

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord le bon dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et la patience pour aboutir à la réalisation de ce modeste travail.

Je tiens à remercier très profondément et particulièrement **Mr BADRRADINE** et **Mr BENNAMIA** pour leurs conseils, leur soutien moral et leurs encouragements.

Mes sincères remerciements vont à mes collègues **KRIMI ABDELKADER**, **RACHECH MOUHAMED** pour leur aide et à mes professeurs qui ont activement participé à ma formation universitaire.

Je remercie enfin tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail de fin d'études.

Merci...

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, lumière de ma vie :

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon grand amour, mon estime, ma reconnaissance et ma profonde affection. Je vous remercie pour tout ce que vous avez fait pour moi, et ce que vous faites jusqu'à présent. Vous vous êtes dépensé pour moi sans compter. Je vous dois toute ma reconnaissance pour tous les sacrifices consentis pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie. Vous avez toujours été à mes côtés et vos bons soins avaient fait que je n'ai jamais eu besoin de me plaindre. Que dieu vous garde et vous accorde longue vie.

A ma chère sœur –le sucre d'orge qui donne du goût à mon existence : **BACHI**.

A mon adorable frère : **FOUFI** qui fut mon étoile du nord durant tout mon cursus et qui le restera jusqu'à la fin de mes jours.

A mon cher oncle bien aimé : **SAID** que dieu bénisse son âme et lui ouvre les portes de paradis.

A mes grands parents que dieu leurs accorde son salut. .

A mes chères amis(e) : Soumia,Sara,, Lamia,,Imene,Kinz , Epi,Atika, nesrine,
,Bouchra,Amina,Fayrouz,Amira,Mirvet,mouhamed,krimou, Aziz.

A **NECRO** pour son soutien permanent, pour ses encouragements, sa vive compassion à ma réussite et surtout pour sa compréhension et sa patience.

A tous ceux qui me sont chers, et toute la famille **AIT KARA, OULD ALI** ,

AIT ABDELLAH et AIT OUZEGUENE

A toutes personnes qui m'a aidée de près ou de loin pour réaliser ce modeste travail.

ASMA.

RESUME.

La méthode des Eléments Finis est une méthode qui permet d'analyser les comportements physiques de la structure d'avion.

Dans notre travail, nous utilisons la méthode des Eléments Finis Poutres, où nous intéressons au cas de structures poutres vibrantes. Nous déterminons les matrices de masse et de rigidité de structures des composants d'un avion qui sont considérés/modélisés comme des poutres.

Après avoir eu les matrices de masse et de rigidité, nous calculons et évaluons les fréquences et les modes propres.

ABSTRACT.

The finite element method is a method of study dynamic of the vibratory behaviors of the structure of plane.

In our work, we use the finite element method Beams, where we interest in the case of structures vibrating beams. We determine the mass and stiffness matrix of structures of the components of a plane which are considered/modeled like beams.

After having had the mass and stiffness matrix, we calculate and evaluate the frequencies and modes.

تعتبر نظرية العناصر المنتهجة من بين النظريات المستعملة في الدراسة الديناميكية لظواهر اهتزاز هيكل الطائرة .

- في عملنا هذا نستعمل نظرية العناصر المنتهجة لرافدة أين نهتم بدراسة هيكل رافدة مهتزة من أجل الدراسة الإهتزازية للطائرة .
- بعد إتمام الدراسة الاهتزازية نقوم بحساب وإيجاد ترددات الهياكل .

SOMMAIRE

Résumé

Remercîment

Dédicace

Sommaire

Liste des illustrations, graphiques et tableaux

Introduction.....(11)

I. Généralité sur les structures et les matériaux aéronautiques

I. 1. Introduction.....(12)

I. 2. Généralité sur l'avion.....(12)

I. 2.1. Le fuselage.....(14)

I. 2.2. la voilure (l'aile).....(16)

I. 2.3. Empennage.....(16)

I. 3. Matériaux aéronautique.....(19)

II. Modélisation de la structure d'avion par Eléments Finis.

II. 1. Introduction.....(21)

II. 2. Modélisation des sous assemblage d'un avion.....(22)

II. 2.1. Modélisation du fuselage.....(22)

II. 2.2. Modélisation de l'aile.....(23)

II. 2.2. Modélisation de l'empennage.....(25)

II. 2.4. Modélisation de l'avion (Assemblage d'avion).....(25)

III. MODELISATION DES POUTRES PAR ELEMENTS FINIS

III. 1. Méthode des Eléments Finis.....	(26)
III. 1.1. Présentation de la méthode des Elément Finis.....	(26)
III. 1.2. Intérêts et limitations de la méthode des Eléments finis.....	(26)
III. 2. Historique de la méthode des poutres.....	(27)
III. 3. Méthode de poutre.....	(28)
III. 3.1. Poutre en flexion.....	(29)
III. 3.2. Poutre en torsion.....	(34)
III. 3.3. Poutre en traction-compression.....	(35)
III. 3.3. Les poutre dans l'espace.....	(35)
III. 4. Discrétisation.....	(36)
III. 4.1. Champ de déplacement dans un élément de poutre.....	(38)

IV. Etude dynamique.

IV. 1. Introduction.....	(40)
IV. 2. Analyse modale.....	(40)
IV. 2.1. Calcul des fréquences et modes propres.....	(40)
IV. 2.2. Présentation modale.....	(41)
IV. 3. Réponse dynamique.....	(43)
IV. 3.1. Système forcé amortie.....	(44)
IV. 3.2. Analyse Armorique (fréquentielle).....	(44)
IV. 3.3. Analyse temporelle (transitoire).....	(45)
IV. 4. Conditions aux limites (aux liaisons).....	(45)

V. Résultats et interprétations.

V. 1. Introduction.....	(46)
V. 2. Organigramme.....	(47)

V. 3. Analyse modale d'une poutre encastrée-libre.....	(49)
V. 4. Analyse modale d'une poutre encastrée-encastrée.....	(53)
V. 5. Vibration d'un avion.....	(56)
V. 5.1. Analyse modale.....	(56)
V. 5.2. Analyse des résultats-conclusion.....	(66)

Conclusion.....	(67)
-----------------	------

Appendices.

Références Bibliographique.

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAHPIQUES ET TABLEAUX

Figure (I.2). Les parties principales d'un avion.....	(13)
Figure (I.2.1). Les éléments principaux constitutifs d'un fuselage.....	(15)
Figure(I.2.2).les éléments constitutifs d'une aile.....	(17)
Figure(I.2.3).Les éléments constitutifs d'empennage.....	(18)
Figure(II.1). Sous-composantes de Boeing 747 en élément finis.....	(21)
Figure (II.2.1).Modélisation du fuselage.....	(22)
Figure (II.2.2).Procédure de modélisation de l'aile.....	(23)
Figure (II.2.3) Modélisation de l'aile en type poutre/plaque.....	(24)
Figure (II.2.4).Représentation des constituants d'aile en élément finis.....	(24)
Figure (III.3.a).représentation d'une poutre.....	(28)
Figure (III.3.b).Modélisation de l'élément fini de poutre.....	(29)
Figure (III.3.1).Poutre en flexion.....	(29)
Figure (III.3.2).Poutre en torsion.....	(34)
Figure (III.3.3).Poutre en traction.....	(35)
Figure (III.3.4).poutre dans l'espace.(Poutre vibrante en rotation - définition des repères)...	(36)
Figure (III.4). Discrétisation d'une poutre en éléments Poutres.....	(37)

Figure (III.4.1).Champ de déplacement dans un élément de poutre.....	(38)
Figure (V.3).Poutre encastrée-libre.....	(49)
Tableau (1): Les trois premières fréquences propres d'une poutre encastrée -libre.....	(50)
Figure (V. 3.1).Premier mode de flexion de la poutre.....	(50)
Figure (V. 3.2).deuxième mode de flexion de la poutre.....	(51)
Figure (V. 3.3)troisième mode de flexion de la poutre.....	(51)
Figure (V.3.4). Simulation de poutre encastrée/libre en NASTRAN/PATRAN.....	(52)
Figure (V 3.5).Premier mode de flexion de la poutre.....	(52)
Figure (V. 3.6)deuxième mode de flexion de la poutre.....	(53)
Figure (V.4).Poutre encastrée-encastrée.....	(53)
Tableau (2): Les trois premiers modes et premières fréquences propres d'une poutre encastrée-encastrée.....	(54)
Figure (V.4.1).Premier mode de flexion de la poutre.....	(54)
Figure (V.4.2). Simulation de poutre encastrée/encastrée en NASTRAN/PATRAN.....	(55)
Figure (V. 4.3.) premier mode de flexion de la poutre.....	(55)
Tableau(3):premières fréquences d'avion	(56)
Fig (V. 5). Modèle réduit de l'avion proposé.	(57)

Figure(V.5.a).1ème mode de l'avion(59)

Figure (V.5.b).2ème mode de l'avion.....;(60)

Figure (V.5.c).3 ème mode de l'avion..... (62)

Figure (V.5.d).4ème mode de l'avion.... ;(63)

Figure (V.5.e).5 ème mode de l'avion.....(65)

INTRODUCTION.

De nombreux travaux ont été menés sur la dynamique des systèmes vibrants, souvent essentiels dans un mécanisme (les sous composants d'un avion, pales d'hélicoptère, aubes de turbine, rotor....)

L'utilisation de l'outil informatique et des codes de calcul par éléments finis en particulier a permis une grande avancée dans la finesse des modèles offerts au concepteur. Le rendement, la durée de vie et plus généralement les performances de ces systèmes nécessitent des calculs de plus en plus précis.

En nous appuyant sur la méthode des éléments finis, nous nous proposons de résoudre le problème de recherche des fréquences propres et des modes propres de poutre, en utilisant la modélisation de cette dernière.

Les objectifs de notre travail sont les suivants :

- Mettre au point un logiciel de calcul de structure « **MATLAB** », en s'appuyant sur la modélisation de la poutre.

- Pouvoir effectuer les calculs simplement, rapidement en introduisant des conditions aux limites en tous nœuds de la structure.
- Valider par expérimentation, les éléments développés.

Notre travail s'articule autour de trois parties; dans la première partie nous mettons en place le concept théorique nécessaire. Dans la seconde partie numérique nous mettons en application sur ordinateur les notions développées dans la première partie (nous prenons deux exemples qui visent à valider notre code de calcul) et la dernière partie est une partie expérimentale dont nous calculons notre structure (avion) en utilisant le code choisi « **MATLAB** ».

APPENDICE « 1 »

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A, S, Ω	: Section.
(x, y, z)	: Coordonnées cartésiennes
u, v, w	: Déplacements
${}_n x, {}_n y, {}_n z$: Rotation autour les axes
E	: Module de Young
G	: Module de cisaillement transversal
I, I_p	: Moment d'inertie et moment d'inertie polaire respectivement
...	: Masse volumique
T, U	: Energie cinétique et énergie potentielle respectivement
S	: Pulsation
$[M^e], [k^e]$: Matrice masse et rigidité élémentaires
$[M^e]_g, [k^e]_g$: Matrice masse et rigidité élémentaires dans le repère global
$[M]_g, [K]_g$: Matrice masse et rigidité globales
$[R]$: Matrices de passage
$[w]$: Matrice modale
$[C]$: Matrice d'amortissement
$[N]$: Matrice des fonctions d'interpolation
$[B]$: Transformation des déplacements aux déformations
$[\sim], [\chi]$: Matrices masse et de rigidité modales respectivement

$[w] = [\{w_1\} \ \{w_2\} \ \dots \ \{w_n\}]$: est la matrice modale,

$\{d\} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}^T$: est le vecteur des coordonnées modales.

APPENDICE « 2 »

2. 1-Poutre en flexion

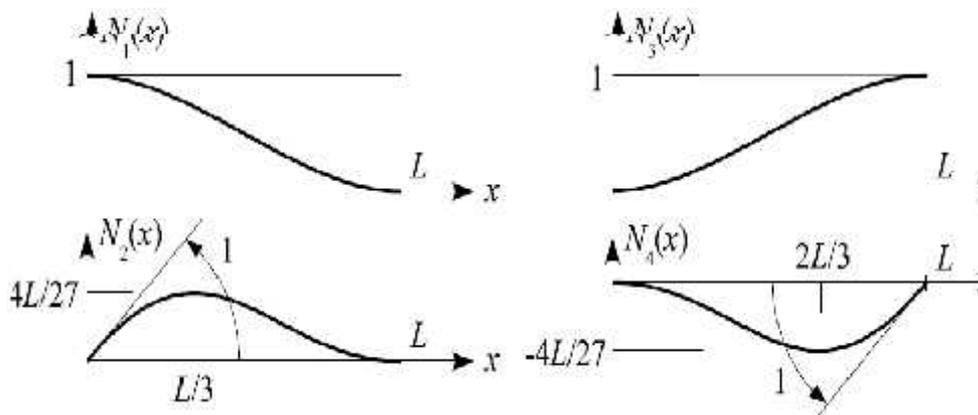
Les fonctions d'interpolation d'une poutre en flexion sont :

$$N1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$N2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$N3(x) = \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$N4(x) = \frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$



Fonctions d'interpolation

La matrice $[B]$ de la poutre en flexion est donnée par :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

Donc :

$$[B] = \left[-6/l^2 + 12x/l^3 \quad 1 - 4/l + 6x/l^2 \quad -6/l^2 + 12x/l^3 \quad -2/l + 6x/l^2 \right]$$

I. 1. Introduction.

De nombreux travaux ont été menés sur la dynamique des systèmes tournants, souvent essentiels dans un mécanisme (pales d'hélicoptères, d'avions, d'éoliennes, aubes de turbine, rotors...). L'utilisation de l'outil informatique et des codes de calculs par éléments finis en particulier a permis une grande avancée dans la finesse des modèles offerts au concepteur. Le rendement, la durée de vie, et plus généralement les performances de ces systèmes nécessitent des calculs de plus en plus précis. En nous appuyant sur la méthode des éléments finis, nous nous proposons de résoudre le problème dynamique de recherche des fréquences et modes propres de poutres en rotation uniforme.

I. 2. Généralité sur l'avion.

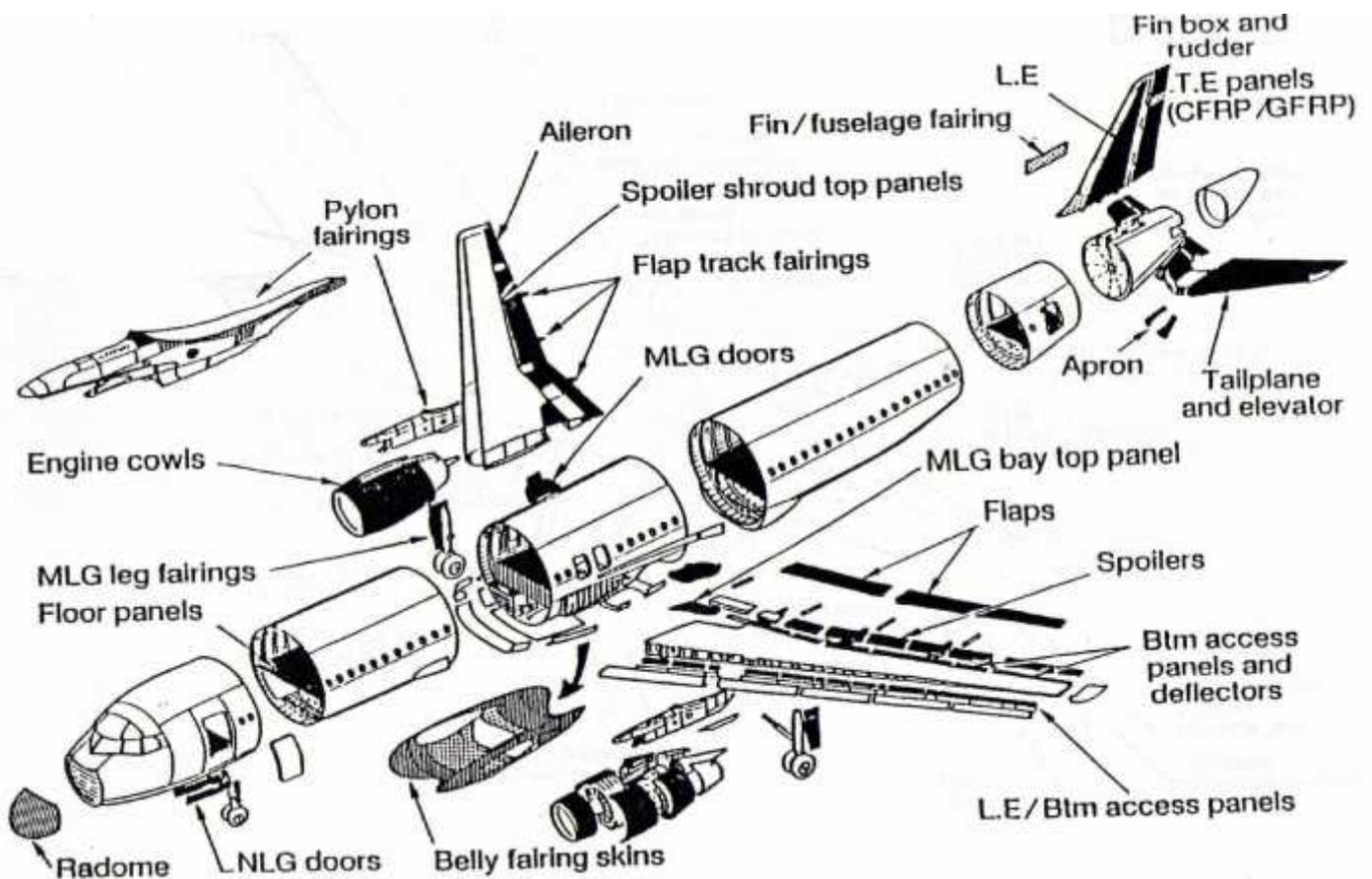
La cellule d'avion est définie comme étant l'ensemble des structures d'un aéronef (fuselage, voilure (ailes), empennage, train d'atterrissage, etc.)

