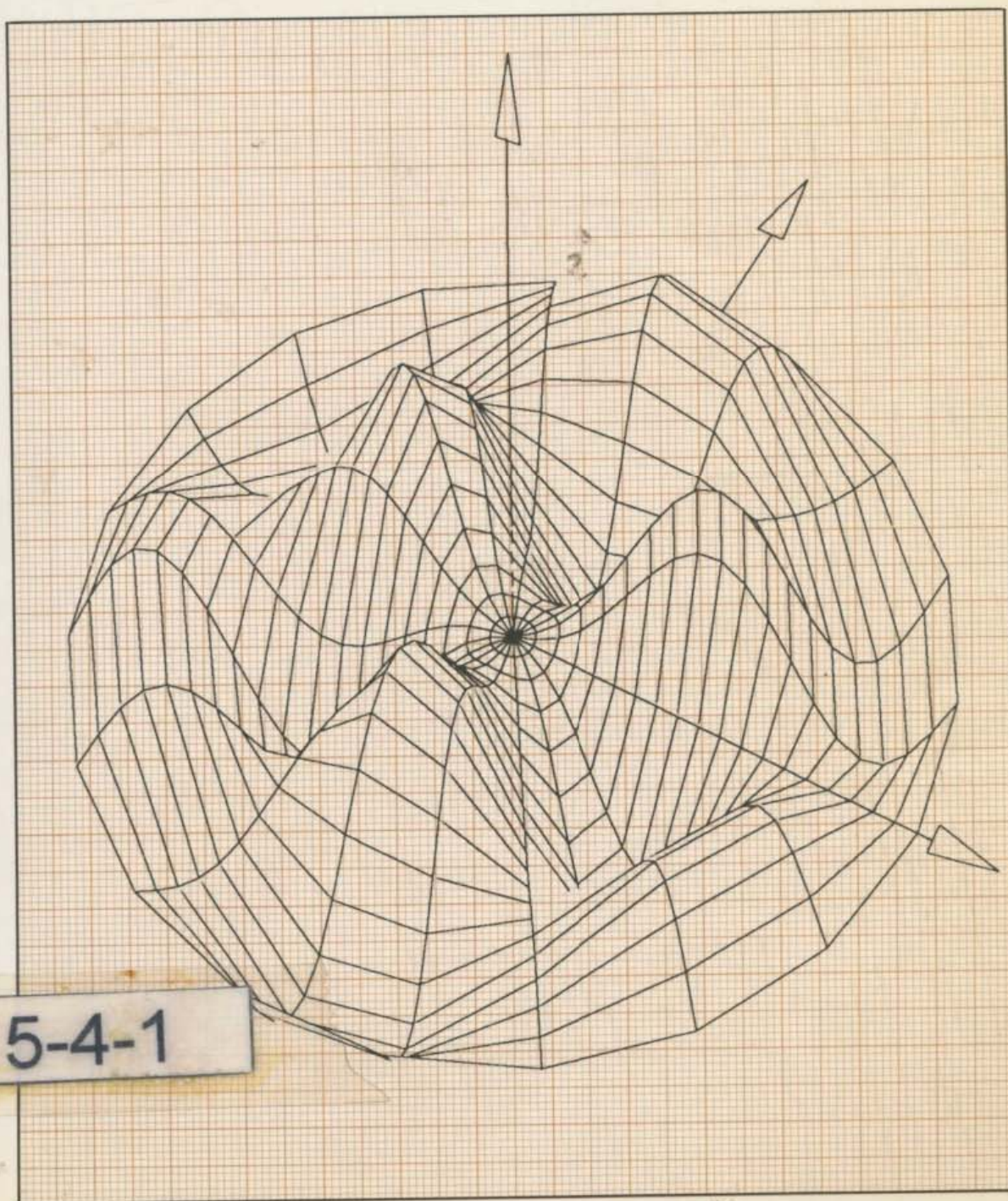


MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

7

# Éléments d'analyse numérique et appliquée

KURT ARBENZ ET OTTO BACHMANN



515-4-1

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

# TABLE DES MATIÈRES

|            |                                                                                                                 |    |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|            | Avant-propos .....                                                                                              | v  |
| CHAPITRE 1 | <b>Interpolation spline</b>                                                                                     |    |
|            | 1.0 INTRODUCTION .....                                                                                          | 1  |
|            | 1.1 SPLINES LINÉAIRES .....                                                                                     | 1  |
|            | 1.2 SPLINES QUADRATIQUES.....                                                                                   | 2  |
|            | 1.2.1 Exemple: interpolation par une spline quadratique.....                                                    | 3  |
|            | 1.3 SPLINES CUBIQUES .....                                                                                      | 4  |
|            | 1.3.1 Définition .....                                                                                          | 4  |
|            | 1.3.2 Exemple: interpolation par une spline cubique naturelle .                                                 | 6  |
|            | 1.3.3 Résolution du système (1.15).....                                                                         | 7  |
|            | 1.3.4 Conditions aux limites .....                                                                              | 8  |
|            | 1.4 SPLINES SOUS FORME PARAMÉTRIQUE .....                                                                       | 9  |
|            | 1.4.1 Exemple: approximation d'un cercle par une spline<br>paramétrique.....                                    | 9  |
|            | 1.4.2 Exemple: spline dans l'espace.....                                                                        | 10 |
|            | 1.5 EXERCICES.....                                                                                              | 11 |
| CHAPITRE 2 | <b>Equations différentielles et séries entières.<br/>Equation différentielle de Bessel. Fonctions de Bessel</b> |    |
|            | 2.0 INTRODUCTION.....                                                                                           | 13 |
|            | 2.1 RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE....                                                                | 13 |
