

Cours d'algèbre

Roger Godement

COLLECTION ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

TABLE

PRÉFACE	15
§ 0. LE RAISONNEMENT LOGIQUE	21
1. L'idée de perfection logique	23
2. Le langage réel des Mathématiques	25
3. Opérations logiques élémentaires	27
4. Axiomes et théorèmes	28
5. Axiomes logiques et tautologies	32
6. Substitutions dans une relation	33
7. Quantificateurs	35
8. Règles d'emploi des quantificateurs	38
9. L'opération de Hilbert. Critères de formation.....	41
§ 1. LES RELATIONS D'ÉGALITÉ ET D'APPARTENANCE.....	41
1. La relation d'égalité	42
2. La relation d'appartenance	44
3. Parties d'un ensemble	46
4. Ensemble vide	47
5. Ensembles à un, deux éléments	48
6. Ensemble des parties d'un ensemble donné	50
§ 2. LA NOTION DE FONCTION	50
1. Couples	51
2. Produit cartésien de deux ensembles.....	53
3. Graphes et fonctions	57
4. Images directes et images réciproques	58
5. Restrictions et prolongements de fonctions	59
6. Applications composées.....	61
7. Applications injectives.....	63
8. Applications surjectives et bijectives	66
9. Fonctions de plusieurs variables	69
§ 3. RÉUNIONS ET INTERSECTIONS	69
1. Réunion et intersection de deux ensembles	70
2. Réunion d'une famille d'ensembles	72
3. Intersection d'une famille d'ensembles	72

§ 4. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE	75
1. Relations d'équivalence	75
2. Quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence	77
3. Fonctions définies sur un ensemble quotient	80
§ 5. ENSEMBLES FINIS ET NOMBRES ENTIERS	84
1. Ensembles équipotents	85
2. Le cardinal d'un ensemble	86
3. Opérations sur les cardinaux	88
4. Ensembles finis et entiers naturels	91
5. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels	93
6. Le raisonnement par récurrence	95
7. Analyse combinatoire	96
8. Entiers rationnels	99
9. Nombres rationnels	103
§ 6. LOIS DE COMPOSITION	106
1. Lois de composition, associativité et commutativité	106
2. Éléments symétrisables	109
§ 7. LA NOTION DE GROUPE	113
1. Définition des groupes; exemples	113
2. Produit direct de groupes	116
3. Sous-groupes d'un groupe	117
4. Intersection de sous-groupes; générateurs	121
5. Permutations et transpositions	124
6. Classes modulo un sous-groupe	125
7. Nombre de permutations de n objets	127
8. Homomorphismes de groupes	128
9. Noyau et image d'un homomorphisme	131
10. Application aux groupes cycliques	133
11. Groupes opérant sur un ensemble	134
§ 8. ANNEAUX ET CORPS	137
1. Définition des anneaux, exemples	137
2. Anneaux d'intégrité et corps	140
3. L'anneau des entiers modulo p	142
4. Formule du binôme	144
5. Développement d'un produit de sommes	147
6. Homomorphismes d'anneaux	148
§ 9. NOMBRES COMPLEXES	150
1. Racines carrées	150
2. Préliminaires	150
3. L'anneau $K[\sqrt{d}]$	152
4. Éléments inversibles d'une extension quadratique	155
5. Cas d'un corps commutatif	156
6. Représentation géométrique des nombres complexes	157
7. Formules de multiplication des fonctions trigonométriques	160

§ 10. MODULES ET ESPACES VECTORIELS	164
1. Définition des modules sur un anneau	164
2. Exemples de modules	165
3. Sous-modules, sous-espaces vectoriels	168
4. Modules à droite et modules à gauche	169
§ 11. RELATIONS LINÉAIRES DANS UN MODULE	171
1. Combinaisons linéaires	171
2. Modules de type fini	173
3. Relations linéaires	174
4. Modules libres, bases	176
5. Combinaisons linéaires infinies	178
§ 12. APPLICATIONS LINÉAIRES. MATRICES	181
1. Définition des homomorphismes	181
2. Homomorphismes d'un module libre de type fini dans un module quelconque	183
3. Homomorphismes et matrices	185
4. Exemples d'homomorphismes et de matrices	188
§ 13. ADDITION DES HOMOMORPHISMES ET MATRICES	193
1. Les groupes additifs $\text{Hom}(L, M)$	193
2. Addition des matrices	194
§ 14. PRODUITS DE MATRICES	196
1. L'anneau des endomorphismes d'un module	196
2. Produit de deux matrices	197
3. Anneaux de matrices	199
4. Écriture matricielle des homomorphismes	201
§ 15. MATRICES INVERSIBLES ET CHANGEMENTS DE BASE	203
1. Le groupe des automorphismes d'un module	203
2. Les groupes $\text{GL}(n, K)$	203
3. Exemples : les groupes $\text{GL}(1, K)$ et $\text{GL}(2, K)$	204
4. Changements de base : matrices de passage	206
5. Influence d'un changement de base sur la matrice d'un homomorphisme	209
§ 16. TRANSPOSÉE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE	212
1. Dual d'un module	212
2. Dual d'un module libre de type fini	214
3. Bidual d'un module	215
4. Transposé d'un homomorphisme	217
5. Transposée d'une matrice	219
§ 17. SOMMES DE SOUS-MODULES	223
1. Somme de deux sous-modules	223
2. Produit direct de modules	224
3. Somme directe de sous-modules	225
4. Sommes directes et projecteurs	227