Au début l'industrie aéronautique s'est tournée vers le bois pour concevoir les structures des avions, dont les avions étaient construits autour d'un squelette de bois recouvert de toile, Le tous étaient consolidés par des câbles (au départ des cordes de piano). Avec cette architecture c'est le squelette qui supportait les contraintes de vol. Junkers a construit le premier avion entièrement métallique 'fer et Acier' en Allemagne en 1915. Bien que l'idée date d'avant la première guerre, ce qu'au cours des années trente que s'impose la structure monocoque. Cette architecture a des qualités aérodynamiques (maximum des composants de l'avion sont enfermés dans un fuselage) mais surtout elle modifie la répartition des contraintes, ce ne plus le squelette qui mis a contribution mais la totalité du revêtement métallique.

Les profiles d'ailes était également un enjeu pour les constructeurs d'avions. Une aile fine réduit la traînée mais aussi la portance, le Mustang est souvent reconnue comme le premier avion ayant utilisé des ailes à des profiles laminaires (c'est le contesté de nos jours).

Les impératifs économiques, vers la fin du 20^{ème} siècle, font que l'on cherche à minimiser de plus en plus la masse des avions, cela ce fait soit au moyen des nouveaux matériaux (si le coût de la matière première n'est pas trop élevé devant le bénéfice apporté), soit avec des nouveaux procédés.

L'avion est structuré par quatre principaux éléments, le fuselage les ailes (voilure), les empennages, et le train d'atterrissage. En plus un groupe moto propulseur, les équipements de pilotage et les systèmes auxiliaires, voir Fig (I.2).



Fig(I.2). Les parties principales d'un avion.

I. 2.1. Le Fuselage.

➤ **les contraintes.**

Les constructeurs ont étudié la structure du fuselage de façon que cette dernière réponde à des nombreuses exigences techniques.

Le fuselage d'un avion est soumis à des efforts au cours du vol ainsi qu'au sol ;

a. Les efforts appliqués au sol.

Au sol, le fuselage n'est soumis qu'à des forces massiques dues au poids ;

- De la structure.
- Des passagers et du fret.
- Du carburant.

Il est assimilable à une poutre reposant sur deux appuis , les trains.

b. Effort appliqués en vol.

En vol, le fuselage est comparable à une poutre suspendue en son milieu. Les efforts qui s'appliquent sur le fuselage sont ;

- Effort de flexion (vertical et horizontal).
- Effort de torsion.
- Effort de résistance et pressurisation.
- Effort localisés (impact à l'atterrissage).

➤ **modes de construction.**

Les éléments principaux constitutifs d'un fuselage sont :

- Les cadres ou couples ;
- Les lisses ;
- Le revêtement travaillant ;

a. Cadres ou couples.

Eléments transversaux de forme différentes, assurent la rigidité transversale, le maintien du profil et supportent les efforts localisés importants.

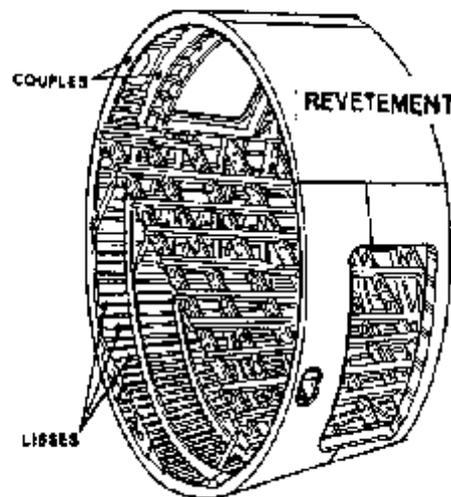
b. Les lisses.

Eléments longitudinaux raidisseurs du revêtement qui absorbent les contraintes

- alternées de traction-compression dues aux flexion longitudinal et latéral (M_y et M_z) .
- de traction due à la différence de pression et aux empennages.
- De compression due à la fixation des GTR.
-

c. Revêtement travaillant.

Constitué par un ensemble de panneaux rivetés, collés ou soudés sur les couples. Il encaisse –comme les lisses- les contraintes de traction- compression, ainsi que celle de cisaillement vertical T_z , périphérique M_x et transversal T_y .



Füg(I.2.1). Les éléments principaux constitutifs d'un fuselage.

I. 2. 2. La voilure (l'aile).

➤ **les contraintes.**

Les ailes sont les parties les plus sollicitées aux contraintes les plus fortes et les plus diverses.

a. Les efforts appliqués au sol.

La portance est nulle, l'aile soumise qu'aux forces massiques dues au poids :

- De sa structure.
- Du carburant contenu.
- Du (ou des) moteur (s).

b. Effort appliqués en vol.

On a des efforts verticaux ;

- Un effort tranchant vers le haut T_z (cisaillement transversal).
- Un moment de flexion vers le haut M_x (compression extradors, traction intradors).
- Un moment de torsion M_y (cisaillement périphérique).

Et des efforts longitudinaux dus à l'opposition de la force de traînée de l'aile à la force de propulsion (T_u) dominante qui sont ;

- Un effort tranchant T_x : provoque une contrainte de cisaillement.
- Un moment de flexion M_z : vers le l'arrière (traction et compression du bord d'attaque).
- Un moment de torsion par rapport à l'axe élastique.

➤ **modes de construction.**

L'aile est constituée des :

- Longerons.
- Les nervures.
- Le revêtement.

a. Longerons.

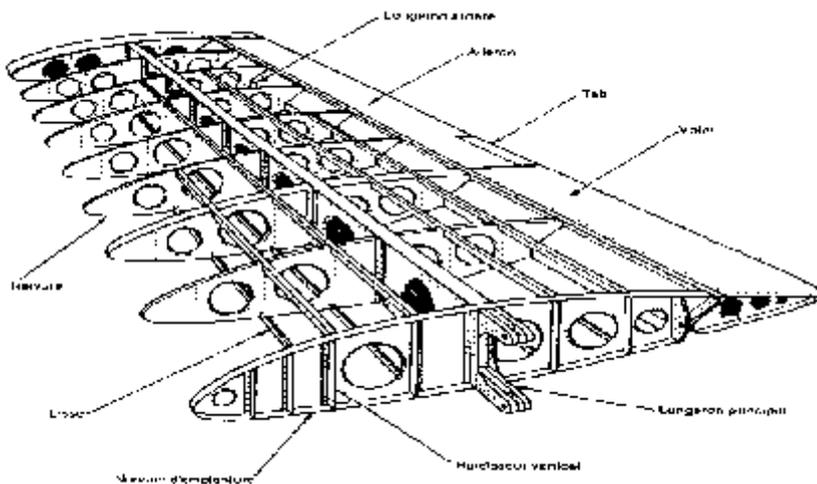
De forme multiples et de constructions différents, ils constituent les éléments longitudinaux de l'aile, leurs semelles absorbent les contraintes de traction et compression et les âmes qui résistent au cisaillement.

b. Nervures.

Eléments transversaux de l'aile, elles donnent la forme au profil et transmettent aux longerons les efforts encaissés par le revêtement.

c. Revêtement travaillant.

Encaisse la plus grande partie des contraintes ; torsion, flexion (traction-compression). Son raidissement est obligatoire dans le sens longitudinal de l'aile.

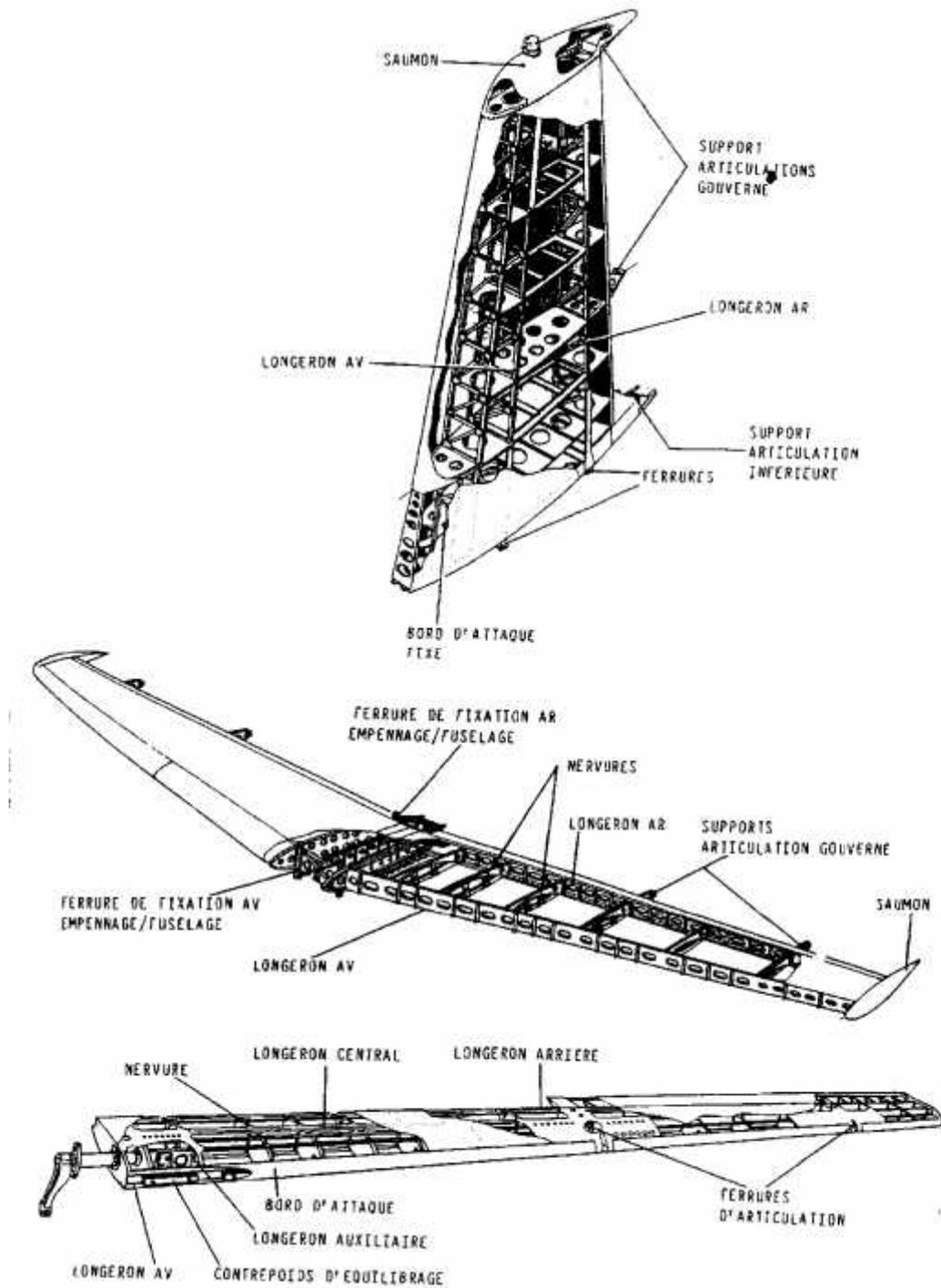


Fig(I.2.2).les éléments constitutifs d'une aile.

I. 2.3. Empennage.

Les empennages sont situés à la parties arrière du fuselage.il est composé d'un ensemble vertical et un ensemble horizontal et sur certain avions ces deux ensembles sont remplacées par un ensemble en V.

Il est constitué des longerons, des nervures, de bord d'attaque et du bord de fuite.



Fig(I.2.3).Les éléments constitutifs d'empennage.

I. 3. Matériaux aéronautique.

Plusieurs facteurs influent sur le choix des matériaux aéronautiques, mais le compromis rigidité, légèreté est probablement le plus important. D'autres propriétés sont diverses ; bien que la signification soit parfois critique, la rigidité, la dureté, la résistance à la corrosion, la fatigue et les effets de chauffage d'environnement, la facilité de fabrication, disponibilité et uniformité d'approvisionnement et, pas moins significative, le coût. Les critères du choix de matériaux peuvent se diviser en trois catégories :

1. critères techniques (Module de Young, la densité, la tenue au fluage, la résistance à la fatigue, la ténacité, la corrosion, le vieillissement...etc.).
2. critères commerciaux (le prix, les sources d'approvisionnement, la disponibilité).
3. critères technologiques (l'assemblage, la soudabilité, l'usinabilité, la possibilité d'automatisation, les traitements thermiques et le stockage).

Les principaux groupes des matériaux employés dans la construction aéronautique ont été. Le bois, l'acier, les alliages d'aluminium avec plus récemment, les alliages de titane, les composites à fibres renforcées, les alliages à base de nickel, etc. On s'intéresse seulement aux matériaux utilisés pour la construction du fuselage, des ailes et d'empennages.

I. 3.1. Le Bois

La première génération des avions actionnés conventionnels a été construite avec du bois et de la toile.

I. 3.2. L'acier.

L'acier a présenté les avantages d'un haut module d'élasticité, la résistance à la traction élevée, mais il a une densité élevée, presque trois fois que les alliages d'aluminium et d'environ six fois qui a le contre plaqué.

I. 3.3 .Les alliages d'aluminium.

En 1909 Alfrid Wilm, en Allemagne, a accidentellement découvert un alliage d'aluminium contenant 3,5% de cuivre, 0,5% magnésium et du silicium et fer. Les propriétés industrielles de ces matériaux ont été acquises par Durner Metallwerke qui a lancé l'alliage

sous le nom de duralumin (d'abord utilisé comme matériau structural principal par Junkers en 1917).

I. 3.4. Les alliages de titane.

L'utilisation des alliages de titane a augmenté d'une manière significative dans les années quatre vingt , en particulier dans la construction des avions de combat. Cette augmentation à continué dans les années quatre vingt dix, où pour l'avion de combat, le pourcentage de l'alliage de titane est du même ordre que les alliages d'aluminium. La première utilisation du titane est sur le Douglas DC7 en 1952.

I. 3.5. Les matériaux composites.

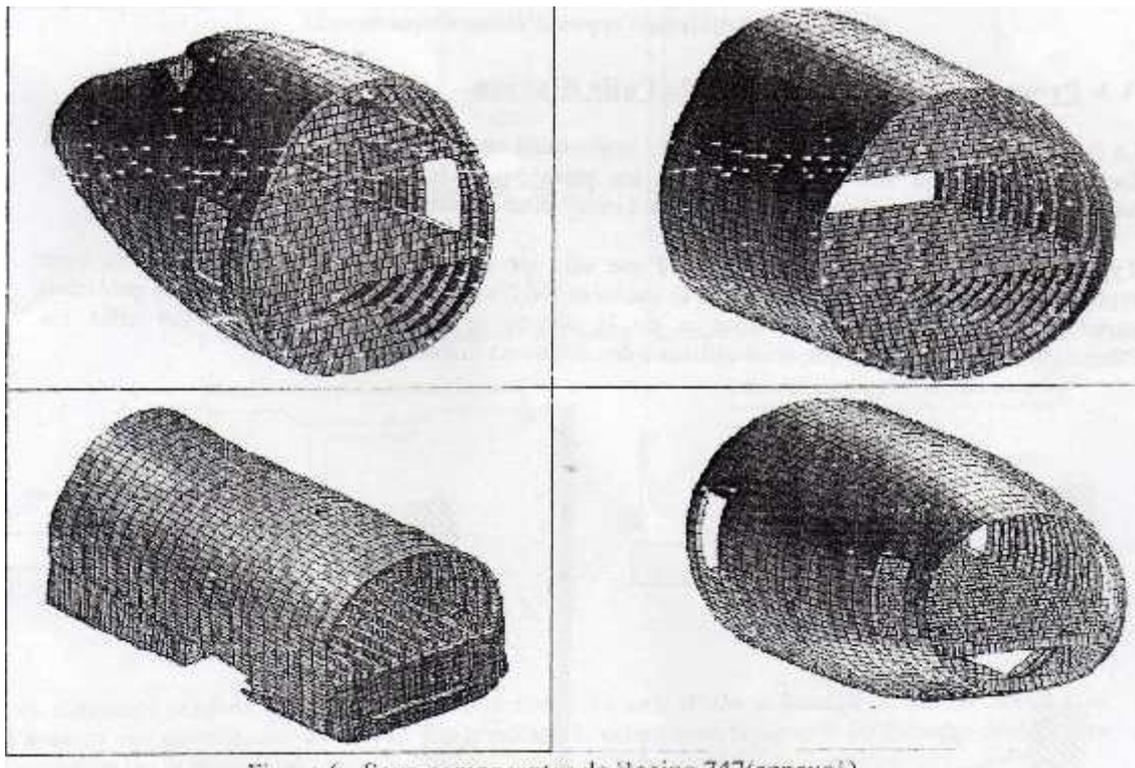
Assemblage intime de deux ou plusieurs éléments non miscibles, de forme et structure différentes ; dont les qualités se complètent pour donner un matériau hétérogène dont les performances globales sont considérablement améliorées. L'industrie des composites en construction d'avion apparaît pour atteindre le plateau, particulièrement sur les avions civils subsoniques où la fraction de la structure composite presque 15%. Ceci dû largement au prix cher de fabrication de composites comparé avec les structures en alliages d'aluminium .ils ont ;

- Une bonne résistance spécifique (caractéristiques mécaniques/densité).
- Module spécifique élevé (module de Young/densité).
- Bonne tenue à la fatigue et la corrosion.
- Dilatation thermique faible.
- Fabrication aisée des pièces (diminution de cout).

II.1. Introduction.

