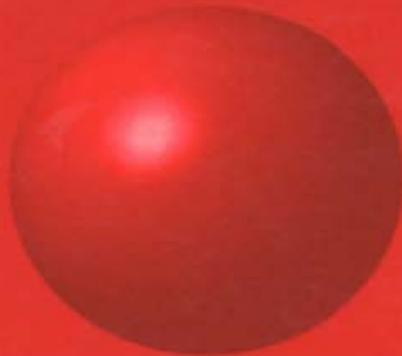


ALAIN PLANCHE

**MANUEL**

# Mathématiques pour économistes

Algèbre



2<sup>e</sup> édition

DUNOD

# Table des matières

## Avant-propos

XIII

### 1. Les nombres et les structures

I.	La genèse des nombres : les notions essentielles	1
1.	Raisonnement et logique	2
	Éléments de logique	2
2.	Objets et éléments	3
	Ensembles et sous-ensembles	4
3.	Correspondance et application	8
	Applications d'un ensemble dans un ensemble	9
4.	Calculer sans les nombres : l'algèbre des ensembles	12
	Algèbre des ensembles	13
II.	Des entiers aux rationnels	15
1.	Structure des nombres entiers naturels	15
1)	L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels	15
2)	Ordre sur $\mathbb{N}$	16
	Ensemble produit et relation binaire	16
	Structure d'ordre	17
	Plus petit élément, plus grand élément	18
3)	L'addition dans $\mathbb{N}$	19
	Loi de composition interne	19
4)	La multiplication dans $\mathbb{N}$	20
2.	Mesure en nombre entier ou dénombrement	21
1)	Cardinaux des ensembles finis	21
2)	Division euclidienne	22
3)	Analyse combinatoire	23
3.	L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs	26
1)	Symétriser $\mathbb{N}$	26
2)	Éléments de construction de $\mathbb{Z}$	27
	Relation d'équivalence	28
3)	Structure de $\mathbb{Z}$	29
	Structure de groupe	29
	Structure d'anneau	30

4. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels	30
1) Éléments de construction de $\mathbb{Q}$	30
2) Structure des nombres rationnels	31
Structure de corps commutatif	31
3) Notion de densité	31

<b>Activité : numération</b>	32
------------------------------	----

## 2. Le calcul algébrique réel

I. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels	36
1. Principe de construction	36
2. Structure des nombres réels	37
1) $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné	37
2) Les ensembles de nombres	39
3) $\mathbb{R}$ est archimédien	40
4) $\mathbb{R}$ est complet	40
Borne supérieure, borne inférieure	40
5) Unicité de la structure de $\mathbb{R}$	41
6) Valeur absolue dans $\mathbb{R}$	41
II. Algèbre dans $\mathbb{R}$	42
1. Calcul réel	42
1) Traitement des inégalités	42
2) Puissance d'un nombre réel	42
3) Binôme de Newton	44
4) Factorisation de $a^n - b^n$	44
2. Polynômes réels	45
1) Opérations sur les applications d'un ensemble quelconque $E$ dans $\mathbb{R}$	45
2) Monômes et polynômes	46
3) Opérations sur les polynômes	47
4) Division euclidienne des polynômes	47
5) Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs	49
3. Équations et inéquations à une inconnue	51
1) Définitions	51
2) Équations et inéquations du premier degré	52
3) Équations et inéquations du second degré	53
4) Autres équations et inéquations	56

## 3. Le plan euclidien

I. Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$	62
1. Structure d'espace vectoriel	62
1) L'ensemble $\mathbb{R}^2$	62
2) Addition dans $\mathbb{R}^2$	62
3) Multiplication par un nombre réel	63
4) Base canonique. Identification au plan vectoriel	63

