suite.

c Le LMMSE modifié :

La complexité de l'estimateur LMMSE peut être réduite en utilisant la décomposition en valeur singulière de la matrice d'auto-corrélation R_{hh} . Par conséquent nous pouvons appliquer une réduction de rang et utiliser seulement les éléments les plus significatifs de R_{hh} . Les estimateurs LMMSE modifiés sont largement étudiés [2,14,12] pour réduire la complexité qui caractérise le modèle LMMSE la figure 3.3 illustre la simplification qu'on va faire dans notre travail, on s'intéresse à l'estimateur LMMSE utilisant la décomposition en valeur singulière, qui combine les techniques de simplification suivantes :

1. La première simplification est de remplacer le terme $(XX^H)^{-1}$ dans l'équation(3.33) par son espérance tel que :

$$E\{(XX^H)^{-1}\} = E\left|\frac{1}{x_k}\right|^2 I \quad (3.34)$$

Donc, notre estimateur simplifié peut être exprimée comme suit :

$$\hat{H}_{MMSE} = R_{hh}(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR}I)^{-1}\hat{H}_{LS} \quad (3.35)$$

Où I est la matrice d'identité, SNR est le rapport moyen signal sur bruit est défini comme $E|x_k|^2/\sigma_n^2$. β est une constante dépendant de constellation de signaux. Pour le cas de 16-QAM :

$$\beta = E|x_k|^2 E|1/x_k|^2 = 17/9$$

Ainsi, l'inverse ne doit être calculé qu'une seul fois par estimation de canal.

2. La deuxième simplification consiste en l'utilisation de la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice R_{hh} comme suit :

$$R_{hh} = U\Lambda U^H \quad (3.36)$$

Où U est une matrice avec des colonnes orthonormées et Λ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{N-1} \geq 0$ sur sa diagonale.

Le LMMSE minimise l'erreur quadratique moyenne entre le canal actuel et estimé en utilisant la corrélation de la fréquence du canal d'évanouissement lent, son équation est la suivante [16]:

$$\hat{H}_p = R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1} \hat{H}_{LS} \quad (3.37)$$

Ou $R_{h\hat{h}_{ls}}$ est la corrélation croisée entre le canal atténuation vecteur h et l'estimation LSE. Et $R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}$ matrice d'auto-corrélation de l'estimation LS donner par :

$$R_{h\hat{h}_{ls}} = E\{h\hat{h}_{ls}^H\} \quad (3.38)$$

$$R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}} = E\{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}^H\} \quad (3.39)$$

Puisque le bruit blanc n'est pas corrélé avec l'atténuation du canal, la corrélation croisée entre le canal h et $\hat{h}_{ls}$ est le même que l'auto-corrélation du canal. Ainsi, nous pouvons remplacer $R_{h\hat{h}_{ls}}$ avec R_{hh} . Aussi l'auto-corrélation de $R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}$ est équivalente à R_{hh} plus la puissance du bruit σ^2 et la puissance du signal.

En appliquant la décomposition en valeurs singulières comme suit :

$$R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1/2} = Q_1 D Q_2^H \quad (3.40)$$

Où Q est une matrice avec des colonnes orthonormées et D est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières $d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots d_{N-1} \geq 0$ sur sa diagonale.

Puisque $R_{h\hat{h}_{ls}} = R_{hh}$ et $R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}} = R_{hh} + \frac{\beta}{SNR} I$ partagent tous les mêmes valeurs singulières que R_{hh} de sorte que nous pouvons simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1/2} &= U \Lambda U^H \left(U \left(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I \right) U^H \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= U \Lambda \left(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I \right)^{-1/2} U^H \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$= Q_1 D Q_2^H \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 = U \text{ et } D = \Lambda \left(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I \right)^{-1/2}$$

Le meilleur rang p estimateur est alors :

$$\hat{H}_p = Q_1 \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_2 R_{h_s h_s}^{-1/2} \hat{H}_{LS} \quad (3.43)$$

$$= U \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (U(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I) U^H)^{-1/2} \hat{H}_{LS}$$

$$= U \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I)^{-1/2} U^H \hat{H}_{LS}$$

$$= U \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \hat{H}_{LS} \quad (3.44)$$

En prenant notamment que les p premières valeurs singulières correspondant à la plupart des valeurs importantes de R_{hh} correspondant au coin supérieur gauche de D_p , la meilleure approximation rang p de l'estimateur est :

$$\hat{H}_p = U \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \hat{H}_{LS} \quad (3.45)$$

Où $\Delta_p = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N)$ est une matrice diagonale définie par :

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{\beta}{SNR}}, & k = 1, 2, \dots, p \\ 0, & k = p + 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.46)$$

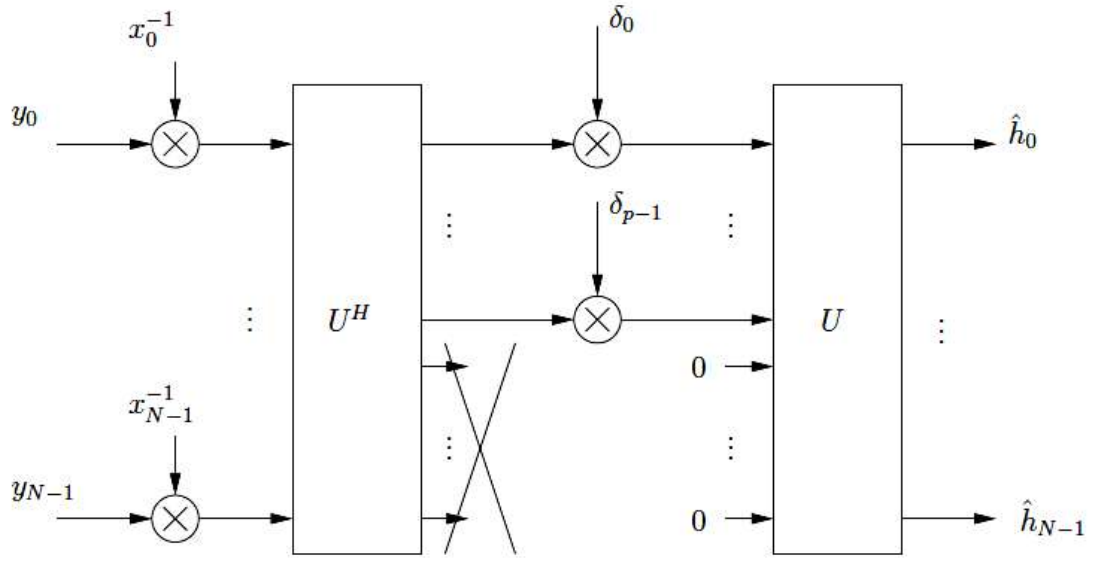


Figure 3.3: Réduction de rang basée sur la décomposition en valeurs singulières.

3.3 L'interpolation :

L'estimation LSE permet d'obtenir la réponse fréquentielle (bruitée) sur les porteuses pilotes. Dans un grand nombre de cas, il est alors nécessaire d'effectuer une interpolation entre les sous-porteuses pilotes pour pouvoir estimer le canal sur l'ensemble du réseau temps-fréquence. On a vu que LMMSE pouvait servir de filtre interpolateur. Cependant, sa complexité fait qu'on préfère souvent utiliser des interpolations plus simples, telles que celles présentées dans cette partie.

3.3.1 Interpolation linéaire (LI) :

L'interpolation linéaire a été étudiée dans [17], [18], elle est utilisée pour estimer le canal aux sous-porteuses de données entre deux sous-porteuses pilotes adjacentes $\hat{H}^{(p)}(m)$ et $\hat{H}^{(p)}(m+1)$ est donnée par :

$$\hat{H}(mK_f + l) = \hat{H}^{(p)}(m) + \frac{l}{K_f} \left(\hat{H}^{(p)}(m+1) - \hat{H}^{(p)}(m) \right) \quad 0 \leq l < K_f \quad (3.48)$$

3.3.2 Interpolation du second ordre (SOI) :

Avec cette méthode l'estimation de canal aux sous-porteuses de données est obtenue par la combinaison linéaire des trois estimations des sous-porteuses pilotes adjacentes. Cette méthode s'exécute mieux que la méthode linéaire.

Le canal estimé par l'interpolation de second ordre est donné par:

$$\hat{H}(mK_f + l) = c_1 \hat{H}^{(p)}(m-1) + c_0 \hat{H}^{(p)}(m) + c_{-1} \hat{H}^{(p)}(m+1) \quad (3.49)$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} c_1 = \alpha(\alpha-1)/2 \\ c_0 = -(\alpha-1)(\alpha+1) \\ c_{-1} = \alpha(\alpha+1)/2 \\ \alpha = l/N \end{cases}$$

3.3.3 Interpolation par splines cubiques (SCI) :

Cette méthode consiste à produire un polynôme continu entre les points de données (la fonction spline dans Matlab). Dans [18], et [19], il est démontré que l'interpolation par splines cubiques s'exécute mieux que l'interpolation linéaire.

3.3.4 Interpolation passe-bas (LPI) :

La méthode LPI s'exécute en insérant des zéros dans la séquence originale $\hat{H}^{(p)}$ et puis en appliquant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie (FIR) (la fonction "interp" dans Matlab), qui permet aux données originales de passer sans changement. Cette méthode minimise l'erreur quadratique moyenne entre les points interpolés.

3.4 L'égaliseur ZF :

L'égalisation dans les systèmes OFDM est très simple. C'est l'un des avantages principaux de l'utilisation de l'OFDM au lieu des systèmes à simple porteuse.

L'égalisation de canal dans les systèmes OFDM peut être faite par juste une simple division dans le domaine fréquentiel.

Dans l'OFDM tant que le préfixe cyclique demeure assez long par rapport à la réponse impulsionnelle du canal pour maintenir l'orthogonalité entre les sous-porteuses, l'égalisation peut être réalisée simplement par l'égaliseur ZF [20]. L'égaliseur ZF minimise la distorsion maximale entre les symboles à la sortie de l'égaliseur.

Une prolongation cyclique plus longue que la réponse impulsionnelle de canal peut supprimer l'IES et l'IEP. Dans l'OFDM, l'égaliseur ZF aura lieu dans le domaine fréquentiel. Donc, le rôle de l'égaliseur devient juste une opération d'ajustement de gain et de phase sur chaque sous-porteuse.

3.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié une méthode d'estimation de canal MMSE présentant une sélectivité en fréquence pour les systèmes de type OFDM, pour des données non codées. Cette méthode présente de très bonnes performances par rapport aux autres estimateurs, mais son inconvénient majeur est sa complexité.

Cependant, pour lutter contre cet inconvénient on propose une modification dans l'équation de cet estimateur, qui élimine le calcul de la matrice inverse. Ensuite on décrit brièvement les méthodes d'interpolation et de l'égalisation ZF, on donne aussi dans ce chapitre le modèle du canal parallèle Gaussien.

Chapitre 3 Estimation du canal

3.1 Introduction :

Le canal de propagation vu par le récepteur peut varier d'une façon significative d'un symbole OFDM à l'autre, ou encore à l'intérieur d'un même symbole OFDM. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur. En fait, dans les systèmes de communication surtout à large bande, le canal radio est souvent à évanouissement sélectif en fréquence et variant dans le temps pour les canaux radio mobiles (Outdoor). Une estimation dynamique du canal devient une étape incontournable permettant d'assurer une démodulation correcte des symboles OFDM. Pour les canaux Indoor, le canal est considéré statique (pas de mobilité) mais peut être sélectif en fréquence notamment pour les applications très haut débit.

Dans ce chapitre on va s'intéresser à estimer les variations du canal à travers le temps, vu que le signal OFDM est très sensible à la sélectivité en fréquence, cela est due au recouvrement spectral plus au moins large d'où l'estimation et l'égalisation sont incontournables.