§ 18. THÉORÈMES DE FINITUDE	231
1. Homomorphismes dont le noyau et l'image sont de type fini	231
2. Modules de type fini sur un anneau noethérien	232
3. Sous-modules d'un module libre sur un anneau principal	234
4. Applications aux systèmes d'équations linéaires	235
5. Autres caractérisations des anneaux noethériens	236
§ 19. LA NOTION DE DIMENSION	238
1. Existence de bases	238
2. Définition d'un sous-espace vectoriel par des équations linéaires	240
3. Conditions de compatibilité d'un système d'équations linéaires	242
4. Existence de relations linéaires	244
5. La notion de dimension	246
6. Caractérisations des bases et de la dimension	248
7. Dimensions du noyau et de l'image d'un homomorphisme	249
8. Rang d'un homomorphisme, d'une famille de vecteurs, d'une matrice	251
9. Calcul effectif du rang d'une matrice	253
10. Calcul de la dimension d'un sous-espace vectoriel à partir de ses équations ..	255
§ 20. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES	257
1. Notations et traductions	257
2. Rang d'un système d'équations linéaires. Conditions d'existence de solutions ..	258
3. Système homogène associé	259
4. Systèmes de Cramer	259
5. Systèmes d'équations indépendantes : réduction à un système de Cramer	261
§ 21. FONCTIONS MULTILINÉAIRES	265
1. Définition des applications multilinéaires	265
2. Produit tensoriel d'applications multilinéaires	269
3. Quelques identités algébriques	270
4. Cas des modules libres de type fini	274
5. Effet d'un changement de base sur les composantes d'un tenseur	281
§ 22. APPLICATIONS BILINÉAIRES ET TRILINÉAIRES ALTERNÉES	284
1. Applications bilinéaires alternées	284
2. Cas des modules libres de type fini	285
3. Applications trilinéaires alternées	288
4. Développement par rapport à une base	289
§ 23. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES ALTERNÉES	293
1. La signature d'une permutation	293
2. Antisymétrisation d'une fonction de plusieurs variables	297
3. Applications multilinéaires alternées	299
4. Fonctions p -linéaires alternées sur un module isomorphe à K^p	301
5. Déterminant d'un système de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme ..	303
6. Caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie	306
7. Applications multilinéaires alternées : cas général	309
8. Le critère d'indépendance linéaire	312
9. Conditions de compatibilité d'un système d'équations linéaires	313

§ 24. DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT. FORMULES DE CRAMER	317
1. Propriétés fondamentales des déterminants	317
2. Développement suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne	319
3. Matrices complémentaires	323
4. Formules de Cramer	324
§ 25. VARIÉTÉS LINÉAIRES AFFINES	327
1. L'espace vectoriel des translations	327
2. Espaces affines associés à un espace vectoriel	329
3. Barycentres dans un espace affine	330
4. Variétés linéaires dans un espace affine	333
5. Génération d'une variété linéaire par des droites	337
6. Espaces affines de dimension finie. Bases affines	338
7. Calcul de la dimension d'une variété linéaire	340
8. Équations d'une variété linéaire en coordonnées affines	342
§ 26. RELATIONS ALGÈBRIQUES	345
1. Monômes et polynômes en les éléments d'un anneau	345
2. Relations algébriques	347
3. Cas des corps commutatifs	349
§ 27. ANNEAUX DE POLYNÔMES	352
1. Préliminaires sur le cas d'une variable	352
2. Polynômes à une indéterminée	353
3. La notation polynomiale	355
4. Polynômes à plusieurs indéterminées	357
5. Degrés partiels et degré total	359
6. Polynômes à coefficients dans un anneau d'intégrité	360
28. FONCTIONS POLYNOMIALES	362
1. Valeurs d'un polynôme	362
2. Somme et produit de fonctions polynomiales	363
3. Cas d'un corps infini	365
§ 29. CORPS DES FRACTIONS D'UN ANNEAU D'INTÉGRITÉ. FRACTIONS RATIONNELLES	368
1. Corps des fractions d'un anneau d'intégrité : préliminaires	368
2. Construction du corps des fractions	369
3. Vérification des axiomes des corps	372
4. Immersion de l'anneau K dans son corps des fractions	374
5. Fractions rationnelles à coefficients dans un corps	375
6. Valeurs d'une fraction rationnelle	376
§ 30. DÉRIVATION DES POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES. FORMULE DE TAYLOR	381
1. Dérivations dans un anneau	381
2. Dérivations d'un anneau de polynômes	382
3. Dérivées partielles	384
4. Dérivation des fonctions composées	385
5. Formule de Taylor	386
6. Caractéristique d'un corps commutatif	388
7. Ordre de multiplicité des racines d'une équation	390

§ 31. ANNEAUX PRINCIPAUX	393
1. Plus grand commun diviseur	393
2. Éléments premiers entre eux	394
3. Plus petit commun multiple	395
4. Existence de diviseurs premiers	397
5. Propriétés des éléments extrémaux	398
6. Unicité de la décomposition en facteurs premiers	399
7. Calcul du pgcd et du ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers ..	401
8. Décomposition en éléments simples des fractions sur un anneau principal	403
§ 32. PROPRIÉTÉS DE DIVISIBILITÉ DES POLYNÔMES	405
1. Division des polynômes à une variable	405
2. Idéaux d'un anneau de polynômes à une indéterminée	408
3. Pgcd et ppcm de plusieurs polynômes; polynômes irréductibles	409
4. Application aux fractions rationnelles	411
§ 33. NOMBRE DE RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE	414
1. Nombre maximum de racines	414
2. Corps algébriquement clos	416
3. Nombre de racines d'une équation à coefficients dans un corps algébriquement clos	418
4. Polynômes irréductibles à coefficients dans un corps algébriquement clos	420
5. Polynômes irréductibles à coefficients réels	422
6. Relations entre les coefficients et les racines d'une équation	424
§ 34. VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES	427
1. Définition des vecteurs propres et valeurs propres	427
2. Polynôme caractéristique d'une matrice	428
3. Forme du polynôme caractéristique	429
4. Existence de valeurs propres	430
5. Réduction à la forme triangulaire	431
6. Cas où toutes les valeurs propres sont simples	434
7. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables	437
§ 35. FORME CANONIQUE D'UNE MATRICE	441
1. Le théorème de Hamilton-Cayley	441
2. Décomposition en endomorphismes nilpotents	444
3. Structure des endomorphismes nilpotents	445
4. Le théorème de Jordan	448
§ 36. FORMES HERMITIENNES	451
1. Formes sesquilineaires, formes hermitiennes	452
2. Formes non dégénérées	455
3. Adjoint d'un homomorphisme	457
4. Orthogonalité par rapport à une forme hermitienne non dégénérée	460
5. Bases orthogonales	465
6. Bases orthonormales	467
7. Automorphismes d'une forme hermitienne	469
8. Automorphismes d'une forme hermitienne positive : réduction à la forme diagonale	471
9. Vecteurs isotropes et formes indéfinies	475
10. L'inégalité de Cauchy-Schwarz	476

TABLE DES MATIÈRES

13

EXERCICES DU § 0	481
EXERCICES DU § 1	485
EXERCICES DU § 2	486
EXERCICES DU § 3	489
EXERCICES DU § 4	491
EXERCICES DU § 5	494
EXERCICES DU § 7	498
EXERCICES DU § 8	505
EXERCICES DU § 9	514
EXERCICES DU § 10	520
EXERCICES DU § 11	520
EXERCICES DU § 12	525
EXERCICES DU § 13	525
EXERCICES DU § 14	525
EXERCICES DU § 15	529
EXERCICES DU § 16	537
EXERCICES DU § 17	539
EXERCICES DU § 18	542
EXERCICES DU § 19	545
EXERCICES DU § 20	551
EXERCICES DU § 21	554
EXERCICES DU § 22	559
EXERCICES DU § 23	562
EXERCICES DU § 24	566
EXERCICES DU § 26	571
EXERCICES DU § 27	574
EXERCICES DU § 28	574
EXERCICES DU § 29	582
EXERCICES DU § 30	588
EXERCICES DU § 31	592
EXERCICES DU § 32	598
EXERCICES DU § 33	607
EXERCICES DU § 34	619
EXERCICES DU § 35	633
EXERCICES DU § 36	641
BIBLIOGRAPHIE	655
INDEX DES NOTATIONS	659
INDEX TERMINOLOGIQUE	661