République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Saad Dahleb Blida 1

Faculté des sciences
Département de physique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option : Physique Théorique

Thème :

Complémentarité *versus* transformation de coordonnées : Equivalence entre les pseudo-hermiticités faible et forte dans le formalisme d'une masse dépendante de la position.

Présenté par :

KHELIFI Soumia et OUSERIR Asmaa

Soutenu le dimanche 29 / 09/ 2019 devant le jury composé de

Mr. Aziz MOUZALI	M. C. B.	USDB1	Président
Mr. Salah BOUKRAA	Professeur	USDB1	Examinateur
Mr. Abdelkader YANALLAH	M. C. B.	USDB1	Examinateur
Mr. Sid-Ahmed YAHIAOUI	M. C. B.	USDB1	Encadreur

Blida 1-2018/2019-_

Résumé

Dans ce présent mémoire, nous reviendrions sur le concept de la complémentarité décrivant la relation connectant les deux concepts jumeaux de la pseudo-hermiticité forte et faible. Bagchi et Quesne, dans leur article, suggèrent "*que la pseudo-hermiticité faible n'est pas plus générale que la pseudo-hermiticité forte, mais qu'elles sont complémentaires l'une à l'autre*". Toutefois, dans leur article, le terme *complémentarité* n'a pas été explicitement énoncé, ni son argumentation mathématique n'a été donnée. Nous pensons donc qu'une interprétation plus générale doit encore être formulée. Nous voulons aborder le concept de complémentarité différemment dans le cadre de la masse dépendante de la position (MDP). Nous visons dans ce mémoire à souligner que le concept de complémentarité peut-être compris d'un point de vue mathématique rigoureux et interprété comme une transformation de coordonnées, implémentée par une transformation de similarité, conduisant à relier les concepts des pseudo-hermiticités forte et faible. À cette fin, nous cherchons à établir, dans le formalisme de la MDP, les résultats suivants : (i) générer les fonctions qui permettent d'identifier les potentiels complexifiés $V^{(+)}(x)$ (resp. $V^{(-)}(x)$) sous la pseudo-hermiticité forte η_+ (resp. faible η_-), (ii) montrer que les deux fonctions génératrices sont connectées par une transformation de coordonnées, d'où la correspondance (équivalence) avec le concept de complémentarité, et enfin (iii) nous introduisons la transformation de similarité qui implémente la transformation de coordonnées afin de connecter à la fois η_+ et η_-.

Abstact

In this work, we would return to the complementarity principle describing the relationship connecting both twin concepts of pseudo-Hermiticity and weak pseudo-Hermiticity. Bagchi and Quesne, in their work, suggest "*that weak pseudo-Hermiticity is not more general than pseudo-Hermiticity but works complementary to it*". However the term *complementarity* was neither explicitly stated nor its mathematical argumentation was given, so we think that more general interpretation is yet to be formulated. We want to tackle the concept of complementarity otherwise in the framework of position-dependent mass (PDM). We aim in this work to point out that the concept of complementarity can be understood from a rigorous mathematical viewpoint and interpreted as a coordinate transformation, implemented by a similarity transformation, leading to connect the twin concepts of pseudo-Hermiticity and weak pseudo-Hermiticity. To this end we purpose to establish, in PDM background, the following results : (i) generate the functions that lead to identify the complexified potentials $V^{(+)}(x)$ (resp. $V^{(-)}(x)$) under pseudo-Hermiticity η_+ (resp. weak pseudo-Hermiticity η_-), (ii) show that both generating functions are connected through a coordinate transformation, hence establishing the mapping (equivalence) with the concept of complementarity, and finally (iii) we introduce the similarity transformation that implements the coordinate transformation in order to connect both η_+ and η_-.

الملخص

في هذه المذكرة، تطرقنا الى مفهوم التكاملية التي تصف العلاقة بين المفهومين التوأمين لشبه الهرميتي القوية والضعيفة. باجتشي وكان، في مقالهما، اقترحا "أن *ضعف الشبه الهرمتية ليست أكثر عمومية من قوتها، لكنهما مكملتان لبعضهما البعض* "، ومع ذلك في مقالتهم لم يتم ذكر مصطلح *التكاملية* بشكل صريح، ولم يتم تقديم حجة رياضية. ولذلك فكرنا في تعيين صياغة تفسيرية أكثر شمولية. اذ نريد أن نتعامل مع مفهوم التكميلية بشكل مختلف في سياق الكتلة المعتمدة على الموضع (PDM) و ذلك بإعطائها مفهوم رياضي وتفسيرها على انها تحول للإحداثيات ويتم تنفيذها عن طريق تحويل التشابه، مما يؤدي الى ربط مفهوم الشبه الهرميتي القوي و الضعيف، وتحقيقا لهذه الغاية نسعى في سياق الكتلة المعتمدة على الموضع لإيجاد النتائج التالية (i) توليد دوال تسمح لنا بتحديد كمونات مركبة $V_+(x)$ (على التوالي $V_-(x)$) لشبه الهرميتي القوي η_+ (على التوالي η_-)، (ii) اثبات ان هذه الدوال مرتبطة عن طريق تحويل الاحداثيات، و بالتالي تكافئ مع مفهوم التكاملية، و في الأخير (iii) ندخل تحويل التشابه الذي ينفذ تحوي الاحداثيات الرابطة بين η_+ و η_-.

Remerciements

On remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage afin de terminer ce mémoire avec succès.

On doit saisir l'occasion qui en est présentée de saluer et remercier les personnes sans qui ce travail n'aurait pas été possible. En premier lieu, on exprime notre profonde gratitude à Mr.S.-A. Yahiaoui notre promoteur et maître de conférences B à l'université de Saad Dahlab-Blida 1. On le remercie de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Ces quelques lignes sont insuffisantes pour exprimer notre reconnaissance pour la confiance qu'il nous a témoigné.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à Mr. Aziz Mouzali, maître de conférences B à l'université Saad Dahlab-Blida 1, pour nous avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

On tient à remercier vivement Mr.Salah Boukraa, Professeur à à l'université Saad Dahlab-Blida 1 et Abdelkader Yanallah maître de conférences B à l'université Saad Dahlab-Blida 1, d'avoir acceptés de faire partie du jury et de leur intérêt pour ce travail.

Notre plus sincères remerciements sont adressés à Mr. Nourdine Bouayed, maître de conférences A à l'université de Saad Dahlab-Blida 1, pour son aide précieuse le long de notre cursus universitaire et à ses conseils.

Notre gratitude est également destinée aux enseignants du département de physique de l'université de Saad Dahlab-Blida 1 et sourtout à Mr. Mohamed Ouled Mohammed, que nous le remercions beaucoup pour ses efforts et ses conseils que ce soit en informatique ou en physique.

Dédicaces

Ouserir Asmaa – Tout d'abord, je dédie ce travail à mes parents pour leur soutien, mes frères et soeurs " Bahia, Saïda, Haçen, Ikram et Ahmed ". Ainsi toutes la famille Ouserir et la famille Laouas.

Je dédie ce travail aussi à tout mes collègues d'étude, où la physique nous a réunis, en particulier, promo 2018/2019, je vous souhaite que du succés et de bonheur dans votre vie personelle et professionelle.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnait durant mon chemin d'études supérieurs, à vous mes aimables amies " Hadjer, kaouther, Naçira, Aïcha, Amel, Souhila, Soundous, Amira, Soumia, Yacemine, Alaa, Meryem ".
Enfin, merci beaucoup pour tous ceux qui m'ont aidé à accomplir ce travail de loin ou de près.

Khelifi Soumia – Je dédie ce travail à mes chéres parents pour leur soutien, mes frères et soeur. Ainsi toutes la famille khelifi et la famille Bakir.

Table des figures

Table des matières

Chapitre 0

Introduction Générale

La mécanique quantique a été développée par Heisenberg, Born, Jordan, Pauli, Schrödinger, Dirac et beaucoup d'autres, au début de XX$^{\text{ième}}$ siècle. Elle décrit la matière, la lumière ainsi que leur interaction qui évoluent selon des règles strictes et propres à la mécanique quantique (superpositions, incertitudes, probabilités, hermiticité, ...) [1, 2, 3]. L'excellent accord entre les résultats théoriques et expérimentaux a fini par convaincre l'ensemble des physiciens de la puissance de cette nouvelle théorie à expliquer les phénomènes qui se passent à l'échelle de l'infiniment petit.

Dès son apparition en 1925, la mécanique quantique a été le sujet de plusieurs débats entre les communautés physicienne et mathématicienne du monde, surtout à cause de son aspect probabiliste. Cependant, le caractère probabiliste de la théorie n'était pas le seul sujet abordé par ces deux communautés. En effet, parmi les postulats élémentaires de la mécanique quantique remis en cause, on retrouve celui de l'*hermiticité*. Ce dernier stipule que si un hamiltonien H est hermitien, alors ces valeurs propres sont réelles, c'est-à-dire que les normes des fonctions propres (les probabilités) sont conservées. Par la suite, les physiciens théoriciens et mathématiciens se sont posé la question suivante : étant donné que le concept de l'hermiticité est un concept *purement mathématique sans aucun fondement physique ni phénomènologique*, alors la notion de l'hermiticité peut-elle être remplacée par un autre concept physique ? et cette substitution permettra t-elle d'obtenir les mêmes résultats obtenus par la mécanique quantique, c'est-à-dire un spectre d'énergie défini réel et positif ?

Ces questionnements ont conduit les physiciens à chercher dans d'autres domaines connus de la physique mathématique une théorie adéquate et équivalente à la mécanique quantique. Cette investigation a commencé par une conjecture, dite de Bessis–Zinn-Justin [4], où elle stipule que le spectre d'un hamiltonien cubique et non hermitien $H = p^2 + ix^3$ pourrait être réel. Cette conjecture contredit, bien entendu, la propriété bien connue que des opérateurs non hermitiens possèdent des valeurs propres complexes, d'où l'incompatibilité entre des opérateurs hermitiens et les valeurs propres complexes. Cependant, on n'en trouve aucune assertion stipulant la possibilité d'existence d' *opérateurs non hermitiens avec des valeurs propres réelles* et d'où la conjecture de BESSIS–ZINN-JUSTIN.

C'est précisement dans ce context que BENDER et al. [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] ont introduit en 1998 une classe d'hamiltoniens de type :

$$H = p^2 + x^2(ix)^\nu, \qquad (\mathbb{R} \ni \nu > 2), \tag{1}$$

ayant la caractéristique d'être invariants sous l'action de la symétrie discrète $\mathcal{PT}$, où $\mathcal{P}$ est l'opérateur linéaire de la parité (la réflexion spatial) et $\mathcal{T}$ est un opérateur anti-linéaire associé au renversement du temps. Il a été démontré que le spectre des hamiltoniens (1) sont réels et positifs, bien qu'il soient associés à des opérateurs non hermitiens "au sens de DIRAC". Cette théorie, baptisée la mécanique quantique à symétrie $\mathcal{PT}$, ou tout simplement la $\mathcal{PT}$-symétrie, ne cesse de susciter un vif intérêt de la part des physiciens et mathématiciens, puisque ces derniers considèrent que le concept de la symétrie $\mathcal{PT}$ est plus *physique* que celui de l'hermiticité et, depuis, elle est considérée par beaucoup de physiciens comme une extension directe de la mécanique quantique "conventionnelle".

Cependant, l'introduction des hamiltoniens non hermitiens en mécanique quantique a eu un impact fort et important sur physiciens théoriciens et mathématiciens. Pour eux, il est impératif de mettre en place une description mathématique rigoureuse afin de clarifier le concept des opérateurs non hermitiens en mécanique quantique. Ces remarques ont conduit MOSTAFAZADEH en 2002, dans une série de trois (3) articles [14, 15, 16], à présenter une nouvelle alternative à la mécanique quantique en introduisant un nouveau concept mathématique, appelé *pseudo-hermiticité*. Il propose que la pseudo-hermiticité est conditionnée par une relation fondamentale d'entrelacement (intertwining relation), reliant H à son adjoint hermitien par la relation [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] :

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}, \tag{2}$$

où η est un opérateur hermitien et réversible, appelé *métrique* et démontre l'idée essentielle que l'ensemble de tous les hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques sont nécessairement pseudo-hermitiens. Ainsi, de part ces idées, la pseudo-hermiticité est présentée comme un concept général, englobant à la fois la $\mathcal{PT}$-symétrie et l'hermiticité, puisque si l'on pose dans (2) la contrainte $\eta = \mathbb{1}$, alors il est évident qu'on retrouve la notion conventionnelle de l'hermiticité, i.e. $H^\dagger = H$.

Au cours de la même année, deux grandes idées ont été introduites afin de complèter et d'enrichir le concept de la pseudo-hermiticité :

- La première introduite par SOLOMBRINO [26] concerne le concept de la *pseudo-hermiticité faible*. Il est question de démontrer l'existence, pour des opérateurs diagonalisables, d'une large classe d'opérateurs qui satisfont la condition (2) sans aucune contrainte au préalable sur η et coïncidant avec la classe de tout les opérateurs pseudo-hermitiens.

- La seconde, appelée *complémentarité*, a été introduite par Bagchi et Quesne [27] dans l'unique but est de relier les deux concepts des pseudo-hermiticités faible et forte. Ils suggèrent que l'opérateur η peut-être décomposé en deux opérateurs distincts, η_+ représentant la pseudo-hermiticité forte et η_- associé à la pseudo-hermiticité faible, telles que :
$$\eta_+ H = H^\dagger \eta_+ \qquad \text{et} \qquad \eta_- H = H^\dagger \eta_-, \tag{3}$$
où $\eta_\pm = \eta \pm \eta^\dagger$, de sorte que η_+ et η_- sont complémentaires l'un à l'autre.