2. Étude du plan vectoriel	64
1) Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$	64
2) Colinéarité	66
3) Critère de colinéarité	66
4) Notion de dimension. Autres bases de $\mathbb{R}^2$	67
II. Le plan affine $\mathbb{R}^2$	69
1. Variétés affines	69
1) Translations	69
2) Image d'un sous-espace vectoriel par une translation	69
3) Variétés affines et représentations graphiques	69
4) Équation d'une droite	71
5) Demi-plans de $\mathbb{R}^2$	72
2. Calcul barycentrique, parties convexes de $\mathbb{R}^2$	74
1) Barycentre de deux points pondérés	74
2) Position d'un point sur une droite	75
3) Parties convexes de $\mathbb{R}^2$	75
III. Structure euclidienne du plan	77
1. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$	77
1) Définition	77
2) Propriétés	77
3) Orthogonalité	78
2. Norme et distance	79
1) Norme euclidienne	79
2) Distance euclidienne	80
3) Équation du cercle	80
3. Trigonométrie	81
1) Rappels succincts	81
2) Formules de trigonométrie	82
3) Interprétation géométrique du déterminant	83
IV. Calcul à deux variables	85
1. Formes linéaires	85
1) Définition	85
2) Interprétation	85
3) Image réciproque d'un nombre réel	85
2. Formes quadratiques	86
1) Définition	86
2) Réduction d'une forme quadratique	86
3) Signe d'une forme quadratique	87
V. Le plan complexe	88
1. Construction du corps des nombres complexes	88
1) Posons le problème	88
2) Analyse du problème	89
3) Construction de $\mathbb{C}$	89
4) Retour à la notation initiale	90

2.	Étude du corps des nombres complexes	91
1)	Nombres complexes conjugués	91
2)	Module d'un nombre complexe	91
3)	Forme trigonométrique	92
4)	Formule de Moivre, écriture exponentielle	93
3.	Résolution des équations	94
1)	Racines $n$ -ièmes de l'unité	94
2)	Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe	95
3)	Détermination algébrique des racines carrées d'un nombre complexe	95
4)	Équations du second degré	96
<b>4. Systèmes linéaires</b>		
I.	Première analyse des systèmes linéaires	100
1.	Définitions. Généralités	100
1)	Partons d'un exemple	100
2)	Le cas général	101
3)	Systèmes triangulaires	102
2.	Étude de l'ensemble des solutions d'un système linéaire	104
1)	L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$	104
2)	Sous-espaces vectoriels et variétés affines de $\mathbb{R}^n$	105
3)	Sous-espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène	106
4)	Variété affine des solutions d'un système linéaire	107
II.	Résolution des systèmes linéaires	109
1.	Systèmes équivalents	109
1)	Définitions	109
2)	Opérations élémentaires sur les lignes	109
3)	Systèmes symétriques	110
2.	Méthode de Gauss	112
1)	Principe	112
2)	Exemples	113
3)	Méthode de Gauss-Jordan	116
3.	Systèmes paramétrés	117
1)	Une seule des inconnues a des coefficients comportant un paramètre	117
2)	Systèmes symétriques	119
<b>5. Espaces vectoriels. Applications linéaires</b>		
I.	Définitions et théorèmes généraux	122
1.	Espaces vectoriels	122
1)	Exemple introductif	122
2)	Définition	123
3)	Sous-espaces vectoriels	125
4)	Variétés affines	126

2. Opérations sur les sous-espaces vectoriels	127
1) Intersection de deux sous-espaces vectoriels	127
2) Somme de deux sous-espaces vectoriels	128
3) Somme directe. Sous-espaces supplémentaires	128
3. Applications linéaires	130
1) Définitions	130
2) Noyau d'une application linéaire	131
3) Image d'une application linéaire	132
4) Exemple	133
5) Formes linéaires	133
<b>II. Espaces vectoriels de dimension finie</b>	<b>134</b>
1. Familles génératrices, familles libres	134
1) Notion de famille finie	134
2) Familles génératrices	134
3) Familles libres	136
2. Propriétés des espaces vectoriels de dimension finie	139
1) Existence d'une base	139
2) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie	142
3) Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel	144
3. Propriétés des applications linéaires	145
1) Rang d'une famille de vecteurs	145
2) Rang d'une application linéaire	145
3) Théorème des dimensions	147

