

**BRUNO PETAZZONI**

# **Seize problèmes d'informatique**

**SCOPOS**

**Avec  
corrigés détaillés  
et programmes  
en Caml**



**Springer**



---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Calculs dans l'algèbre des parties finies ou cofinies de <math>\mathbb{N}</math></b>	<b>1</b>
	Énoncé	2
	Corrigé	5
	Références bibliographiques et notes	7
<b>2</b>	<b>Itération et attraction</b>	<b>9</b>
	Énoncé	10
1	Suites ultimement périodiques . . . . .	10
2	Bassins d'attraction d'une fonction itérable . . . . .	10
3	Un exemple . . . . .	11
	Corrigé	13
1	Suites ultimement périodiques . . . . .	13
2	Bassins d'attraction d'une fonction itérable . . . . .	13
3	Un exemple . . . . .	14
	Références bibliographiques et notes	18
<b>3</b>	<b>Un texte tiré de <i>Combinatorics on Words</i></b>	<b>19</b>
	Énoncé	20
	Corrigé	21
	Références bibliographiques et notes	24



<b>4</b>	<b>Autour de la distance de Hamming</b>	<b>25</b>
<b>Énoncé</b>		<b>26</b>
1	Distance de Hamming . . . . .	26
2	Voisinage de Hamming . . . . .	27
<b>Corrigé</b>		<b>28</b>
1	Distance de Hamming . . . . .	28
2	Voisinage de Hamming . . . . .	28
<b>Références bibliographiques et notes</b>		<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Un système de réécriture (d'après Jean-Michel Autebert)</b>	<b>31</b>
<b>Énoncé</b>		<b>32</b>
<b>Corrigé</b>		<b>34</b>
<b>Références bibliographiques et notes</b>		<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Lemme de pompage et lemme de non-pompage</b>	<b>41</b>
<b>Énoncé</b>		<b>42</b>
1	Le lemme de l'étoile . . . . .	42
2	Le lemme de non-pompage . . . . .	42
<b>Corrigé</b>		<b>44</b>
1	Le lemme de l'étoile . . . . .	44
2	Le lemme de non-pompage . . . . .	45
<b>Références bibliographiques et notes</b>		<b>47</b>
<b>7</b>	<b>Déterminisation d'un automate fini reconnaissant un langage fini (d'après K. Salomaa et S. Yu)</b>	<b>49</b>
<b>Énoncé</b>		<b>50</b>
<b>Corrigé</b>		<b>53</b>
<b>Références bibliographiques et notes</b>		<b>58</b>



## 8 Langages locaux, automates locaux 59

### Énoncé 60

- 1 Langages locaux . . . . . 60
- 2 Automates locaux . . . . . 61
- 3 L'algorithme de McNaughton, Yamada et Glushkov . . . . . 61

### Corrigé 63

- 1 Langages locaux . . . . . 63
- 2 Automates locaux . . . . . 65
- 3 L'algorithme de McNaughton, Yamada et Glushkov . . . . . 65

### Références bibliographiques et notes 70

## 9 Sous-mots, mélange de mots, le théorème de Higman 71

### Énoncé 72

- 1 Sous-mots: définition, quelques propriétés . . . . . 72
- 2 Ordre de multiplicité d'un sous-mot . . . . . 73
- 3 Mélange de mots . . . . . 74
- 4 Le théorème de Higman . . . . . 75

### Corrigé 77

- 1 Sous-mots: définition, quelques propriétés . . . . . 77
- 2 Ordre de multiplicité d'un sous-mot . . . . . 78
- 3 Mélange de mots . . . . . 80
- 4 Le théorème de Higman . . . . . 82

### Références bibliographiques et notes 84



## 10 Plus long sous-mot commun, distance d'édition 85

### Énoncé 86

1	Sous-mots . . . . .	86
2	Distance de Levenshtein . . . . .	87
3	Script d'édition . . . . .	88
4	Plus long sous-mot commun . . . . .	89
5	Algorithme de Wagner et Fischer . . . . .	89
6	Algorithme de Hirschberg . . . . .	90
7	Algorithme de Hunt et Szymanski . . . . .	90
8	Questions bonus . . . . .	91

### Corrigé 92

1	Sous-mots . . . . .	92
2	Distance de Levenshtein . . . . .	94
3	Script d'édition . . . . .	97
4	Plus long sous-mot commun . . . . .	98
5	Algorithme de Wagner et Fischer . . . . .	99
6	Algorithme de Hirschberg . . . . .	100
7	Algorithme de Hunt et Szymanski . . . . .	101
8	Questions bonus . . . . .	103

### Références bibliographiques et notes 105

## 11 Rangements de boîtes 107

### Énoncé 108

1	Questions préliminaires . . . . .	108
2	Propriétés d'un rangement optimal . . . . .	108
3	Analyse de la stratégie de rangement séquentiel ( <i>next fit</i> ) . . . . .	109
4	Analyse de la stratégie <i>first fit</i> . . . . .	110
5	Analyse de la stratégie <i>first fit</i> avec une entrée décroissante . . . . .	111

### Corrigé 112

1	Questions préliminaires . . . . .	112
2	Propriétés d'un rangement optimal . . . . .	112
3	Étude du rangement séquentiel . . . . .	115
4	Étude de la stratégie <i>first fit</i> . . . . .	116
5	Analyse de la stratégie <i>first fit</i> avec une entrée décroissante . . . . .	118

### Références bibliographiques et notes 121



## 12 Figures de pixels, mots de contour et pavages du plan 123

### Énoncé 125

- 1 Préliminaires . . . . . 125
- 2 Mots de contour d'une figure . . . . . 126
- 3 Itération d'un morphisme sur les mots de contour . . . . . 128
- 4 Pavages avec des dominos . . . . . 128
- 5 Pavages du plan . . . . . 129

### Corrigé 131

- 1 Préliminaires . . . . . 132
- 2 Mots de contour d'une figure . . . . . 133
- 3 Itération d'un morphisme sur les mots de contour . . . . . 137
- 4 Pavages avec des dominos . . . . . 139
- 5 Pavages du plan . . . . . 141

### Références bibliographiques et notes 144

## 13 L'automate des tas de sable 145

### Énoncé 146

- 1 L'automate des tas de sable sur une grille rectangulaire . . . . . 146
- 2 Programmation de l'opérateur de relaxation . . . . . 148
- 3 États récursifs: définition, propriétés . . . . . 150
- 4 Le groupe abélien des états récursifs . . . . . 151

### Corrigé 152

- 1 L'automate des tas de sable sur une grille rectangulaire . . . . . 152
- 2 Programmation de l'opérateur de relaxation . . . . . 155
- 3 États récursifs: définition, propriétés . . . . . 157
- 4 Le groupe abélien des états récursifs . . . . . 157

### Références bibliographiques et notes 159

## 14 Additionneurs, systèmes de numération, parties reconnaissables de $\mathbb{N}^*$ 161

### Énoncé 162

- 1 L'additionneur *diviser pour régner* . . . . . 163
- 2 Numération d'Avizienis . . . . . 166
- 3 Parties reconnaissables de  $\mathbb{N}^*$  . . . . . 167
- 4 Numération en base de Fibonacci . . . . . 167

### Corrigé 169

- 1 L'additionneur *diviser pour régner* . . . . . 169
- 2 Numération d'Avizienis . . . . . 173
- 3 Parties reconnaissables de  $\mathbb{N}^*$  . . . . . 175
- 4 Numération en base de Fibonacci . . . . . 177

### Références bibliographiques et notes 181

## 15 Autour des idées d'Axel Thue 183

### Énoncé 184

- 1 Quelques propriétés des relations . . . . . 184
- 2 Systèmes de réécriture . . . . . 185
- 3 Mots infinis . . . . . 186
- 4 Mot infini défini par itération d'un morphisme . . . . . 187
- 5 Propriétés inévitables . . . . . 188
- 6 Les tours de Hanoï . . . . . 188

### Corrigé 190

- 1 Quelques propriétés des relations . . . . . 190
- 2 Systèmes de réécriture . . . . . 190
- 3 Mots infinis . . . . . 191
- 4 Mot infini défini par itération d'un morphisme . . . . . 193
- 5 Propriétés inévitables . . . . . 194
- 6 Les tours de Hanoï . . . . . 196

### Références bibliographiques et notes 200



<b>16</b>	<b>Structure secondaire de l'ARN de transfert</b>	<b>201</b>
<b>Énoncé</b>		<b>202</b>
1	Dénombrement des modèles de structures secondaires . . . . .	203
2	Représentation d'un modèle par un arbre . . . . .	205
3	Représentation linéaire d'un modèle . . . . .	205
4	Optimisation d'une structure secondaire . . . . .	206
<b>Corrigé</b>		<b>208</b>
1	Dénombrement des modèles de structures secondaires . . . . .	208
2	Représentation d'un modèle par un arbre . . . . .	213
3	Représentation linéaire d'un modèle . . . . .	215
4	Optimisation d'une structure secondaire . . . . .	216
	<b>Références bibliographiques et notes</b>	<b>220</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>221</b>
	<b>Index</b>	<b>222</b>
	<b>Colophon</b>	<b>225</b>
	<b>Crédits</b>	<b>226</b>

*Je puis dire, sans vanité, qu'une préface est une pièce d'esprit dont je connais fort bien le point de perfection : plutôt au ciel, que j'eusse assez d'habileté pour y arriver. Trois fois j'ai mis mon imagination à la gêne, pour en faire une, dont le tour fût de mon invention ; et trois fois mes efforts ont été infructueux. Je ne m'en étonne point : mon génie a été mis à sec par le traité même que je publie ici.*

Swift — Le conte du tonneau



## Seize problèmes d'informatique

Cet ouvrage rassemble 16 problèmes corrigés d'informatique. Chaque problème est précédé d'une rapide présentation, et le corrigé est complet : chaque question y trouve une réponse. Des notes historiques et bibliographiques apportent des précisions complémentaires, et donnent au lecteur curieux des pistes vers d'autres sources d'information. Les réponses aux questions de programmation sont données dans le langage de programmation fonctionnelle Caml, à la fois concis et élégant.

Ce recueil est destiné aux étudiants qui suivent l'enseignement optionnel d'informatique en filière MPSI/MP (classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs). Il intéressera également les étudiants en licence ou en maîtrise d'informatique.

ISBN 3-540-67387-3



<http://www.cmla.ens-cachan.fr>  
<http://www.springer.de>