|            | 2.2 MÉTHODE DES SÉRIES ENTIÈRES .....                                                                           | 14 |
|            | 2.3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE BESSEL<br>ET FONCTIONS DE BESSEL .....                                           | 15 |
|            | 2.3.1 Equation différentielle de Bessel.....                                                                    | 15 |
|            | 2.3.2 Fonctions de Bessel.....                                                                                  | 17 |
|            | 2.3.3 Quelques propriétés des fonctions de Bessel.....                                                          | 19 |
|            | 2.3.4 Complétion de la solution du problème de la<br>membrane tendue .....                                      | 20 |
|            | 2.4 CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL.....                                                                         | 22 |
|            | 2.5 EXERCICES.....                                                                                              | 22 |

**CHAPITRE 3****Résolution d'équations différentielles par des méthodes numériques et graphiques.****Plan de phase. Stabilité**

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 3.0 INTRODUCTION .....                                        | 25 |
| 3.1 MÉTHODE GRAPHIQUE DES ISOCLINES .....                     | 25 |
| 3.1.1 Exemple .....                                           | 25 |
| 3.2 MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES.....                       | 26 |
| 3.2.1 Exemple .....                                           | 27 |
| 3.3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AUTONOME<br>ET PLAN DE PHASE..... | 28 |
| 3.3.1 Exemple: équation de van der Pol.....                   | 28 |
| 3.4 STABILITÉ ET POINTS CRITIQUES .....                       | 30 |
| 3.4.1 Définitions .....                                       | 30 |
| 3.4.2 Systèmes d'équations différentielles linéaires .....    | 31 |
| 3.4.3 Stabilité de systèmes linéaires .....                   | 34 |
| 3.4.4 Stabilité de systèmes non-linéaires .....               | 36 |
| 3.5 EXERCICES .....                                           | 38 |

**CHAPITRE 4****Calcul d'intégrales définies**

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 4.0 INTRODUCTION .....                    | 41 |
| 4.1 FORMULE DES TRAPÈZES .....            | 41 |
| 4.2 FORMULE DE SIMPSON .....              | 43 |
| 4.3 MÉTHODE DE ROMBERG.....               | 44 |
| 4.3.1 Exemple.....                        | 47 |
| 4.3.2 Exemple: intégrales de Fresnel..... | 47 |
| 4.4 EXERCICES .....                       | 48 |

**CHAPITRE 5****Equations aux dérivées partielles**

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.0 INTRODUCTION .....                                                        | 51 |
| 5.1 MÉTHODE DE D'ALEMBERT.....                                                | 51 |
| 5.1.1 Equations hyperboliques $b^2 - 4ac > 0$ .....                           | 52 |
| 5.1.2 Equations paraboliques $b^2 - 4ac = 0$ .....                            | 53 |
| 5.1.3 Equations elliptiques $b^2 - 4ac < 0$ .....                             | 53 |
| 5.1.4 Exemple: corde vibrante.....                                            | 54 |
| 5.2 MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES.....                                  | 57 |
| 5.3 MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES<br>EN DIMENSION 2.....                     | 59 |
| 5.3.1 Exemple: température d'état stationnaire<br>dans une plaque carrée..... | 60 |
| 5.3.2 Exemple: équation d'ondes .....                                         | 62 |
| 5.4 EXERCICES .....                                                           | 64 |

|                   |                                                                      |    |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------|----|
| <b>CHAPITRE 6</b> | <b>La transformée de Fourier discrète</b>                            |    |
| 6.0               | INTRODUCTION.....                                                    | 67 |
| 6.1               | DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER<br>DISCRÈTE.....             | 67 |
| 6.1.1             | Exemple: TFD d'une suite.....                                        | 68 |
| 6.2               | EXPRESSION MATRICIELLE DE LA TFD.....                                | 68 |
| 6.2.1             | Exemple: TFD d'une suite (forme matricielle) .....                   | 69 |
| 6.3               | TRANSFORMÉE INVERSE .....                                            | 69 |
| 6.4               | CONVOLUTION CIRCULAIRE .....                                         | 70 |
| 6.4.1             | Exemple: convolution circulaire.....                                 | 71 |
| 6.4.2             | Exemple: multiplication de deux polynômes .....                      | 72 |
| 6.4.3             | Exemple: filtrage d'un signal.....                                   | 72 |
| 6.5               | CORRÉLATION.....                                                     | 74 |
| 6.5.1             | Exemple: corrélation de deux suites .....                            | 75 |
| 6.5.2             | Exemple: autocorrélation d'un signal.....                            | 76 |
| 6.6               | TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE .....                                  | 77 |
| 6.6.1             | Exemple: FFT dans le cas $N = 4$ .....                               | 79 |
| 6.6.2             | Organigramme de l'algorithme de FFT .....                            | 80 |
| 6.7               | EXERCICES.....                                                       | 81 |
| <b>CHAPITRE 7</b> | <b>La transformée en <math>z</math></b>                              |    |
| 7.0               | INTRODUCTION.....                                                    | 83 |
| 7.1               | DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE EN $Z$ .....                            | 83 |
| 7.2               | TRANSFORMÉE EN $Z$ DE QUELQUES FONCTIONS<br>USUELLES.....            | 84 |
| 7.2.1             | Echelon unité.....                                                   | 84 |
| 7.2.2             | Fonctions exponentielle et trigonométrique.....                      | 85 |
| 7.2.3             | Fonction rampe et fonction puissance.....                            | 86 |
| 7.3               | PROPRIÉTÉ DU DÉCALAGE .....                                          | 86 |
| 7.4               | TABLEAU DE TRANSFORMÉES EN $Z$ .....                                 | 88 |
| 7.5               | RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES .....                         | 89 |
| 7.5.1             | Exemple: suite de Fibonacci.....                                     | 90 |
| 7.5.2             | Exemple: filtre numérique canonique à deux<br>pôles et un zéro ..... | 91 |
| 7.6               | EXERCICES.....                                                       | 93 |
| <b>CHAPITRE 8</b> | <b>Optimisation linéaire</b>                                         |    |
| 8.0               | INTRODUCTION.....                                                    | 95 |
| 8.1               | OPÉRATION DE PIVOTAGE.....                                           | 96 |

## Eléments d'analyse numérique et appliquée

|                                              |            |
|----------------------------------------------|------------|
| 8.2 OPTIMISATION.....                        | 98         |
| 8.2.1 Remarques.....                         | 101        |
| 8.2.2 Exemple.....                           | 102        |
| 8.3 PROGRAMMES LINÉAIRES GÉNÉRAUX.....       | 104        |
| 8.3.1 Exemple: problème du restaurateur..... | 104        |
| 8.4 EXERCICES.....                           | 109        |
| <b>Réponses aux exercices.....</b>           | <b>111</b> |
| <b>Bibliographie.....</b>                    | <b>116</b> |
| <b>Index alphabétique.....</b>               | <b>117</b> |