Cependant, dans leur article, le terme complémentarité n'a pas été explicité, ni même argumenté mathématiquement, et nous pensons qu'une interprétation plus générale est nécessaire à être formulée. C'est l'objectif principal de notre présent travail de complèter ce vide, en donnant une interprétation mathématique rigoureuse au concept de la complémentarité, et d'associer cette dernière à des transformations de coordonnées linéaires et non-linéaires dans le formalisme d'une masse dépendante de la position (MDP).

Le présent mémoire s'articule autour de quatre (4) chapitres que sont structurés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présenterons la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, ainsi que la norme-$\mathcal{PT}$ qui remplace le concept mathématique de l'hermiticité sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique. Nous indiquerons aussi les différentes propriétés de cette symétrie, ainsi les produits scalaires avec les normes $\mathcal{PT}$ et $\mathcal{CPT}$.

Le deuxième chapitre représente un aperçu assez générale sur la pseudo-hermiticité. Au premier lieu, nous introduisons quelques outils mathématiques nécessaires en mécanique quantique afin de construire le concept de la pseudo-hermiticité, et en second lieu, nous insistons sur les définitions et les différentes propriétés de la pseudo-hermiticité.

Quant au troisième chapitre, il est consacré aux systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position. Le terme cinétique de l'hamiltonien est présenté dans l'unique but de ramener l'équation de Schrödinger à une forme adéquate. Des transformations de coordonées sont introduites ; elles permettent d'aborder le problème de la masse variable dans l'espace de configuration et arriver à déduire un résultat consistant pour les systèmes ayant une masse constante.

Le quatrième chapitre constitue notre travail de mémoire dont l'objectif est de donner un sens mathématique à la notion de la complémentarité. Ce faisant, en première partie, nous présenterons quelques généralités sur la pseudo-hermiticité des systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position soumise à un déplacement (shift) en impulsion. Dans la seconde partie, nous génèrerons des fonctions qui nous permettent de déduire les potentiels correspondants aux pseudo-hermiticités forte et faible. Dans la troisième partie, nous construiserons, via une transformation de jauge, un hamiltonien hermitien h équivalent à l'hamiltonien déformé pseudo-hermitien $\mathcal{H}$. La dernière partie est entièrement consacrée à la recherche d'une correspondance reliant les deux fonctions génératrices déduites via des transformations de coordonnées. Par la suite, l'usage d'une transformation de similarité permet d'établir une connexion ferme entre les deux pseudo-hermiticités forte et faible. Le cas d'une masse constante est aussi discuté.

Enfin, comme il est coutume, une conclusion générale clôture notre travail.

Chapitre 1

Sur la $\mathcal{PT}$-symétrie en mécanique quantique

Il est important de signaler que la dynamique d'un système est décrite si les valeurs propres représentant le spectre énergétique sont réelles. Pour cette raison, il est impératif que l'opérateur hamiltonien H, défini dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, soit hermitien.

Cependant, ces dernières années, un intérêt particulier a été porté aux hamiltoniens non hermitiens [4, 5]. Leur particularité est qu'ils ont un spectre en énergie réel malgré leur caractère complexe. Les indications mathématiques suggèrent que la raison principale de la réalité du spectre énergétique revient à une symétrie discrète, baptisée la $\mathcal{PT}$-symétrie. Nous allons voir dans ce chapitre les propriétés de cette symétrie via quelques exemples.

1.1 Exemple sur un hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique : Hamiltonien de Bender

En 1998, Bender et al. [5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 30] ont proposé une large classe de famille d'hamiltoniens stationnaires à une dimension du type :

$$H = p^2 + x^2(ix)^\nu. \tag{1.1}$$

Ils ont démontré qu'ils existent trois régions différentes selon la valeur attribuée au paramètre ν :

- Quand $\nu \geq 0$, le spectre énergétique est réel et positif, et le spectre devient de plus en plus imposant au fur et à mesure que ν augmente (voir la figure 1.1). Le niveau fondamental de cette région, $\nu = 0$, correspond à l'oscillateur harmonique, avec les niveaux énergétiques $E_n = 2n + 1$.
- Quand $-1 < \nu < 0$, on remarque l'existence d'un nombre fini de valeurs propres réelles et positives et aussi un nombre infini de valeurs propres complexes couplées

en paires. Au fur et à mesure que ν décroit de 0 à -1, le nombre des valeurs propres décroit aussi. Quand $\nu \leq -0.57793$, la seule valeur propre réelle est celle de l'état fondamental. Si ν approche -1^+, l'état fondamental diverge.

- Pour $\nu \leq -1$, il n'existe aucune valeur propre réelle.

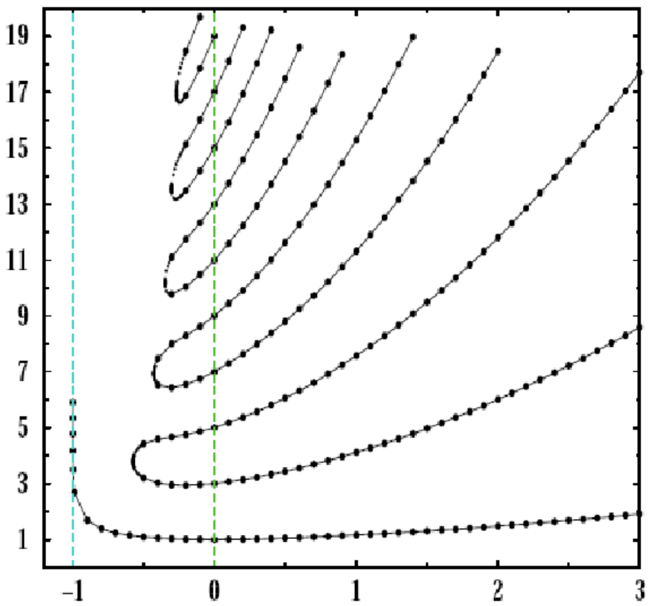

FIGURE 1.1 – Les niveaux énergétiques du hamiltonien (1.1) comme fonction du paramètre ν, ($\nu \in \mathbb{R}$). Quand $\nu \geq 0$, la $\mathcal{PT}$-symétrie est non brisée alors que si $\nu < 0$ la $\mathcal{PT}$-symétrie est nécessairement brisée, selon [5, 9].

Quand $\nu \geq 0$, la $\mathcal{PT}$-symétrie est non brisée, tandis que pour $\nu < 0$ la $\mathcal{PT}$-symétrie est nécessairement brisée. La figure 1.2 ci-dessous schématise le concept dit : *les bords de* STOKES. Ces derniers apprtiennent au domaine mathématique de l'analyse complexe et permettent de mieux visualiser la brisure de la $\mathcal{PT}$-symétrie.

Cet exemple a incitée les chercheurs physiciens et mathématiciens à étudier profondément cette classe d'hamiltonien pour bien comprendre l'origine de la réalité du spectre. La particularité essentielle de ces hamiltoniens réside dans l'invariance de la symétrie par rapport aux opérateurs simultanés de la parité $\mathcal{P}$ et de renversement du temps $\mathcal{T}$. Cette double opération est souvent appelée : la $\mathcal{PT}$-symétrie.

Un peu plus tard, il s'est avéré que la condition d'invariance d'un hamiltonien non-hermitien par rapport à la réflexion espatio-temporelle n'est pas suffisante pour la réalité de son spectre. En effet, les valeurs propres correspondant aux fonctions propres sont elles aussi invariantes par cette double réflexion de l'espace-temps. La $\mathcal{PT}$-symétrie est donc considérée comme une condition nécessaire pour la réalité du spectre des hamiltonien non-hermitiens.

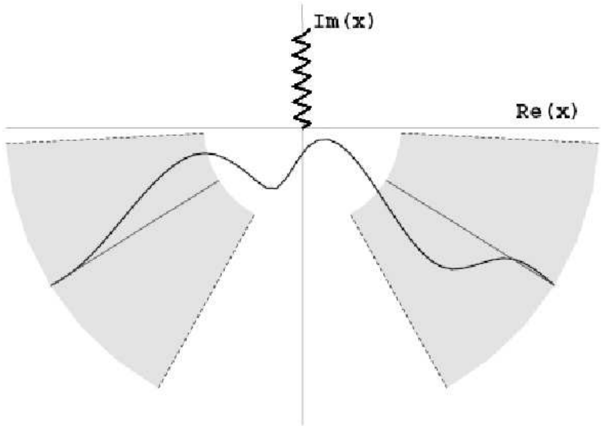

FIGURE 1.2 – Les bords (limites) de STOKES dans le plan complexe-x contenant le contour sur lequel l'équation de SCHRÖDINGER ssociée au hamiltonien (1.1) est posée, pour $\nu = 2.2$, selon [5, 9].

1.2 Définition et propriétés de la $\mathcal{PT}$-symétrie

Un hamiltonien H est dit $\mathcal{PT}$-symétrique s'il satisfait la relation [5, 6, 10, 11, 12, 41],

$$H = H^{\mathcal{PT}}, \tag{1.2}$$

où $H^{\mathcal{PT}}$ est défini par

$$H^{\mathcal{PT}} = \mathcal{PT}H\mathcal{PT}. \tag{1.3}$$

Ainsi, si un hamiltonien H est $\mathcal{PT}$-symétrique, alors il doit commuter avec le produit discret $\mathcal{PT}$, i.e.

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \tag{1.4}$$

où $\mathcal{P}$ est une opérateur linéaire appelé opérateur de parité (ou réflexion de l'espace) et $\mathcal{T}$ est l'opérateur de renversement du temps et dont leurs actions respectives sur les opérateurs de position $\hat{x}$ et l'impulsion $\hat{p}$ sont données comme suit :

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x}, \qquad \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}, \tag{1.5}$$

et

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x}, \qquad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}, \qquad \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \tag{1.6}$$

Notons que l'effet de l'opérateur linéaire $\mathcal{P}$ change les signes des opérateurs de position $\hat{x}$ et l'impulsion $\hat{p}$, tandis que l'opérateur antilinéaire $\mathcal{T}$ n'affecte que le signe de l'opérateur d'impulsion $\hat{p}$, en changement le signe du nombre complexe imaginaire pure i afin de garantir l'invariance de la symétrie $\mathcal{PT}$. En outre, puisque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont des opérateurs de réflexion, leurs carrés donnent l'opérateur unité, i.e.

$$\mathcal{T}^2 = \mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \tag{1.7}$$

et ils commutent aussi

$$[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0. \tag{1.8}$$

Si toutes les fonctions propres de l'hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H sont simultanément des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, on dit que la $\mathcal{PT}$-symétrie est non-brisée. Elle est dite brisée, s'il existe des fonctions propres de l'hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique qui ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$. Ainsi, pour construire une théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique pour ces hamiltoniens, nous devons exiger de plus que la symétrie ne doit pas être brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas triviale, car il n'existe aucun moyen pour affirmer à priori qu'une telle symétrie d'un hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est brisée ou pas. Il faut tout d'abord déterminer les fonctions propres pour en tirer une conclusion. Avec cette condition supplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique.

En effet, soit $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots\}$ l'ensemble des fonctions propres communes à H et $\mathcal{PT}$. On a alors

$$H\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x), \tag{1.9}$$

et

$$\mathcal{PT}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), \tag{1.10}$$

où E_n et λ_n sont respectivement les valeurs propres correspondantes à H et $\mathcal{PT}$, qui sont à priori complexes. Puisque :

$$(\mathcal{PT})^2 = \mathbb{1},$$

il en résulte alors, en appliquant la symétrie $\mathcal{PT}$, sur (1.10) que :

$$\lambda_n^2 = 1,$$

pour toutes les valeurs de n possibles. Ainsi λ_n est une phase pure qui peut être absorbée dans la fonction propre $\varphi_n(x)$ de sorte que [40], sans perte de généralités :

$$\lambda_n = \exp\{i\alpha_n\}, \tag{1.11}$$

pour tout α_n réel.

Nous remplaçons l'état propre φ par $e^{i\alpha_n}\varphi$ de sorte que sa valeur propre donnant l'opérateur $\mathcal{PT}$ soit égale à l'unité,

$$\mathcal{PT}\varphi = \varphi, \tag{1.12}$$

et puisque H et $\mathcal{PT}$ commutent, i.e.s

$$\mathcal{PT}H = H\mathcal{PT}, \tag{1.13}$$

nous procédons par la suite à multiplier les deux côtés du membre de droite de (1.13) par $\mathcal{PT}$, on obtient :

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT} = H. \tag{1.14}$$

En exprimant l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps sous la forme :

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n, \tag{1.15}$$

cette dernière se transforme, en appliquant la transformation (1.11) sur (1.9), en :

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT}\varphi_n = \mathcal{PT}E_n\mathcal{PT}\varphi_n, \tag{1.16}$$

où nous en déduisons, en utilisant l'identité $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$:

$$\mathcal{T}E_n = \mathcal{T}E_n^*,$$

révélant le caractère antilinéaire de l'opérateur $\mathcal{T}$.

Dès lors, il nous y possible expimer :

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n = \mathcal{PT}H\mathcal{PT}\varphi_n = E_n^*\varphi_n, \tag{1.17}$$

qui postule que la valeur propre E est entièrement réelle.