3.2 Estimation du canal :

L'estimation de canal peut être exécutée en insérant des symboles pilotes soit sur toutes les sous-porteuses d'un symbole OFDM avec une période bien précise connue sous le nom « estimation du canal par pilotes de type bloc », soit dans chaque symbole OFDM connu sous le nom « estimation du canal par pilotes de type peigne ». Ces méthodes, dites **PSAM** (Pilot Symbol Assisted Modulation), se divisent en trois grandes

classes suivant le type d'insertion effectué : **pilotes type blocs**, **pilotes type peignes** ou **pilotes en treillis**.

L'estimation du canal par pilotes de type bloc a été développée sous l'hypothèse d'un canal à évanouissement lent (canal invariant sur plusieurs symboles OFDM). Par contre, l'estimation du canal par pilotes de type peigne a été présentée pour satisfaire le besoin de l'égalisation quand le canal change d'un symbole OFDM à un autre ou dans un même symbole OFDM.

Deux principaux problèmes surgissent face à l'estimation du canal, premièrement la quantité de symboles pilotes à insérer et la complexité calculatoire de l'estimateur pouvant poursuivre correctement le canal.

Ces deux problèmes sont bien évidemment liés puisque les performances de l'estimateur dépendent de la quantité des pilotes insérés. Alors qu'il y a des méthodes qui n'utilisent aucune information pilote. Ces méthodes dites «aveugles».

Généralement si le canal est invariant dans un symbole OFDM, l'estimation du canal se fait sur la réponse fréquentielle, et si le canal varie dans un symbole OFDM elle se fait sur le canal discret équivalent. Dans le premier cas, des méthodes classiques (que nous appellerons conventionnelles) estiment la réponse fréquentielle du canal aux fréquences des différentes sous-porteuses pilotes, en utilisant le critère des moindres carrés (LSE : "Least Square") ou le critère de l'erreur quadratique moyenne (MMSE: "Minimum Mean Square Error"). D'un symbole à l'autre le canal est corrélé, le critère LSE ne permet pas de profiter de cette corrélation donc sa mise en œuvre revient à réaliser une estimation du canal symbole par symbole. En revanche le critère MMSE permet de prendre en compte cette corrélation.

Ces deux critères font une interpolation fréquentielle pour obtenir la réponse du canal [10, 3,11]. Le critère LMMSE a montré une meilleure performance que le critère LSE[3]. L'interpolation du canal par pilotes de type peigne peut être basée sur l'interpolation linéaire, l'interpolation du second ordre, l'interpolation passe-bas, l'interpolation du spline cubique. L'interpolation du second ordre a montré une meilleure performance que l'interpolation linéaire. L'interpolation passe-bas a montré la meilleure performance de toutes les techniques d'interpolation [10].

3.2.1 Modèle du canal :

Cette section va montrer comment le canal deviendra diagonalisé d'une convolution cyclique du fait de l'insertion du préfixe cyclique. Si le préfixe cyclique est plus long que la réponse impulsionnelle du canal, nous pouvons montrer que le système OFDM peut être considéré comme un ensemble de canaux parallèles gaussiens, schématisé dans la figure 3.1.

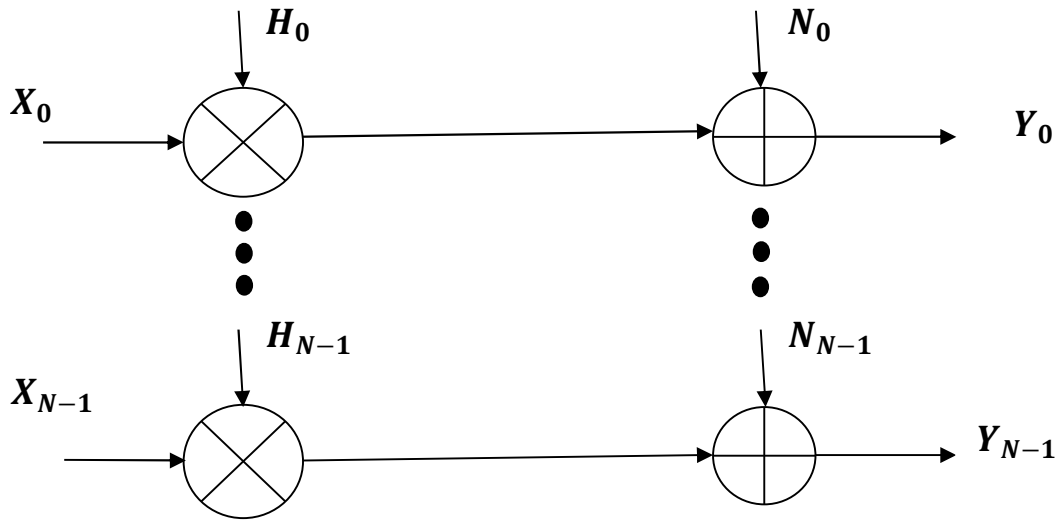


Figure 3.1 canaux parallèles de Gaussiens.

Soient X_n les symboles de données ayant des valeurs complexes prises dans un alphabet fini selon la constellation de la modulation choisie, T_s représente la durée d'un symbole (trame) OFDM, et les N sous-porteuses sont distantes de Δf . Les symboles d'entrée X_n sont organisés en blocs de taille $N \times 1$. Le $k^{ième}$ bloc est donné par :

$$X = \begin{bmatrix} X_{k,0} \\ X_{k,1} \\ \vdots \\ X_{k,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Où les éléments $X_{N,k}$ sont les symboles à émettre à l'instant n sur la $k^{ième}$ sous-porteuse, avec l'application de l>IDFT au bloc de symboles X . On obtient le vecteur :

$$x = F^H X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Où F désigne la matrice TFD de taille $N \times N$, donnée par la relation. La matrice F^H désigne donc l'opération inverse (TDFI), avec $(.)^H$ qui indique le transposé conjugué.

Dans les systèmes OFDM, c'est l'ajout d'une extension cyclique à chaque bloc qui permet de prendre en compte le comportement sélectif du canal. A partir du vecteur x de taille $N \times 1$, on forme un nouveau vecteur $\tilde{x}$ de taille $N_s \times 1$, tel que :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_{N-N_g} \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{Soit } g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{m-1} \end{bmatrix} \text{ et } n = \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La réponse impulsionnelle du canal et le bruit AWGN respectivement. On peut donc définir

$$H = DFT_N(g) = Fg \quad (3.5)$$

$$\text{Et } N = Fn \quad (3.6)$$

Au récepteur, le vecteur reçu est donné par :

$$\tilde{y} = \tilde{x} \otimes g + \tilde{n} \quad (3.7)$$

Où $\otimes$ dénote l'opération de convolution.

On supprime le préfixe cyclique, donc les N premiers symboles qui contiennent de l'interférence entre les blocs sont supprimés, c'est-à-dire :

$$y = \begin{bmatrix} y_{N_0} \\ y_{N_0-1} \\ \vdots \\ y_{N+N_0-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Sous la supposition que les interférences sont complètement éliminées, on peut dériver le vecteur reçu y de taille $N \times 1$ comme suit :

$$y = \tilde{H}\tilde{x} + n \quad (3.9)$$

Où $\tilde{H}$ est une matrice de taille $N \times N_s$, qui représente l'effet du canal. Elle est donnée par :

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{L-1} & g_{L-2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & g_{L-1} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Puisque les N_g premiers éléments de $\tilde{x}$ sont identiques aux N_g derniers, on peut écrire

$$y = H_c x + n \quad (3.11)$$

Où H_c est une matrice de taille $N \times N$ obtenue à partir de (3.10), en superposant les N_g premières colonnes aux N dernières, ce qui donne :

$$H_c = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & g_{L-1} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & g_{L-1} \\ g_{L-1} & g_{L-2} & \ddots & g_0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & g_{L-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & g_{L-2} & \cdots & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{L-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

H_c Étant une matrice circulante, on peut exprimer sa décomposition en valeurs propres comme suit :

$$H_c = F^H H F \quad (3.13)$$

Avec la matrice H qui contient dans sa diagonale la réponse fréquentielle du canal est

donnée par :

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Avec

$$H_k = \sum_{m=0}^{L-1} g_m e^{-j2\pi km/N} \quad (3.15)$$

En d'autres mots, H contient sur sa diagonale la DFT à N points de la réponse impulsionnelle du canal. On peut écrire le signal reçu comme :

$$\begin{aligned} y &= H_c x + n \\ &= F^H H F x + n \\ &= F^H H F F^H X + n \\ &= F^H H X + n \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour retrouver les symboles émis, on applique la TFD au vecteur y . ce qui donne :

$$\begin{aligned} Y &= F y \\ &= F F^H H X + F n \\ &= H X + N \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ou sous la forme scalaire suivante :

$$Y_k = H_k X_k + N_k \quad k = 0, \dots, N \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) montre que l'on peut égaliser très facilement en multipliant chaque sortie de la DFT par le coefficient H_k^{-1} correspondant. Cependant, selon la valeur de H_k , la transmission sur une sous-bande est dite bonne ou mauvaise.

L'atténuation est donné par :

$$H[k] = G\left(\frac{k}{NT_s}\right), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

Où $G(.)$ est la réponse en fréquence du canal au cours de l'OFDM courant et le symbole T_s est la période d'échantillonnage du système. La réponse impulsionnelle du canal peut être exprimée sous la forme :

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k \delta(\tau - \tau_k T_s) \quad (3.20)$$

Où α_k sont des variables indépendantes de moyenne nulle, aléatoires complexes gaussiennes, et τ_k est le retard du k -ième impulsion.

3.2.2 L'arrangement des pilotes :

Pour effectuer l'estimation on utilise des porteuses dites "pilotes" ce sont des porteuses dont le gain, la phase et la position dans la trame OFDM sont connus de l'émetteur et du récepteur.

On les insère sur certains points à l'entrée de l'IFFT. L'utilisation des symboles pilotes réduit le taux de transmission de l'information et il faut garder leurs aussi petit que possible. Le motif des pilotes dans la trame OFDM dépend de la sélectivité du canal [12] Tel que:

- pour un canal très sélectif en fréquence mais à évanouissement lent, on utilisera un arrangement dans le domaine fréquentiel, ou chaque sous porteuse d'un symbole OFDM donné est dédiée à l'estimation du canal (figure 3.a). Dans cette configuration, les symboles pilotes sont distribués d'une façon périodique sous forme de blocs. Puisque dans ce cas le canal est à évanouissement lent, les symboles pilotes de ce bloc (trame) sont insérés sur toutes les sous-porteuses, donc pour toutes les fréquences mais à des intervalles de temps K_t .
- Pour un canal moyennement sélectif en fréquence, mais très sélectif en temps (à évanouissement rapide), on utilisera un arrangement dans le domaine temporel. Dans cette configuration, certaines fréquences sont exclusivement dédiées à l'estimation de canal (figure 3.b) à des intervalles K_f , mais présentes sur chaque trame pour suivre l'évolution temporelle du canal qui varie rapidement.
- Il existe aussi d'autres motifs par exemple une configuration qui fait combiner entre les deux précédentes, pilotes en treillis, où les symboles pilotes sont placés à des intervalles de temps K_t et des intervalles de fréquence K_f (figure 3.c).

La figure suivante illustre ces trois principales dispositions : les porteuses pilotes sont en noir et les porteuses d'information en blanc.

