

mathématiques

Introduction à la Topologie Générale

Fidèle Ayissi Etémé

méthodes

Licence - Master I - Ingéniorat

 Hermann

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	iii
Introduction	1
1 Espaces métriques (généralités)	3
1.1 Notions métriques	3
1.1.1 Distance - Espace métrique	3
1.1.2 Propriétés élémentaires d'une distance	3
1.1.3 Espace ultramétrique	4
1.1.4 Exemple de distances	4
1.1.5 Norme - Espace normé.	4
1.1.6 Isométrie.	6
1.1.7 Transport d'une distance.	6
1.1.8 Boules et sphères.	8
1.1.9 Distance d'un point à un ensemble.	9
1.1.10 Distance de deux ensembles	10
1.1.11 Diamètre d'un ensemble.	10
1.1.12 Ensembles bornés.	11
1.1.13 Produit fini d'espaces métriques	12
1.1.14 Distances équivalentes.	13
1.1.15 Normes équivalentes.	13
1.2 Notions topologiques.	14
1.2.1 Voisinages d'un point	14
1.2.2 Ouverts et fermés.	16

1.2.3	Adhérence.	18
1.2.4	Partie partout dense.	20
1.2.5	Intérieur-Extérieur-Frontière.	20
1.2.6	Sous-espaces métriques	21
1.3	Continuité et limites (1 ^{ère} partie)	23
1.3.1	Continuité en un point (notion topologique)	23
1.3.2	Continuité sur une partie (notion topologique)	24
1.3.3	Continuité uniforme (notion métrique)	25
1.3.4	Etude des suites	26
1.3.5	Suite de Cauchy-Espaces complets (notions métriques)	27
1.4	Théorème du point fixe	28
1.4.1	Majoration de l'erreur	30
1.4.2	Point fixe dépendant d'un paramètre	33
1.5	Continuité et limites (2 ^{ème} partie)	34
1.5.1	Retour sur la continuité	34
1.5.2	Séparation par des ouverts	35
1.5.3	Homéomorphismes	35
1.5.4	Cas des espaces produits	37
1.5.5	Limite d'une fonction en un point	39
1.5.6	Prolongement par continuité	40
1.5.7	Suites extraites-valeurs limites	42
1.5.8	Propriété des espaces complets	44
1.5.9	Conservation de la complétude	45
2	Convexité, connexité, compacité	49
2.1	Convexité	49
2.1.1	Cas d'un espace vectoriel normé	53
2.2	Connexité (étude topologique)	54
2.2.1	Connexité et continuité	56
2.2.2	Produit d'espaces connexes	58
2.2.3	Espace localement connexe	58
2.2.4	Composantes connexes	59
2.3	Connexité (étude métrique)	59
2.3.1	Connexité dans \mathbb{R}	59
2.3.2	Espaces bien enchainés	61

2.4	Connexité par arcs	62
2.4.1	Propriétés de la connexité par arcs	64
2.4.2	Cas des espaces vectoriels normés (sur \mathbb{R})	65
2.5	Compacité (étude topologique)	67
2.5.1	Image d'un compact par une fonction continue	69
2.5.2	Produit d'espaces compacts	70
2.5.3	Partie relativement compacte	70
2.5.4	Espace localement compact	71
2.6	Compacité (étude métrique)	72
2.6.1	Espaces précompacts	73
2.6.2	Compacité et continuité uniforme	76
2.7	Compacité (espaces \mathbb{R}^n)	77
2.7.1	Partie compacte de \mathbb{R}	77
2.7.2	Parties compactes de \mathbb{R}^n	78
2.7.3	Compacité et convexité	79
2.7.4	Compacité et connexité	81
3	Topologie générale	83
3.1	Notions générales	83
3.1.1	Espace topologique	83
3.1.2	Exemple de topologies	84
3.1.3	Systèmes fondamentaux de voisinages	85
3.1.4	Ouverts et fermés	85
3.1.5	Définition équivalente d'une topologie	86
3.1.6	Base d'une topologie	87
3.1.7	Adhérence-Intérieur-Extérieur-Frontière.	87
3.1.8	Comparaison de topologies	89
3.1.9	Topologie induite	90
3.1.10	Topologie produit	91
3.2	Filtres et limites	93
3.2.1	Filtre sur un ensemble	93
3.3	Ultrafiltres	95
3.3.1	Filtre induit	95
3.3.2	Filtre image	96
3.3.3	Filtre projection	96
3.3.4	Filtre produit	96

3.3.5	Limite d'un filtre	97
3.3.6	Limite dans un espace produit	97
3.3.7	Limite d'une fonction suivant un filtre	98
3.3.8	Retour sur la continuité	98
3.3.9	Retour sur les suites	100
3.3.10	Retour sur la complétude	101
3.3.11	Retour sur la limite d'une fonction en un point	103
3.3.12	Prolongement par continuité uniforme	104
3.4	Compléments sur la connexité et la compacité	105
3.4.1	Retour sur la connexité	105
3.4.2	Retour sur la compacité	107
3.4.3	Retour sur la précompacité.	109
4	Espaces vectoriels Normés	111
4.1	généralités	111
4.1.1	Propriétés élémentaires.	111
4.1.2	Continuité des applications multilinéaires . . .	114
4.1.3	Continuité des applications linéaires	115
4.1.4	Isomorphismes d'espaces normés	116
4.1.5	Equivalence de normes	117
4.2	Etude des sous-espaces	117
4.2.1	Somme directe topologique	118
4.2.2	Formes linéaires et hyperplans	119
4.2.3	Espace de dimension finie	120
4.3	Espace d'applications linéaires continues	123
4.3.1	Généralisation aux applications multilinéaires.	125
5	Espaces fonctionnels	129
5.1	Différentes topologies de convergence	129
5.1.1	Rappel sur la convergence simple	129
5.1.2	Rappel sur la convergence uniforme	130
5.1.3	Topologie de la convergence simple	130
5.1.4	Topologie de la convergence uniforme	131
5.1.5	Cas des applications bornées	132
5.1.6	Cas des applications continues	133
5.1.7	Cas des applications continues bornées	134
5.1.8	Note sur la topologie de la convergence compacte	134

5.1.9	Exemple d'application du théorème du point fixe	135
5.2	Ensembles équicontinus	135
5.3	Approximations de Stone-Weierstrass	140
5.3.1	Etude des sous-algèbres de $C_u(E, \mathbb{R})$	141
5.3.2	Application : Approximation par des polynômes	144
5.3.3	Cas des fonctions à valeurs complexes	145
5.3.4	Application : Approximation par des polynômes trigonométriques	146
5.4	Problèmes de meilleure approximation	148
5.4.1	Position du problème	148
5.4.2	Théorème d'existence	148
5.4.3	Première caractérisation	149
5.4.4	Condition de Haar	151
5.4.5	Deuxième caractérisation	152
6	Exercices	159
	Bibliographie	195
	Quatrième de couverture	197