En mécanique quantique, la norme d'un vecteur dans l'espace de HILBERT $\mathfrak{H}$ doit-être positive. En outre, le produit scalaire de deux vecteurs quelconques dans l'espace de HILBERT doit être constant au cours de l'évolution temporelle, comme l'est la probabilité (principe de l'unitarité). Ces deux conditions constituent des propriétés fondamentales pour que la théorie quantique soit valable. Bien entendu, ces deux exigences sont satisfaites dans la théorie quantique conventionnelle, avec des hamiltoniens hermitiens. La première permet d'interpréter la norme d'un état comme une probabilité, qui doit être définie positive, alors que la deuxième condition garantie justement l'indépendance de cette probabilité par rapport au temps.

Dans ce context, BENDER [9, 11] a introduit dans un premier temps un produit scalaire dit "produit scalaire-$\mathcal{PT}$" associé aux hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques et est défini par :

$$(f,g)_{\mathcal{PT}} = \int_c dx\,[\mathcal{PT}f(x)]\,g(x), \tag{1.18}$$

où, par convention, l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur une fonction $f(x)$ quelconque est donnée par

$$\mathcal{PT}f(x) = f^*(-x), \tag{1.19}$$

et c est un contour dans le plan complexe. L'avantage de ce choix pour le produit scalaire, est que la norme $\mathcal{PT}$ associée, (f, f), est indépendante de la phase globale de $f(x)$ et elle est conservée dans le temps. En ce qui concerne le produit scalaire, les fonctions propres $\varphi_m(x)$ et $\varphi_n(x)$ de H doivent être orthogonales pour $n \neq m$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_m, \varphi_n\rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_c dx\,[\mathcal{PT}\varphi_m(x)]\,\varphi_n(x) \\ &= \int_c dx\varphi_m^*(-x)\varphi_n(x) \\ &= (-1)^n\delta_{mn},\end{aligned} \tag{1.20}$$

où δ_{nm} est le symbôle de Krönecker. Cependant, quand $m = n$, nous voyons que les $\mathcal{PT}$-normes des fonctions propres ne sont pas toujours positives [22, 42]. En effet,

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_c dx\varphi_n^*(-x)\varphi_n(x) \\ &= (-1)^n.\end{aligned} \tag{1.21}$$

La relation de fermeture s'écrit en fonction de ces fonctions propres comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}(-1)^n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| &= \int_c dx\varphi_n^*(-x)\varphi_n(x) \\ &= (-1)^n,\end{aligned} \tag{1.22}$$

et cela nous informe que la norme $(-1)^n$ d'un état n'est pas nécessairement positive, c'est-à-dire que la relation (1.18) définissant le produit scalaire est insuffisante pour formuler une théorie quantique valable [41].

Il est nécessaire et impératif de construire un nouveau produit scalaire, telle que la norme soit toujours positive. Ceci a incité Bender [9] à construire un nouveau produit scalaire avec une norme positive en multipliant le produit discret $\mathcal{PT}$ par l'opérateur $\mathcal{C}$; c'est le produit scalaire-$\mathcal{CPT}$.

1.3 L'opérateur $\mathcal{C}$ et le produit scalaire-$\mathcal{CPT}$

Pour résoudre ce problème de normes négatives, Bender [8, 9] a montré que tous les hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques dont la symétrie n'est pas brisée, possèdent une autre symétrie engendrée par un nouveau opérateur linéaire, noté $\mathcal{C}$. Nous utilisons la notation $\mathcal{C}$ parce que les propriétés de cet opérateur sont presque identiques à ceux de l'opérateur de la conjugaison de la charge de la théorie quantique des champs.

L'opérateur $\mathcal{C}$ est une observable qui représente la mesure de la signature de la norme $\mathcal{PT}$ des états propre. Par exemple, l'opérateur linéaire $\mathcal{C}$ est représenté dans l'espace des coordonnées par la somme des fonctions propres de l'hamiltonien [9, 12] :

$$\mathcal{C}(x, y) = \sum_{n\geq 0}\varphi_n(x)\varphi_n(y). \tag{1.23}$$

Par un simple calcul mathématique, il est possible de vérifier que le carré de $\mathcal{C}$ est égal à l'unité, i.e.

$$\int dx\, \mathcal{C}(x,y)\, \mathcal{C}(x,z) = \delta(x-z), \tag{1.24}$$

où $\delta(x-z)$ est la fonction de DIRAC. L'invariance de la norme $\mathcal{CPT}$ nous impose que l'opérateur $\mathcal{C}$ doit commuter avec l'hamiltonien H et l'opérateur $\mathcal{PT}$:

$$[\mathcal{C}, H] = [\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \tag{1.25}$$

et par conséquent

$$\mathcal{C}^2 = \mathbb{1},$$

telles que les valeurs propres de $\mathcal{C}$ sont ± 1 (par similitude à la théorie quantique des champs, ses valeurs propres sont associées aux charges des particules et anti-particules). L'action de $\mathcal{C}$ sur les fonctions propres de H est donnée par :

$$\mathcal{C}\varphi_n(x) = (-1)^n \varphi_n(x). \tag{1.26}$$

Nous pouvons également construire l'opérateur de parité $\mathcal{P}$ en termes des fonctions propres de H. L'opérateur linéaire $\mathcal{P}$ est représenté dans l'espace des coordonées par [8, 43] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x,y) &= \delta(x+y) \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \varphi_n(x)\varphi_n(-y). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{C}$, le module au carré de l'opérateur du parité est également égal à l'unité $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$, cependant il est à noter que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ne sont pas identiques. En effet, l'opérateur de parité $\mathcal{P}$ est réel, tandis que $\mathcal{C}$ est complexe (somme des produits des fonctions complexes). En outre, ces deux opérateurs ne commutent pas ; spécifiquement, dans la représentation de position :

$$(\mathcal{CP})(x,y) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n(x)\varphi_n(-y), \tag{1.28}$$

et

$$(\mathcal{PC})(x,y) = \sum_{n\geq} \varphi_n(-x)\varphi_n(y), \tag{1.29}$$

il est donc clair que [8, 9] :

$$\mathcal{CP} = (\mathcal{PC})^*, \tag{1.30}$$

ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{C}$ commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$, qui signifie que l'opérateur linéaire $\mathcal{CPT}$ résout le problème des normes négatives.

Avant de conclure ce chapitre, introduisons le produit scalaire-$\mathcal{CPT}$ définit par [8, 12, 25, 44] :

$$\langle\varphi|\psi\rangle_{\mathcal{CPT}} = \int_c dx \left[\mathcal{CPT}\varphi(x)\right]\psi(x), \tag{1.31}$$

où l'action de $\mathcal{CPT}$ sur un état $\varphi(x)$ est donnée par :

$$\mathcal{CPT}\varphi(x) = \int_c dy \ \left[\mathcal{CPT}\varphi(x,y)\right]\varphi^*(-y). \tag{1.32}$$

Ce produit scalaire-$\mathcal{CPT}$ est définit positif et les fonctions propres de H sont orthonormées entre eux,

$$\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle_{\mathcal{CPT}} = \int_c dx \ \left[\mathcal{CPT}\varphi_m(x)\right]\varphi_n(x). \tag{1.33}$$

Chapitre 2

Notions sur la pseudo-hermiticité de la mécanique quantique

Une des notions les plus importantes en mécanique quantique est la notion de l'hermiticité, puisque elle est le moyen sûre par exellence garantissant principalement la réalité du spectre d'énergie, malgré son caractère purement mathématique et algébrique. Dès lors, la question qui s'impose d'elle même est de savoir s'il n'y a pas un moyen permettant l'extension vers une mécanique quantique non-hermitienne ? Parmi les réponses, on retrouve celle élaborée par Bender et al. [5, 6, 7, 8, 9] (discuter dans le premier chapitre), et comme une simple conclusion de leurs travaux, ils ont réussi à remplacer la condition mathématique de l'hermiticité ($H = H^{\dagger}$) par celle de la norme $\mathcal{PT}$, qui est plus physique, dans l'unique but de créer des hamiltoniens non-hermitiens ayant des spectres réels.

Quatre ans plus tard, en 2002, Mostafazadeh a proposé un nouveau concept, baptisé : *la pseudo-Hermiticité*, ainsi que le cadre mathématique qui la relie au concept de la $\mathcal{PT}$-symétrie [9]. Il a établi que tous les hamiltoniens qui sont $\mathcal{PT}$-symétriques sont impérativement pseudo-hermitiens et il démontre que la pseudo-hermiticité est plus large et plus générale de la $\mathcal{PT}$-symétrie [14].

Mais de quoi il est question et pourquoi cette généralisation ? Et bien, en fondant sur les trois (3) articles cités auparavant, il a démontré qu'il existe des hamiltoniens qui ne sont ni hermitiens ni $\mathcal{PT}$-symétrique, mais cependant possèdent des spectres en énergie réels et positifs. Il a démontré aussi l'existence des hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques ayant des spectres non-réels.

Et tenant compte de ces résultats, il a conclu que la $\mathcal{PT}$-symétrie ne garantit pas la réalité du spectre et par conséquent, il a présenté la pseudo-hermiticité comme un concept plus large et plus général que la $\mathcal{PT}$-symétrie et l'hermiticité qu'on retrouve en mécanique quantique.

Ainsi, la réponse de la question ci-dessus est que la théorie de la pseudo-hermiticité de la mécanique quantique s'avère être un modèle mathématique très puissant et complet, puisqu'elle explique l'origine de la réalité des spectres d'énergie malgré le fait que leur potentiels respectifs sont complexes ($V(x) = V_{Re}(x) + iV_{Im}(x)$). Ce que la mécanique quantique "conventionnelle" n'explique pas.

2.1 Quelques outils mathématique de la pseudo-hermiticité

Nous allons présenter dans cette section quelques outils mathématiques nécessaires à la compréhension de cette théorie. En fait, certains de ces outils vont nous permettre de faire une comparaison entre la mécanique quantique hermitienne et non-hermitienne. Pour plus de détails, nous renvoyons les lecteurs intéressés à consulter les références qui suivent [1, 2, 3].

2.1.1 Espace de Hilbert

Un espace vectoriel normé $(\mathfrak{H}, \|.\|)$ sur $\mathbb{C}$ (où $\mathbb{R}$) est dit de Hilbert si et seulement si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet. On définit aussi l'espace ξ des fonctions d'onde représentant l'espace des fonctions à carrées sommables, noté $\mathcal{L}^2$, et qui est un espace de Hilbert muni d'une dimension infinie, car une fonction est déterminée par une infinité de coordonnées qui sont les valeurs prises par cette fonction pour les diverses valeurs de la variable. D'un point de vue physique, $\mathcal{L}^2$ est trop vaste, puisque les fonctions d'onde doivent être non seulement partout définies, continues et indéfiniment dérivables, mais surtout possèdant un support borné pour que la particule se trouve dans une région finie de l'espace.

2.1.2 Produit scalaire

On définit, dans l'espace des fonction ξ, le produit scalaire entre les fonctions $\phi(x)$ et $\psi(x)$ par le nombre complexe, noté $\langle\phi|\psi\rangle$, et valant :

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x)\psi(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Les propriétés de ce produit scalaire sont comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\psi\rangle &= \langle\psi|\phi\rangle, && (2.2)\\
\langle\phi|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle &= \lambda_1\langle\phi|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle\phi|\psi_2\rangle, && (2.3)\\
\langle\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2|\psi\rangle &= \lambda_1^*\langle\phi_1|\psi\rangle + \lambda_2^*\langle\phi_2|\psi\rangle, && (2.4)\\
\langle\phi|\psi\rangle &= 0, && (2.5)
\end{aligned}$$

où de la dernière relation, on déduit que les deux fonctions ϕ et ψ sont orthogonales.

2.1.3 Opérateurs

On appelle un *opérateur* un être mathématique, qui agissant sur un élément d'un ensemble, le transforme en un autre élément de ce même ensemble. Les opérateurs que nous aurons à utiliser agissent sur des fonctions en les transforment en d'autres fonctions. Nous notons ces opérateurs par des lettres majuscules en italique.