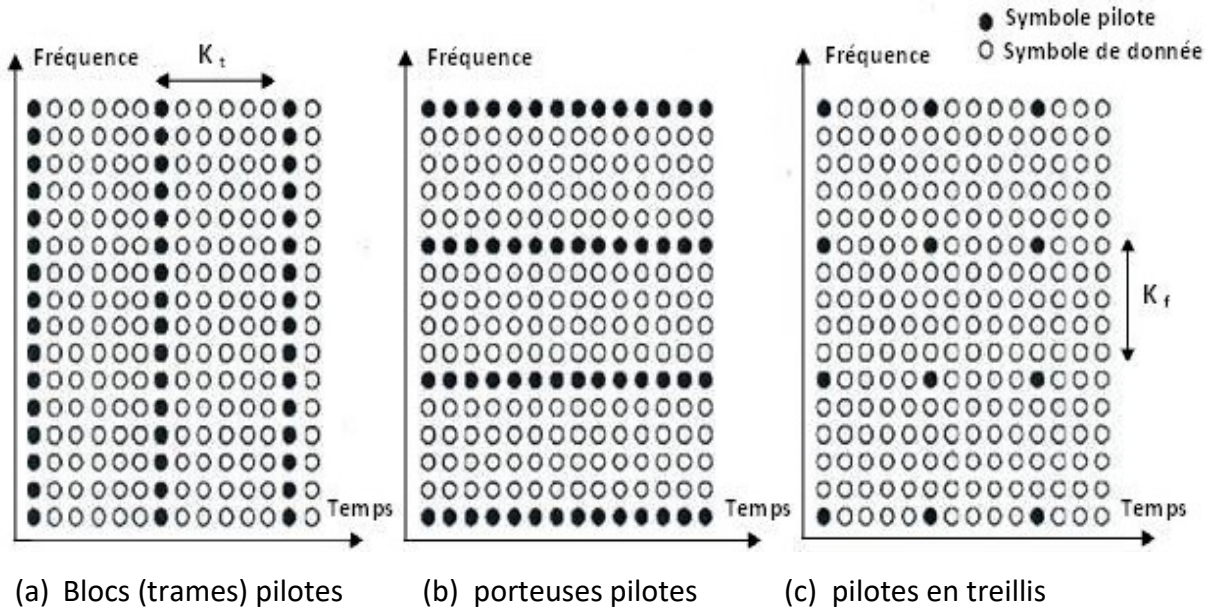


Figure 3.2 Les trois types de base d'arrangement des pilotes pour l'estimation du canal dans un système OFDM.

3.2.3 Les critères d'estimation LSE et MMSE :

Parmi les méthodes d'estimation, celles basées sur le critère des moindres carrés ou LSE (Least Square Error en anglais) et sur le critère de l'erreur quadratique moyenne minimum ou MMSE (Minimum Mean Square Error) sont celles les plus étudiées. Les développements suivants donnent les coefficients des deux estimateurs :

a Estimateur LSE :

Le critère des moindres carrés vise à minimiser le paramètre J_{LS} , définie Par

$$(y - XF\hat{g}_{LS})^H (y - XF\hat{g}_{LS})$$

Comme suit:

$$J_{LS} = (y - XF\hat{g}_{LS})^H (y - XF\hat{g}_{LS}) \quad (3.21)$$

$$J_{LS} = (y^H - \hat{g}_{LS}^H F^H X^H) (y - XF\hat{g}_{LS})$$

$$J_{LS} = (y^H y - \hat{g}_{LS}^H F^H X^H y - y^H XF\hat{g}_{LS} + \hat{g}_{LS}^H F^H X^H XF\hat{g}_{LS}) \quad (3.22)$$

Pour minimiser J_{LS} , nous devons faire sa dérivée de l'équation (3.22) par rapport à $\hat{g}_{LS}^H$, soit :

$$\begin{aligned}
 \partial J_{LS} / \partial \hat{g}_{LS}^H &= [0 - F^H X^H y - 0 + F^H X^H X F \hat{g}_{LS}] \\
 F^H X^H X F \hat{g}_{LS} &= F^H X^H y \\
 \hat{g}_{LS} &= (F^H X^H X F)^{-1} F^H X^H y
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Puisque les colonnes de F sont orthonormées, $\hat{g}_{LS}$ génère l'estimation du canal $\hat{H}_{LS}$ dans le domaine fréquentiel.

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{LS} &= F \hat{g}_{LS} = F (F^H X^H X F)^{-1} F^H X^H y \\
 \hat{H}_{LS} &= F (F^H)^{-1} (X^H)^{-1} X^{-1} F^{-1} F^H X^H y \\
 \hat{H}_{LS} &= X^{-1} y
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Donc les coefficients de l'estimateur LS sont donnés par la formule suivante :

$$\hat{H}_{LS} = \left[\frac{y_0}{X_0}, \frac{y_1}{X_1}, \dots, \frac{y_{N-1}}{X_{N-1}} \right]^T \tag{3.25}$$

Les estimateurs LSE sont calculés avec une très faible complexité, mais ils souffrent d'une haute erreur quadratique moyenne.

b Estimation LMMSE :

L'estimateur LMMSE emploie les statistiques du second ordre sur le canal pour minimiser l'erreur quadratique moyen. Le critère du minimum d'erreur quadratique moyenne vise à minimiser la fonction de coût J_{MMSE} , définie comme l'erreur quadratique moyenne entre le canal réel et estimé en utilisant la corrélation fréquentielle du canal :

$$J_{MMSE} = E[\|e\|^2] = E[\|(g - \hat{g}_{MMSE})\|^2] \tag{3.26}$$

$$J_{MMSE} = E[\|g - Ay\|^2]$$

$$J_{MMSE} = E[(g - Ay)(g - Ay)^H]$$

$$J_{MMSE} = E[(g - Ay)(g^H - y^H A^H)]$$

$$J_{MMSE} = E[gg^H - gy^H A^H - Ayg^H + Ayy^H A^H] \quad (3.27)$$

Pour minimiser J_{MMSE} on doit faire la dérivée de (3.27) par rapport à A^H , soit :

$$\begin{aligned} \partial J_{MMSE} / \partial A^H &= 0 - E[gy^H] - 0 + A * E[yy^H] = 0 \\ -R_{gy} + AR_{yy} &= 0 \\ A &= R_{gy} R_{yy}^{-1} \\ \hat{g}_{MMSE} = Ay &= R_{gy} R_{yy}^{-1} y \end{aligned} \quad (3.28)$$

Notons que :

$$\begin{aligned} R_{gy} &= E[gy^H] = E[g(XFg + n)^H] \\ R_{gy} &= E[gg^H F^H X^H] + E[gn^H] = E[gg^H F^H X^H] + 0 \\ R_{gy} &= R_{gg} F^H X^H \end{aligned} \quad (3.29)$$

Et :

$$\begin{aligned} R_{yy} &= E[yy^H] = E[(XFg + n)(XFg + n)^H] \\ R_{yy} &= E[XFgg^H F^H X^H] + E[nn^H] \\ R_{yy} &= XFR_{gg}F^H X^H + \sigma_n^2 I_N \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} R_{hh} &= E[hh^H] = E[(Fg)(Fg)^H] = FE[gg^H]F^H \\ R_{hh} &= FR_{gg}F^H \end{aligned} \quad (3.31)$$

R_{gy} et R_{yy} Sont respectivement la matrice de covariance entre g et y et la matrice d'auto covariance de y .

R_{gg} et R_{hh} sont respectivement les matrices d'auto covariance de g et h , et σ_n^2 est la variance du bruit. Puisque les colonnes de F sont orthonormées, $\hat{g}_{MMSE}$ génère l'estimation du canal $\hat{H}_{MMSE}$ dans le domaine fréquentiel.

$$\hat{H}_{MMSE} = F\hat{g}_{MMSE}$$

D'après l'équation (3.28) on trouve :

$$\hat{H}_{MMSE} = FR_{gy}R_{yy}^{-1}y \quad (3.32)$$

En remplaçant les équations (3.29) et (3.30) dans (3.32) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MMSE} &= FR_{gg}F^HX^H(XFR_{gg}F^HX^H + \sigma_n^2I_N)^{-1}y \\ \hat{H}_{MMSE} &= FR_{gg}F^HX^H(XFR_{gg}F^H + (\sigma_n^2X^H)^{-1})^{-1}y \\ &= FR_{gg}F^H(XFR_{gg}F^H + \sigma_n^2(X^H)^{-1})^{-1}y \\ &= FR_{gg}F^H(FR_{gg}F^H + \sigma_n^2(X^H)^{-1}X^{-1})^{-1}X^{-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{H}_{MMSE} = R_{hh}(R_{hh} + \sigma_n^2(XX^H)^{-1})^{-1}\hat{H}_{LS} \quad (3.33)$$

Enfin, un estimateur MMSE est utilisé pour estimer la réponse fréquentiel du canal. Cet estimateur tiens compte des corrélations du canal et du modèle du bruit. Il donne de meilleures performances en termes du SER et EQM par rapport aux autres estimateurs par pilotes de type peigne tant que le canal est invariant dans un symbole OFDM. Le problème avec l'estimateur MMSE c'est à sa complexité relativement élevé. On remarque qu'une inversion et une multiplication sont nécessaires dans l'expression (3.33), ce qui rend LMMSE plus complexe que LSE, surtout pour une matrice R_{hh} de grande taille. Cependant, cet estimateur est optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne. De plus, comme il est montré dans [7]. Bien que cet estimateur soit optimal, son utilisation est limitée par deux inconvénients majeurs: sa complexité, et la nécessité de connaître la matrice de covariance R_{hh} qui est a priori inconnue du récepteur.

La réduction de la complexité de cet estimateur est l'objectif de ce mémoire et sera traité par la suite.

c Le LMMSE modifié :

La complexité de l'estimateur LMMSE peut être réduite en utilisant la décomposition en valeur singulière de la matrice d'auto-corrélation R_{hh} . Par conséquent nous pouvons appliquer une réduction de rang et utiliser seulement les éléments les plus significatifs de R_{hh} . Les estimateurs LMMSE modifiés sont largement étudiés[2,14,12] pour réduire la complexité qui caractérise le modèle LMMSE la figure 3.3 illustre la simplification qu'on va faire dans notre travail, on s'intéresse à l'estimateur LMMSE utilisant la décomposition en valeur singulière, qui combine les techniques de simplification suivantes :

1. La première simplification est de remplacer le terme $(XX^H)^{-1}$ dans l'équation(3.33) par son espérance tel que :

$$E\{(XX^H)^{-1}\} = E\left|\frac{1}{x_k}\right|^2 I \quad (3.34)$$

Donc, notre estimateur simplifié peut être exprimée comme suit :

$$\hat{H}_{MMSE} = R_{hh}(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR}I)^{-1}\hat{H}_{LS} \quad (3.35)$$

Où I est la matrice d'identité, SNR est le rapport moyen signal sur bruit est défini comme $E|x_k|^2/\sigma_n^2$. β est une constante dépendant de constellation de signaux. Pour le cas de 16-QAM :

$$\beta = E|x_k|^2 E|1/x_k|^2 = 17/9$$

Ainsi, l'inverse ne doit être calculé qu'une seule fois par estimation de canal.

2. La deuxième simplification consiste en l'utilisation de la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice R_{hh} comme suit :

$$R_{hh} = U\Lambda U^H \quad (3.36)$$

Où U est une matrice avec des colonnes orthonormées et Λ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{N-1} \geq 0$ sur sa diagonale.

Le LMMSE minimise l'erreur quadratique moyenne entre le canal actuel et estimé en utilisant la corrélation de la fréquence du canal d'évanouissement lent, son équation est la suivante [16]:

$$\hat{H}_p = R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1} \hat{H}_{LS} \quad (3.37)$$

Ou $R_{h\hat{h}_{ls}}$ est la corrélation croisée entre le canal atténuation vecteur h et l'estimation LSE. Et $R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}$ matrice d'auto-corrélation de l'estimation LS donner par :

$$R_{h\hat{h}_{ls}} = E\{h\hat{h}_{ls}^H\} \quad (3.38)$$

$$R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}} = E\{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}^H\} \quad (3.39)$$

Puisque le bruit blanc n'est pas corrélé avec l'atténuation du canal, la corrélation croisée entre le canal h et $\hat{h}_{ls}$ est le même que l'autocorrélation du canal. Ainsi, nous pouvons remplacer $R_{h\hat{h}_{ls}}$ avec R_{hh} . Aussi l'auto-corrélation de $R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}$ est équivalente à R_{hh} plus la puissance du bruit σ^2 et la puissance du signal.