Dans l'industrie aérospatiale, la construction des avions implique plusieurs partenaires. Chaque partenaire est responsable de la modélisation par élément finis de ses composants. Ainsi différents sous-assemblages seront produits, par exemple le groupe qui est en charge des éléments finis à bombardier assemblera tous les sous-modèles et par conséquent bâtir un modèle complet de l'avion. la **Fig (II.1)** montre les différents modèles des éléments finis des différents composants du Boieng 747.

La modélisation joue un rôle très important pour analyser les phénomènes qui entourent l'avion (aéroélasticité, optimisation, calcul vibratoire, champ de contraintes, etc.). Le choix de la méthode dépend de la nature du problème.



Fig(II.1). Sous-composantes de Boeing 747 en élément finis.

II.2. Modélisation des sous-assemblages d'un avion.

La modélisation d'une structure est très importante, car elle détermine la validité ainsi la facilité d'utilisation des résultats. Cette dernière est partie d'un document nommé **FEM Guide Lines**.

L'hypothèse principale de la modélisation d'un certain élément d'avion consiste à approcher la cinématique de cet élément à une cinématique de type poutre ou/et plaque.

II. 2.1. Modélisation du fuselage.

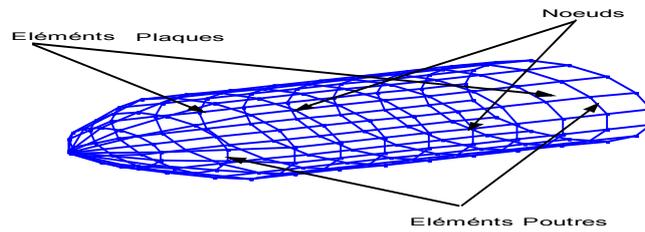
On approche la cinématique de la structure d'un fuselage à une cinématique de type poutre/plaque où les plaques minces renforcées par un nombre de lisses longitudinales assemblées par des cadres transversaux qu'ils supportent les moments de flexion, forces de cisaillement et les charges de torsion qui fait produire les contraintes. On utilise ce type car :

- La résistance des lisses au cisaillement est ignorée.
- Le flux de cisaillement dans les panneaux est constant entre les lisses adjacentes.

Choisissons ce type car Les éléments coques sont modélisés par un ensemble des éléments plaques et les éléments arcs sont modéliser par un nombre finis des poutres droites.

De ce fait l'analyse d'une section modélisée consiste à ce que les lisses supportent les contraintes normales alors que le revêtement est chargé seulement en cisaillement **Fig(II.2.1)**.

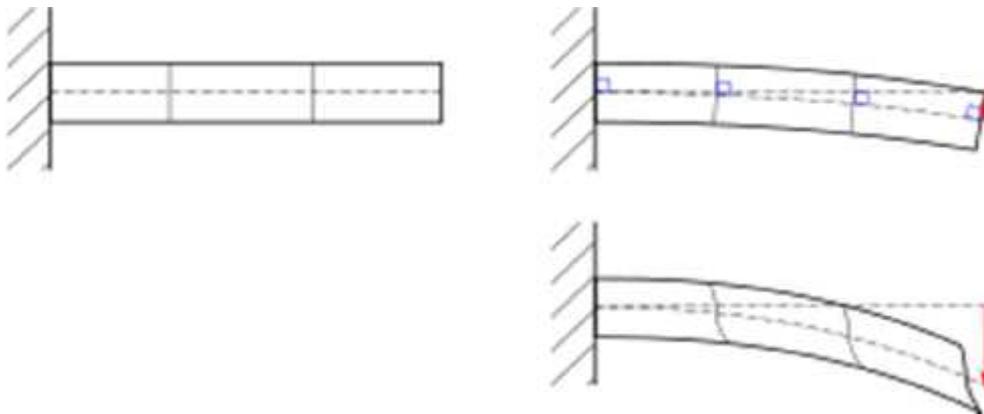
MODELISATION DE LA STRUCTURE PAR ELEMENTS FINIS



Fig(II.2.1).Modélisation du fuselage.

II. 2.2. Modélisation de l'aile.

Typiquement, une section d'une aile est constituée des éléments afin de bien présenter l'effet de flexion causé par le moment fléchissant **Fig(II.2.2)**. Donc l'aile est présentée sous forme de poutre/plaque où les lisses sont assimilées à des éléments barres et le revêtement est assimilé à l'élément plaque **Fig(II.2.3)** et **Fig(II.2.4)**.



FigII2.2.2).Procédure de modélisation de l'aile.

MODELISATION DE LA STRUCTURE PAR ELEMENTS FINIS

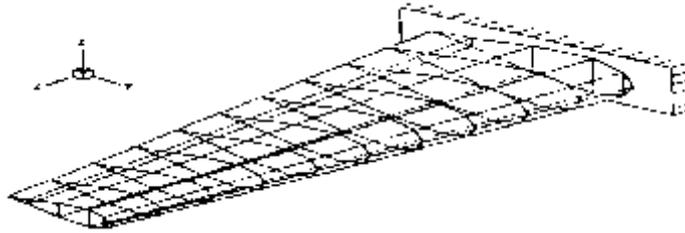
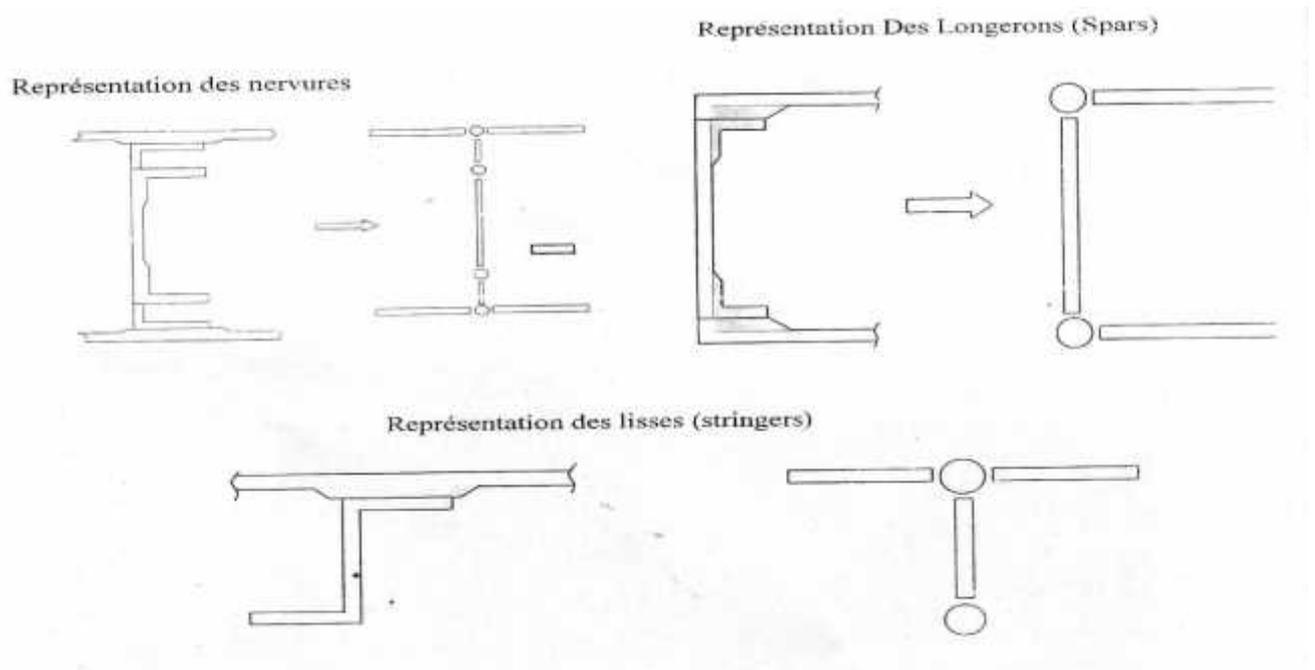


Fig (II.2.3) Modélisation de l'aile en type poutre/plaque



Fig(II.2.4).Représentation des constituants d'aile en élément finis.

II. 2.3. Modélisation de l'empennage.

La modélisation de l'empennage est la même que l'aile car ses éléments constitutifs sont identiques à ceux de la voilure.

II. 2.4. Modélisation de l'avion (Assemblage d'avion).

Après avoir modélisé le fuselage seul, la voilure seule et l'empennage seul. On modélise l'ensemble de ces constituants afin d'obtenir la modélisation de l'avion, sans négligeant les conditions d'appuis de chaque deux sous structure ; fuselage-aile et fuselage-empennage.

Au cours de la modélisation de la structure d'avion, on trouve des complications au niveau de l'interaction où les éléments ne sont pas de même type, donc il est nécessaire du bien traité.

III. 1. Méthode des éléments finis.

III. 1.1. Présentation de la méthode des éléments finis.

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures, l'ingénieur recherche la Répartition, ou champ de contraintes qui régneront dans la structure étudiée. A l'occasion, il est nécessaire de calculer les déplacements en quelques points particuliers afin de s'assurer que les spécifications de flèche sont bien respectées. Dans certains cas c'est dans son ensemble qu'il faut déterminer la distribution ou champ des déplacements.

La méthode des éléments finis constitue un outil puissant pour atteindre ces objectifs permettant de trouver la solution approchée du problème. Cependant on peut toujours ajuster la précision de la solution.

III. 1.2. Intérêts et limitations de la méthode des éléments finis.

La méthode permet d'aborder la quasi totalité des phénomènes et particularités de la mécanique du solide:

les phénomènes de comportement statique en petites et grandes transformations, c'est à dire grandes déformations et/ou grands déplacements, les différentes classes de lois de comportement existantes, des lois simples linéaires, aux lois pouvant être fortement non-linéaires comme l'élasto-viscoplasticité, les phénomènes thermiques et/ou thermomécanique couples, les phénomènes d'instabilité de flambage, les phénomènes transitoires et/ou dynamiques qui regroupent les cas d'impacts lents (crash) ou rapides dans le domaine militaire, les cas de vibrations de structures ou même vibrations acoustiques, etc.

Au rang des performances de la méthode, remarquons aussi qu'elle n'est pas limitée par une géométrie particulière, il est possible d'étudier des pièces de taille et de forme quelconque.

Dans le cas où ces données sont complexes, elles n'entraînent qu'un surcoût de temps de calcul. Ainsi le calcul est seulement borné par la puissance de l'ordinateur utilisé.

En termes de précision des résultats, celle-ci n'est en général limitée que par la précision interne de stockage de l'ordinateur et par le temps que l'on désire consacrer à la résolution, temps dépendant également de la puissance du calculateur. Cette diversité montre la versatilité de la méthode.

Concernant les limitations de la méthode, il faut noter une assez grande complexité de mise en oeuvre, d'autant plus importante que l'on aborde des phénomènes et/ou géométries et/ou comportements matériels complexes. Par exemple il est possible de simuler une opération complète de mise en forme par emboutissage, ou un phénomène de crash d'automobile, ou encore le comportement d'un implant osseux, mais ces possibilités ne sont réellement accessibles qu'à un public spécialisé.

Néanmoins dans le cas de structures et de sollicitations assez simples qui était naguère étudiées essentiellement via les techniques de la résistance des matériaux, les logiciels de calcul moderne fondés sur les éléments finis apportent un gain de performance non négligeable tout en pouvant rester simples d'utilisation.

III. 2. Historique de la méthode des poutres.

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Léonard avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte¹.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750 tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire². À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on

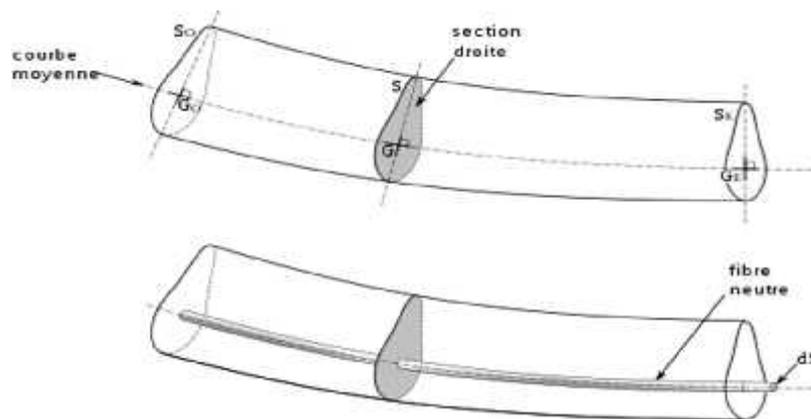
ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle

III. 3. Modèle la poutre.

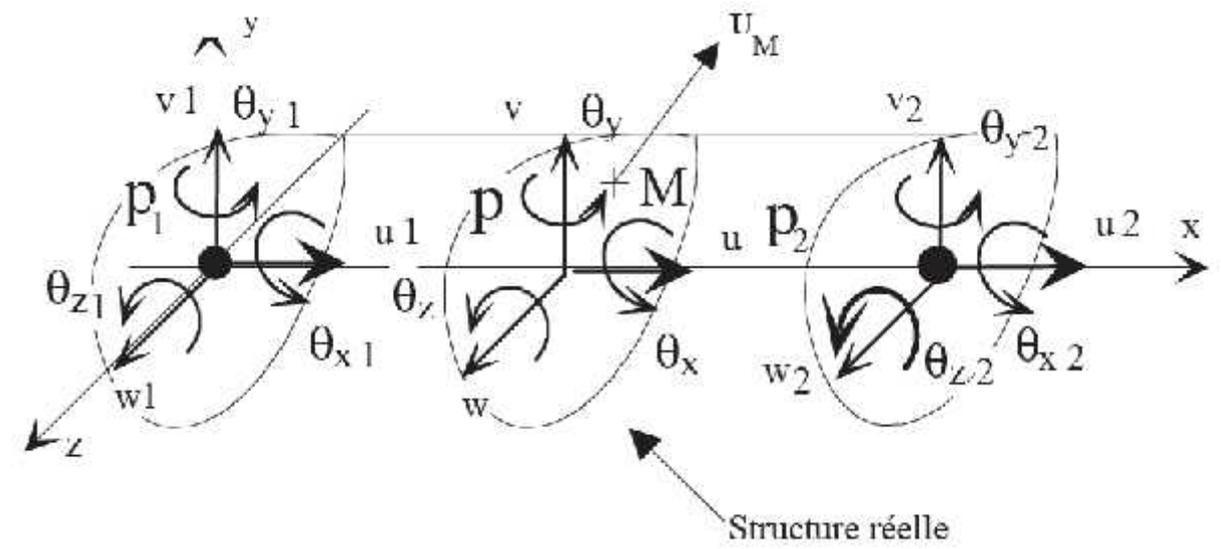
On appelle « poutre » un solide engendré par des surfaces, appelées « sections droites », telles que :

- les centres de gravité des sections forment une courbe continue et dérivable, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur ;
- les sections sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles varient de manière continue et « lente » ;
- la dimension des sections est petite devant la longueur de la courbe moyenne ;
- le matériau est isotrope ou anisotrope.

On appelle « fibre » un volume généré par une petite portion dS de la section droite suivant une courbe parallèle à la courbe moyenne. On appelle « fibre neutre » la fibre générée par la courbe moyenne elle-même.



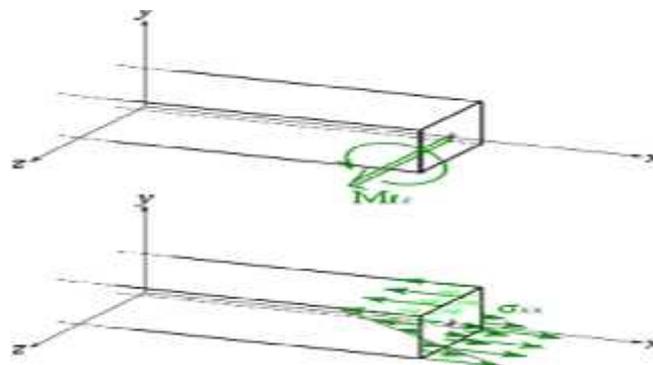
Fig(III.3.a).représentation d'une poutre.



Fig(III.3.b).Modélisation de l'élément fini de poutre

Le modèle poutre est le modèle le plus utilisé où on modélise chaque tronçon de la structure par une poutre ayant un nombre fini de degré de liberté. Les caractéristiques du profil de la poutre, le centre de gravité et le centre de torsion (centre élastique) sont bien déterminés. Cette technique -très précise- permet de s'affranchir la discrétisation éléments finis et répond à tous les problèmes de l'analyse des structures d'avion telles que l'aéroélasticité, l'analyse dynamique et d'analyse des contraintes.

III. 3.1. Poutre en flexion.



Fig(III.3.1).Poutre en flexion.

L'équation d'Euler Bernoulli pour la flexion des poutres est

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = L(x, t) \quad \text{(III.3.1.1)}$$

w : Le déplacement transversal de la poutre, m : la masse par unité de longueur, EI la rigidité de la poutre, $L(x, t)$ la force extérieure et t, x le temps et l'espace le long l'axe de la poutre.

