

Cours

Jean-Marie Monier

Algèbre 2

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP, PSI, PC, PT

3^e édition

l'intègre

DUNOD

Table des matières

Première partie – Cours

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire 3

1.1	Dualité	4
1.1.1	Généralités	4
1.1.2	Hyperplans	4
1.1.3	Orthogonalité	7
1.1.4	Bases duales	10
1.1.5	Transposition	18
1.2	Blocs	21
1.3	Suites et séries de matrices	29
1.3.1	Normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$	29
1.3.2	Exponentielle de matrice	31
	Complément aux exercices	34

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (1^{er} niveau) 35

2.1	Eléments propres	35
2.2	Polynôme caractéristique	41
2.3	Diagonalisabilité	47
2.4	Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices	59
2.5	Applications de la diagonalisation	67
2.5.1	Calcul des puissances d'une matrice carrée	67
2.5.2	Suites récurrentes linéaires simultanées du 1 ^{er} ordre à coefficients constants	70
2.5.3	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants	72

Chapitre 3

Réduction (2^e niveau) 75

3.1	Trigonalisation	75
3.2	Polynômes annulateurs	82
3.2.1	Théorème de Cayley et Hamilton	82
3.2.2	Théorème des noyaux	84
3.2.3	Polynôme minimal	87

- 3.3** Décomposition de Dunford
 - 3.3.1 Sous-espaces caractéristiques
 - 3.3.2 Décomposition de Dunford
 - 3.3.3 Exemples d'applications de la décomposition de Dunford

- 3.4** Réduction de Jordan
 - 3.4.1 Structure des endomorphismes nilpotents
 - 3.4.2 Réduction de Jordan
- Compléments aux exercices

Chapitre 4

Algèbre bilinéaire (1^{er} niveau)

- 4.1** Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques
 - 4.1.1 Généralités
 - 4.1.2 Interprétation matricielle
- 4.2** Rappels sur les espaces euclidiens
 - 4.2.1 Produit scalaire
 - 4.2.2 Orthogonalité
- 4.3** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien
 - 4.3.1 Endomorphismes symétriques
 - 4.3.2 Endomorphismes orthogonaux
- 4.4** Réduction des matrices symétriques réelles
 - 4.4.1 Théorème fondamental
 - 4.4.2 Réduction simultanée
 - 4.4.3 Formes quadratiques positives, définies-positives

Chapitre 5

Algèbre bilinéaire (2^{ème} niveau)

- 5.1** Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques
 - 5.1.1 Généralités
 - 5.1.2 Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique
 - 5.1.3 Cas de la dimension finie
 - 5.1.4 Classification des formes quadratiques en dimension finie
 - 5.1.5 Décomposition de Gauss d'une forme quadratique
- 5.2** Adjoint
 - 5.2.1 Généralités
 - 5.2.2 Cas de la dimension finie
 - 5.2.3 Endomorphismes remarquables d'un espace préhilbertien réel
- Complément aux exercices

Chapitre 6

Algèbre sesquilinéaire

- 6.1** Formes sesquilinéaires
 - 6.1.1 Généralités
 - 6.1.2 Orthogonalité pour une forme sesquilinéaire hermitienne

6.1.3	Cas de la dimension finie	178
6.1.4	Classification des formes hermitiennes en dimension finie	184
6.1.5	Décomposition de Gauss d'une forme hermitienne	184
6.2	Espaces hermitiens	186
6.2.1	Produit scalaire hermitien	186
6.2.2	Orthogonalité	189
6.3	Adjoint	192
6.3.1	Généralités	192
6.3.2	Cas de la dimension finie	193
6.4	Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien	194
6.4.1	Endomorphismes auto-adjoints	194
6.4.2	Endomorphismes unitaires	197
6.4.3	Endomorphismes normaux	201
6.5	Réduction des matrices hermitiennes	203
6.5.1	Théorème fondamental	203
6.5.2	Réduction simultanée	204
6.5.3	Matrices hermitiennes positives, définies-positives	205
	Compléments aux exercices	216

Chapitre 7 Compléments d'algèbre générale 221

7.1	Groupes	221
7.1.1	Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	221
7.1.2	Groupes, action d'un groupe sur un ensemble	225
7.2	Anneaux	228
7.2.1	Idéaux d'un anneau commutatif	228
7.2.2	Morphismes d'anneaux	231
7.2.3	Idéaux de $\mathbb{Z}$, anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	231
7.2.4	Algèbre $K[a]$	235
	Compléments aux exercices	239

Deuxième partie

Indications et réponses des exercices

Chap. 1, 245 ; Chap. 2, 259 ; Chap. 3, 283 ; Chap. 4, 315 ; Chap. 5, 333 ;
Chap. 6, 355 ; Chap. 7, 391.

Index des notations	399
Index alphabétique	401