En appliquant la décomposition en valeurs singulières comme suit :

$$R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1/2} = Q_1 D Q_2^H \quad (3.40)$$

Où Q est une matrice avec des colonnes orthonormées et D est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières $d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots d_{N-1} \geq 0$ sur sa diagonale.

Puisque $R_{h\hat{h}_{ls}} = R_{hh}$ et $R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}} = R_{hh} + \frac{\beta}{SNR} I$ partagent tous les mêmes valeurs singulières que R_{hh} de sorte que nous pouvons simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} R_{h\hat{h}_{ls}} R_{\hat{h}_{ls}\hat{h}_{ls}}^{-1/2} &= U \Lambda U^H \left(U \left(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I \right) U^H \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= U \Lambda \left(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I \right)^{-1/2} U^H \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$= Q_1 D Q_2^H \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 = U \text{et} D = \Lambda \left(\Lambda + \frac{\beta}{SNR} I \right)^{-1/2}$$

Le meilleur rang p estimateur est alors :

$$\hat{H}_p = Q_1 \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_2 R_{h_s h_s}^{-1/2} \hat{H}_{LS} \quad (3.43)$$

$$= U \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (U(\Delta + \frac{\beta}{SNR} I) U^H)^{-1/2} \hat{H}_{LS}$$

$$= U \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\Delta + \frac{\beta}{SNR} I)^{-1/2} U^H \hat{H}_{LS}$$

$$= U \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \hat{H}_{LS} \quad (3.44)$$

En prenant notamment que les p premières valeurs singulières correspondant à la plupart des valeurs importantes de R_{hh} correspondant au coin supérieur gauche de D_p , la meilleure approximation rang p de l'estimateur est :

$$\hat{H}_p = U \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \hat{H}_{LS} \quad (3.45)$$

Où $\Delta_p = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N)$ est une matrice diagonale définie par :

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{\beta}{SNR}}, & k = 1, 2, \dots, p \\ 0, & k = p + 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.46)$$

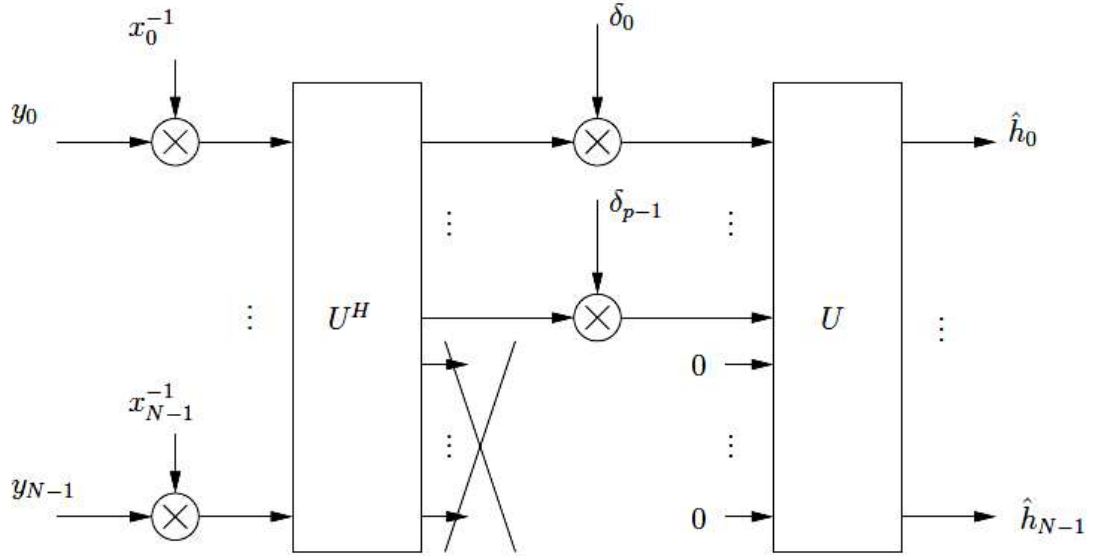


Figure 3.3: Réduction de rang basée sur la décomposition en valeurs singulières.

3.3 L'interpolation :

L'estimation LSE permet d'obtenir la réponse fréquentielle (bruitée) sur les porteuses pilotes. Dans un grand nombre de cas, il est alors nécessaire d'effectuer une interpolation entre les sous-porteuses pilotes pour pouvoir estimer le canal sur l'ensemble du réseau temps-fréquence. On a vu que LMMSE pouvait servir de filtre interpolateur. Cependant, sa complexité fait qu'on préfère souvent utiliser des interpolations plus simples, telles que celles présentées dans cette partie.

3.3.1 Interpolation linéaire (LI) :

L'interpolation linéaire a été étudiée dans [17], [18], elle est utilisée pour estimer le canal aux sous-porteuses de données entre deux sous-porteuses pilotes adjacentes $\hat{H}^{(p)}(m)$ et $\hat{H}^{(p)}(m+1)$ est donnée par :

$$\hat{H}(mK_f + l) = \hat{H}^{(p)}(m) + \frac{l}{K_f} \left(\hat{H}^{(p)}(m+1) - \hat{H}^{(p)}(m) \right) \quad 0 \leq l < K_f \quad (3.48)$$

3.3.2 Interpolation du second ordre (SOI) :

Avec cette méthode l'estimation de canal aux sous-porteuses de données est obtenue par la combinaison linéaire des trois estimations des sous-porteuses pilotes adjacentes. Cette méthode s'exécute mieux que la méthode linéaire.

Le canal estimé par l'interpolation de second ordre est donné par:

$$\hat{H}(mK_f + l) = c_1 \hat{H}^{(p)}(m-1) + c_0 \hat{H}^{(p)}(m) + c_{-1} \hat{H}^{(p)}(m+1) \quad (3.49)$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} c_1 = \alpha(\alpha-1)/2 \\ c_0 = -(\alpha-1)(\alpha+1) \\ c_{-1} = \alpha(\alpha+1)/2 \\ \alpha = l/N \end{cases}$$

3.3.3 Interpolation par splines cubiques (SCI) :

Cette méthode consiste à produire un polynôme continu entre les points de données (la fonction spline dans Matlab). Dans [18], et [19], il est démontré que l'interpolation par splines cubiques s'exécute mieux que l'interpolation linéaire.

3.3.4 Interpolation passe-bas (LPI) :

La méthode LPI s'exécute en insérant des zéros dans la séquence originale $\hat{H}^{(p)}$ et puis en appliquant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie (FIR) (la fonction "interp" dans Matlab), qui permet aux données originales de passer sans changement. Cette méthode minimise l'erreur quadratique moyenne entre les points interpolés.

3.4 L'égaliseur ZF :

L'égalisation dans les systèmes OFDM est très simple. C'est l'un des avantages principaux de l'utilisation de l'OFDM au lieu des systèmes à simple porteuse.

L'égalisation de canal dans les systèmes OFDM peut être faite par juste une simple division dans le domaine fréquentiel.

Dans l'OFDM tant que le préfixe cyclique demeure assez long par rapport à la réponse impulsionnelle du canal pour maintenir l'orthogonalité entre les sous-porteuses, l'égalisation peut être réalisée simplement par l'égaliseur ZF [20]. L'égaliseur ZF minimise la distorsion maximale entre les symboles à la sortie de l'égaliseur.

Une prolongation cyclique plus longue que la réponse impulsionnelle de canal peut supprimer l'IES et l'IEP. Dans l'OFDM, l'égaliseur ZF aura lieu dans le domaine fréquentiel. Donc, le rôle de l'égaliseur devient juste une opération d'ajustement de gain et de phase sur chaque sous-porteuse.

3.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié une méthode d'estimation de canal MMSE présentant une sélectivité en fréquence pour les systèmes de type OFDM, pour des données non codées. Cette méthode présente de très bonnes performances par rapport aux autres estimateurs, mais son inconvénient majeur est sa complexité.

Cependant, pour lutter contre cet inconvénient on propose une modification dans l'équation de cet estimateur, qui élimine le calcul de la matrice inverse. Ensuite on décrit brièvement les méthodes d'interpolation et de l'égalisation ZF, on donne aussi dans ce chapitre le modèle du canal parallèle Gaussien.

Chapitre 4 Paramètres et résultats des simulations

4.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à la partie simulation (paramètres de simulation, résultats et interprétation). Le logiciel de simulation utilisé est **Matlab**, les programmes réalisés peuvent être modifiés pour faire les tests et les comparaisons pour différents paramètres. Le but principal est d'examiner les performances des estimateurs du canal en termes d'erreur quadratique moyenne, le taux d'erreurs symboles et la complexité nécessaire. Pour cela une chaîne de transmission utilisant la modulation OFDM est simulée.

4.2 Paramètres de la simulation:

Avant de donner les détails de nos simulations expliquons d'abord le canal que nous voulons estimer puisque le choix de certains paramètres dépend du canal lui-même.

4.2.1 Canal de transmission:

Dans ce travail, nous avons utilisé un modèle de canal indoor statique mais sélectif en fréquence. La simulation par trajets multiples implique d'ajouter des versions atténuées et retardées du signal transmis en trajet direct. La réponse impulsionnelle du canal est donnée par :

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k \delta(\tau - \tau_k T_s)$$

Les atténuations α_k suivent une loi gaussienne, mais afin de générer ce canal nous avons besoin de connaître la puissance à donner à chaque trajet et les retards correspondants ainsi que le nombre de trajets à considérer. En prenant $L = 5$ trajets et

une période symbole $T_s = 100 \text{ ns}$, les puissances et les retards des trajets sont données par le profil retard-puissance d'un modèle exponentiel du canal indoor résumé par le tableau suivant :

N du trajet	Retard en ns	Puissance en dB
0	0	0
3	300	-8
5	500	-17
6	600	-21
7	700	-25

Tableau 4.1 : Paramètres de la réponse impulsionnelle du canal à générer.

D'après le tableau 4.1, qui résume les différents paramètres du canal utilisé. On remarque que le retard maximale noté τ_{max} est égale $7 \times T_s = 700 \text{ ns}$. Le choix de certains paramètres de la chaine OFDM dépend de la valeur de ce retard τ_{max} . Un exemple d'une réponse impulsionnelle possible de ce canal est illustré par la Figure 4.1.

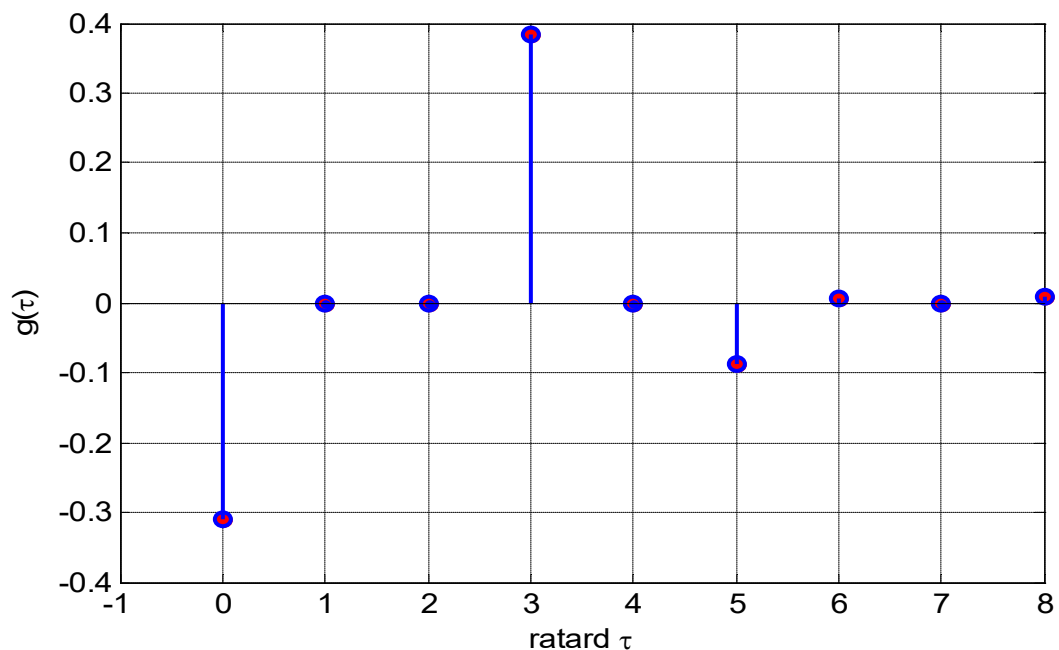


Figure 4.1 : Exemple de la réponse impulsionnelle du canal.