➤ **Matrice Masse.**

D'après l'énergie cinétique on obtient la matrice masse d'un élément poutre en flexion, on a :

$$T = \frac{1}{2} \int (\{\dot{w}\} + r \dot{\cdot})^2 dx dy dz \quad \text{(III.3.1.2)}$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\{\dot{w}\} + r \dot{\cdot})^T (\dot{w} + r \dot{\cdot}) dx dy dz$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\{\dot{w}\}^T + r \{\dot{\cdot}\}^T) (\dot{w} + r \dot{\cdot}) dx dy dz$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\{\dot{w}\}^T \dot{w}) + (\{\dot{w}\}^T r \dot{\cdot}) + (r \{\dot{\cdot}\}^T \dot{w} + r^2 \{\dot{\cdot}\}^T \dot{\cdot}) dx dy dz$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\int \{\dot{w}\}^T \dot{w} dx dy dz + \int r \{\dot{w}\}^T \dot{\cdot} dx dy dz + \int r \{\dot{\cdot}\}^T \dot{w} dx dy dz + \int r^2 \{\dot{\cdot}\}^T \dot{\cdot} dx dy dz \right]$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\int A \{\dot{w}\}^T \{\dot{w}\} dx + \int I \sigma \{\dot{\cdot}\}^T \{\dot{\cdot}\} dx + \int A \{\dot{w}\}^T \{\dot{\cdot}\} dx + \int A \{\dot{\cdot}\}^T \{\dot{w}\} dx \right] \text{(III.3.3)}$$

On a :

$$W(x) = \{N_f\}. \{q\} \quad \text{(III.3.1.4)}$$

$$(x) = \{N_t\}. \{q\} \quad \text{(III.3.1.5)}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.3.6)}$$

$$W(x) = N_1 W_1 + N_2 \theta_1 + N_3 W_2 + N_4 \theta_2$$

$$\Psi(x) = N_5 \Psi_1 + N_6 \Psi_2$$

Pour la flexion, on a :

$$W(x) = \{N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \quad 0\} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ W_2 \\ \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.3.1.7)}$$

Alors :

$$[Mf] = \int_0^l \rho A(x) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \quad 0] dx \quad \text{(III.3.1.8)}$$

$$[Mf] = \int_0^l \rho A(x) \begin{bmatrix} N^2 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & 0 & N_3^2 & N_3 N_4 & 0 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & N_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx \quad \text{(III.3.1.9)}$$

Donc la matrice masse est :

$$[M^e] = \int_0^l \dots A [N]^T [N] dx \quad . \quad \text{(III.3.1.10)}$$

$[N] = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)]$: la matrice des fonctions d'interpolation.

Sous la forme matricielle s'écrit :

$$[M^e] = \frac{..Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & 22l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.1.11)}$$

A : la section de la poutre et l est la longueur de la poutre.

$\{q_e\} = \{w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4\}$: le vecteur des degrés de liberté de la poutre.

➤ **Matrice de rigidité.**

D'après l'énergie potentielle on a :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int \{E\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad \text{(III.3.1.12)}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int \{EI\} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int \{GJ\} \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int \{EI\} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^T \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) dx + \frac{1}{2} \int \{GJ\} \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^T \left(\frac{d\theta}{dx}\right) dx$$

$$\mathbf{U}_e = \frac{1}{2} \int EI (\{Nf''\} \{q\})^T (\{Nf''\} \{q\}) dx + \frac{1}{2} \int GJ (\{Nt'\} \{q\})^T (\{Nt'\} \{q\}) dx$$

$$[Ke] = \int EI y y \{Nf''\}^T \{Nf''\} dx + \int GJ \{Nt'\}^T \{Nt'\} dx \quad \text{(III.3.1.13)}$$

Pour la flexion, on a :

$$[Kfe] = \int_{\xi}^t E \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0] dx \quad \text{(III.3.1.14)}$$

D'ou

$$[Kfe] = E \int_{\xi}^t \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & 0 & N_3^2 & N_3 N_4 & 0 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & N_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx \quad \text{(III.3.1.15)}$$

Donc la matrice de rigidité est :

$$[K^e] = \int_0^l EI [B]^T [B] dx \quad \text{(III.3.1.16)}$$

Sous la forme matricielle s'écrit :

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.1.17)}$$

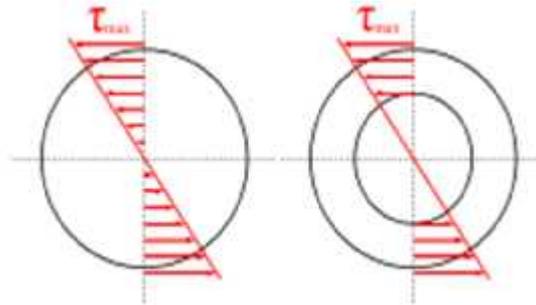
où : $[B] = \left[\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} \right]$: Transformation des déplacements aux déformations

Dans le cas, où la rigidité de la poutre est non constante, l'intégrale de l'équation (III.3.1.16) est étudié en introduisant EI comme fonction de x .

Ou : U : l'énergie cinétique.

T : l'énergie de déformation (énergie potentielle)

III. 3.2. Poutre en torsion.



Fig(III.3.2).Poutre en torsion.

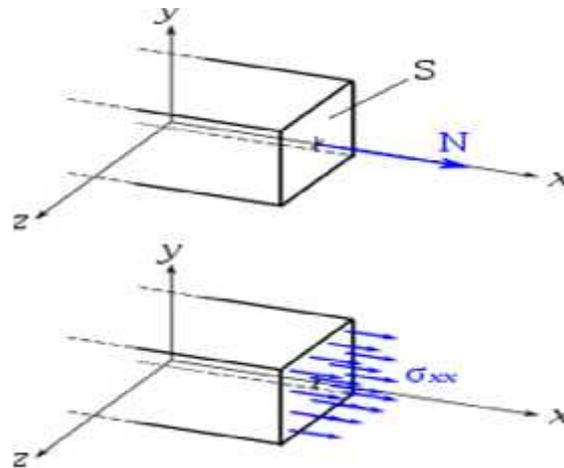
Par application de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, les matrices masse et de rigidité de la poutre sont données par :

$$[M^e] = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.2.18)}$$

$$[K^e] = \frac{GI_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.2.19)}$$

I_p : le moment polaire de la poutre, GI_p : la rigidité de torsion de la poutre.

III. 3.3. Poutre en traction- compression.



Fig(III.3.3).Poutre en traction.

Dans ce cas, la poutre est dite élément barre, dont les matrices masse et de rigidité sont données par :

$$[M^e] = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.3.20)}$$

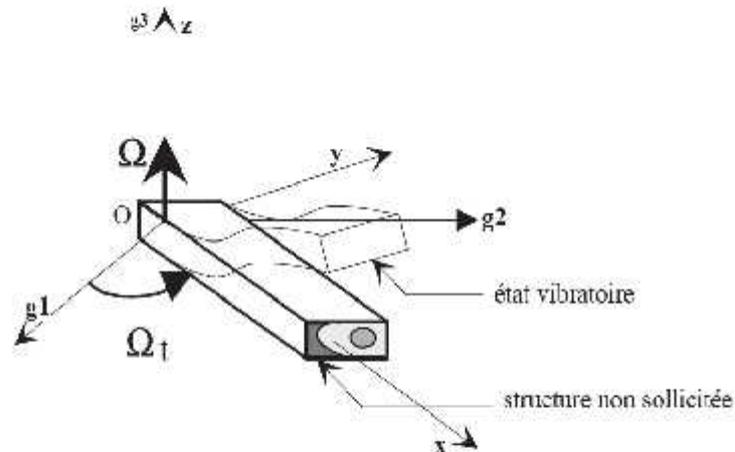
La matrice de rigidité est donnée par

$$[K^e] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3.3.21)}$$

III. 3.4. Les poutres dans l'espace.

Les poutres dans l'espace sont généralement définies par les six degrés de liberté dans chaque élément de la poutre. La poutre dans l'espace est définie par :

le module de Young E , la section de la poutre A , le module de cisaillement G , les moments d'inertie I_z, I_y , le moment polaire I_p et la longueur l de l'élément et le nombre de poisson ν .

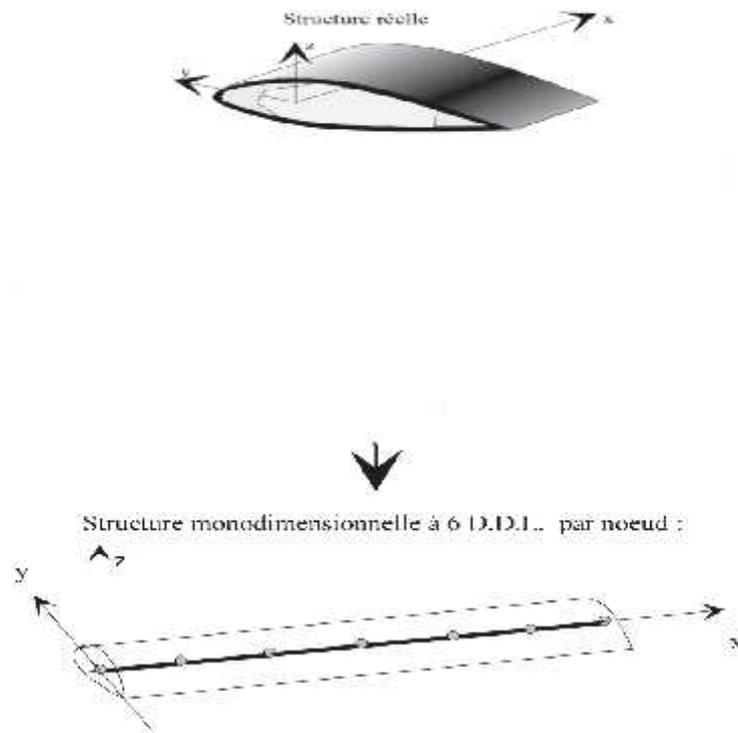


Fig(III.3.4).poutre dans l'espace.(Poutre vibrante en rotation - définition des repères)

III. 4. Discrétisation.

On considère notre structure comme un assemblage de poutres prismatique, c'est à dire rectiligne à plans moyens et section droite.

La **Fig(III.4)** montre la discrétisation d'une poutre curviligne en éléments de poutres prismatiques.



Fig(III.4). Discrétisation d'une poutre en éléments

Poutres.

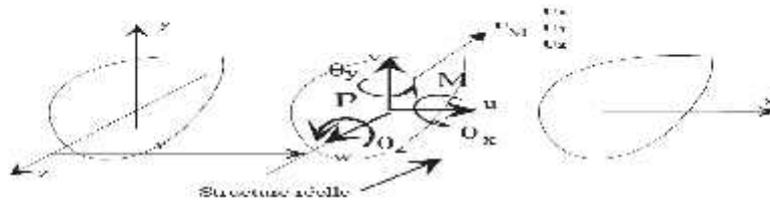
Ayant ainsi décomposé la structure en un certain nombre de poutres élémentaires ; dont l'assemblage constitue un recouvrement aussi exact que possible de notre structure, on doit ensuite :

- Numéroté ces éléments.
- Numéroté les nœuds, c'est-à-dire les extrémités de chaque poutre élémentaire.
- Relever la correspondance entre ces deux numérotations.
- Relever les caractéristiques de chaque poutre élémentaire : longueur, section droite, moments quadratique, caractéristiques mécaniques et thermique, orientation des axes principaux par rapport au repère de référence global $[O, X, Y, Z]$ de cette structure.

- Relever les trois coordonnées **X, Y, Z** de chaque nœud.

III. 4.1. Champ de déplacement dans un élément de poutre.

Considérons une poutre rapportée à son repère principal **[O, X, Y, Z]**, voir Fig(III.4.1).



Fig(III.4.1). Champ de déplacement dans un élément de poutre.

Le vecteur de degrés de liberté correspondant est

$$\{q^e\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ x_2 \ y_2 \ z_2\}^T \quad \text{(III.3.4.22)}$$

La matrice masse élémentaire et matrice de rigidité élémentaire sont données dans leurs repères locaux. On exprime ces matrices écrites dans le repère local au repère global selon les formules suivantes :

$$[M^e]_g = [R]^T [M^e] [R] \quad \text{et} \quad [K^e]_g = [R]^T [K^e] [R] \quad \text{(III.3.4.23)}$$

Où $[R]$: la matrice de transformation de repères locaux au repère global.

Avec :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Et

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [r] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [r] \end{bmatrix} ; \quad [r] = \begin{bmatrix} C_{Xx} & C_{Yx} & C_{Zx} \\ C_{Xy} & C_{Yy} & C_{Zy} \\ C_{Xz} & C_{Yz} & C_{Zz} \end{bmatrix}$$

Où :

$$C_{Xx} = \cos \theta_{Xx}, C_{Yx} = \cos \theta_{Yx}, \dots, \text{etc.}$$

IV. 1. Introduction.

L'analyse modale est une méthode d'étude des comportements vibratoires de la structure de composants. Elle est utilisée pour enregistrer, analyser et évaluer la fréquence propre et le mode d'oscillation, ainsi que pour optimiser la structure de ces composants. En simulant les fréquences qui agissent sur certains éléments, par exemple sur des plates-formes de mesure de force, on peut déterminer la fréquence propre du système de mesure en fonction de la masse, de la rigidité et de l'amortissement.

L'objectif de l'analyse modale est de concevoir les systèmes de mesure de telle sorte que, sur une plage de fréquence donnée, aucune fréquence de résonance ne soit générée qui pourrait fausser le signal pendant la saisie de mesures.

Il existe plusieurs algorithmes numériques dans la littérature pour résoudre le problème aux valeurs propres. La méthode la plus simple est celle dans laquelle on applique l'algorithme de calcul de la plus petite valeur propre que l'on appelle la méthode d'itération inverse. La méthode du sous-espace de type Ritz est une forme spéciale de la méthode de Rayleigh Ritz et très efficace dans le cas où un nombre fini de valeurs et des vecteurs propres est recherché. Si un nombre important de valeurs et vecteurs propres est recherché, il est préférable d'utiliser la méthode de Lanczos ou celle de Householder .

IV. 2. Analyse modale.

IV. 2.1. Calcul des fréquences et modes propres.

La formulation globale du problème consiste à obtenir des équations du mouvement à partir des expressions des énergies cinétiques et potentielles en fonction des vitesses et déplacements aux nœuds de la structure.

Soit $\{q\}^T$ le vecteur ligne des déplacements aux n nœuds de la structure :

$$\{q\}^T = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N\}$$

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement d'un système discret, soit une structure sans amortissement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = f_i \quad / i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{IV.2.1.24})$$

où : f_i sont les forces extérieures.

$$T = 1/2 \{\dot{q}\}^T [M]_g \{\dot{q}\} \quad (\text{IV.2.1.25})$$

$$U = 1/2 \{q\}^T [K]_g \{q\} \quad (\text{IV.2.1.26})$$

Avec T : l'énergie cinétique de la structure.

U : l'énergie potentielle de la structure.

D'où on obtient :

$$[M]_g \{\ddot{q}\} + [K]_g \{q\} = \{0\} \quad (\text{IV.2.1.27})$$

$$([K]_g - \mathcal{S}^2 [M]_g) \{q\} = \{0\} \quad (\text{IV.2.1.28})$$

Dans le cas de structures faiblement amorties, on se ramène le cas à l'étude des oscillations libres, c'est à dire la résolution aux valeurs propres générales.

$$[K]_g \{q\} = \mathcal{S}^2 [M]_g \{q\} \quad (\text{IV.2.1.30})$$

IV. 2. 2. Présentation modale.

Les problèmes de réponse dynamique des structures sont souvent résolus par superposition modale, que ce soit pour des analyses temporelles (réponses transitoires) ou fréquentielles (réponses harmoniques). Il est donc nécessaire de disposer de la base modale pour le calcul de la réponse.

Pour un système de n degrés de liberté la déformation est donnée sous la forme :

$$\{q(t)\} = \{w\} \exp(i\bar{S}t) = \sum_{j=1}^n a_j \{w_j\} \exp(i\bar{S}_k t) \quad (\text{IV.2.1.31})$$

Les matrices masses et rigidités modales de la structure sont données par :

$$[\sim] = [w]^T [M]_g [w] \quad (\text{IV.2.1.32})$$

$$[x] = [w]^T [K]_g [w] \quad (\text{IV.2.1.33})$$

L'équation (14) s'écrit alors :

$$[\sim] \{\ddot{d}\} + [x] \{d\} = \{0\} \quad (\text{IV.2.1.34})$$

Du fait $[x]$, $[\sim]$ que sont des matrices diagonales, le système d'équation (19) est donc découplé.

La déformée $\{q\}$ est donnée sous la forme :

$$\{q\} = [w] \{d\} \quad (\text{IV.2.1.35})$$

où :

$[w] = [\{w_1\} \{w_2\} \dots \{w_n\}]$: est la matrice modale,

$\{d\} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}^T$: est le vecteur des coordonnées modales.

IV. 3 Réponse dynamique.

IV. 3.1. Système forcé amorti.

L'équation différentielle linéaire matricielle d'un système mécanique est donnée par la forme :

$$[M]_g \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K]_g \{q\} = \{F\} \quad \text{(IV.3.1.36)}$$

Où : $[C]$ est la matrice d'amortissement de la structure.

La modélisation d'amortissement présente de nombreuses difficultés pour l'ingénieur confronté au problème de calcul de la réponse de structures complexes.

L'amortissement est une mesure de l'énergie de dissipation au sein de la structure. La méthode de Rayleigh fait l'hypothèse que c'est une combinaison linéaire de $[M]_g$ et $[K]_g$ sous la forme :

$$[C] = r_1 [M]_g + s_1 [K]_g \quad \text{(IV.3.1.37)}$$

L'évolution expérimentale de l'amortissement pour deux modes normaux quelconques permet de calculer r_1 et s_1

Dans la base modale l'équation (15) s'écrit :

$$[-] \{\ddot{d}\} + [S] \{\dot{d}\} + [X] \{d\} = \{Q\} \quad \text{(IV.3.1.38)}$$

avec :

$$\{Q\} = [W]^T \{F\} \quad \text{(IV.3.1.39)}$$

où:

$[S]$: la matrice dissipative dans la base modale (diagonale pour les structures faiblement dissipatives).

Dans le cas d'un système non dissipatif ($[C]=0$), l'équation (21) s'écrit :

$$[M]_g \{\ddot{q}\} + [K]_g \{q\} = \{F\} \quad (\text{IV.3.1.40})$$

cette équation s'écrit dans la base modale, sous la forme:

$$[-] \{\ddot{d}\} + [x] \{d\} = \{Q\} \quad (\text{IV.3.1.41})$$

IV. 3.2. Analyse harmonique (fréquentielle).

L'analyse harmonique est utilisée pour déterminer la réponse d'une structure soumise à un chargement qui varie de façon sinusoïdale avec le temps ($F(t) = F_0 \cos \tilde{S}t$).

Le principe est d'étudier la réponse de la structure en fonction de la réponse d'excitation.

IV. 3.3. Analyse temporelle (transitoire).

Dans l'analyse transitoire d'une structure, l'équation de mouvement (21) à une instante t , s'écrit :

$$[M]_g \{\ddot{q}\}^t + [C] \{\dot{q}\}^t + [K]_g \{q\}^t = \{F\}^t \quad (\text{IV.3.2.42})$$

Où les matrices $[M]_g$, $[K]_g$ et $[C]$ sont estimées indépendantes de temps.

Il existe plusieurs algorithmes numériques pour résoudre le système matriciel (27). Le schéma aux différences finis central, l'un parmi les techniques les plus utilisées dans les applications de la mécanique des structures.

IV. 4. Conditions aux limites (aux liaisons).

Avant de traiter n'importe quel problème en dynamique, il faut d'abord définir les conditions aux limites (conditions aux liaisons). On distingue deux types de conditions aux limites :

- Conditions aux limites en déplacement (encastrement, appuis, etc.),
- Conditions aux limites en contraintes (charge de pression, forces, etc.).

V. 1. Introduction.

Dans cette partie, nous nous proposons de mettre en œuvre les outils informatiques nécessaires à l'exploitation numérique de la théorie de la première partie. Nous allons d'abord construire les matrices élémentaires sur les bases du modèle élément fini de poutre. Puis, nous intégrerons sous forme d'algorithmes les différentes étapes du calcul statique puis dynamique. Enfin, dans un but de validation des algorithmes et matrices développés, nous faisons quelques applications numériques avec comparaisons.

A cet effet, nous disposons du logiciel **MATLAB** qui vient confirmer et appuyer

L'étude initiée par nos soins. Dont les différents modules qui le comportent sont organisés comme suit :

- 1) Calcul de vérification d'une poutre isotrope encastree-libre.
- 2) Calcul de vérification d'une poutre isotrope encastree-encastree.
- 3) Calcul de vérification d'un avion.

Ces programmes ci dessus sont faits pour réaliser un assemblage d'un avion qui est basé sur les sous-programmes suivants :

Programme 1 : calcul des matrices élémentaires (masse et rigidité).

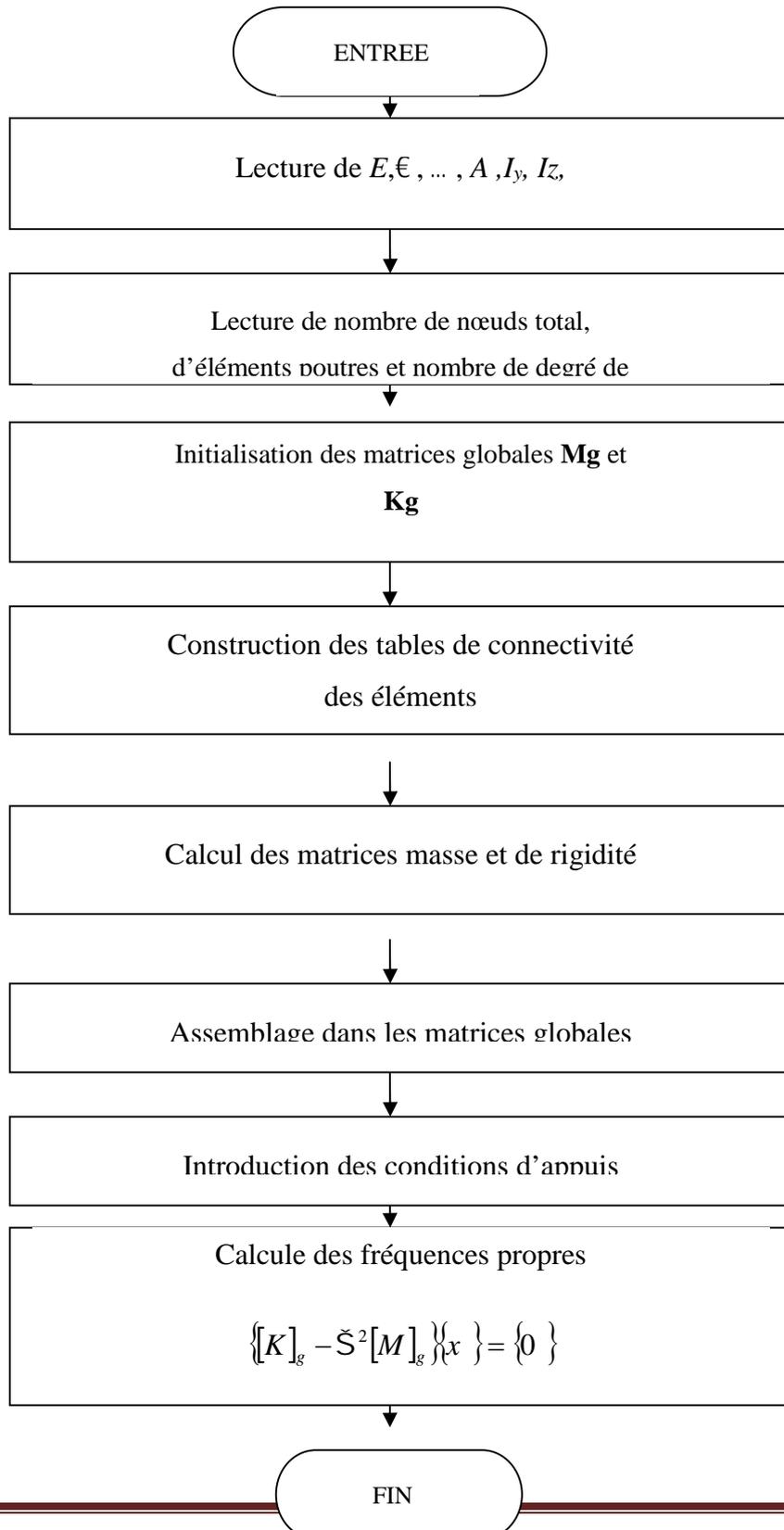
Programme 2 : assemblage des matrices élémentaires dans les matrices globales.

Programme 3 : introductions aux conditions aux limites.

Les résultats de notre code de calcul « MATLAB » sont validés et comparés par le logiciel du calcul des structures NASTRAN/PATRAN.

V. 2. L'organigramme.

L'analyse modale des structures est organisée par l'organigramme suivant.



V.3. Analyse modale d'une poutre encastree-libre.

Soit une poutre isotrope, de longueur $L=1m$, de module de Young $E=71\text{ GPa}$ et de masse volumique $\rho = 2800\text{ Kg/m}^3$, $\nu=0.0025$ et $I=5.2083e-7$, encastree sur un cote et libre sur l'autre (Figure V.3).



Fig(V.3).Poutre encastree-libre.

La solution theorique des frequences propres d'une poutre encastree – libre est donnee par

$$f_i = \frac{b_i^2}{2f L} \sqrt{\frac{EI}{M}} \quad / \quad i = 1,2,3,\dots$$

Ou M : la masse par unite de longueur,

$b_i = 1.875, 4.694, 7.855$ pour $i = 1,2,3$ Respectivement (Pour les 3 premiers modes).

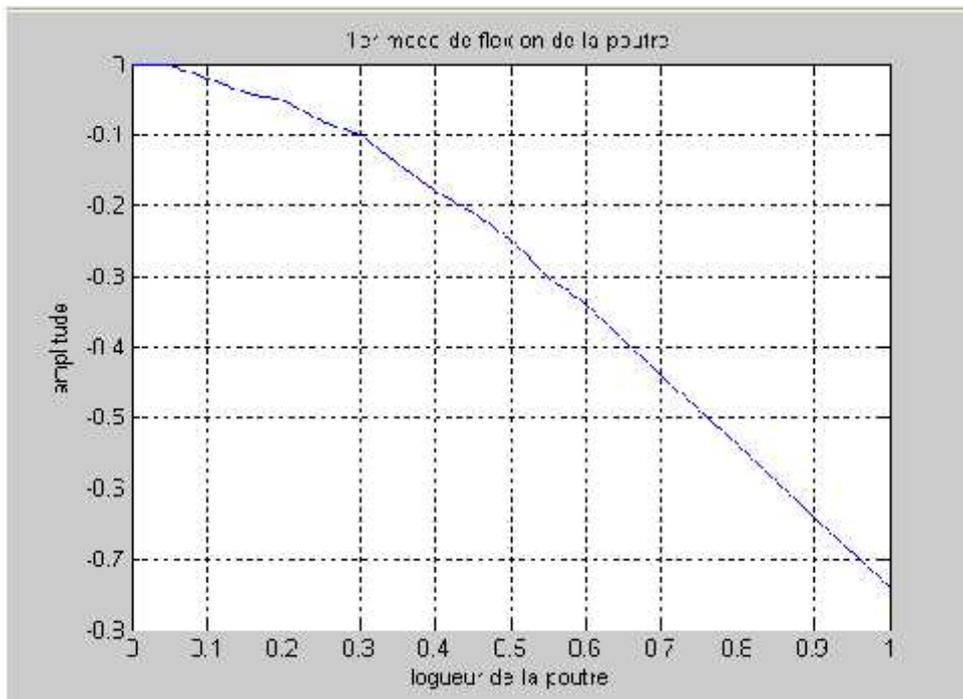
Dans le tableau suivant les resultats donnes par notre code sont compares aux resultats du logiciel NASTRAN/PATRAN.

Modes et fréquences Codes de calcul	Les fréquences « f »		
	« f1 » (HZ)	« f2 » (HZ)	« f3 » (HZ)
Calcul théorique	40.674	254.931	713.857
Code Eléments Finis	40.672	254.889	713.696
Code NASTRAN/PATRAN	40	250	/

Tableau 1: Les trois premières fréquences propres d'une poutre encastree -libre.

En comparant nos résultats et les résultats du logiciel NASTRAN/PATRAN, nous trouvons que nos résultats sont plus proches des résultats théoriques calculés.

Les résultats des trois premiers modes de la poutre sont représentés dans les figures suivantes :



Fig(V. 3.1).Premier mode de flexion de la poutre.

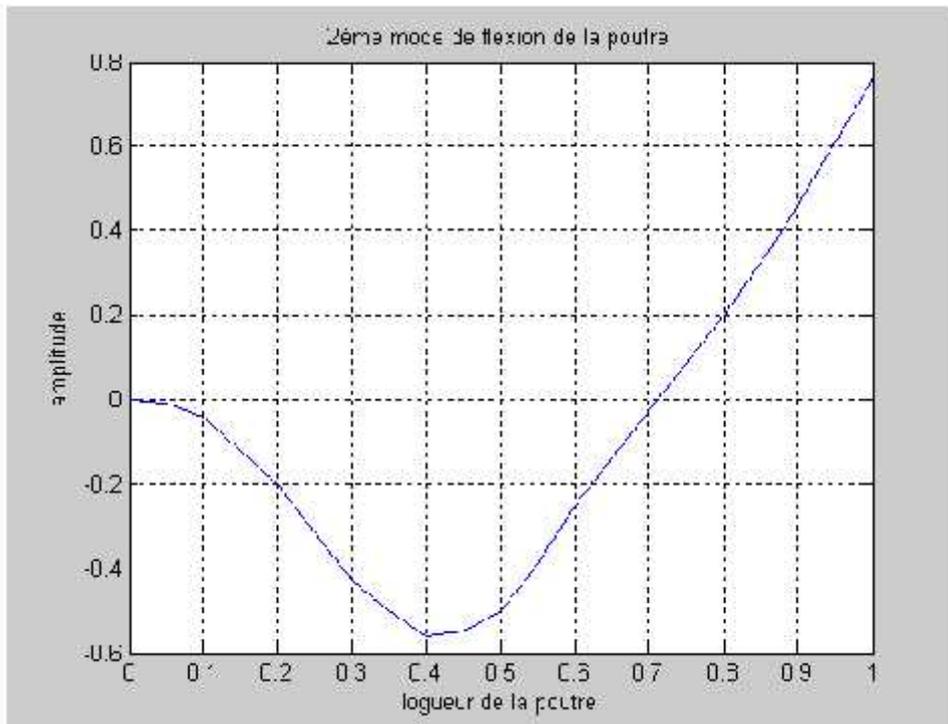


Fig (V. 3.2).deuxième mode de flexion de la poutre.

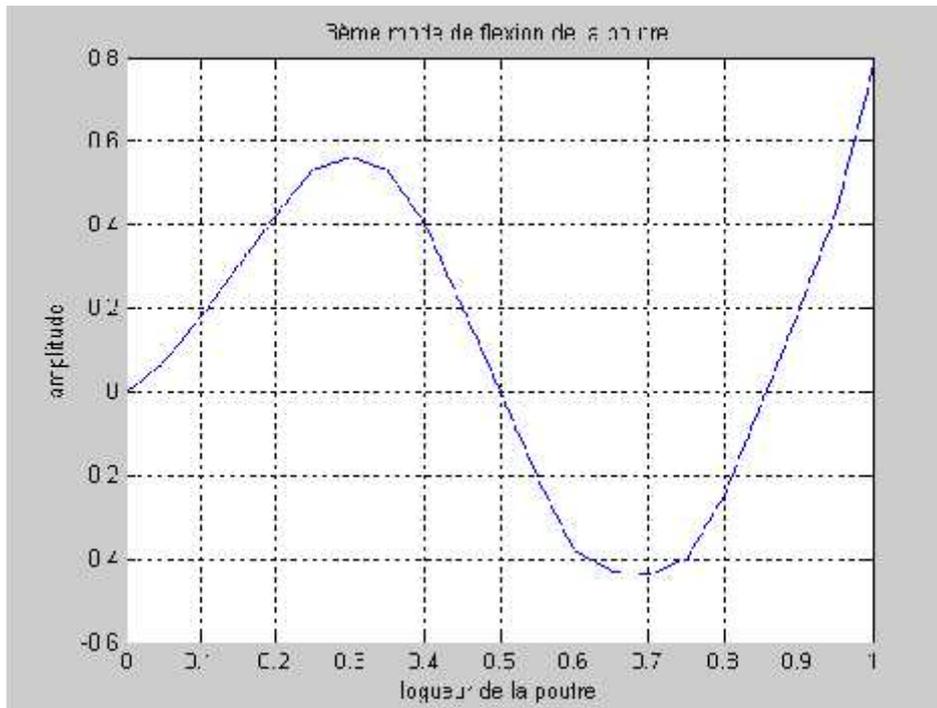
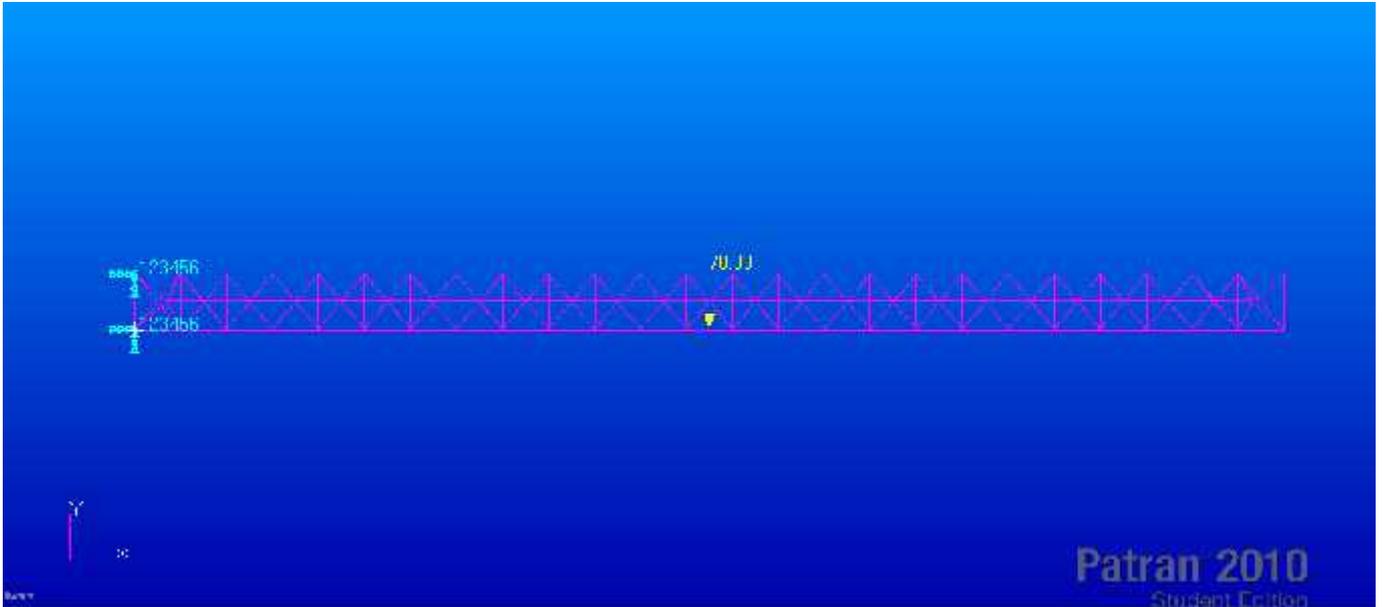


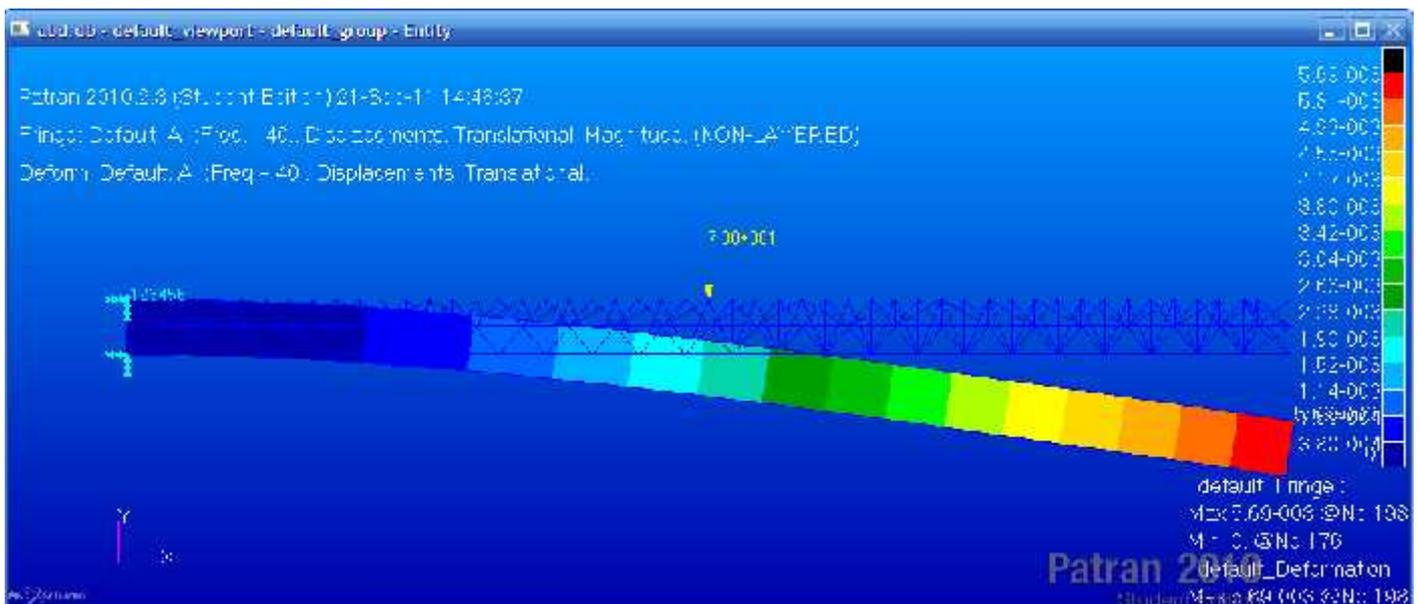
Fig (V. 3.3)troisième mode de flexion de la poutre.