Un exemple est l'opérateur de différentiation partielle par rapport à x :

$$B = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.6}$$

et son action sur une fonction quelconque, $\psi(x, y, z)$, la transforme en une autre fonction :

$$B\psi(x, y, z) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, z). \tag{2.7}$$

Opérateur linéaire. – Un opérateur linéaire A fait correspondre à tout ket $|\psi\rangle$ appartenant à ξ un autre ket $|\psi'\rangle$ appartenant à ξ. La correspondance étant linéaire et satisfait les règles suivantes :

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle, \tag{2.8}$$

et

$$A(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1 A|\psi_1\rangle + \lambda_2 A|\psi_2\rangle. \tag{2.9}$$

Opérateur adjoint. – Deux opérateurs A et $A^\dagger$ sont dits adjoints si et seulement si les matrices qui les représentent dans une base donnée, par exemple $\{u_i\}$, sont adjointes l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'on a :

$$\langle u_i|A^\dagger|u_j\rangle = \langle u_j|A|u_i\rangle^*. \tag{2.10}$$

Cette définition se généralise pour deux kets ψ et ϕ quelconques :

$$\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^*. \tag{2.11}$$

L'opérateur adjoint est assujettie à quelques propriétés, on cite :

$$(A^\dagger)^\dagger = A, \tag{2.12}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \tag{2.13}$$

$$(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger, \tag{2.14}$$

$$(AB)^\dagger = A^\dagger B^\dagger. \tag{2.15}$$

Opérateur hermitien. – Un opérateur A est appelé hermitien s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire $A = A^\dagger$. Il s'ensuit que les éléments de matrice de A dans une représentation donnée, e.g. $\{u_i\}$, sont tels que :

$$A_{ij} = A^*_{ji}, \tag{2.16}$$

et plus généralement pour deux kets $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ quelconques :

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*. \tag{2.17}$$

Opérateur unitaire. – Un opérateur U est dit unitaire si et seulement si son inverse U^{-1} est égal à son adjoint, i.e.

$$UU^\dagger \equiv U^\dagger U = \mathbb{1} \qquad \Rightarrow \qquad U^\dagger = U^{-1}. \tag{2.18}$$

2.1.4 Base orthonormée complète de ξ

Soit un ensemble dénombrable de fonctions de carré sommable $\{u_i(x)\,, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. Cet ensemble est orthonormé si le produit scalaire entre les bases u_i et u_j est égal au symbôle de Krönecker, i.e.

$$\langle u_i|u_j\rangle = \int u_i^*(x)u_j(x)dx = \delta_{ij}. \tag{2.19}$$

Il (l'ensemble) est complet si toute fonction $\psi(x)$ accepte un développement d'une façon unique suivant les différentes bases $u_i(x)$, i.e.

$$\psi(x) = \sum_{i\geq 0} c_i\, u_i(x), \tag{2.20}$$

tels que les coefficients c_i sont appelés les composantes de la fonction $\psi(x)$ sur la base $u_i(x)$, avec $i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$. Ces dernières satisfont les conditions (2.19) et (2.20) et forment, par conséquent, une *base orthonormée complète.*

2.2 La pseudo-hermiticité et ses propriétés

Cette section est entièrement dédiée au concept de la pseudo-hermiticité, tandis que la section suivante est consacrée à l'anti-pseudo-hermiticité. On rappelle qu'un hamiltonien est appelé $\mathcal{PT}$-symétrique (voir le chapitre 1) s'il satisfait la contrainte :

$$\mathcal{PT}\, H\, \mathcal{PT}^{-1} = \mathcal{PT}\, H\, \mathcal{PT} = H. \tag{2.21}$$

2.2.1 La pseudo-hermiticité

Par définition, voir e.g. [14, 15, 16], un opérateur linéaire (un hamiltonien) $H : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ agit sur l'espace de HILBERT $\mathfrak{H}$ est dit pseudo-hermitien si et seulement s'il obéit à la relation d'entrelacement (intertwining relation) :

$$H^\dagger \eta = \eta\, H \qquad \Rightarrow \qquad H^\dagger = \eta\, H\, \eta^{-1}, \tag{2.22}$$

où η est un opérateur défini positif, linéaire, réversible ($\eta = \eta^{-1}$) et hermitien ($\eta = \eta^\dagger$). Ici, $L^\dagger$ représente, comme dans son habitude, l'adjoint hermitien de L.

Les opérateurs pseudo-hermitiens ont été introduits au début des années 40 par DIRAC et PAULI [54, 55], afin de surmonter certaines difficultés mathématiques qui apparaissent sous formes de divergences en physique, en utilisant une métrique indéfinie associée à η. Cette belle idée a été reprise plus tard dans les travaux de LEE et WICK [56] (ils sont les premiers à utiliser le terme *pseudo-hermiticité*). Plus récemment, de nombreuses propriétés intéressantes de ces opérateurs ont été examinées et leurs spectres ont été caractérisés de manière appropriée.

Bien entendu, le cadre mathématique de la théorie de la pseudo-hermiticité est très compliqué et l'exposer ici dans ce mémoire de master sort de l'objectif principal de notre travail (voir le chapitre 4). Nous conseillons le lecteur intéréssé de consulter la référence [17] pour plus de détails. Cependant, il est important de savoir que la pseudo-hermiticité est entièrement construit dans un espace de HILBERT muni d'une base *biorthonormée*, appelée la base de RIESZ. Parmi les quelques propriétés remarquables due à la pseudo-hermiticité, citons à titre d'exemple :

- $\mathbb{1}^{\,\sharp} = \mathbb{1}$,
- $(\mathcal{O}_1{}^{\sharp})^{\,\sharp} = \mathcal{O}_1$,
- $(z_1\mathcal{O}_1 + z_2\mathcal{O}_2)^\sharp = z_1^*\mathcal{O}_1{}^\sharp + z_2^*\mathcal{O}_2^\sharp$,
- $(\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1)^{\,\sharp} = \mathcal{O}_1^\sharp\mathcal{O}_2^\sharp$,

où $L^\sharp$ désigne l'adjoint pseudo-hermitien à l'opérateur L, par opposition à l'adjoint hermitien $L^\dagger$. Ici, $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sont des opérateurs linéaires et $\mathcal{V}$ est l'espace des produits scalaires, et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, avec z_i^* représente le conjugué complexe de z_i.

Unitarité. – Soit $\mathcal{V}$ un espace de produit scalaire doté d'un *automorphisme linéaire* et hemitien, noté η. Soient $U : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ et $\mathcal{O} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ deux opérateurs linéaires, alors $\eta_U := U^\dagger \eta U$ est un automorphisme linéaire et hemitien, et $\mathcal{O}$ est dit η-pseudo-hermitien si et seulement si $\mathcal{O}_U := U^\dagger \mathcal{O} U$ est η_U-pseudo-hermitien. Autrement dit, la notion de la pseudo-hermiticité est invariante sous l'unitarité.

A cet effet, on sait que U est unitaire, et par conséquent, η_U est à la fois hermitien et réversible. On a donc :

$$\eta_U^{-1}\mathcal{O}_U^{\dagger}\eta_U = U^{\dagger}\eta^{-1}UU^{\dagger}\mathcal{O}^{\dagger}UU^{\dagger}\eta U = U^{\dagger}(\eta^{-1}\mathcal{O}^{\dagger}\eta)U.$$

2.2.2 L'équivalent hermitien h d'un hamiltonian pseudo-hermitien H

Il devient évident que l'objectif de la pseudo-hermiticité est de retrouver une généralisation incorporant la mécanique quantique avec son principe d'hermiticité. Dès lors, nous sommes dans l'obligation de savoir s'il est possible de réduire un hamiltonien pseudo-hermitique H à un hamiltonien hermitique équivalent h et de quelle manière cette procédure doit-être accomplie ?

On commence notre analyse par admettre l'existence d'un produit scalaire, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, défini positif sur $\mathfrak{H}$, et H un opérateur hamiltonien. Alors, et d'après les références [18, 22], si H possède un spectre *discret et réel* par rapport au produit scalaire (la norme) $\langle\cdot,\cdot\rangle$, il doit aussi avoir un spectre discret et réel par rapport à la nouvelle norme, appelée η-norme, et est définie par

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle_\eta = \langle\cdot,\eta\cdot\rangle = \langle\eta^{\dagger}\cdot,\cdot\rangle,$$

telle que

$$\langle\langle\Psi, H\Phi\rangle\rangle = \langle\langle H\Psi, \Phi\rangle\rangle$$

De plus, le fait qu'il s'agit d'un produit scalaire défini positif implique que η est aussi un opérateur défini positif. Ceci implique que η a une racine carrée définie positif $\rho = \sqrt{\eta}$, i.e., il existe un opérateur hermitien positif et réversible $\rho : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, tel que :

$$\eta = \rho^2,$$

de sorte qu'il est facile de montrer que la norme pseudo-hermitienne reste *invariante*. En effet, pour tout $\Psi, \Phi \in \mathfrak{H}$, on voit bien que :

$$\begin{aligned}
\langle\langle\rho^{-1}\Psi, \rho^{-1}\Phi\rangle\rangle &= \langle\rho^{-1}\Psi, \rho^{-1}\Phi\rangle_\eta \\
&= \langle\rho^{-1}\Psi, \eta\rho^{-1}\Phi\rangle \\
&= \langle\Psi, \rho^{-1}\eta\rho^{-1}\Phi\rangle \\
&= \langle\Psi, \rho^{-1}\rho^2\rho^{-1}\Phi\rangle \\
&= \langle\Psi, \Phi\rangle, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

et encore d'une manière équivalente à (2.23), on déduit :

$$\langle\langle\Psi, \rho^{-1}\Phi\rangle\rangle = \langle\rho\Psi, \Phi\rangle.$$

Pour l'opérateur $(\rho^{-1})^\dagger$, on a aussi :

$$\langle\!\langle \Psi, \rho^{-1}\Phi \rangle\!\rangle \equiv \langle \Psi, \rho^{-1}\Phi\rangle_\eta = \langle (\rho^{-1})^\dagger \Psi, \Phi\rangle_\eta,$$

où on constate que $(\rho^{-1})^\dagger = (\rho^{-1})^{-1}$ et par conséquent $\rho^{-1} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ n'est autre qu'un opérateur unitaire.

Sous de telles contraintes, il est alors possible de définir un nouveau opérateur, noté h, telle que :

$$h := \rho H \rho^{-1} \tag{2.24}$$

est un hamiltonien *hermitien* appartenant à l'espace de Hilbert original $\mathfrak{H}$, où $\rho = \sqrt{\eta}$. Le nouveau hamiltonien h est souvent appelé la contre-partie hermitienne équivalente à H et la transformation $H \mapsto h$ correspond à une transformation de jauge de type : $|\psi\rangle \to \rho|\psi\rangle$. L'hermiticité de h est la conséquence directe que H est hermitien au sens du produit scalaire (la norme) $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ et que ρ^{-1} est unitaire.

2.2.3 Pseudo-produit scalaire

Il est bien connu en mécanique quantique "conventionnelle" que si l'hamiltonien h est hermitien, alors il doit préserver le produit scalaire usuelle, i.e. :

$$\langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = \delta_{nm}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

En revanche, ce n'est pas le cas pour l'hamitonien pseudo-hermitien H. Conformément à la pseudo-hermiticité, ce dernier préserve le nouveau produit scalaire défini par :

$$\langle\!\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle\!\rangle = \langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_\eta = \langle \Phi_m | \eta \Phi_n \rangle = \langle \eta^\dagger \Phi_m | \Phi_n \rangle, \tag{2.25}$$

avec la correspondance $\eta = \rho^2$.

D'un autre côté, la notion de η-produit scalaire introduite par Mostafazadeh [14] est invariante sous la translation temporelle généré par l'hamiltonien H si et seulement si H est η-pseudo-hermitien. En effet, en utilisant l'équation de Schrödinger temporelle :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle, \tag{2.26}$$

alors on a pour les deux vecteurs d'états évolutifs $|\Psi_1(t)\rangle$ et $|\Psi_2(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle\!\langle \Psi_1(t) | \Psi_2(t) \rangle\!\rangle_\eta = \langle \Psi_1 | (\eta\, H - H^\dagger\, \eta) | \Psi_2 \rangle,$$

et selon la relation d'entrelacement (2.22) on déduit que $\langle\!\langle \Psi_1(t) | \Psi_2(t) \rangle\!\rangle_\eta$ est une constante.

Notons, par ailleurs, que si nous imposons le choix $\eta = \mathbb{1}$, alors la relation (2.22) est réduite au concept usuel de l'hermiticité ordinaire et par conséquent la pseudo-Hermiticité est une généralisation de l'hermiticité.

D'autre part, comme h est hermitien :

$$\begin{aligned} h &= \rho H \rho^{-1} \\ &= h^{\dagger} \\ &= \rho^{-1} H^{\dagger} \rho, \end{aligned}$$

alors :

$$\rho H \rho^{-1} = \rho^{-1} H^{\dagger} \rho \qquad \Rightarrow \qquad H^{\dagger} = \rho^{2} H (\rho^{-1})^{2} = \eta H \eta^{-1}, \tag{2.27}$$

on retrouve la relation fondamentale, (2.22), caractérisant la pseudo-hermiticité.

Conformément aux résultats déduits, et comme une réponse à notre question, on peut conclure que tout hamiltonien H pseudo-hermitien possède un hamiltonien hermitien équivalent h, relié à H par la relation (2.24). Les deux partagent le même spectre d'énergie, on parle alors d'hamiltoniens iso-spectraux.

2.2.4 Hamiltoniens pseudo-hermitiens à base bi-orthonormée complète

Nous avons déjà signalé ci-dessus que l'une des exigence à la construction d'une théorie pseudo-hermitienne compatible avec les différentes observations est d'introduire une base bi-orthonormée. Ce faisant, soit H un hamiltonien η-pseudo-hermitien ayant pour base des vecteurs propres bi-orthonormée et complète $\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$, et un spectre discret.