4.2.2 Le système OFDM:

Il est utile de préciser les paramètres concernant le système OFDM que dans ce travail nous avons considéré que :

***a* Nombre de sous-porteuses :**

Le système OFDM transmet les données sur plusieurs sous-porteuses. Plusieurs paramètres déterminent ou bien limitent le nombre des sous-porteuses, comme la largeur de bande, le débit binaire ainsi que la durée des symboles. On a choisi $N = 128$ (*porteuses*), car c'est le nombre généralement utilisé pour lutter contre les canaux sélectif en Indoor. Ce nombre dépend généralement de la bande de cohérence du canal ; en fait il faut diviser le canal en N sous-canaux de largeur inférieure à la bande de cohérence.

***b* Modulation :**

Plusieurs types de modulation peuvent être utilisés tels que PAM, PSK, FSK et QAM. Pour le système OFDM, la plupart des articles utilisent la modulation M-QAM. Le signal modulé est représenté par un nombre complexe $C_k = a_k + jb_k$. Les deux valeurs a_k et b_k appartiennent à des ensembles bien déterminés.

Pour le cas du 16-QAM $a_k, b_k \in [\pm 1; \pm 3]$. Chaque symbole est un regroupement de $\log_2(M)$ bits. Ce nombre varie selon la modulation et comme la modulation consiste à assigner à des mots binaires d'une taille $\log_2(M)$ des symboles complexes, l'utilisation du codage de Gray positionne les symboles d'une façon qu'à la réception, l'erreur de détecter un symbole ne produit qu'une erreur d'un bit figure 4.2.

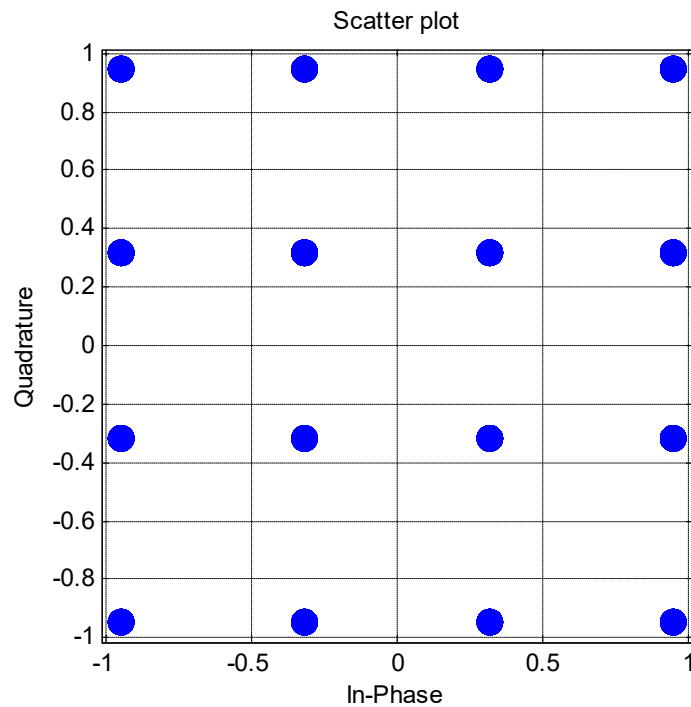


Figure 4.2 : La constellation 16-QAM.

c **Intervalle de garde :**

L'intervalle de garde est choisi pour être plus grand que l'étalement du retard de canal, $T_g > \tau_{max}$ Pour éviter l'IEP et L'IES. Nous avons utilisé l'extension cyclique comme critère pour remplir cet intervalle de garde. On a choisi $T_g = \frac{N}{8} T_s$, ce qui correspond à 12.5% de la durée utile d'un symbole OFDM.

Dans ce travail, nous avons considéré aussi que :

- L'extension cyclique des symboles OFDM est utilisée comme intervalle de garde.
- La réponse impulsionnelle de canal est plus courte que la longueur du préfixe cyclique pour éviter IES.
- L'émetteur et le récepteur sont parfaitement synchronisés.
- On suppose que le canal demeure sans changement pendant la durée d'un symbole OFDM.

Le tableau 4.2, reprend les paramètres de la chaîne de transmission OFDM que nous avons utilisés dans nos simulations.

Paramètres	spécifications
Nombre de sous-porteuses	128
Taille de l'FFT/IFFT	128
Modulation numérique	16-QAM
Type d'intervalle de garde	Extension cyclique
Intervalle de garde	$N/8 = 16$
Canal de transmission	Environnement indoor a trajets multiples
Nombre de trajets	$L=5$
Profil des puissances des retards	Exponentiel
Entrelacement	Fréquentiel
La période d'échantillonnage	$T_s = 100 \text{ ns}$
Le retard max	$\tau_{max} = 700 \text{ ns}$
Algorithme d'estimation	LSE,LMMSE,LMMSE-modifié
Type d'arrangement des pilotes	Pilotes type blocs

Tableau 4.2 : Paramètres utilisés dans nos simulations.

4.2.3 Estimation du canal :

L'estimation du canal est basée sur des symboles pilotes transmis à certaines positions dans la grille temps-fréquence du système OFDM. Les atténuations du canal sont estimées à partir de ces pilotes. Les atténuations du canal dans les points voisins dans la grille temps-fréquence sont fortement corrélées, une propriété qui peut être utilisée par l'estimateur.

Le canal peut être estimé aux fréquences pilotes avec l'utilisation de l'un des algorithmes suivants :

- L'estimateur à moindres carrés (LSE).
- L'estimateur linéaire à erreur quadratique moyenne minimale (LMMSE).
- L'estimateur LMMSE modifié (LMMSE-Modifié).

4.2.4 Critères d'évaluation :

Pour évaluer les performances de la chaîne OFDM et l'estimation du canal, nous avons utilisé les critères d'évaluation suivants :

a L'erreur quadratique moyenne (EQM) :

L'erreur quadratique moyenne (EQM) et le taux d'erreur par bit (TEB), ou par symboles (SER) sont des critères importants pour effectuer l'évaluation des performances des estimateurs de canal. Pour commencer, définissons l'erreur quadratique moyenne utilisé pour l'estimation du canal selon :

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E \left\{ |\hat{H}(k) - H(k)|^2 \right\}$$

Où $\hat{H}$ est le vecteur de canal estimé et H est le vecteur des atténuations de canal.

b Le taux d'erreur par bit (BER) :

Le BER est calculé à partir de l'équation suivante :

$$BER = \frac{\text{nombre total de bits erroné}}{\text{nombre total de bits transmis}}$$

c Le taux d'erreur par symbole (SER) :

On peut aussi, calculer le SER , le taux d'erreur par symbole.

$$SER = \frac{\text{nombre total de symboles erroné}}{\text{nombre total de symboles transmis}}$$

4.2.5 Arrangement des pilotes :

Dans nos simulations, on a utilisé un arrangement de pilotes type blocs qui est approprié au modèle de canal statique sélectif en fréquence.

4.2.6 L'égalisation :

L'égalisation est relativement simple pour un système OFDM. En effet, il suffit de diviser chacune des valeurs spectrales du signal reçu par les coefficients fréquentiels du canal.

4.3 Résultats des simulations :

Cette partie du chapitre est consacré aux résultats obtenus lors des simulations, ainsi aux discussions des différents résultats.

4.3.1 Le canal utilisé :

La figure 4.3 montre la réponse fréquentielle du canal utilisé dans nos simulations. On voit des évanouissements sur certaines porteuses (ce canal est dit sélectif en fréquence).

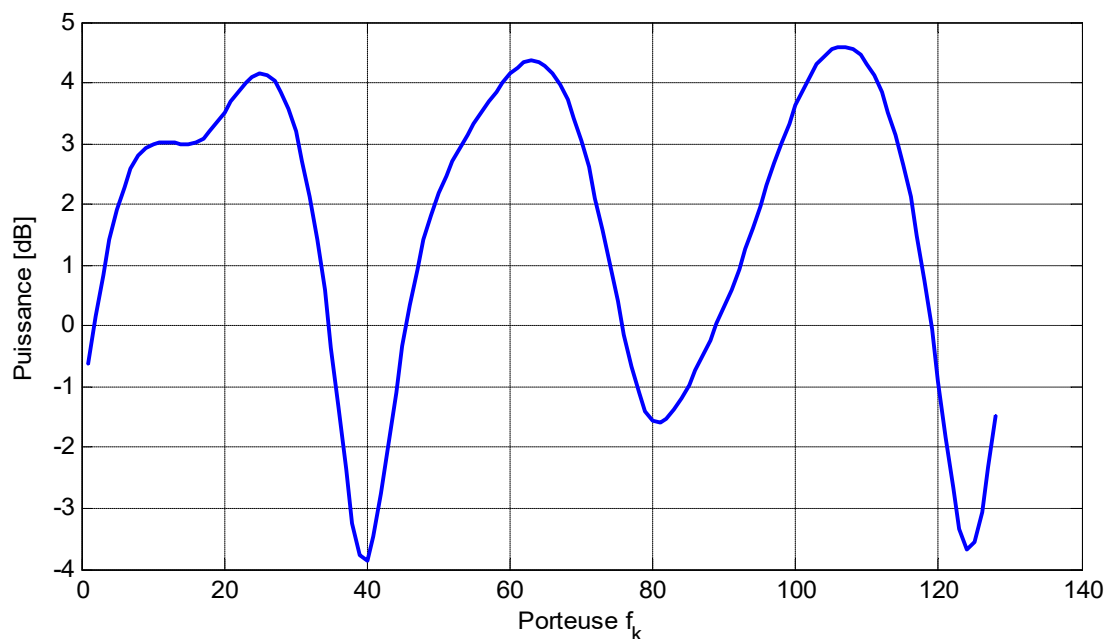


Figure 4.3 : La réponse fréquentiel du canal.

4.3.2 Estimation du canal :

a Comparaison entre les critères d'estimation LS et LMMSE :

La figure 4.4, représente l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du SNR pour les deux estimateurs LS et LMMSE.