➤ **Simulation de la poutre en NASTRAN/PATRAN.**

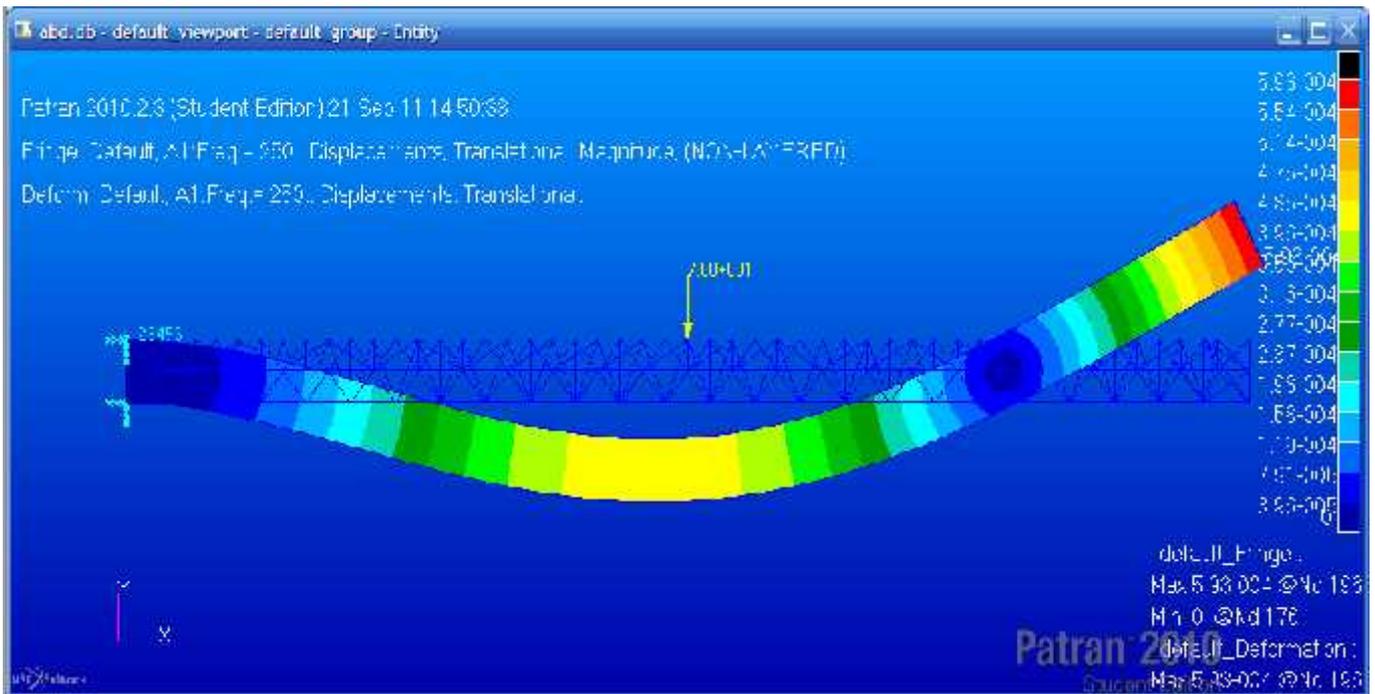


Fig(V.3.4). Simulation de poutre encastree/libre en NASTRAN/PATRAN.

➤ **Présentation des modes de la poutre en NASTRAN/PATRAN.**



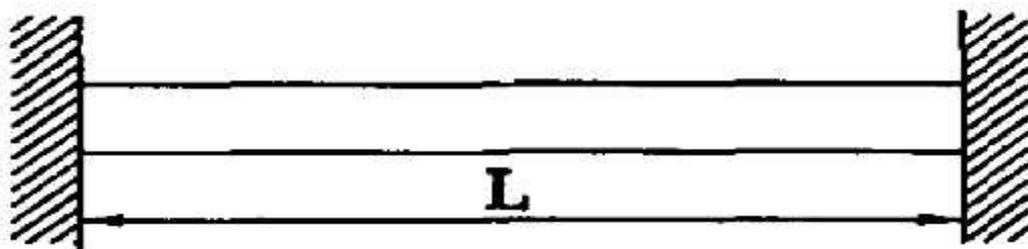
Fig(V. 3.5).Premier mode de flexion de la poutre.



Fig(V. 3.6)deuxième mode de flexion de la poutre.

V.4. Analyse modale d'une poutre encastree-encastree.

Nous prenons la même poutre avec les même dimensions mais dans ce cas la poutre est encastree –encastree.



Fig(V.4).Poutre encastree-encastree.

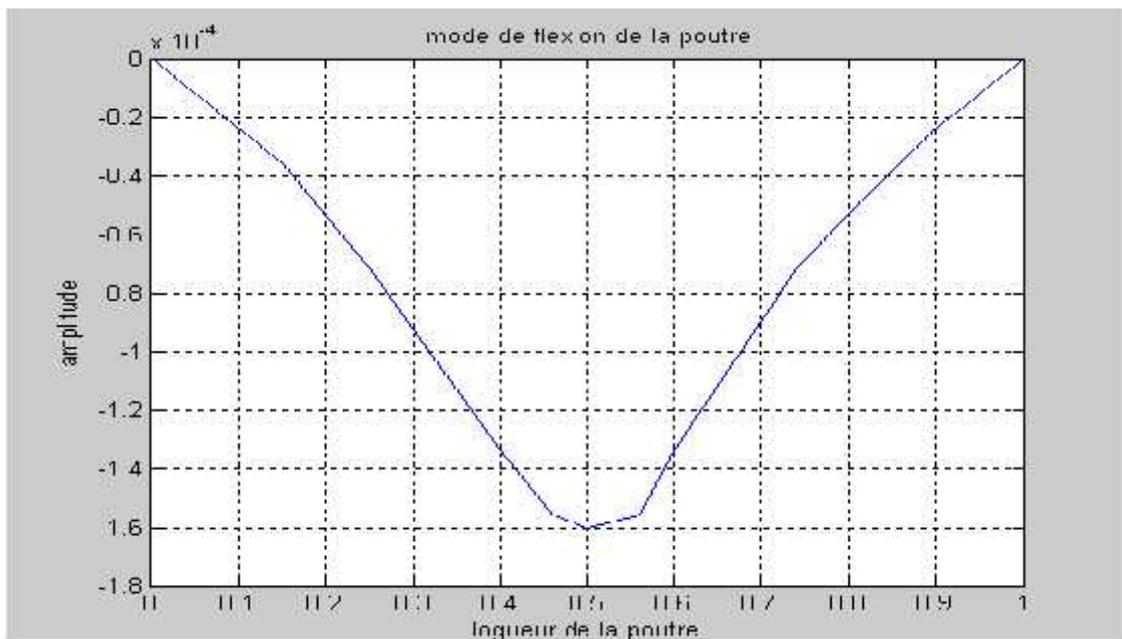
Les résultats de notre code sont représentés et comparés avec le logiciel NASTRAN/PATRAN dans le tableau suivant :

Codes de calcul	fréquences		
	Les fréquences « f »		
	« f1 » (HZ)	« f2 » (HZ)	« f3 » (HZ)
Code Eléments Finis	258.808	713.414	1398.578
Code NASTRAN/PATRAN	250	/	/

Tableau 2: Les trois premiers modes et premières fréquences propres d'une poutre encastree-encastree.

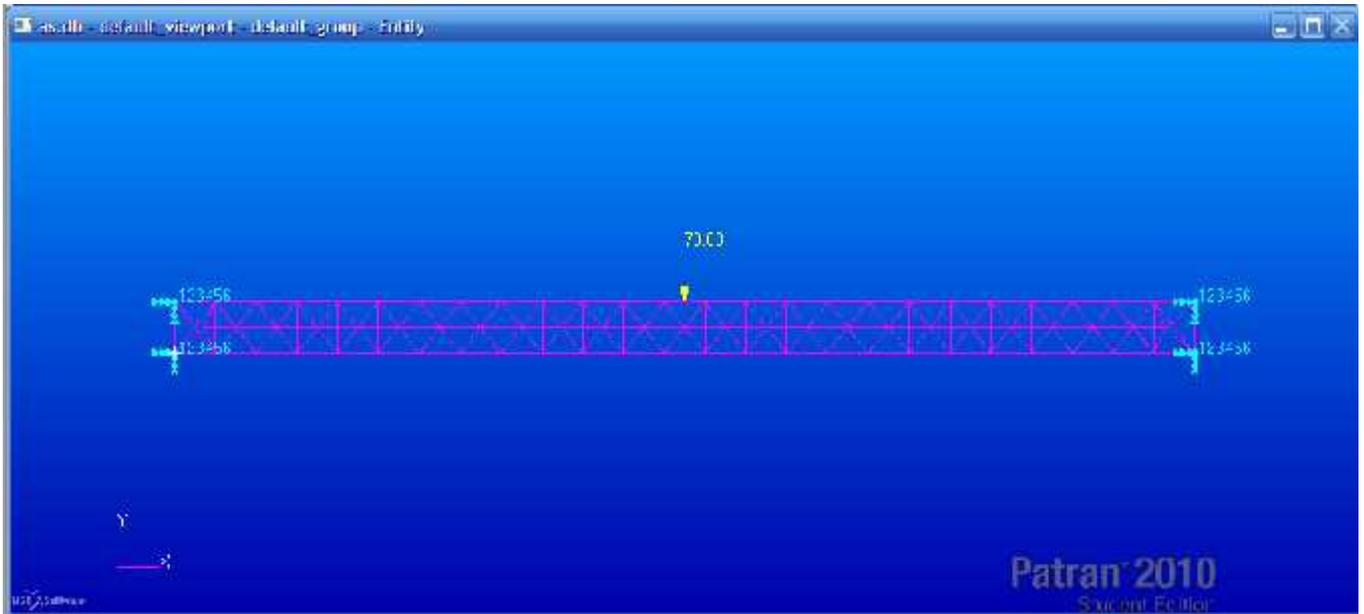
D'après les résultats du tableau, nous remarquons que les notre sont plus précisés que ceux du NASTRAN/PATRAN.

Le résultat du premier mode de la poutre pour la première fréquence est représenté dans la figure suivante :

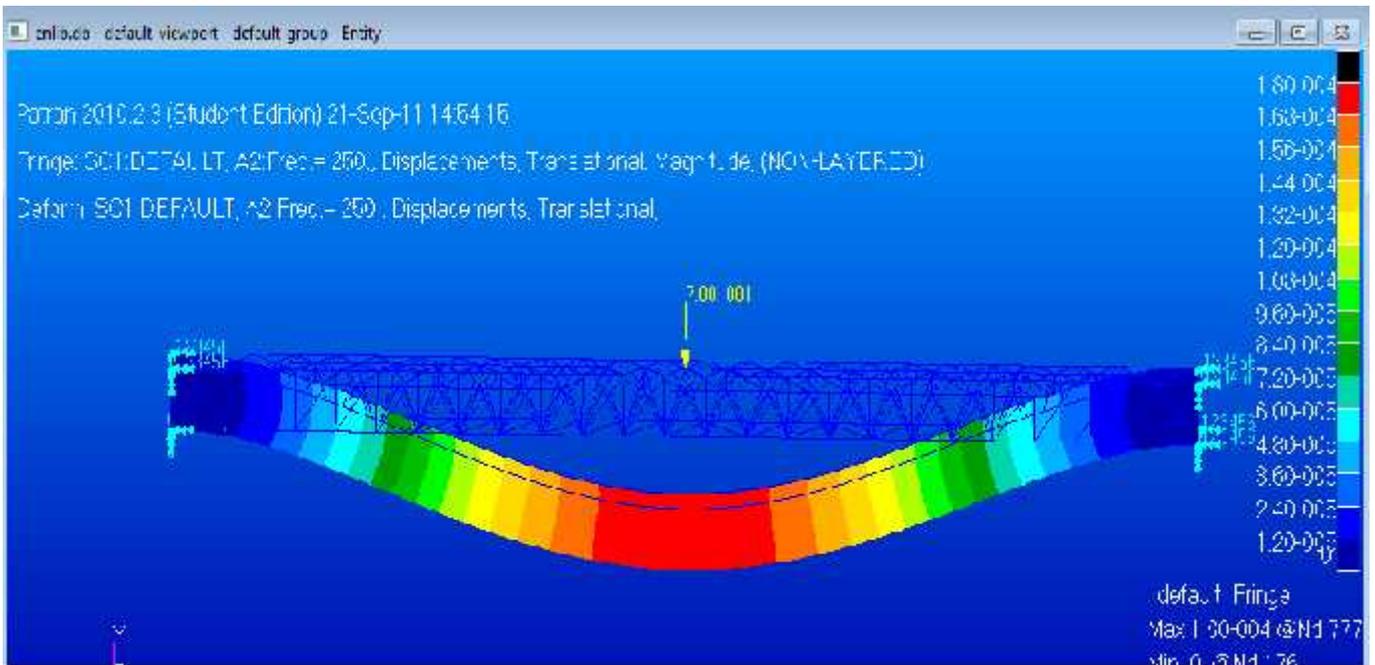


Fig(V.4.1).Premier mode de flexion de la poutre.

➤ **Simulation de la poutre en NASTRAN/PATRAN.**



Fig(V.4.2). Simulation de poutre encadrée/encadrée en NASTRAN/PATRAN.



Fig(V. 4.3.)premier mode de flexion de la poutre.

Les figures (V.3.1, V.3.2, V.3.3, V.3.4, V.3.5, V.4.1, V.4.3) montrent clairement que les résultats des trois premiers modes donnés par notre programme sont très proches aux résultats donnés par le logiciel NASTRAN/PATRAN pour les deux cas de la poutre (encastrée-libre et encastrée-encastrée).

V. 5. Vibration d'un avion.

Le modèle d'avion étudié est construit par un assemblage des poutres. Dans cet exemple, le fuselage est une poutre longue de longueur (10m). L'aile, qui est aussi une poutre est de longueur (5m). L'empennage est de hauteur et de longueur de 2m.(voir la figure V.5), les caractéristiques du matériaux sont :

<i>Caractéristiques</i>	<i>m (Kg/m)</i>	<i>EI_{xx}(N.m²)</i>	<i>EI_{yy}(N.m²)</i>	<i>GJ(N.m²)</i>
<i>Fuselage</i>	<i>21980</i>	<i>1.64 e20</i>	<i>1.6 e20</i>	<i>1.26 e20</i>
<i>Aile</i>	<i>2100</i>	<i>3.27 e16</i>	<i>7.56 e18</i>	<i>1.82 e17</i>
<i>Empennage</i>	<i>630</i>	<i>3.52 e16</i>	<i>5.67 e17</i>	<i>1.38 e16</i>

Où *m* : la masse par unité de longueur.

Nous faisons notre étude en fixant l'avion au centre.

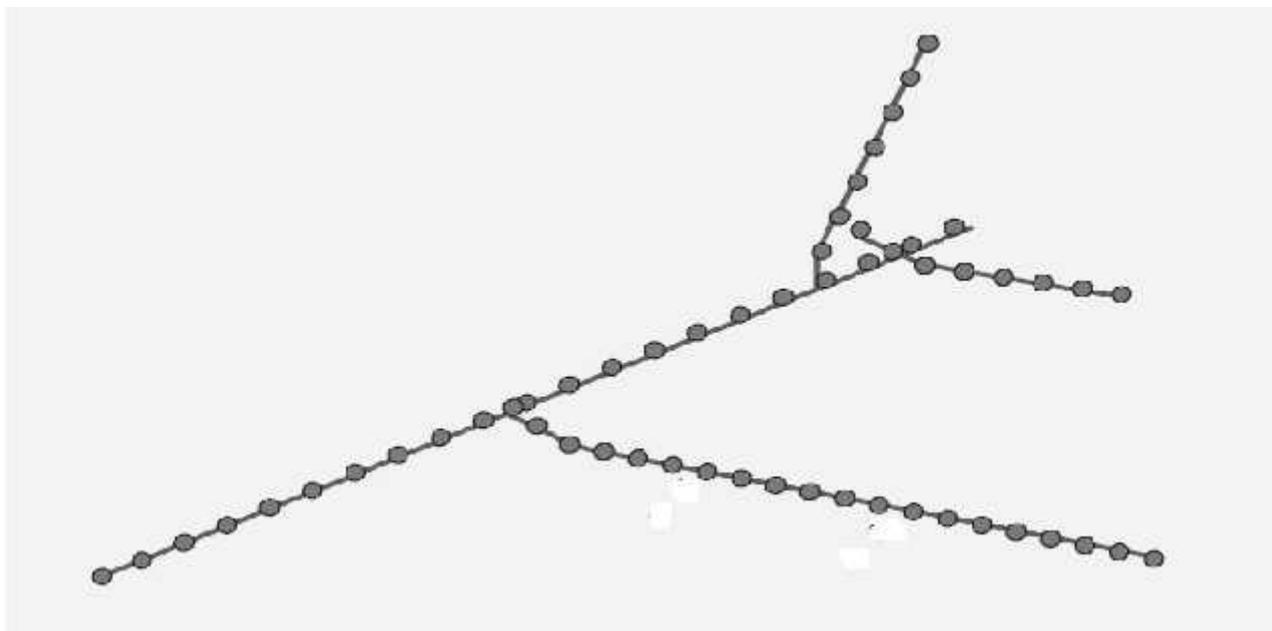


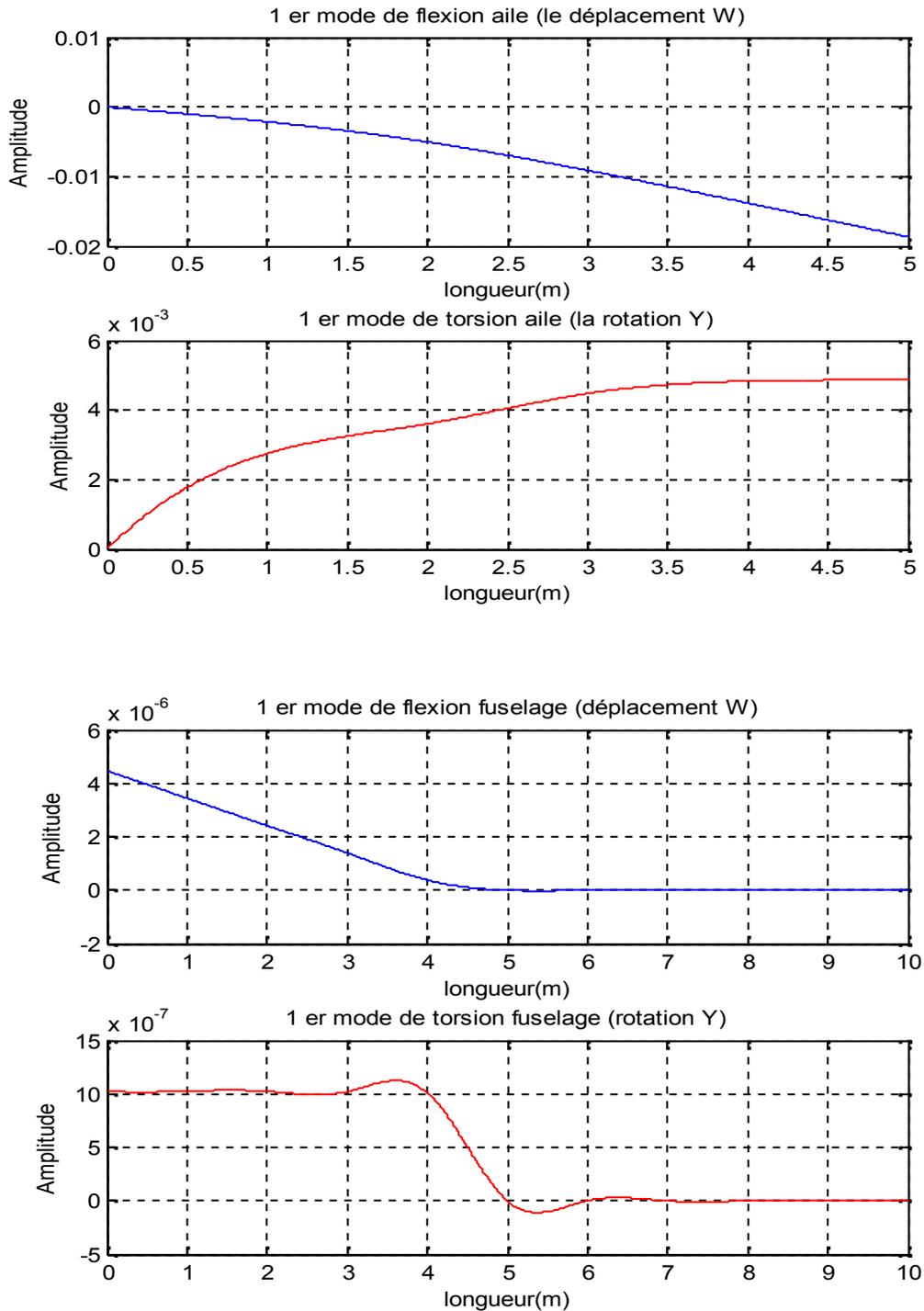
Fig (V. 5). Modèle réduit de l' avion proposé.

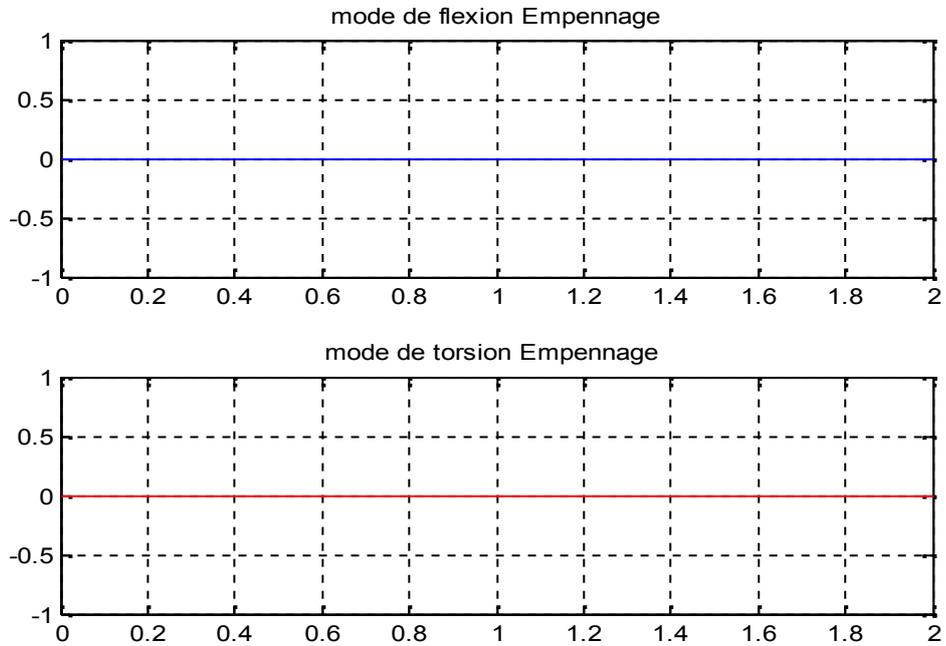
V. 5.1. Analyse modale.

Tableau 3 : les premières fréquences de notre modèle.

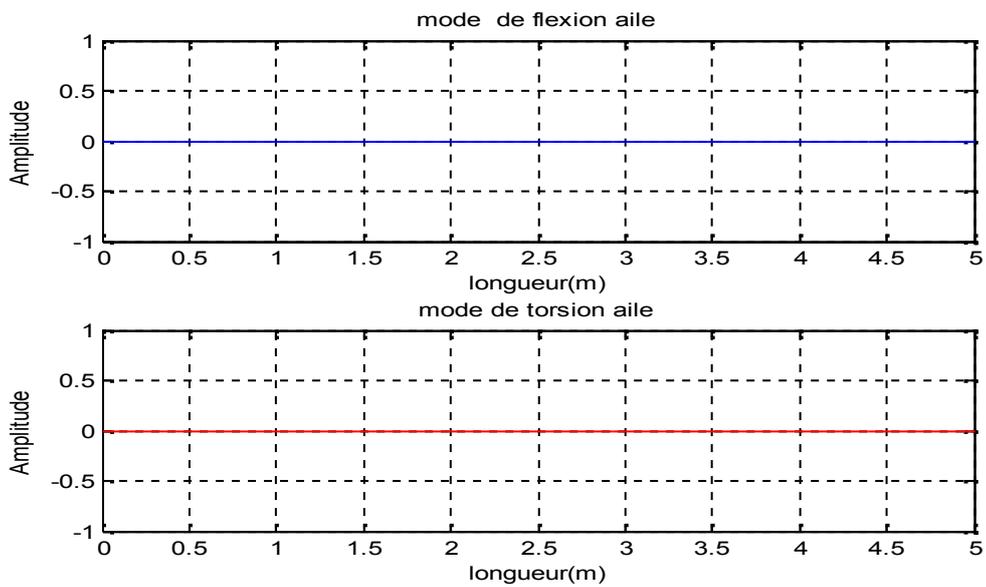
Fréquences	Résultats (rad/s)
1ere fréquence	54.39
2 eme fréquence	206.81
3eme fréquence	219.46
4eme fréquence	231.57
5eme fréquence	365.15
6 eme fréquence	374.5
7 eme fréquence	383.23
8 eme fréquence	390.15
9eme fréquence	400.83

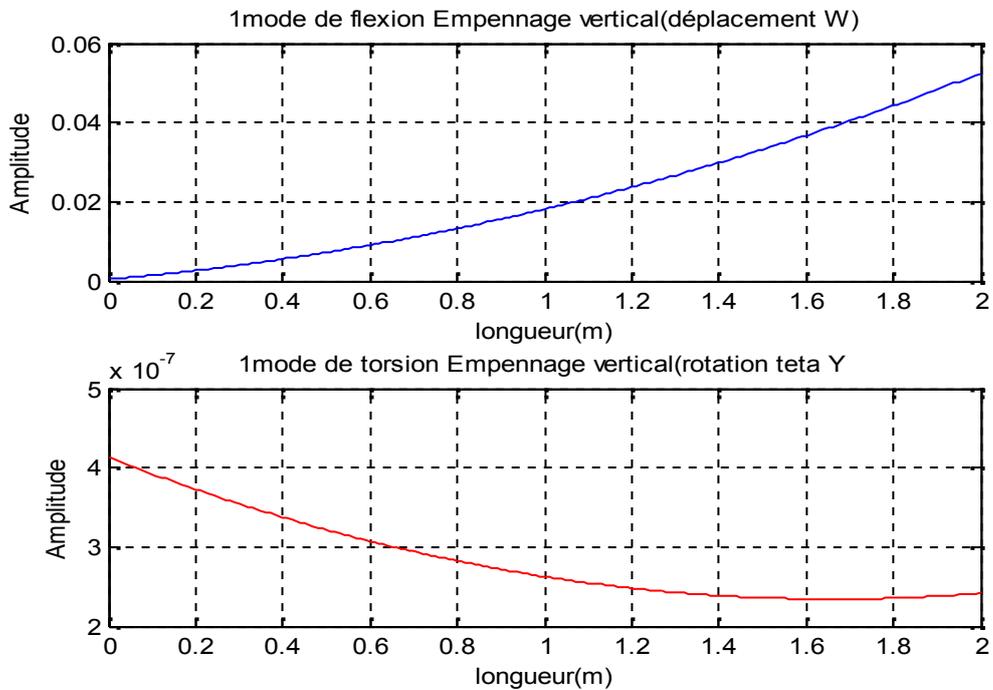
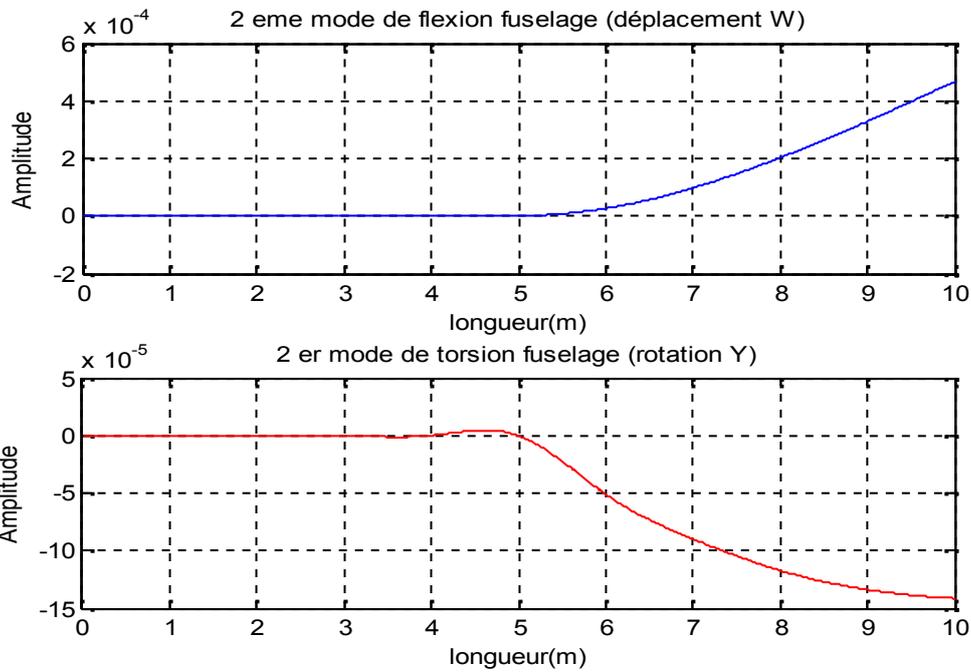
Nous allons dessiner les 5 premiers mode de l'avion.



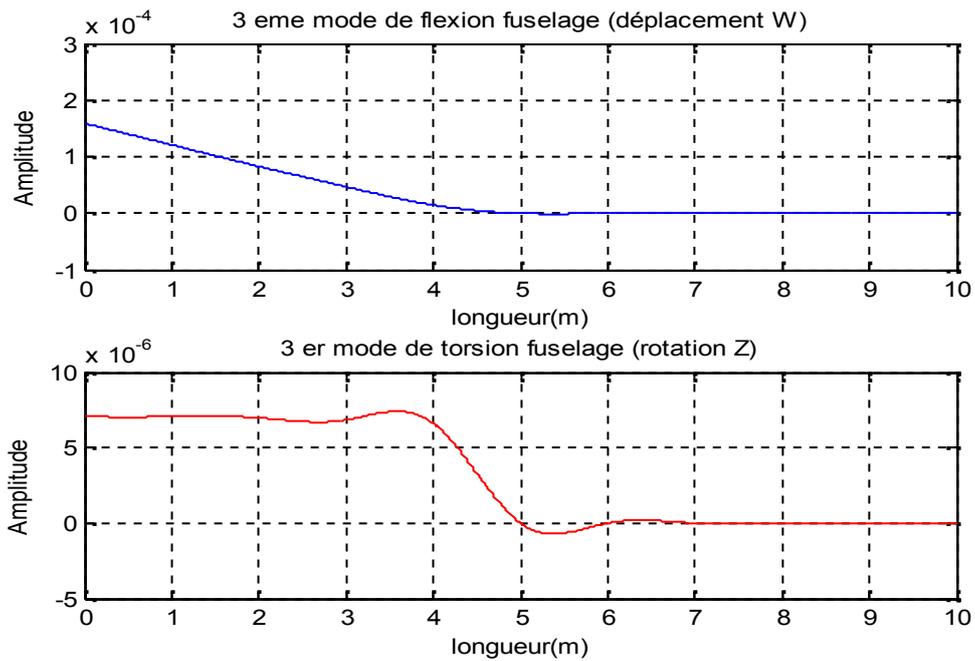
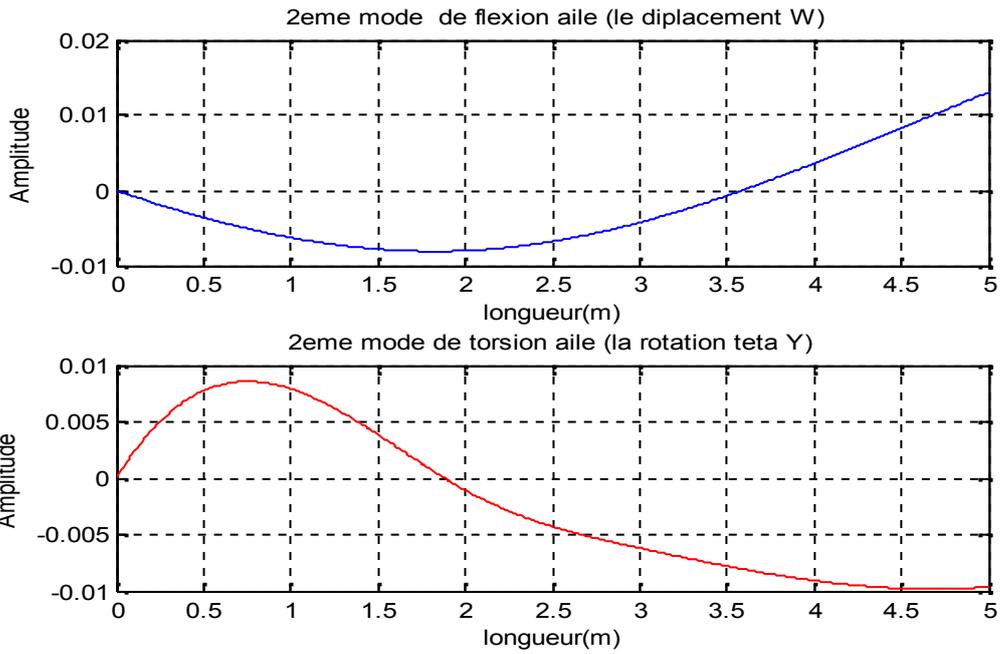


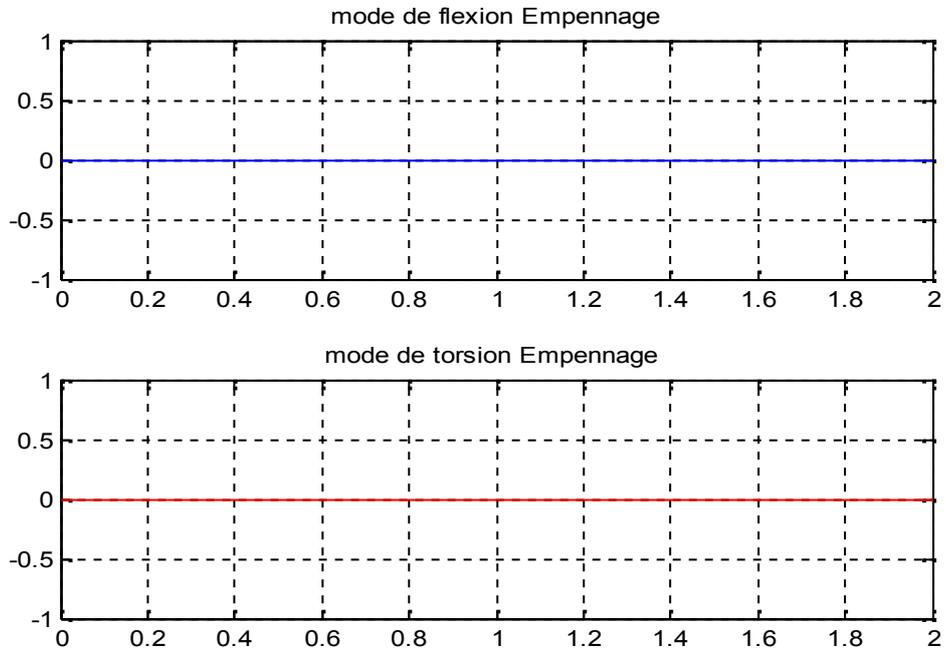
Fig(V.5.a).1^{er} mode de l'avion.



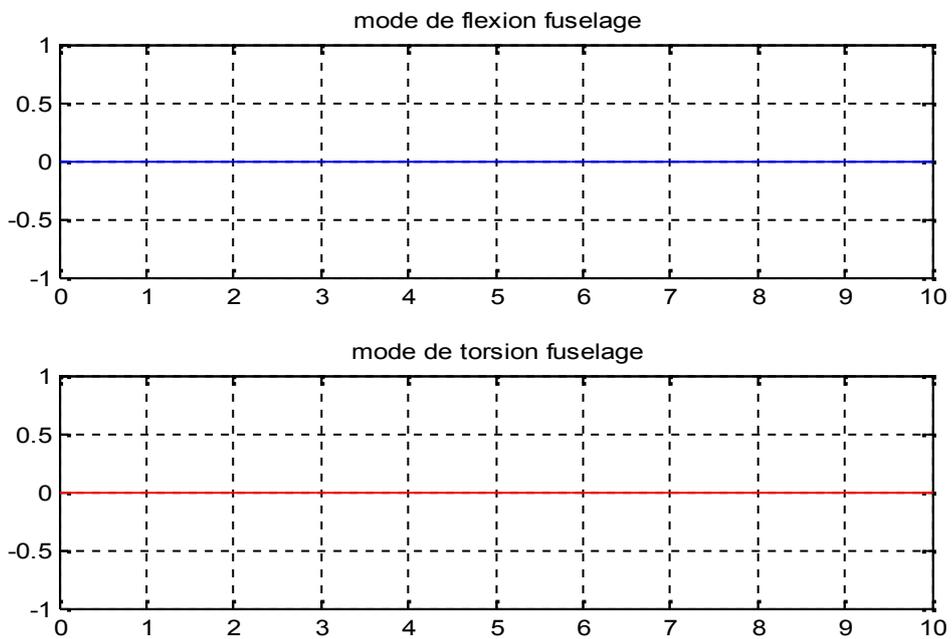
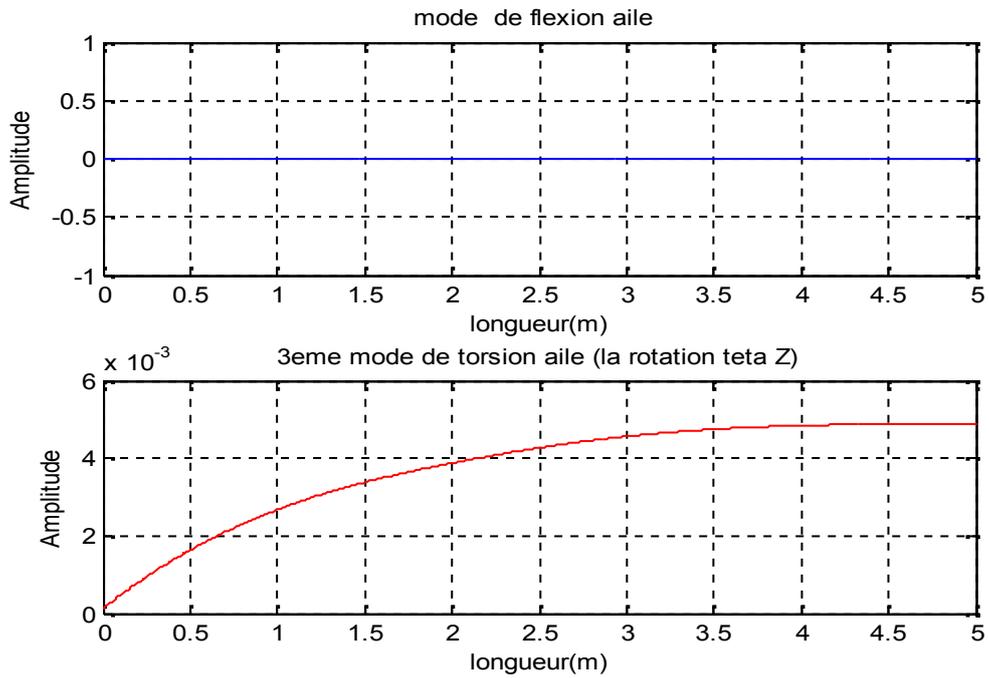


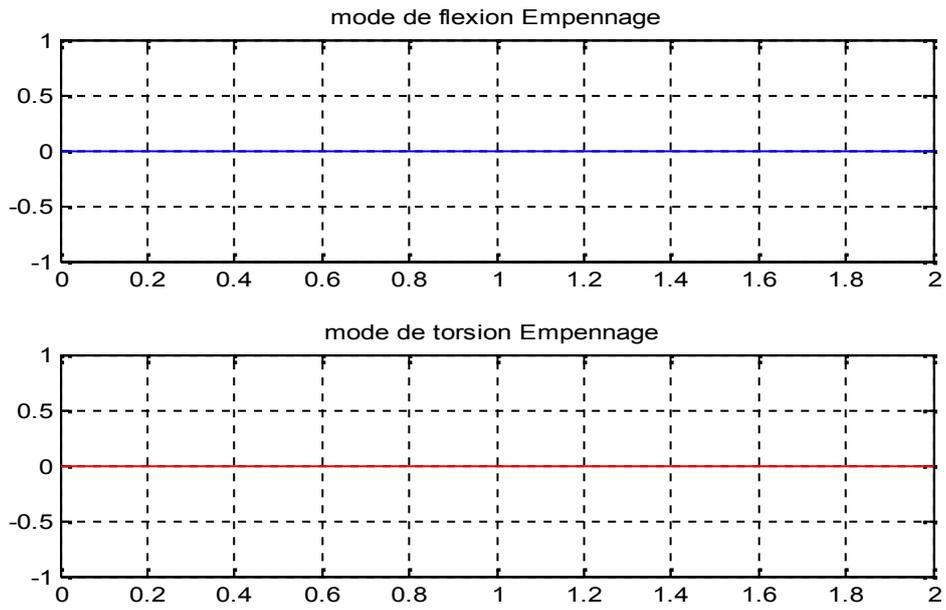
Fig(V.5.b).2ème mode de l'avion.



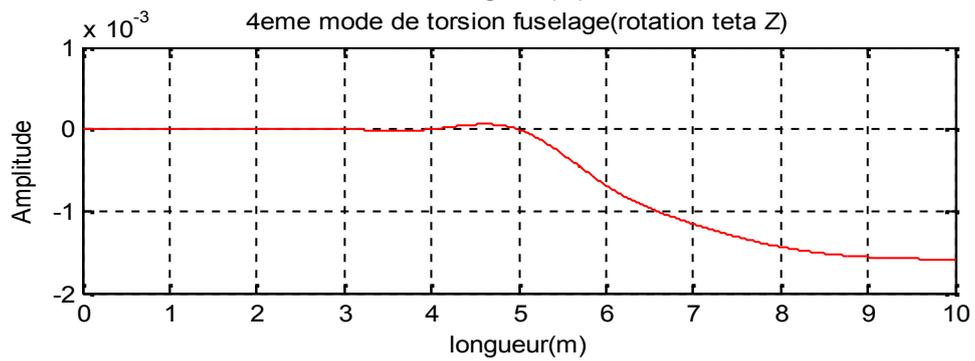
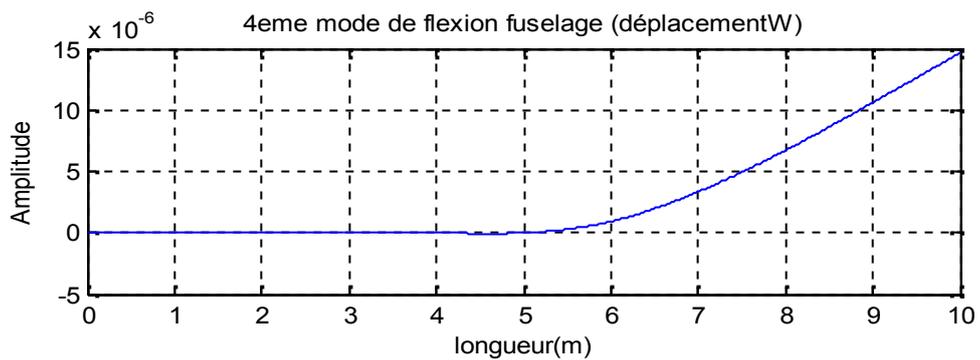
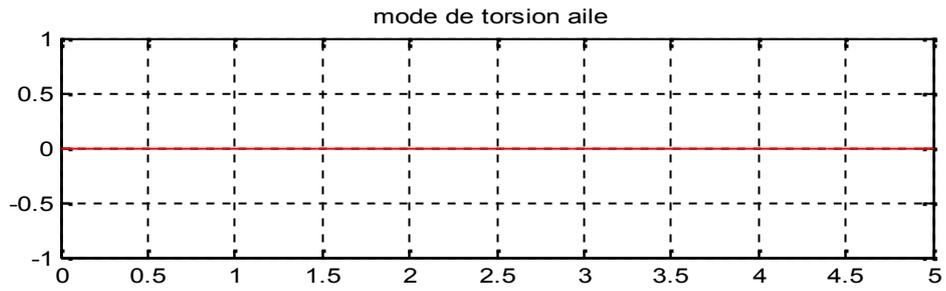
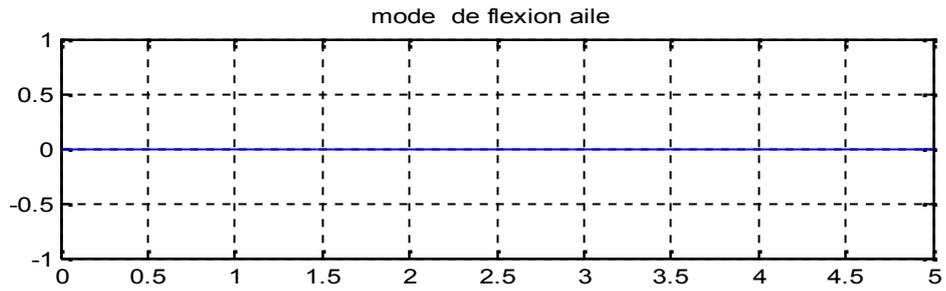


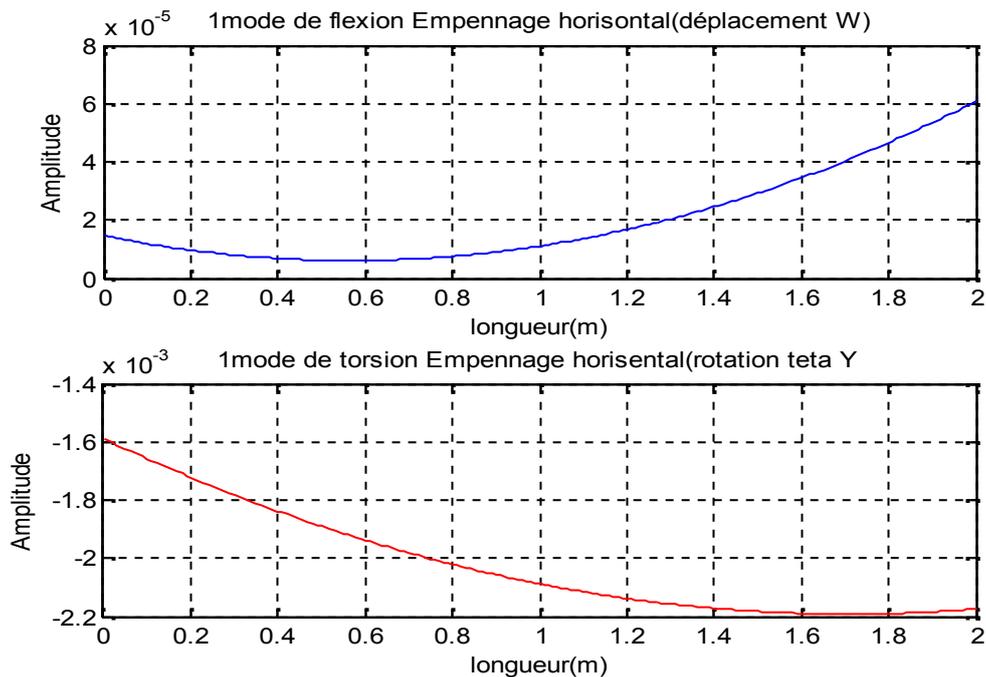
Fig(V.5.c).3ème mode de l'avion.





Fig(V.5.d).4ème mode de l'avion.





Fig(V.5.e).5ème mode de l'avion.

V. 5. 2. Analyse des résultats-conclusion.

D'après les figures précédentes, nous constatons que :

- **Pour le premier mode d'avion :** le fuselage et l'aile ont eu leurs premiers modes de flexion et leurs premiers modes de torsion où le déplacement a été suivant « Z » et la rotation de teta est suivant « X »; alors que l'empennage est resté fixe.
- **Le deuxième mode d'avion :** nous remarquons que le fuselage a reçu son deuxième mode de flexion et 2ème mode de torsion, l'empennage vertical a subi son premier mode de flexion et le premier mode de torsion où le fuselage est déplacé suivant « Z » et la rotation de teta est suivant « X » et l'empennage est suivant « Z », alors que sa rotation était suivant « X », l'aile est restée fixe.
- **Le troisième mode d'avion :** l'aile a fait son deuxième mode de flexion et 2ème mode de torsion, le fuselage a eu son 3ème mode de flexion et 3ème mode de torsion où l'empennage est fixe.
- **Le quatrième mode d'avion :** c'est le troisième mode de torsion pour l'aile suivant « X ». le reste est fixe.
- **Le cinquième mode d'avion :** dans ce dernier, l'aile est fixe. Cependant le fuselage est en 4ème mode de flexion et 4ème mode de torsion suivant « x » et l'empennage

horizontal est en premier mode de et premier mode de torsion qui sont respectivement suivant « Z » et « X ».

➤ **Conclusion :**

Selon les figures ci-dessous, nous notons que pour chaque mode d'avion, ces sous-composants (fuselage, aile, empennage) reçoivent des modes multiples.

CONCLUSION.

Notre recherche est arrivée à son terme. Notre code de calcul a donné de très bons résultats comparés aux résultats donnés par d'autres études analytiques et numériques (la résistance des matériaux « RDM » et le logiciel de calcul « NASTRAN/PATRAN »).

Le modèle d'avion choisi pour notre étude est un avion subsonique qu'on a modélisé en modèle poutre (c'est le modèle le plus simple pour le calcul des structures des avions).

Ce dernier nous permet de faire un assemblage de poutres, en effet, il est utilisé pour autres études tel que l'aéroélasticité, la stabilité.....

Ce pendant, le code utilisé dans notre étude ne peut pas entreprendre les effets de couplage inertiel car dans notre modèle l'axe élastique est confondu avec l'axe de gravité de l'aile.

Le matériaux choisi pour notre étude est un matériaux isotrope, donc notre code ne peut pas entamer l'effet de couplage de rigidité(flexion/torsion) due aux matériaux composites.

Notre code de calcul ne correspond pas à l'effet de cisaillement car on a considéré les poutres comme-étant des poutres non épaisses.

Cette étude représente une étape importante pour d'autres études telles que, l'aéroélasticité et la stabilité et contrôle, qui peuvent être proposées comme des futurs études.