Alors, par définition [14] :

$$\begin{aligned} H|\psi_n\rangle &= E_n|\psi_n\rangle, & (2.28)\\ H^{\dagger}|\phi_n\rangle &= E_n^{*}|\phi_n\rangle, & (2.29)\\ \langle\phi_m|\psi_n\rangle &= \delta_{mn}, & (2.30)\\ \sum_{n\geq 0} |\phi_n\rangle\langle\psi_n| &= \sum_{n\geq 0} |\psi_n\rangle\langle\phi_n| = \mathbb{1}, & (2.31) \end{aligned}$$

avec E_n et E_n^{*} sont les valeurs propres de H et $H^{\dagger}$, respectivement, et $n \in \mathbb{N}$ est un indice spectral. En tenant compte de (2.28)-(2.31), nous avons aussi :

$$H = \sum_{n\geq 0} E_n |\psi_n\rangle\langle\phi_n| \qquad \text{et} \qquad H^{\dagger} = \sum_{n\geq 0} E_n^{*} |\phi_n\rangle\langle\psi_n|. \tag{2.32}$$

Par définition, dans le cas des valeurs propres non-dégénérées, on a [14, 15, 17] :

$$\eta = \sum_{n\geq 0} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|, \tag{2.33}$$

et son inverse est donnée par :

$$\eta^{-1} = \sum_{n\geq 0} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \tag{2.34}$$

Annonçons le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 (Réfs. [14]) *Soit un hamiltonien non-hermitien H, avec un spectre discret et une base bi-orthonormée complète de vecteurs propres $|\Psi_n\rangle$ et $|\Phi_n\rangle$, alors H est pseudo-hermitien si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *le spectre de H est réel, ou*
2. *les valeurs propres complexes sont classées en paires complexes conjuguées avec la même multiplicité.*

L'une des implications directes à ce théorème sont les corollaires suivants :

Corollaire 2.2.1 (Réfs. [14]) *Chaque hamiltonien non-hermitien H avec un spectre réel et discret qui possède un système bi-orthonormé complet de vecteurs propres est pseudo-hermitien.*

Corollaire 2.2.2 (Réfs. [14]) *Tout hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H qui possède un spectre réel et discret muni d'un système bi-orthonormé complet de vecteurs propres est pseudo-hermitien.*

Cette affirmation découle directement du théorème ci-dessus. Pour le voir, soit $|e\rangle$ un vecteur propre de H avec une valeur propre associée E, i.e.

$$H|e\rangle = E|e\rangle \qquad \text{et} \qquad |e\rangle' = \mathcal{PT}|e\rangle, \tag{2.35}$$

alors

$$H|e\rangle' = H(\mathcal{PT})|e\rangle = (\mathcal{PT})H|e\rangle = (\mathcal{PT})E|e\rangle = E^*(\mathcal{PT})|e\rangle = E^*|e\rangle', \tag{2.36}$$

où nous avons utilisé la propriété de la linéarité de $\mathcal{P}$ et l'antilinéarité de $\mathcal{T}$.

2.3 Anti-pseudo-hermiticité

Par définition [16], un hamiltonien $H : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ agissant sur l'espace de HILBERT $\mathfrak{H}$ est dit anti-pseudo-hermitien s'il y a un automorphisme antilinéaire et anti-hermitien $\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui satisfait la condition suivante :

$$H^\dagger \;=\; \tau\, H\, \tau^{-1}. \tag{2.37}$$

On rappelle qu'un hamiltonien diagonalisable est pseudo-hermitien s'il y a une symétrie antilinéaire ; en d'autres termes, s'il existe une symétrie produite par un opérateur antilinéaire et anti-hermitien τ. Par définition [16], l'opérateur $\tau : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ agit sur l'espace de HILBERT $\mathfrak{H}$ est dit opérateur antilinéaire si pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $|\xi\rangle, |\zeta\rangle \in \mathfrak{H}$,

$$\tau(a|\xi\rangle + b|\zeta\rangle) \;=\; a^*\tau|\xi\rangle + b^*\tau|\zeta\rangle. \tag{2.38}$$

Il est appelé anti-hermitien s'il satisfait :

$$\langle\zeta|\tau|\xi\rangle = \langle\xi|\tau|\zeta\rangle. \tag{2.39}$$

Dans [16], MOSTAFAZADEH a montré que la $\mathcal{PT}$-symétrie et l'anti-pseudo-hermiticité par rapport à τ impliquent la présence de la pseudo-hermiticité par rapport à $\tau\mathcal{PT}$ et qui coïncide avec l'opérateur η, i.e.,

$$\eta = \tau\mathcal{PT}. \tag{2.40}$$

Nous reviendrons sur ce concept de l'anti-pseudo-hermiticité porté par l'opérateur τ dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Masse dépendante de la position et transformations de coordonnées

Au cours des dernières années, l'étude des systèmes quantiques munis de masse dépendante de la position (MDP) a suscité un vif intérêt de la part des physiciens et devenue un sujet d'investigation très actif. En effet, il existe beaucoup de problèmes en physique (e.g. la description des propriétés électroniques des semi-conducteurs [45], les points quantiques [46], les cristeaux liquides [47], etc), en chimie, en biologie, et même en médecine, où l'on peut assimiler l'évolution d'un phénomène par une équation du type de Schrödinger, Klein-Gordon ou même de Dirac, relative à une particule de masse variable dans l'espace $m = m(x)$.

Dans les travaux théoriques sur les systèmes avec MDP, les théoriciens ne cessent d'investiguer ce domaine très intéressant en présentant différents modèles pour la distribution de la masse comme fonction de la position, où la principale préoccupation est d'obtenir les solutions exactes des équations d'onde (i.e. l'équation de Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac, ...). En utilisant des transformations de coordonnées [35, 49], la supersymétrie de la mécanique quantique [50, 51], la théorie des groupes [52] et d'autres approches, de nombreux potentiels solubles des équations d'onde pour différentes fonctions de masse ont été obtenus. Autrement dit, en choisissant des potentiels connus en mécanique quantique, auxquels on associe des distributions de masse appropriées de telle sorte que l'équation étudiée peut être ramenée, par des transformations adéquates, à une équation équivalente qu'on peut résoudre par les méthodes usuelles. Ce qui montre certaines similitudes entre les systèmes à masse constante et MDP.

En ce qui nous concerne dans ce chapitre, nous allons nous limiter à discuter l'équation de Schrödinger à une dimension dans le contexte d'un système muni d'une masse variable dépendante de la position.

3.1 Equation de SCHRÖDINGER dans le formalisme MDP

On commence cette section par clarifier un petit peu la notion de masse variable. La première impression qui en découle est que la masse change avec le changement de sa position. Autrement dit, et à titre d'exemple, si une particule pèse 300 μg en un point (x, y), alors cela ne veut pas dire, qu'au point (x', y'), elle aura une masse de 700 μg! ce qui est totalement faux. En réalité, on dit que la particule est sous l'influence d'un *champs effectif moyen*, ce dernier donne l'impression que la masse de la particule change au cours de son déplacement.

On considère, au premier lieu, que la masse d'une particule est donnée par la notation $M(x)$ et on la dénote par :

$$M(x) = m_0 m(x), \tag{3.1}$$

où m_0 est une constante positive ayant la dimension d'une masse, i.e. kg et $m(x)$, une fonction sans dimensions, définie positive. Il est évident que pour revenir au cas standard représentant une masse constante, il suffit de poser $m(x) = 1$, telle que $M(x) = m_0$. On admet aussi que l'hamiltonien n'est autre qu'une simple addition des parties cinétique $T = T(p)$ et potentiel $V = V(x)$. Ainsi l'hamiltonien a la forme :

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{M(x)} + V(x), \tag{3.2}$$

et l'équation de SCHRÖDINGER s'écrira donc sous la forme

$$H\psi(x) \equiv \left(\frac{1}{2}\frac{P^2}{M(x)} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x), \tag{3.3}$$

avec $p\,(\equiv -i\hbar\, d/dx)$ désigne l'opérateur d'impulsion.

Pour être plus explicite, formuler le terme cinétqiue $p^2/M(x)$ n'a pas, malheureusement, une seule et unique façon de l'écrire. Ceci est dû principalement au fait que $m(x)$ et p ne commutent pas, i.e. $[m(x), p] \neq 0$, de sorte que la partie cinétique, dans ce cas, peut s'écrire de différentes manières. À titre d'exemple, en posant $m_0 = 1$, on peut l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{p^2}{M(x)} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}, \tag{3.4}$$

ou bien encore

$$\frac{p^2}{M(x)} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{m^{1/4}(x)}\frac{d}{dx}\frac{1}{m^{1/2}(x)}\frac{d}{dx}\frac{1}{m^{1/4}(x)}. \tag{3.5}$$

En fait, lorsque la masse d'une particule dépend de sa position, les opérateurs de masse et de l'impulsion ne commutent plus [32, 33, 36, 38, 39]. Il se trouve que ce problème est l'un des plus anciens de la mécanique quantique, il est connu sous le nom du *problème* *d'ordonnancement* (ordering problem) et le plus utilisé est celui appelé l'ordonnancement symétrique ou de WEYL. Il existe donc plusieurs façons de définir l'opérateur de l'énergie cinétique. La proposition qui a reçu plus d'intérêt par la communauté physicienne est celle proposée par VON ROOS [33], où il suggèra d'exprimer l'hamiltonien d'un système doté d'une masse dépendante de la position $m(x)$ sous la forme :

$$\frac{p^2}{M(x)} = -\frac{\hbar^2}{4}\left(m^\alpha(x)\frac{d}{dx}m^\beta(x)\frac{d}{dx}m^\gamma(x) + m^\gamma(x)\frac{d}{dx}m^\beta(x)\frac{d}{dx}m^\alpha(x)\right), \tag{3.6}$$

où α, β et γ sont des nombres réels, qui doivent évidemment satisfaire la contrainte :

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \tag{3.7}$$

dans le but de retrouver le cas constant. En particulier, pour $\alpha = \gamma = 0$ et $\alpha = \gamma = -1/4$, on retrouve les cas particuliers (3.4) et (3.5). De nombreux débats ont eu lieu sur le choix des paramètres α, β et γ. MORROW et BROWNSTEIN [48] ont montré que le choix $\alpha = \beta$ est basé sur la comparaison entre les résultats expérimentaux et la solution analytique de certains modèles.

Les contraintes sur les paramétres α, β, γ sont $\alpha + \gamma = 0$ et $\beta = -1$, par conséquent, l'hamiltonien (3.2) peut-être mis sous la forme,

$$\begin{aligned} H_{vR} &= -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx} + V_{eff}(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 m'(x)}{2m^2(x)}\frac{d}{dx} + V_{eff}(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

et le terme $V_{eff}(x)$, appelé le potentiel effectif, s'exprime par

$$V_{eff}(x) = V(x) + \hbar^2\left(\frac{(1+\beta)m''(x)}{4m^2(x)} - \frac{m'^2(x)}{2m^3(x)}(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta + 1)\right), \tag{3.9}$$

où le prime $'$ désigne la différentiation par rapport à la variable x.

En effet, le potentiel $V(x)$ s'exprime en termes de $V_{eff}(x)$ et d'un terme supplémentaire appelé le potentiel du terme de masse, i.e.,

$$V(x) = V_{eff}(x) - \hbar^2\left(\frac{(1+\beta)m''(x)}{4m^2(x)} - \frac{m'^2(x)}{2m^3(x)}(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta + 1)\right), \tag{3.10}$$

et contient en lui la dérivée schwarzienne pour un choix adéquat des paramétres α et β. Notons également que l'expression (3.8) est aussi une autre forme proposée par BEN DANIEL et DUKE [34] et qui va être utilisé en chapitre 4. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} H_{BDD} &= \frac{1}{2}p\frac{1}{m(x)}p + V_{BDD} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 m'(x)}{2m^2(x)}\frac{d}{dx} + V_{BDD}(x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

et dont l'équation de SCHRÖDINGER s'exprime par :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx} + V_{eff}(x)\right)\psi(x) \;=\; E\psi(x). \tag{3.12}$$

3.2 Transformations de coordonnées

Cette méthode permet d'aborder le problème de la masse effective d'un point de vue fondamental sans avoir à employer une forme particulière du potentiel effectif de l'équation (3.9), et arriver à déduire un résultat consistant pour les systèmes dotés d'une masse variable. Elle permet aussi de lier des systèmes physiques avec masse effective dépendante de la position à ceux ayant une masse effective constante.

Comme le but est de résoudre l'équation (3.12) pour obtenir le spectre d'énergie total et les fonctions d'onde des potentiels, il est donc nécessaire de transformer (3.12) en une forme plus simple. En appliquant les transformations suivantes [37] :

$$x = f(z), \qquad \psi(x) = \nu(z)\phi(z), \qquad m(x) = m[f(z)] = \widetilde{m}(z), \tag{3.13}$$

où $\nu(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions à déterminer, sur (3.12), on obtient :

$$\phi'' + \left(\frac{2\nu'}{\nu} - \frac{f''}{f'} - \frac{\widetilde{m}'}{\widetilde{m}}\right)\phi' - \left[\frac{\nu'}{\nu}\left(\frac{f''}{f'} + \frac{\widetilde{m}'}{\widetilde{m}}\right) - \frac{\nu''}{\nu}\right]\phi - \frac{2\widetilde{m}f'^2}{\hbar^2}\left(V_{eff}[f(z)] - \varepsilon\right)\phi = 0. \tag{3.14}$$

Afin de déterminer les fonctions $\nu(x)$ et $f(x)$, nous introduisons les définitions suivantes :

$$\nu(z) = C\sqrt{f'(z)\widetilde{m}(z)}, \qquad f'(z) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{m}(z)}}, \tag{3.15}$$

qui permettent de réduire (3.14) à une équation de Schrödinger à masse constante :

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2\phi(z)}{dz^2} + \frac{\hbar^2}{2}\left[\left(\frac{5}{16}\frac{\widetilde{m}'^2(z)}{\widetilde{m}^2(z)} - \frac{1}{4}\frac{\widetilde{m}''(z)}{\widetilde{m}(z)}\right) + V_{eff}[f(z)]\right]\phi(z) = \varepsilon\phi(z). \tag{3.16}$$

Les équations (3.12) et (3.16) ont un spectre identique. Comme la fonction d'onde $\psi(z) \in \mathcal{L}^2$, i.e. $\langle\psi(z)|\psi(z)\rangle = 1$ et en posant $C = 1$, on déduit que la fonction d'onde $\phi(z) \in \mathcal{L}^2$, i.e. $\langle\phi(z)|\phi(z)\rangle = 1$.

Pour simplifier d'avantage nos calculs, nous identifions la seconde équation dans (3.15) à une équation différentielle ordinaire de type $f'^2(z) = 1/\widetilde{m}(z)$, dont la solution est donnée par :

$$z \equiv f^{-1}(x) = \int^x \sqrt{m(x')}dx', \tag{3.17}$$

et qui définit à travers une forme implicite la transformation $f(z)$ et, par conséquent, elle permet de déterminer $\widetilde{m}(z)$ ainsi que l'expression du potentiel effectif $V_{eff}(x)$.

En tenant compte de :

$$\widetilde{m}(z) \equiv \frac{d\widetilde{m}(z)}{dz} = \frac{dx}{dz}\frac{d\widetilde{m}(z)}{dx} = f'(x)m'(x) = \sqrt{\frac{1}{m(x)}}\frac{dm(x)}{dx}, \tag{3.18}$$

l'équation (3.16) est réduite à la forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}+\left[\frac{\hbar^2}{32m^3(x)}\left(7m'^2(x)-4m(x)m''(x)\right)+V_{eff}\right]\Bigg|_{x=z}\phi(z)=\varepsilon\phi(z). \quad (3.19)$$

Il est important de signaler que le changement de variable introduit dans (3.17) peut ne pas être inversé ou pas facilement réversible. Mais cela ne pose pas vraiment un problème en ce qui concerne la solvabilité de l'équation (3.12), ceci revient au fait que la variable z est définie *explicitement* en terme de la variable x. Ainsi, écrire le potentiel effectif sous la forme :

$$V_{eff}(x) \;=\; V(x)-V_m(x), \quad (3.20)$$

où $V(x)\equiv V_{E.S.}(x)$ est le potentiel exactement soluble et $V_m(x)$ est la partie du potentiel effectif dépendante du terme de masse

$$V_m(x)=\frac{\hbar^2}{32m^3(x)}\left[7m'^2(x)-4m(x)m''(x)\right], \quad (3.21)$$

permet de déduire le spectre d'énergie (3.12) analytiquement. La fonction d'onde correspondante peut-être obtenue en utilisant (3.13).

Chapitre 4

Complémentarité versus transformations de coordonnées : Équivalence entre les pseudo-hermiticités faible et forte

Juste après introduction du concept de la pseudo-hermiticité par Mostafazadeh [14, 15, 16, 17], Solombrino introduit dans son article [26] le concept de la pseudo-hermiticité faible afin de pointer du doigt l'existence, pour des opérateurs diagonalisables, d'une large classe d'opérateurs qui satisfont la condition (2.22) sans aucune contrainte au préalable sur η et coïncidant avec la classe de tout les opérateurs pseudo-hermitiens. Au cours de la même année, Bagchi et Quesne [27] ont utilisé le terme *complémentarité* dans l'unique but de relier les deux concepts des pseudo-hermiticités faible et forte. Ils stipulent que l'opérateur η peut-être décomposé en deux opérateurs distincts η_+ et η_- de la manière

$$\eta_+ H = H^\dagger \eta_+ \qquad \text{et} \qquad \eta_- H = H^\dagger \eta_-,$$

où $\eta_\pm = \eta \pm \eta^\dagger$. La première hypothèse correspond à la pseudo-hermiticité forte définie par Mostafazadeh [17, 23] avec une réalisation différentielle du second-ordre, puisque $\eta_+^\dagger = \eta_+$ est hermitien, tandis que la seconde hypothèse est associée à la pseudo-hermiticité faible définie par Solombrino [26] et est assujetie à une réalisation différentielle du premier-ordre car $\eta_-^\dagger = -\eta_-$ est anti-hermitien. Plus tard, Mostafazadeh [?] avait signalé une *ré-examination prudente du principe d'équivalence entre les deux concepts* pour une large classe d'opérateurs linéaires *non*-nécessairement diagonalisales.

Nous cherchons dans notre travail à attaquer ce problème d'équivalence sous un angle complètement différent en démontrant qu'il est tout à fait possible de correspondre une (des) transformation(s) de coordonnée(s) connectant les deux concepts jumeaux de la pseudo-hermiticité.

4.1 Généralités sur la pseudo-hermiticité

On se place dans notre étude dans cadre d'un hamiltonien de Ben Daniel-Duke donné par [34]

$$H = p\,U^2(x)\,p + V(x) \tag{4.1}$$

où les contraintes sur les paramétres α, β et γ sont $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = -1$, muni d'une masse dépendante de la position. En réalité, on dit que la particule est entièrement soumise à un champ effectif moyen donnant l'impression que la particule change de masse lors de son déplacement. Étant donné que le problème traité est intimement lié à la pseudo-hermiticité proposée par Mostafazadeh, alors il est évident que le potentiel considéré doit possèder une forme complexe, i.e.

$$V(x) = V_{Re}(x) + iV_{Im}(x).$$

Afin de simplifier d'avantage nos calculs, nous poserons par la suite $U(x) = m^{-1/2}(x)$ appelé terme de masse et $p = -id/dx$, avec $\hbar = m_0 = 1$. Nous imposerons aussi le déplacement (le Shift) en impulsion p de la façon suivante :

$$p \quad \mapsto \quad \hat{\pi} = p - \frac{A(x)}{U(x)}, \tag{4.2}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto A(x) = a(x) + ib(x)$ est une fonction complexe, et $a(x)$ et $b(x)$ sont réelles. Il est par conséquent possible d'exprimer le nouveau hamiltonien modifié, noté $\mathcal{H}$, à partir de (4.1) et (4.2), comme suit :

$$\begin{aligned} H \quad \mapsto \quad \mathcal{H} &= \hat{\pi}U^2(x)\hat{\pi} + V(x) \\ &= \left(p - \frac{A(x)}{U(x)}\right) U^2(x) \left(p - \frac{A(x)}{U(x)}\right) + V(x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

D'un autre côté, soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$, respectivement, les opérateurs discrets de la parité et du renversement du temps introduits et définis dans le chapitre 1. On définit alors l'opérateur antilinéaire et réversible $\tau = \mathcal{T}\exp\{i\alpha(x)\}$ et $\mathcal{H}^\dagger = \tau\mathcal{H}\tau^{-1}$ [15]. On se propose d'exprimer la fonction $\alpha(x)$ sous la forme :

$$\alpha(x) = -2\int^x A(x')d\mu(x'),$$

où $d\mu(x) = U^{-1}(x)\,dx$ est la mesure propre à l'intégrale.

En utilisant les identités $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^{-1}$ et $\mathcal{T}f(x,p)\mathcal{T} = f^*(x,-p)$ pour toute fonction arbitraire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il est possible de démontrer que τ est bel et bien hermitien. En effet, un calcul simple nous mène à :

$$\begin{aligned}
\tau^\dagger &= \left(\mathcal{T}e^{i\alpha(x)}\right)^\dagger \\
&= \mathbb{1}\; e^{-i\alpha^*(x)}\mathcal{T}^\dagger \qquad\qquad [\text{prendre en considération : } \mathcal{T}^2 = \mathbb{1}] \\
&= \mathcal{T}^2 e^{-i\alpha^*(x)}\mathcal{T} \\
&= \mathcal{T}\left(\mathcal{T}e^{-i\alpha^*(x)}\mathcal{T}\right) \qquad [\text{utiliser l'identité : } \mathcal{T}f(x,p)\mathcal{T} = f^*(x,-p)] \\
&= \mathcal{T}e^{i\alpha(x)} \\
&= \tau
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Par la suite, et en se fondant sur les transformations de jauges suivantes [29] :

$$\exp\{\mp i\alpha(x)\}\, p\, \exp\{\pm i\alpha(x)\} = p \pm \frac{d\alpha(x)}{dx} \tag{4.5}$$

$$\exp\{\mp i\alpha(x)\}\, x\, \exp\{\pm i\alpha(x)\} = x \tag{4.6}$$

il est tout à fait possible de démontrer que $\mathcal{H}^\dagger = \tau\mathcal{H}\tau^{-1}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\tau\mathcal{H}\tau^{-1} &= \mathcal{T}e^{i\alpha(x)}\left[p - \frac{A(x)}{U(x)}\right] U^2(x)\left[p - \frac{A(x)}{U(x)}\right] e^{-i\alpha(x)}\mathcal{T} + \mathcal{T}e^{i\alpha(x)}V(x)e^{-i\alpha(x)}\mathcal{T} \\
&= \mathcal{T}\left[p - \frac{A(x)}{U(x)} - \alpha'(x)\right] e^{i\alpha(x)}U^2(x)e^{-i\alpha(x)}\left[p - \frac{A(x)}{U(x)} - \alpha'(x)\right]\mathcal{T} + V^*(x) \\
&= \mathcal{T}\left[p - \frac{A(x)}{U(x)} - \alpha'(x)\right] U^2(x)\left[p - \frac{A(x)}{U(x)} - \alpha'(x)\right]\mathcal{T} + V^*(x) \\
&= \mathcal{T}\left[p - \frac{A(x)}{U(x)}\right] U^2(x)\left[p - \frac{A(x)}{U(x)}\right]\mathcal{T} + V^*(x) \\
&= \left[-p + \frac{A^*(x)}{U(x)}\right] U^2(x)\left[-p + \frac{A^*(x)}{U(x)}\right] + V^*(x) \\
&= \left[p - \frac{A^*(x)}{U(x)}\right] U^2(x)\left[p - \frac{A^*(x)}{U(x)}\right] + V^*(x) \\
&= \mathcal{H}^\dagger,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

où nous concluons que l'hamiltonien déformé (modifié) est antilinéaire, puisque l'opérateur τ l'est.

L'hamiltonien modifié $\mathcal{H}$ est $\mathcal{PT}$-symétrique – suivant la définition [14]. Selon la définition de Mostafazadeh, on dit que $\mathcal{H}$ est pseudo-hermitien si et seulement s'il existe un opérateur linéaire et réversible η, tel que $\mathcal{H}^\dagger\eta = \eta\mathcal{H}$. Dans ce contexte, on pose le choix concernant η comme suit :

$$\eta \equiv e^{-i\alpha(x)}\mathcal{P} = \exp\left[2i\int^x dx' \frac{A(x')}{U(x')}\right].$$

où opérateur $\mathcal{P}$ satisfait $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}^{-1}$ et $\mathcal{P}f(x,p)\mathcal{P} = f(-x,-p)$ pour toute fonction arbitraire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Un autre calcul direct et facile nous montre que η est bel et bien hermitien. En effet, η est hermitien

$$\begin{aligned}
\eta^\dagger &= \mathcal{P}\exp\left[-2i\int^x dx'\frac{A^*(x')}{U(x')}\right] \\
&= \exp\left[-2i\int^{-x} dx'\frac{A^*(x')}{U(x')}\right]\mathcal{P} \\
&= \exp\left[2i\int^{-x} d(-x')\frac{A^*(x')}{U(x')}\right]\mathcal{P} \\
&= \exp\left[2i\int^{x} d(x')\frac{A^*(-x')}{U(-x')}\right]\mathcal{P} \\
&= \exp\left[2i\int^{x} dx'\frac{a(-x')-ib(-x')}{U(-x')}\right]\mathcal{P}
\end{aligned}$$

si et seulement si les fonctions $a(x)$ et $U(x)$ sont des fonctions paires, alors que $b(x)$ est impaire, i.e. :

$$a(-x') = a(x'), \qquad b(-x') = -b(x'), \qquad \text{et} \qquad U(-x') = U(x'), \tag{4.8}$$

et donc :

$$\eta^\dagger = \eta. \tag{4.9}$$

Il est important de signaler que le concept de la pseudo-hermiticité s'adapte aux problèmes munis de masse dépendante de la position.

4.2 À la recherche des fonctions génératrices

L'objectif de cette seconde section est de déduire les *fonctions génératrices* qui permettent de définir les différents potentiels complexes associés à la pseudo-hermiticité faible et forte. A cette fin, nous aurons besoin d'utiliser les fondements de la supersymétrie de la mécanique quantique [50, 51] afin de factoriser l'hamiltonien $\mathcal{H}$ et $\eta_\pm$.

4.2.1 Cas de la pseudo-hermiticité forte

On commence par décomposer η_+ en un produit de deux opérateurs $\eta_+ \equiv d^\dagger d$, où d et $d^\dagger$ sont, respectivement, les opérateurs d'annihilation et de création de la supersymétrie de la mécanique quantique.

Les opérateurs d et $d^\dagger$ sont des opérateurs du premier ordre :

$$\begin{aligned}
d &= U(x)\frac{d}{dx} + W(x), \qquad (4.10)\\
d^\dagger &= -U(x)\frac{d}{dx} - U'(x) + W^*(x), \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

où $U(x) \in \mathbb{R}$, $W(x) = F(x) + iG(x)$ et $F, G \in \mathbb{R}$. Ici le prime représente la différentiation par rapport à la variable x. Sous l'effet du déplacement (4.2), les équations (4.10) et (4.11) deviennent :

$$\begin{aligned} d \quad \rightarrow \quad \mathcal{D} &= U(x)\frac{d}{dx} - iA(x) + W(x), && (4.12) \\ d^{\dagger} \quad \rightarrow \quad \mathcal{D}^{\dagger} &= -U(x)\frac{d}{dx} - U'(x) + iA^{*}(x) + W^{*}(x), && (4.13) \end{aligned}$$

et la même transformation ramène η_+ à $\widetilde{\eta}_+(\equiv \mathcal{D}^{\dagger}\mathcal{D})$ comme suit :

$$\widetilde{\eta}_+ = -U(x)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2\mathcal{K}(x)\frac{d}{dx} + \mathcal{L}(x), \quad (4.14)$$

où par identification, on trouve que les fonctions $\mathcal{K}(x)$ et $\mathcal{L}(x)$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x) &= U(x)U'(x) + iU(x)(G(x) + a(x)), && (4.15) \\ \mathcal{L}(x) &= [U(x)(iA(x) - W(x))]' + A^{*}(x)A(x) + W^{*}(x)W(x) \\ &+ iA^{*}(x)W(x) - iA(x)W^{*}(x). && (4.16) \end{aligned}$$

D'un autre côté, on peut exprimer l'hamiltonien modifié (4.3) par :

$$\mathcal{H} = -U^2(x)\frac{d^2}{dx^2} - 2\mathcal{M}(x)\frac{d}{dx} + \mathcal{N}(x) + V^{(+)}(x), \quad (4.17)$$

où les fonctions $\mathcal{M}(x)$ et $\mathcal{N}(x)$ sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= U(x)U'(x) - iA(x)U(x), && (4.18) \\ \mathcal{N}(x) &= i[U(x)A(x)]' + A^2(x), && (4.19) \end{aligned}$$

et $V^{(+)}(x)$ est le potentiel complexe associé à la pseudo-hermiticité forte $\widetilde{\eta}_+$

$$V^{(+)}(x) = V^{(+)}_{Re}(x) + iV^{(+)}_{Im}(x).$$

L'adjoint du l'hamiltonien (4.17) s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{H}^{\dagger} = -U^2(x)\frac{d^2}{dx^2} - 2\mathcal{M}^{*}(x)\frac{d}{dx} + \mathcal{N}^{*}(x) + \left(V^{(+)}(x)\right)^{*}, \quad (4.20)$$

où les fonctions $\mathcal{M}^{*}(x)$ et $\mathcal{N}^{*}(x)$ sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{*}(x) &= U(x)U'(x) - iA^{*}(x)U(x), && (4.21) \\ \mathcal{N}^{*}(x) &= i[U(x)A(x)]' + A^{*2}(x). && (4.22) \end{aligned}$$

Par la modification apportée au hamiltonien H, il devient évident que l'ancienne condition de la pseudo-hermiticité forte (2.22), i.e. $\eta_+ H = H^{\dagger}\eta_+$, se généralise (transforme) en $\widetilde{\eta}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\dagger}\widetilde{\eta}_+$. En appliquant à cette dernière les expressions différentielles données en (4.14), (4.17) et (4.20) déduites ci-dessus et en comparant respectivement leurs coefficients différentiels, par conséquent, on peut reconnaître à partir de la troisième dérivée que $b(x) = 0$, alors que la seconde dérivée relie le potentiel à son conjugué complexe par l'identité :

$$V^{(+)}(x) = \left(V^{(+)}(x)\right)^* - 4iU(x)G'(x). \tag{4.23}$$

Cependant, les coefficients correspondant à la première dérivée donnent la forme du potentiel, où après intégration, on obtient :

$$V^{(+)}(x) = F^2(x) - G^2(x) - [U(x)F(x)]' - 2iU(x)G'(x) + \epsilon, \tag{4.24}$$

où ϵ est une constante d'intégration. Le dernier coefficient correspond à la dérivée nulle et donne l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} F^2(x) - [U(x)F(x)]' &= \frac{G(x)}{G'(x)}\left(\frac{1}{2}[U(x)F(x)]'' - F(x)F'(x)\right) + \frac{1}{G'(x)}\left(\frac{1}{4}[U^2(x)G''(x)]'\right. \\ &\quad \left. - \frac{G(x)}{4}[U(x)U''(x)]' + \frac{U'(x)U(x)}{4}\left[\frac{G(x)}{U(x)}\right]'' + \frac{U'^2(x)U(x)}{2}\left[\frac{G(x)}{U(x)}\right]'\right) \\ &\quad - \frac{U''(x)U(x)}{4}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

On voit bien que l'équation différentielle (4.25) est très compliquée et la résoudre revient à déduire la *fonction génératrice* $F(x)$ recherchée. Ce faisant, la condition orthogonalité de $\widetilde{\eta}_+$ imposée par la pseudo-hermiticité forte suggère l'existence d'un état fondamental stable $\Psi(x)$ relié à $\mathcal{H}$ via $\widetilde{\eta}_+\Psi(x) = 0$ (soit encore $\mathcal{D}\Psi(x) = 0$).

Ainsi, l'expression de $\Psi(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \rho\,\psi(x) \\ &= \exp\left[i\int^x dx'\frac{A(x')}{U(x')}\right]\psi(x) \\ &\sim \exp\left[-\int^x dx'\frac{F(x')}{U(x')} - i\int^x dx'\frac{G(x') - a(x')}{U(x')}\right]. \end{aligned}$$

La fonction $\Psi(x)$ déduite ci-dessus est entièrement concernée par une transformation de jauge de type :

$$\psi(x) \quad \mapsto \quad \Psi(x) = \rho(x)\psi(x),$$

tel que l'opérateur $\rho(x) = \sqrt{\widetilde{\eta}_+(x)} \equiv \exp\{-i\alpha(x)/2\}$ implémente une *transformation de similarité* de type (2.24), i.e. $h = \rho(x)\mathcal{H}\rho^{-1}(x)$ [17], où h est appelé équivalent hermitien du hamiltonien modifié $\mathcal{H}$ donné en (4.17).

En effet, en tenant compte des expressions de $\rho(x)$ et $\mathcal{H}$, équivalent hermitien h de $\mathcal{H}$, ainsi que son adjoint hermitien $h^\dagger$, s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned} h &= -U^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + 2\left(2ia(x) - U'(x)\right)U(x)\frac{d}{dx} + 4a^2(x) + 2i\left[a(x)U(x)\right]' + V^{(+)}(x), \\ h^\dagger &= -U^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + 2\left(2ia(x) - U'(x)\right)U(x)\frac{d}{dx} + 4a^2(x) + 2i\left[a(x)U(x)\right]' + \left(V^{(+)}(x)\right)^*, \end{aligned}$$

avec $A(x) = a(x) \in \mathbb{R}$ puisque on a trouvé que $b(x) = 0$. Comme h est hermitien, alors nous sommes dans l'obligation d'admettre l'identité $V^{(+)}(x) = \left(V^{(+)}(x)\right)^*$ et en utilisant (4.23) et (4.24), en gardant à l'esprit que le terme de masse est non nul, i.e. $U(x) \neq 0$, on déduit :

$$G(x) \equiv \text{const.} = \sqrt{\epsilon} \qquad \text{et} \qquad V^{(+)}_{\text{réel}}(x) = F^2(x) - [U(x)F(x)]' + \epsilon - \overline{\epsilon},$$

où nous avons posé $\epsilon = \overline{\epsilon}$, sans perte de généralités.

En utilisant l'équation de SCHRÖDINGER $\mathcal{H}\Psi(x) = E\Psi(x)$, avec $E = E_{Re} + iE_{Im}$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$2F(x)G(x) + U(x)G(x)' - U'(x)G(x) = -E_{Im} + i(E_{Re} - \epsilon), \tag{4.26}$$

où ϵ est la constante introduite dans (4.24). Résoudre (4.26) revient à admettre que les deux membres de l'équation sont égaux à une constante (égale à zéro), puisque le membre de gauche est une fonction, tandis que le membre de droite est une constante. Cette considération nous incite à poser $E_{Re} = \epsilon$ et $E_{Im} = 0$, et par conséquent, le spectre d'énergie pour un tel système est bel et bien réel comme le stipule la pseudo-hermiticité.

Dès lors, de l'identité (4.26), on tire la relation connectant les fonctions $F(x)$ à $G(x)$ et $U(x)$ via l'équation différentielle :

$$F(x) = \frac{G(x)}{2}\left[\frac{U(x)}{G(x)}\right]', \tag{4.27}$$

où nous considérons la fonction $F(x)$ comme la fonction génératrice menant à identifier les différents termes du potentiel $V^{(+)}(x)$ donné dans (4.24).

4.2.2 Cas de la pseudo-hermiticité faible

Dans le cas de la pseudo-hermiticité faible, l'opérateur η_- n'admet pas une décomposition du type η_+. Il s'exprime lui-même sous une forme différentielle du premier ordre, i.e.

$$\eta_- \;=\; U(x)\frac{d}{dx} + w(x), \tag{4.28}$$

$$\eta_-^\dagger \;=\; -U(x)\frac{d}{dx} - U'(x) + w^*(x), \tag{4.29}$$

avec $w(x) = f(x) + ig(x)$ et $f, g \in \mathbb{R}$.

Dans la pseudo-hermiticité forte nous avons opté pour un opérateur différentiel du second ordre, tandis que dans le cas de la pseudo-hérmiticité faible notre choix est porté sur un opérateur différentiel du premier ordre donné par la relation (4.28). Ce choix est justifié, puisque η_- est anti-hermitien, i.e. $\eta_-^\dagger = -\eta_-$.

Sous l'action du shift (déplacement) introduit précédemment, η_- et $\eta_-^\dagger$ deviennent :

$$\eta_- \quad \mapsto \quad \widetilde{\eta}_- = U(x)\frac{d}{dx} - iA(x) + w(x), \tag{4.30}$$

$$\eta_-^\dagger \quad \mapsto \quad \widetilde{\eta}_-^\dagger = -U(x)\frac{d}{dx} - U'(x) + iA^*(x) + w^*(x), \tag{4.31}$$

et en appliquant la condition d'anti-hermiticité de $\widetilde{\eta}_-$, c'est-à-dire :

$$\widetilde{\eta}_-^\dagger = -\widetilde{\eta}_-, \tag{4.32}$$

il est facile de déduire la relation

$$U'(x) = 2f(x) + 2b(x). \tag{4.33}$$

La condition de généralisation de la pseudo-hermiticité faible, i.e. $\widetilde{\eta}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger\widetilde{\eta}_-$ nous conduit à comparer entre les différents coefficients différentiels. Par exemple, on déduit de la seconde dérivée que la fonction $b(x) = 0$ (le même résultat obtenu dans le cas de la pseudo-hermiticité forte). Cependant, la première dérivée donne la partie imaginaire du potentiel :

$$V_{Im}^{(-)}(x) = iU(x)f'(x) - U(x)g'(x) - \frac{i}{2}U(x)U''(x), \tag{4.34}$$

tandis que le dernier coefficients correspond à la dérivée nulle, donne après une double intégration par parties, la partie réelle du potentiel :

$$V_{Re}^{(-)}(x) = -g^2(x) - \frac{1}{2}U(x)U''(x) + \frac{1}{4}U'^2(x) + \gamma, \tag{4.35}$$

où γ est une constante d'intégration. Par conséquent, en combinant (4.34) et (4.35), on trouve le potentiel associé à la pseudo-hermiticité faible,

$$V^{(-)}(x) = -g^2(x) - \frac{1}{2}U(x)U''(x) + \frac{1}{4}U'^2(x) - iU(x)g'(x) + \gamma. \tag{4.36}$$

Étant donné que $b(x) = 0$, la fonction génératrice $f(x)$ est donc déduite à partir de (4.33) et est égale à :

$$f(x) = \frac{U'(x)}{2}. \tag{4.37}$$

4.3 Propriétés de l'opérateur h l'équivalent hermitien de $\mathcal{H}$

Nous avons déjà obtenu dans la sous-section 4.2.1 la forme du potentiel hermitien h l'équivalent de $\mathcal{H}$. Nous cherchons dans cette section à déduire les quelques propriétés que h possède. Ce faisant, nous avons déduit l'état :

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \rho(x)\psi(x) \\ &= \exp\left[i\int^x dx'\frac{A(x')}{U(x')}\right]\psi(x) \\ &= \exp\left[-\int^x dx'\frac{F(x')}{U(x')} - i\int^x dx'\frac{G(x') - a(x')}{U(x')}\right],\end{aligned} \tag{4.38}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \rho^{-1}(x)\Psi(x) \\
&= \exp\left[-\int^x \frac{F(x')}{U(x')} - i\int^x dx'\frac{G(x')}{U(x')}\right] \\
&= \exp\left[-\int^x dx'\, W(x')\right], \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

avec $W(x) = F(x) + iG(x)$. En utilisant l'expression de $\psi(x)$ et par identification, on trouve :

$$\rho(x) = \exp\left[i\int^x dx'\frac{a(x')}{U(x')}\right], \qquad (4.40)$$

et qui peut-être identifiée en termes de la fonction $\alpha(x)$ de la façon suivante :

$$\rho(x) = \exp\left[-\frac{i}{2}\,\alpha(x)\right], \qquad (4.41)$$

puisque on a déduit que $A(x) = a(x)$ et $b(x) = 0$. En tenant compte de l'expression de $\alpha(x)$ donnée au début de ce chapitre, il vient immédiatement que l'opérateur $\rho(x)$ est bel et bien hermitien. En effet, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}
\rho^\dagger(x) &= \left(\exp\left[-\frac{i}{2}\,\alpha(x)\right]\right)^\dagger \\
&= \exp\left[\frac{i}{2}\left(-2\int^x dx'\frac{a^*(x')}{U^*(x')}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{i}{2}\left(-2\int^{-x} d(-x')\frac{a(x')}{U(x')}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{i}{2}\left(2\int^x dx'\frac{a(x')}{U(x')}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{i}{2}\,\alpha(x)\right] \\
&= \rho(x), \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

où nous avons pris en considération que les fonctions $a(x)$ et $U(x)$ sont réelles et paires. Nous avons appelé la transformation

$$\psi(x) \quad \mapsto \quad \Psi(x) = \rho(x)\psi(x), \qquad (4.43)$$

une transformation de jauge qui permet de passer de η-orthogonalité à la $\mathcal{PT}$-symétrie.

Nous rappellons qu'un opérateur $\mathcal{H}$ est pseudo-hermitien si et seulement s'il existe un opérateur η, linéaire et réversible, tel que $\mathcal{H}^\dagger = \widetilde{\eta}_\pm \mathcal{H}\widetilde{\eta}_\pm^{-1}$. Par conséquent, le spectre en énergie déduit par une telle construction est réel, malgré le fait que le potentiel associé est complexe.

D'un autre côté, et parce que $\widetilde{\eta}_+$ est défini positif, il est possible d'utliser sa représentation spectrale afin de construire ses racine carrés via l'opérateur ρ, telle que : $\rho(x) = \sqrt{\widetilde{\eta}_+}$ et $\rho(x)$ obtenu est hermitien selon (4.42). Ainsi, on a :

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta \equiv \langle\cdot|\eta\cdot\rangle = \langle\cdot|\rho^2\cdot\rangle = \langle\rho^\dagger\cdot|\rho\cdot\rangle \equiv \langle\rho\cdot|\rho\cdot\rangle.$$

Cette dernière et l'expression de $\rho(x)$ stipule l'existence d'un opérateur h implémenté par la transformation de similarité suivante :

$$h = \rho(x)\mathcal{H}\rho^{-1}(x) \tag{4.44}$$

où h est l'équivalent hermitien du hamiltonien modifié $\mathcal{H}$.

4.4 À la recherche d'une correspondance entre les pseudo hermiticités faible et forte

Nous aborderons dans cette section la partie de notre travail la plus importante, puisque il est question de chercher une connexion (correspondance) reliant les deux pseudo-hermiticités faible et forte. Dans le but de réaliser correctement cette tâche, nous allons partager cette section en deux parties ; la première partie concerne la connexion des fonctions génératrices déduites $F(x)$ et $f(x)$ via une (des) transformation(s) de coordonnée(s), alors que la seconde partie est consacrée à établir une relation directe reliant les deux pseudo-hermiticités $\widetilde{\eta}_+$ et $\widetilde{\eta}_-$.

Il est évident que pour obtenir une identité reliant η_+ à η_- (cas d'une masse constante), il suffit d'éliminer le déplacement en impulsion et de poser dans nos équations $U(x) = 1$.

4.4.1 À la recherche des transformations de coordonnées

Les arguments trouvés dans les sections précédentes nous conduisent d'une manière naturelle à chercher une connexion entre le concept de la complémentarité introduit par Bagchi et Quesne [27] et les transformations de coordonnées via leurs fonctions génératrices respectives $F(x)$ et $f(x)$. Le fait que ces dernières appartiennent au même espace de configuration, $\{\mathfrak{X}\}$, nous incite à supposer l'existence d'une transformation les reliant.

Mathématiquement parlant, on admet dès lors l'existence d'une transformation de coordonnées, $x \equiv x(\xi)$, qui transforme $F(x)$ en $f(\xi)$ de la manière suivante :

$$F(x) = \frac{G(x)}{2}\left[\frac{U(x)}{G(x)}\right]' \qquad \xrightarrow{x\equiv x(\xi)} \qquad f(\xi) = \frac{\overline{U}'(\xi)}{2}. \tag{4.45}$$

Probablement, le moyen le plus intéressant pour résoudre ce problème consiste à construire une équation différentielle à partir de la relation :

$$F(x) = \frac{G(x)}{2}\left[\frac{U(x)}{G(x)}\right]', \tag{4.46}$$

et assumer qu'elle est maintenue invariante sous l'action de la transformation des coordonées. Ainsi, (4.46) peut se mettre sous la forme :

$$U(x)\frac{dZ(x)}{dx} = 2F(x)Z(x), \tag{4.47}$$

où la fonction $Z(x)$ est définie par :

$$Z(x) \;=\; \frac{U(x)}{G(x)}. \tag{4.48}$$

Afin de résoudre ce problème, nous introduisons deux nouvelles fonctions $R(\xi)$ et $S(\xi)$ et nous admettons que les fonction $U(x), F(x)$ et $Z(x)$ se fixent sous l'action de la transformée des coordonnées comme suit (voir [35], Éqs. (3.9)) :

$$U(x) \;\rightarrow\; \overline{U}(\xi) \;=\; U[x(\xi)]\frac{d\xi(x)}{dx}, \tag{4.49}$$

$$F(x) \;\rightarrow\; \overline{F}(\xi) \;=\; F[x(\xi)]S(x), \tag{4.50}$$

$$Z(x) \;\rightarrow\; \overline{Z}(\xi) \;=\; Z[x(\xi)]R(x),. \tag{4.51}$$

telle que l'équation différentielle dans (4.47) se transforme d'une manière similaire, i.e.

$$\overline{U}(\xi)\frac{d\overline{Z}(\xi)}{d\xi} = 2\overline{F}(\xi)\overline{Z}(\xi), \tag{4.52}$$

à la seule condition que les fonctions introduites $R(\xi)$ et $S(\xi)$ sont reliées entre elles par la relation :

$$R(\xi)S(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad R(x) = S^{-1}(x). \tag{4.53}$$

En susbtituant (4.49)-(4.51) dans (4.52), nous déduisons une équation différentielle :

$$U(x)\frac{dZ(x)}{dx} = 2\left(S(x)F(x) - U(x)\frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}\right)Z(x), \tag{4.54}$$

et en identifiant cette dernière à (4.47), en tenant compte de $R(x) = S^{-1}(x)$, on trouve que :

$$F(x) = F(x)S(x) - U(x)\frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)} \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{U(x)R(x)}{1-R(x)}\frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}. \tag{4.55}$$

En intégrant (4.55) par rapport à $R(x)$, on déduit :

$$R(x) = 1 + \delta\exp\left\{-2\int^{x}\frac{F(x')}{U(x')}\,dx'\right\}, \tag{4.56}$$

et par conséquent, la fonction $S(x)$ est donnée par :

$$S(x) = \left(1 + \delta\exp\left\{-2\int^{x}\frac{F(x')}{U(x')}\,dx'\right\}\right)^{-1},$$

où $\delta \in \mathbb{R}$. On admet, par la suite, l'existence d'une *transformation de similarité* reliant $F(x)$ à $f(x)$ et est donnée par (voir [35], Éqs. (3.11)) :

$$F(x) \quad \mapsto \quad f(x) \equiv S(x)F(x) = F(x) + U(x)\frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}, \tag{4.57}$$

en plus, on se propose de redéfinir la fonction génératrice $F(x)$ donnée en (4.50) sous la forme :

$$F(x) \quad \to \quad \overline{F}(\xi) \quad = \quad F\left[x(\xi)\right]S(\xi) \equiv F[x(\xi)]\frac{d\xi(x)}{dx}, \tag{4.58}$$

en définissant $S[\xi(x)] = d\xi(x)/dx$, ($i.e.$ $S^{-1}[x(\xi)] \equiv R[x(\xi)] = dx(\xi)/d\xi$), et en utilisant (4.27) et (4.57), on déduit :

$$f(\xi) = F[x(\xi)]S(\xi) = \frac{G[x(\xi)]S(\xi)}{2}\left(\frac{U[x(\xi)]}{G[x(\xi)]}\right)'. \tag{4.59}$$

Comme nous avons affaire à deux fonctions inconnues $R(x)$ et $S(x)$, alors le meilleur moyen de les déterminer revient à fixer l'une d'entre elles et de la connecter soit à $F(x)$ ou $G(x)$. C'est précisément ici que nous invoquons une restriction sur (4.59), telle que $G[x(\xi)]S(\xi) = 1 \equiv R(\xi)S(\xi)$, qui mène à définir la fonction génératrice $G(x)$, en utilisant (4.58), comme suit :

$$G[x(\xi)] \equiv S^{-1}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = R(\xi), \tag{4.60}$$

et en tenant compte de (4.49) et (4.60), la relation (4.59) est finalement réduite à :

$$\begin{aligned} f[\xi(x)] \quad &= \quad \frac{1}{2}\left(U[x(\xi)]\frac{d\xi(x)}{dx}\right)' \\ &= \quad \frac{\overline{U}'(\xi)}{2}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

qui complète la démonstration de l'assertion donnée dans (4.45). Ainsi l'application d'une transformation de similarité de type (4.57) permet de transformer la fonction génératrice $F(x)$ associée à la pseudo-hermiticité forte à la fonction génératrice $f(x)$ associée à la pseudo-hermiticité faible.

4.4.2 À la recherche d'une relation reliant $\widetilde{\eta}_+$ à $\widetilde{\eta}_-$

Nous poursuivons notre objectif établi ci-dessus en cherchant à construire une identité connectant $\widetilde{\eta}_+$ à $\widetilde{\eta}_-$ qui, dans cet ordre, est principalement donnée par une transformation de similarité [35],

$$\hat{O} = \mathcal{B}(x)\,\hat{o}\,\mathcal{B}^{-1}(x),$$

où $\hat{O}$ et $\hat{o}$ sont deux opérateurs à déterminer et $\mathcal{B}(x)$ est la fonction qui implémente la transformation de similarité donnée dans (4.57). Cependant, la seule connaîssance de l'hermicitité (resp. anti-hermiticité) de $\widetilde{\eta}_+$ (resp. $\widetilde{\eta}_-$) suggère que la transformation de similarité n'est pas *unique*, outre le fait que $\widetilde{\eta}_+$ est un opérateur du second-ordre tandis que $\widetilde{\eta}_-$ est du premier ordre.

Afin d'éviter cette difficulté, il est important de mentionner l'existence d'un opérateur différentiel du premier ordre $\mathcal{D}$ introduit dans (4.12), relié à $\widetilde{\eta}_+ \equiv \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$, qui est le mieux adapté à ce genre de calculs que l'est $\widetilde{\eta}_+$. Ainsi, l'implémentation de la transformation de similarité mentionnée ci-dessus concerne uniquement les deux opérateurs $\hat{O} = \mathcal{D}$ et $\hat{o} = \widetilde{\eta}_-$, et aussi la fonction réelle $\mathcal{B}(x) = R^{1/2}(x)$, i.e.

$$\mathcal{D} = R^{1/2}(x)\widetilde{\eta}_- R^{-1/2}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}^\dagger = R^{-1/2}(x)\widetilde{\eta}_-^\dagger R^{1/2}(x). \tag{4.62}$$

En insérant (4.30) dans (4.62), et en tenant compte des contraintes déjà obtenues dans les sections précédentes $A(x) = a(x) \in \mathbb{R}$ et $b(x) = 0$, et en identifiant avec (4.57), on obtient $G(x) = g(x)$. Ainsi nous pouvons conclure que la conséquence directe de la transformation de similarité est que les parties réelles de $W(x)\,(= F(x) + iG(x))$ et $w(x)\,(= f(x) + ig(x))$ sont connectées à travers une transformation de coordonnée donnée par (4.45), alors que les parties imaginaires sont égales.

Dès lors, en agissant $\mathcal{D}^\dagger$ sur $\mathcal{D}$, on retrouve la relation,

$$\begin{aligned}\widetilde{\eta}_+ &\equiv \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} \\ &= R^{-1/2}(x)\ \widetilde{\eta}_-^\dagger\ R(x)\,\widetilde{\eta}_-\ R^{-1/2}(x),\end{aligned} \tag{4.63}$$

connectant $\widetilde{\eta}_+$ à $\widetilde{\eta}_-$ à travers la fonction $R(x)$. Un calcul mathématique simple montre que l'opérateur $\widetilde{\eta}_+$ peut-être écrit soit sous sa forme *factorisable* comme un produit d'une pair d'opérateurs différentiels du premier ordre, i.e.

$$\widetilde{\eta}_+ = \left(\widetilde{\eta}_-^\dagger - U(x)\frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}\right)\left(\widetilde{\eta}_- - U(x)\frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}\right), \tag{4.64}$$

ou encore sous sa forme *décomposée*,

$$\widetilde{\eta}_+ = \widetilde{\eta}_-^\dagger\widetilde{\eta}_- + \frac{1}{2}\frac{U^2(x)R''(x)}{R(x)} + \frac{U(x)U'(x)R'(x)}{R(x)} - \frac{1}{4}\frac{R(x)-3}{R(x)-1}\left(\frac{U(x)R'(x)}{R(x)}\right)^2, \tag{4.65}$$

où nous avons utilisé (4.55) et (4.57) afin de déduire (4.65).

Quelles genres de transformations ? – Probablement la question qui nous vient à l'esprit est de savoir à quelle(s) genre(s) de transformation(s) de coordonnée(s) nous avons affaire, ou, autrement, devions-nous éviter ? Répondre à cette question revient à prendre en considération les expressions sous la racine carrée de (4.64) et du dénominateur dans (4.65) dans l'unique but d'éviter une possible divergence de $\widetilde{\eta}_+$. Ainsi, il est impératif que les deux expressions doivent être libre de toutes singularités, i.e. $R(x) \neq 0$ et $R(x) - 1 \neq 0$.

En effet, si nous supposons, en tenant compte de (4.60), que

$$R(\xi) \equiv \frac{dx(\xi)}{d\xi} = 0 \qquad \text{et} \qquad R(\xi) \equiv \frac{dx(\xi)}{d\xi} = 1,$$

alors il est facile de constater que le(s) choix porté(s) sur les transformation(s) de coordonnée(s) ne peuvent pas être des transformations constantes $x(\xi) = k_1$, ni même des transformations de coordonnées linéaires $x(\xi) = k_0\xi + k_2$, avec $k_0 = 1$ et $k_{1,2}$ sont des constantes. