

IBRAHIM ASSEM

# Algèbres et modules

Cours et exercices

**M**  
Enseignement  
des  
Mathématiques

MASSON 

Les Presses  
de l'Université  
d'Ottawa

# Table des matières

<b>Introduction</b>	1
<b>Chapitre I : Algèbres</b>	3
1. Structure de $K$ -algèbre	3
2. Morphismes d'algèbres	12
Exercices du chapitre I	16
<b>Chapitre II : Modules sur une <math>K</math>-algèbre</b>	19
1. Définition et exemples	19
2. Applications linéaires	25
3. Suites exactes	28
4. Théorèmes d'isomorphisme	34
5. Modules d'homomorphismes	37
Exercices du chapitre II	40
<b>Chapitre III : Catégories de modules</b>	47
1. Catégories et foncteurs	47
2. Produits et sommes directes	53
3. Modules libres	60
4. Catégories linéaires et abéliennes	66
5. Produits fibrés et sommes amalgamées	75
6. Équivalences de catégories	80
Exercices du chapitre III	86
<b>Chapitre IV : Foncteurs Hom, modules projectifs et injectifs</b>	95
1. Exactitude de foncteurs	95

2. Modules projectifs	100
3. Modules injectifs	103
4. Extensions essentielles et enveloppes injectives	110
Exercices du chapitre IV.	115
<b>Chapitre V : Produits tensoriels.</b>	
<b>Algèbres tensorielle et extérieure</b>	119
1. Produit tensoriel de modules	119
2. Propriétés fonctorielles du produit tensoriel	126
3. Théorèmes de Watts	131
4. Algèbre tensorielle, graduations	136
5. Algèbre extérieure, déterminants	139
Exercices du chapitre V	146
<b>Chapitre VI : Conditions de finitude. Modules simples et semisimples</b>	151
1. Modules artiniens et noethériens	151
2. Algèbres artiniennes et noethériennes	154
3. Décomposition en blocs	160
4. Modules simples	165
5. Suites de composition, théorème de Jordan-Hölder	166
6. Modules semisimples	170
7. Algèbres semisimples	173
Exercices du chapitre VI	179
<b>Chapitre VII : Radicaux de modules et d'algèbres</b>	183
1. Radical d'un module	183
2. Socle d'un module	188
3. Radical d'une algèbre	189
4. Modules artiniens et algèbres artiniennes	191
5. Radical d'une catégorie $K$ -linéaire	194
6. Modules indécomposables	196
Exercices du chapitre VII	203
<b>Chapitre VIII : Modules projectifs. Équivalences de Morita</b>	205
1. Idempotents et projectifs indécomposables	205
2. Couvertures projectives	210
3. Équivalences de catégories de modules	212

4. Dualité et modules injectifs	219
5. Groupe de Grothendieck et matrice de Cartan	224
Exercices du chapitre VIII	227
<b>Chapitre IX : Foncteurs Ext et Tor</b>	229
1. Foncteurs d'homologie	229
2. Foncteurs dérivés	236
3. Foncteurs d'extension	245
4. Foncteurs de torsion.	252
5. Suites exactes courtes et extensions	260
Exercices du chapitre IX	268
<b>Chapitre X : Dimensions homologiques de modules et d'algèbres</b>	273
1. Dimensions homologiques de modules	273
2. Dimensions homologiques d'une algèbre	280
Exercices du chapitre X	286
<b>Chapitre XI : Homologie et cohomologie des algèbres</b>	289
1. Cohomologie de Hochschild d'une algèbre	289
2. Algèbres séparables	298
Exercices du chapitre XI	304
<b>Chapitre XII : Algèbres héréditaires, tensorielles et auto-injectives</b>	305
1. Algèbres héréditaires	305
2. Algèbres tensorielles	309
2. Algèbres auto-injectives	316
Exercices du chapitre XII	323
<b>Bibliographie</b>	325
<b>Index</b>	327