Le critère d'estimation LMMSE réalise une meilleure performance par rapport à l'estimateur LSE, cela est justifié théoriquement par le fait que le LSE ne prend pas compte les corrélations du canal et la variance du bruit qui perturbe l'estimation calculé selon la formule suivante :

$$\hat{H}_{LS} = \frac{y}{x} = \frac{H + \text{bruit}}{x} = H + \frac{\text{bruit}}{x}$$

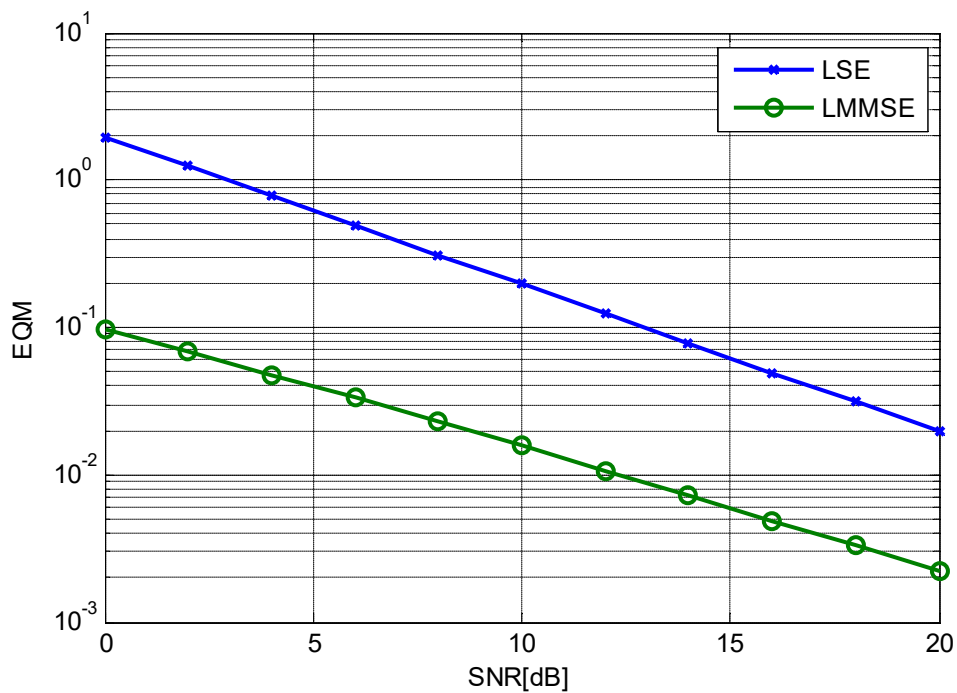


Figure 4.4 : Une comparaison de l'EQM en fonction du SNR entre les estimateurs LSE et LMMSE.

Il est confirmé par la figure 4.4, que l'estimateur LMMSE a de meilleures performances par rapport à l'estimateur LSE en termes d'EQM. Pour un $SNR = 10 \text{ dB}$, on a une réduction en EQM d'environ 0.3. Cette réduction est plus importante pour des SNR faibles.

b Comparaison entre les estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié :

L'estimateur LMMSE ordinaire nécessite l'inversion des matrices R_{hh} et XX^H selon l'équation (3.33). Cette inversion de matrices de dimension $N \times N$ qui complique le calcul de cet estimateur sachant que les données dans X changent régulièrement à chaque symbole OFDM. L'estimateur LMMSE-modifié a pour rôle de réduire la complexité du LMMSE en simplifiant l'inversion de ces matrices par une décomposition en valeurs singulières (SVD). L'équation (3.36) représente la décomposition SVD de la matrice auto-corrélation du canal, ou l'énergie est classée par ordre décroissant dans une matrice diagonale Λ . La figure 4.5 trace les éléments λ_k de la matrice diagonale Λ en fonction de k .

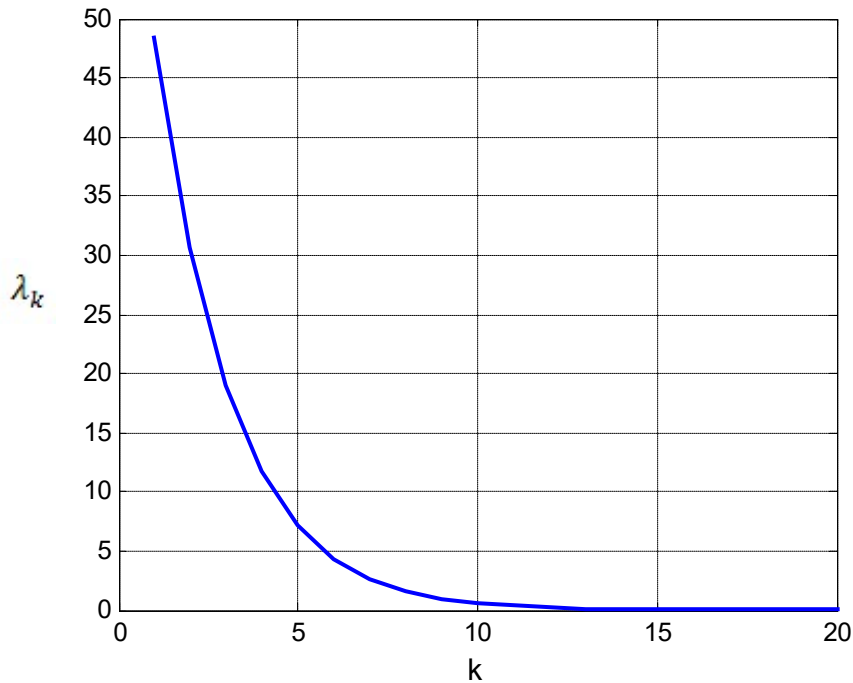


Figure 4.5 : Les éléments λ_k de la matrice diagonale Λ en fonction de k .

On remarque que la valeur des éléments λ_k diminue rapidement jusqu'à s'annuler pour environ k égale à 10. Et donc, on constate que l'énergie du canal est groupée dans, à peu près, les 10 premiers éléments de la matrice Λ .

c Analyse de la complexité de calculs :

Dans cette section, on donne un résumé sur la complexité de calcul pour permettre de comparer entre les deux critères d'estimation du canal LMMSE et LMMSE-modifié, et on discute les résultats des simulations pour démontrer les performances.

En premier lieu, on s'intéresse à l'analyse de la complexité de calcul des critères d'estimations LMMSE et LMMSE-modifié en fonction de p (le rang de réduction). Le tableau 4.2, montre le nombre de multiplications complexes utilisé par symbole OFDM pour les deux critères d'estimation. On constate que l'estimateur LMMSE est plus complexe (temps de calcul plus important) que le LMMSE-modifié d'autant plus que p est faible.

Le nombre de multiplications dans l'estimateur LMMSE modifié est donné par :

$$2pN$$

Et celui du LMMSE est donné par :

$$N^2$$

Le taux de réduction peut être exprimé comme suit:

$$\text{Taux de réduction de complexité} = 1 - \frac{2pN}{N^2} \times 100$$

Le rang de réduction de complexité p	64	17	10	5
Nombre de multiplication LMMSE N^2	16384	16384	16384	16384
Nombre de multiplication LMMSE-modifié $2pN$	16384	4352	2560	1280
Taux de réduction de complexité $1 - \frac{2pN}{N^2} \times 100$	0%	73.43%	84.37%	92.18%

Tableau 4.3 : Analyse de la complexité de calcul des estimateurs à l'aide des symboles pilotes en forme de bloc.

Pour une valeur typique est plus judicieuse de p ; c'est-à-dire $p = 10$; le taux de réduction de la complexité est de 84.37%. On verra plus tard la façon de choisir la valeur optimale de p . Cette réduction de la complexité doit se faire avec un compromis sur les performances en SER et EQM.

d analyse des performances :

Dans le but d'analyser et de comparer les performances des estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié, on utilise le critère d'erreur quadratique moyenne et le taux d'erreur par symboles pour tracer les figures 4.6 et 4.7, respectivement.

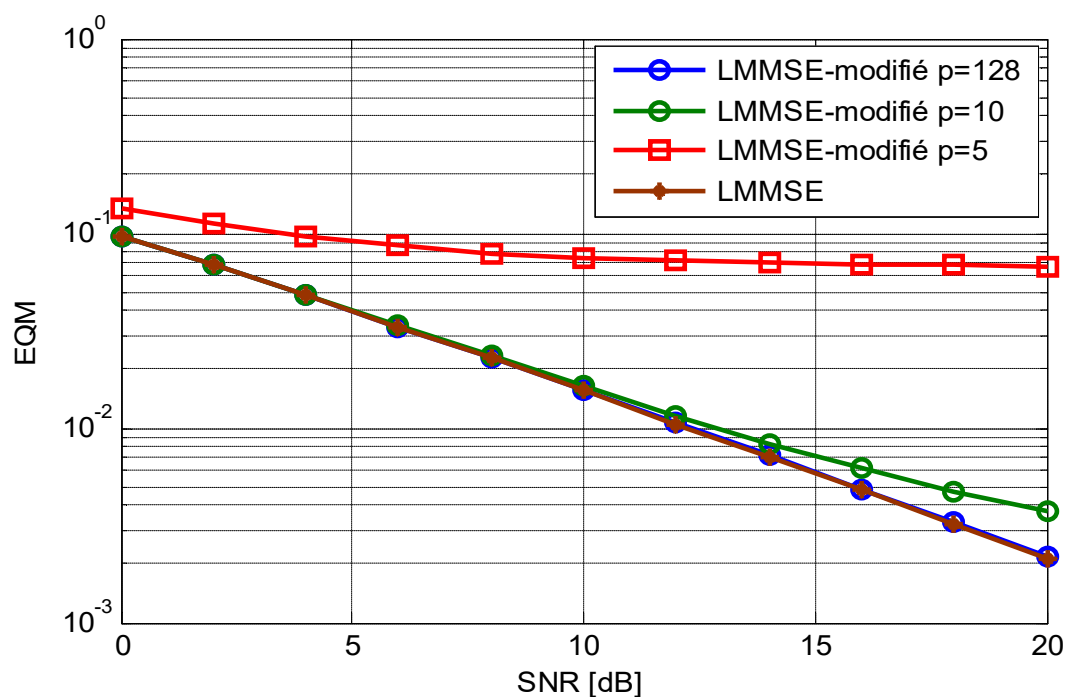


Figure 4.6 : Une comparaison de l'EQM en fonction du SNR entre les estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié pour différentes valeurs de p .

D'après la figure 4.6 on remarque que LMMSE et LMMSE-modifié pour $p = 128$, ont les mêmes performances en termes d'EQM. Pour LMMSE-modifié et $p = 10$, les performances sont les mêmes jusqu'à un SNR = 10 dB. A partir de ce point, on observe une légère détérioration. Pour une LMMSE-modifié et $p = 5$; la performance en EQM se dégrade significativement.

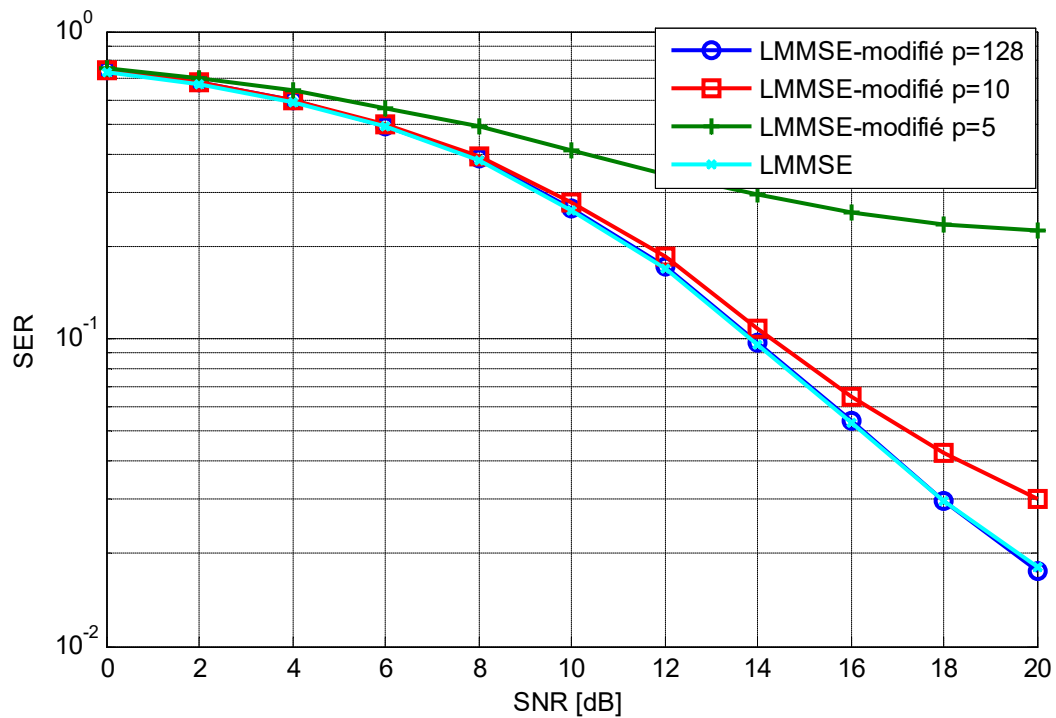


Figure 4.7 : Une comparaison SER en fonction du SNR entre les estimateurs LMMSE et LMMSE-modifié pour différentes valeurs de p .

La figure 4.7 nous mène vers le même constat, le LMMSE-modifié avec $p = 10$ nous permet d'avoir la même performance en SER avec une légère détérioration à partir d'un $SNR = 10$. On rappelle que l'estimateur LMMSE-modifié pour $p = 10$; nous permet de réduire la complexité de 84.37% par rapport au LMMSE ordinaire avec presque les mêmes performances en EQM et SER.

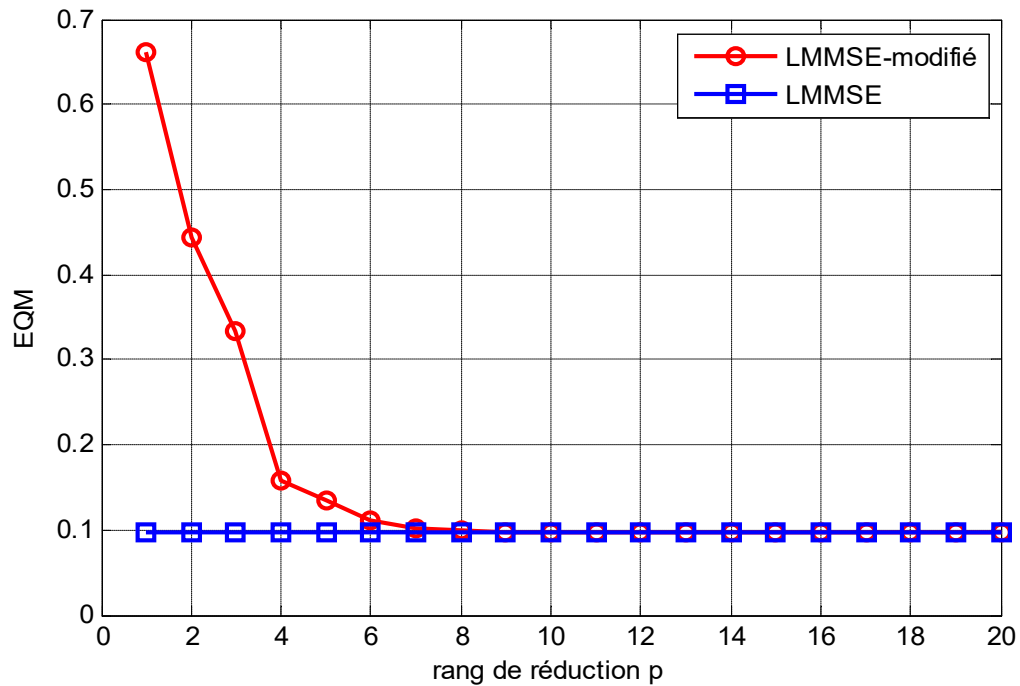


Figure 4.8 : L'évolution de l'EQM pour différentes valeurs de p de l'estimateur LMMSE-modifié et un $SNR = 10dB$.

Afin de confirmer et d'expliquer que le bon choix de prendre $p = 10$, nous avons tracé la figure 4.8 qui illustre l'évolution de l'EQM en fonction du rang de réduction p du nouveau estimateur pour un $SNR = 10$ dB. On observe que l'EQM diminue en augmentant la valeur de p jusqu'à $p \approx 10$. A partir de ce point l'EQM reste presque constante ≈ 0.1 . Cette conclusion reste aussi valable en traçant l'évolution du SER en fonction du rang de réduction p du nouveau estimateur pour un $SNR = 10$ dB. Ceci est illustré par la figure 4.9.

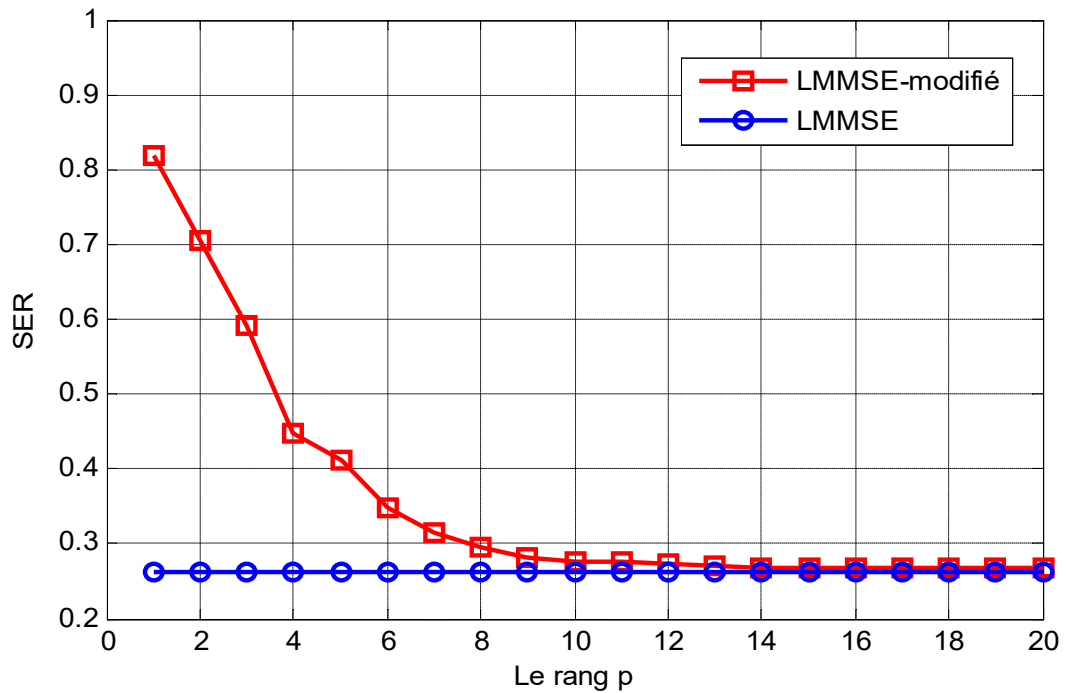


Figure 4.9 : L'évolution du SER pour différentes valeurs de p de l'estimateur LMMSE-modifié et un $SNR = 10 \text{ dB}$.

4.4 Conclusion:

Dans ce dernier chapitre nous avons détaillé les paramètres et présenté les résultats de nos simulations. En gros on a fait une comparaison entre les estimateurs LSE et LMMSE et nous avons constaté que LMMSE est meilleur mais reste complexe. Nous avons donc cherché à trouver une version moins complexe et qui est LMMSE-modifié basée sur la décomposition en valeurs singulières SVD qui permet de simplifier l'estimateur en fonction du rang de la matrice comportant l'énergie du canal. En s'appuyant sur l'analyse des performances en EQM, SER et de la complexité, nous avons opté pour un compromis acceptable entre ces critères. Un rang de réduction de $p=10$ a été préféré permettant une réduction de la complexité de 84.37% avec une légère diminution des performances en SER et EQM. Le rang de réduction p est directement lié à l'énergie du canal donnée par une matrice diagonale Λ . Les énergies sont classées par ordre décroissant. En fait, en prenant $p = 10$ presque la totalité de l'énergie du canal a été prise en compte. Cette valeur aurait pu être déduite de la longueur du canal utilisé qui est de 8, ce qui signifie que prendre une valeur légèrement supérieure à 8 nous semble raisonnable c'est-à-dire $p = 10$ pour englober la majorité de l'énergie.

Conclusion générale

Le but de ce mémoire était l'étude de l'estimation d'un canal sélectif en fréquence pour les systèmes OFDM. Nous avons donc comparé une certaine classe d'estimateurs linéaire théoriquement et par simulations en utilisant le logiciel Matlab. On a pu remarquer que l'estimateur de canal LMMSE démontre la meilleure performance. Cependant, sa complexité est l'inconvénient principal. En outre, il exige également la connaissance des statistiques du canal, ce qui augmente davantage la complexité de calcul de l'estimateur. Après nous avons bel et bien constaté qu'on peut réduire cette complexité au détriment de d'autres critères de performances mais d'une manière très raisonnable. Il est donc important d'en arriver à un compromis entre les différents critères de performance pour établir les paramètres du nouvel estimateur LMMSE-modifié.

Nous avons présenté et discuté les résultats obtenus lors de nos simulations. On a commencé par une comparaison entre les estimateurs LSE et LMMSE qui confirme la complexité de LMMSE, Nous proposons un nouvel estimateur qui est le LMMSE-modifié. Ce dernier permet de simplifier l'estimateur LMMSE en fonction du rang de la matrice comportant l'énergie du canal. En se basant sur l'analyse des performances en EQM, SER et de la complexité, nous avons opté pour un compromis entre ces critères. Un rang de réduction de $p=10$ a été le meilleur permettant une réduction de la complexité de 84.37% avec une légère diminution des performances en SER et EQM.

ANNEXE : A

1. Le débit binaire :

C'est le nombre de bits transmis par seconde.

2. Le taux d'erreur binaire :

Ce taux est le rapport du nombre de bits erronés sur le nombre de bits transmis. Par bit faux, on entend réception d'un 1 alors que 0 était transmis ou l'inverse, la détection d'un 0 alors que 1 était transmis.

$$TEB = \frac{\text{nombre d'éléments binaires faux}}{\text{nombre d'éléments binaires émis}}$$

On trouve la notation TEB pour taux d'erreur binaire ou BER pour *bit error rate*, qui ont la même signification.

3. La fonction d'erreur et de la fonction d'erreur complémentaire :

En transmission numérique, nous avons besoin d'utiliser la fonction d'erreur $\text{erf}(x)$ et la fonction d'erreur complémentaire $\text{erfc}(x)$. Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\text{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ \text{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(x)\end{aligned}$$

4. L'efficacité spectrale :

L'efficacité spectrale η est égale au rapport du débit sur la largeur de bande occupée autour de la porteuse :

$$\eta = \frac{\text{débit}}{\text{bande occupée}} = \frac{D}{B}$$

5. Rapport signal sur bruit :

Le rapport signal sur bruit est défini comme le rapport de la puissance de signal à la puissance de bruit :

$$\text{signal/Bruit} = \text{puissance du signal/puissance du bruit}$$

Pour le signal à transmettre, signal en bande de base, on parle de rapport signal sur bruit noté S/B ou SNR qui est soit sans unité soit en dB.

Si les puissances sont exprimées en W ou en mW, le rapport signal sur bruit est sans unité. Dans la pratique, S et N sont exprimés en dBm et on a :

$$(\text{signal/Bruit})_{dB} = S_{dBm} - N_{dBm}$$

6. Bande de base :

On parle de signal en bande de base pour désigner les messages émis. La bande occupée est alors comprise entre la fréquence nulle, ou une valeur proche de 0 et une fréquence maximale f_{max} .

7. Largeur de bande du signal :

La largeur de bande du signal en bande de base est l'étendue des fréquences sur lesquelles le signal a une puissance supérieure à une certaine limite. Cette limite f_{max} est en général fixée à -3 dB, ce qui correspond à la moitié de la puissance maximale. La largeur de bande est exprimée en Hz, kHz ou MHz.

8. Spectre d'un signal :

On parle de spectre d'un signal pour désigner la répartition fréquentielle de sa puissance. On parle aussi de densité spectrale de puissance DSP qui est le carré du module de la transformée de Fourier de ce signal.

$$DSP = |F(f)|^2$$

9. Bande passante du canal :

Le canal de transmission peut être par exemple, une ligne bifilaire torsadée, un câble coaxial, un guide d'onde, une fibre optique ou l'air tout simplement. Il est évident qu'aucun de ces supports n'est caractérisé avec la même bande passante. La bande passante du canal ne doit pas être confondue avec l'occupation spectrale du signal en bande de base.

10. La bande de cohérence B_c :

La bande de cohérence d'un canal radio mobile est la bande de fréquence sur laquelle les caractéristiques de propagation d'un signal sont corrélées, et elle peut être approximée par :

$$B_c = \frac{1}{\tau_{max}}$$

11. Le temps de cohérence T_c :

C'est la durée sur laquelle les caractéristiques du canal radio mobile peuvent être considérées comme invariantes dans le temps, et elle peut être approximée par :

$$T_c = \frac{1}{2f_{Dmax}}$$

ANNEXE : B

1. La matrice carrée :

La matrice est dite carrée si elle a un même nombre de ligne que des colonnes. On appelle matrice carrée, une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes. On note $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans K , plutôt que $M_n \times n(K)$. Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les éléments diagonaux.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. La transposition des matrices :

La transposée A^T d'une matrice A (aussì notée A') est la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^T = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$$

3. L'orthogonalité des vecteurs :

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit est nul, les vecteurs $[2, 1, -2, 4]$ et $[3, -6, 4, 2]$ sont orthogonaux parce que :

$$[2, 1, -2, 4] \cdot [3, -6, 4, 2] = 2(3) + 1(-6) - 2(4) + 4(2) = 0$$

4. Le vecteur normal :

Le vecteur normal est un vecteur dont sa longueur est égale à 1 ; tout vecteur ayant une longueur supérieur à 0 peut être normalisé en divisant les composantes du vecteur par sa longueur.

Exemple :

$$\vec{v} = [2, 4, 1, 2] \quad \text{et} \quad |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5$$

Donc $\vec{u} = \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$ est un vecteur normal car

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{25/25} = 1$$

5. La matrice symétrique :

Une matrice A de taille $n \times n$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = A^T$$

6. Le calcul matriciel :

• **L'addition des matrices :**

L'addition entre deux matrices est une opération très naturelle. Elle est notée $+$ tout simplement, elle consiste à faire la somme des deux matrices élément par élément, donc pour arriver à faire cette opération les deux matrices doivent avoir la même taille. Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$, on définit leur somme $C = A + B$, de taille $m \times n$, par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

• **Le produit matriciel :**

Le produit de la matrice A ($m \times n$) par la matrice B ($n \times p$) est la matrice C ($m \times p$) telle que l'élément c_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B . Le nombre de colonnes de la première matrice dans la multiplication doit être égal au nombre de lignes de la deuxième matrice sinon le calcul de $A \times B$ est impossible. La matrice résultat du produit de deux matrices, possède le nombre de lignes de la première matrice et le nombre de colonnes de la deuxième.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{ik} \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, p$$

On peut écrire AB au lieu de $A \times B$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 0 & 26 \end{bmatrix}$$

- **La matrice identité :**

La matrice carrée $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

S'appelle la matrice identité. Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 dans l'arithmétique des scalaires. **C'est l'élément neutre pour la multiplication.** En d'autres termes, si A une matrice $m \times n$, alors :

$$I_m A = A \quad \text{et} \quad A I_n = A$$

- **Règles du calcul matriciel:**

Sous l'hypothèse que les tailles des matrices soient compatibles avec les opérations indiquées, on a les règles suivantes :

1. Commutativité de la somme : $A + B = B + A$

2. Associativité de la somme : $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. Associativité du produit : $A(BC) = (AB)C$

4. Distributivité du produit par rapport à la somme :

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (B + C)A = BA + CA$$

5. $A + 0 = A$

6. $AI = IA = A$

7. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

Remarque :

Le produit matriciel n'est pas nécessairement commutatif. On peut avoir $AB \neq BA$.

7. La matrice inverse :

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, s'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ tel que :

$$AB = I \text{ et } BA = I$$

On dit que la matrice A est inversible et on appelle B l'inverse de A . (Il suffit de vérifier une des deux conditions $AB = I, BA = I$). On appelle A^{-1} inverse de la matrice A .

On ne parle de matrice inverse que pour les matrices carrées, sinon cela n'a aucun sens, toutes les matrices carrées ne possèdent pas forcément une matrice inverse.

- **Exemple :**

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et sa matrice inverse est $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

- **Propriétés :**

1. $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$

2. $A^{-m} = (A^{-1})^m$

3. A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

4. Soient A et B deux matrices $n \times n$ inversibles. Alors

a. AB est inversible et

B. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5. $(A + B)^T = A^T + B^T$

6. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

7. $(A^T)^T = A$

8. $(AB)^T = B^T A^T$

9. Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ qui sera notée A^{-T} .

8. La matrice orthogonale :

Soit A une matrice carrée. On dit que A est une matrice orthogonale si :

$$A^{-1} = A^T$$

A : Est une matrice orthogonale si et seulement si $A^T A = A A^T = I$.

9. Les valeurs propres et les vecteurs propres :

Soit A une matrice $n \times n$. On dit que $x \in \mathbf{R}_n, x \neq 0$, est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :

$$Ax = \lambda x$$

Le scalaire λ est appelé valeur propre de A . On dit que x est un vecteur propre associé (ou correspondant) à la valeur propre λ .

On peut réécrire l'égalité $Ax = \lambda x$.

Comme $Ax = \lambda x$ ce qui est équivalent à $(\lambda I - A)x = 0$.

Si λ est une valeur propre de A , alors cette équation a une solution $x \neq 0$. Ceci implique que :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Cette dernière équation est appelée l'équation caractéristique de A et $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ appelé le polynôme caractéristique de A . Les racines λ de l'équation caractéristique sont les valeurs propres de A . Si A est une matrice $n \times n$, alors l'équation caractéristique de A est de degré n et le coefficient de λ^n est 1. Autrement dit, le polynôme caractéristique d'une matrice $n \times n$ est de la forme $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n$.

On sait qu'un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes ce qui montre qu'une matrice $n \times n$ a au plus n valeurs propres distinctes.

10. La Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD) :

Soit A une matrice réelle de dimension $m \times n$ alors la Décomposition aux valeurs singulières de A est la factorisation :

$$A = U \Sigma V^T$$

Où U et V sont des matrices orthogonales, respectivement de dimension $(m \times m)$ et $(n \times n)$ et où Σ est une matrice diagonale contenant les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, appelées valeurs singulières de A (et de A^T), telles que $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0$ où $r = \min(m, n)$.

Il est préférable de les déterminer par la résolution de problèmes aux valeurs propres équivalents.

11. Liens entre SVD et valeurs propres :

Nous allons proposer une méthode de calcul des valeurs singulières d'une matrice rectangulaire A quelconque. Cette méthode est basée sur la résolution de problèmes aux valeurs propres associés à des matrices carrées $A^T A$ et AA^T .

Soit A , une matrice rectangulaire de dimension $(m \times n)$, sa décomposition aux valeurs singulières s'écrit :

$$A = U\Sigma V^T$$

Par conséquent, en multipliant les deux membres de cette équation par A^T à gauche, on obtient une matrice de dimension $(n \times n)$ donnée par :

$$A^T A = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

Or, puisque $A^T A$ est une matrice hermitienne, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et, par conséquent, sa décomposition sur la base propre s'écrit :

$$A^T A = W\Lambda W^{-1} = W\Lambda W^T$$

Où W est une matrice orthogonale de dimension $(n \times n)$. Par comparaison des deux expressions précédentes de $A^T A$, on trouve que $\Sigma^2 = \Lambda$ et $W = V$. En d'autres termes, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ et (V, Λ) représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice $A^T A$.

En appliquant une démarche similaire à la matrice AA^T , on trouve successivement :

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T = W\Lambda W^T$$

Ce qui nous permet de conclure que (U, Λ) représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice AA^T .

Bibliographie

- [1] L. Hanzo, T. Keller, « **OFDM and MC-CDMA for Broadband multiuser communications, WLAN and Broadcasting** », *Edition John Wiley and Sons, 2nd edition, 2006, ISBN-13 978-0-470-03007-3*
- [2] J. J. Van de Beek, O. Edfors, M. Sandell, S. K. Wilson et O. P. Borjesson, « **On Channel Estimation in OFDM Systems** », IEEE Vehicular Technology Conférence, Vol. 2, pp. 815-819. juillet 1995.
- [3] M. H. Hieh et C. H. Wei, «**Channel Estimation for OFD M Systems Based on Comb-Type Arrangement in Frequency Sélective Fading Channels**», IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol. 44, No. 1, pp. 217-225, février 1998.
- [4] S. Benedetto and E. Biglieri, « **Principle of digital transmission with wirelessapplications** », Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999.
- [5] L. J. Cimini, «**Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing**», IEEE Transactions on Communications, Vol. 33, No.7, pp. 665-675, juillet 1985.
- [6] J. C. Rault, D. Castelain et B. Le Floch, «**The Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing (COFDM) Technique, and its Application to Digital Radio Broadcasting Towards Mobile Receivers**», IEEE Global TélécommunicationsConférence, Vol. 1, pp. 428-432, novembre 1989.
- [7] W. Y. Zou et Y. Wu, «**COFDM : A n Overview**», IEEE Transactions on Broadcasting, Vol. 41, No. 1, pp. 1-8, mars 1995.

- [8] W. Akmouche., «**Etude et caractérisation des modulations multiporteuses OFDM**», PhDthesis in electrical engineering, Université de Bretagne Occidentale, October 2000.
- [9] S. B. Weinstein et P. M.Ebert, «**Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform**», IEEE Transactions on Communications, Vol. 19, No. 5, pp. 628-634, octobre 1971.
- [10] S. Coleri. « **Channel Estimation Techniques Based on Pilot Arrangement in OFDM Systems** ». IEEE Trans. Broad., Vol. 48, No. 3, pp. 223–229, September 2002.
- [11] Y. Zhao and A. Huang. « **A Novel Channel Estimation Method for OFDM Mobile Communications Systems Based on Pilot Signals and Transform Domain Processing** ». pp. 2089–2093, Vehicular Technology Conference, Phoenix, USA, May 1997.
- [12] B. Le Saux, «**Estimation de canal pour systeme multi-antennes multi-porteuses**», Ph.D. dissertation, INSA Rennes, 2007.
- [13] O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, S. K. Wilson, and P. O. Borjesson, « **OFDM Channel Estimation by Singular Value Decomposition** », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 46, no. 7, pp. 931 – 939, July 1998.
- [13] B. Le Saux, «**Estimation de canal pour systeme multi-antennes multi-porteuses**», Ph.D. dissertation, INSA Rennes, 2007.
- [14] P. Strobach. « **Low-Rank Adaptive Filters** ». IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44.No. 12.pp.2932-2947. décembre 1996.
- [15] O. Edfors, M. Sandell. J. J. van de Beek, S. K. Wilson et P. O. Borjesson. « **OFDM Channel Estimation by Singular ValueDecomposition** », IEEE Transactions on Communications, Vol. 46, No. 7, pp. 931-939, juillet 1998.
- [16] L. L. Scharf, «**Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis**». Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.

- [17] J. Rinne et M. Renfors, "Pilot **Spacing in OFDM Systems on Practical Channels**", IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol. 42, No. 4, pp. 959-962, novembre 1996.
- [18] KAMRAN ARSHAD, «**Channel Estimation in OFDM Systems**», Thèse de l'Université KING FAHD UNIVERSITY OF PETROLEUM AND MINERALS, août 2002.
- [19] S. Coleri, M. Ergen, A. Puri et A. Bahai, «**Channel Estimation Techniques Based on Pilot Arrangement in OFDM Systems**», IEEE Transactions on Broadcasting, Vol. 48, No. 3, pp. 223-229. septembre 2002.
- [20] S. U. H. Qureshi, « **Adaptive Equalization** ». Proceedings of the IEEE. Vol. 73, No. 9, pp. 1349-1387, septembre 1985.