## 6. Calcul matriciel

<b>I. Matrices</b>	<b>150</b>
1. Calcul matriciel élémentaire	150
1) Matrice d'une application linéaire	150
2) Opérations sur les matrices	151
3) Pratique du calcul	154
4) Transposée d'une matrice	156
2. Matrices carrées	157
1) Définition	157
2) L'algèbre $\mathcal{M}(n)$	158
3) Matrices inversibles (ou régulières)	160
4) Matrices de changement de base	160
3. Matrices équivalentes, matrices semblables	162
1) Matrices d'une application linéaire dans des bases différentes	162
2) Exemple	163
3) Matrices semblables	165
<b>II. Déterminants</b>	<b>167</b>
1. Définition et premières propriétés	167
1) Présentation du problème	167
2) Résolution	169
3) Notations et premières propriétés	172

2.	Calcul des déterminants	175
1)	Déterminants d'ordre 3	175
2)	Déterminants d'ordre supérieur à 3	177
3)	Simplification des calculs	178
3.	Étude pratique du rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice	180
1)	Critère d'indépendance linéaire de $p$ vecteurs dans un espace de dimension $n$	180
2)	Détermination du rang	182
3)	Matrices équivalentes	182

## 7. Retour aux systèmes linéaires. Inversion d'une matrice

I.	Analyse des systèmes linéaires	186
1.	Système linéaire et équation linéaire	186
1)	Les différentes formes d'un système linéaire	186
2)	Analyse d'une équation linéaire	188
3)	Exemple élémentaire	189
2.	Application à l'étude d'un système linéaire	190
1)	Rang d'un système linéaire	190
2)	Existence d'une solution	191
3)	Ensemble des solutions	191
4)	Exemples	192
II.	Résolution par les déterminants	193
1.	Système de Cramer. Inversion d'une matrice	193
1)	Système et formules de Cramer	193
2)	Exemple	195
3)	Application au calcul de l'inverse d'une matrice	196
2.	Systèmes quelconques	199
1)	Solution générale d'un système	199
2)	Caractérisation de l'espace des solutions	202
III.	Complément de calcul matriciel :	
	utilisation des matrices équivalentes	206
1.	Opérations sur les lignes et les colonnes d'une matrice	206
1)	Interprétation des opérations licites	206
2)	Opérations sur les colonnes	211
3)	Critère d'appartenance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel	213
2.	Calcul de l'inverse d'une matrice	215
1)	Inversion « à la main » par résolution d'un système	216
2)	Méthode du pivot (Gauss-Jordan)	217

## 8. Valeurs propres. Vecteurs propres

I.	Diagonalisation des matrices carrées	222
1.	Définitions et premières propriétés	222
1)	Valeurs propres, vecteurs propres	222
2)	Sous-espaces propres	223
3)	Polynôme caractéristique	224

2. Matrices diagonalisables	227
1) Définition	227
2) Caractérisation des matrices diagonalisables	229
3. Calcul de la puissance $n$ -ième d'une matrice	232
1) Matrices diagonalisables	232
2) Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton	234
II. Matrices symétriques, matrices positives	237
1. Matrices symétriques	237
1) Définition et premières propriétés	237
2) Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques	238
3) Autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$	241
2. Matrices positives	241
1) Définitions et premières propriétés	241
2) Matrices de production	242
3) Matrices de Markov	244
III. Systèmes différentiels ou récurrents :	
introduction aux systèmes dynamiques	247
1. Présentation générale	247
1) Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants	247
2) Résolution	248
3) Suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants	249
4) Systèmes linéaires différentiels ou récurrents	251
2. Résolution	252
1) Principe de résolution	252
2) La matrice $A$ est diagonalisable	254
3) La matrice $A$ n'est pas diagonalisable	256
3. Équations d'ordre supérieur à 1, équilibre et stabilité	260
1) Équations d'ordre strictement supérieur à 1	260
2) Comportement à l'infini	261
3) Exemples	262
<b>Bibliographie</b>	267
<b>Index</b>	269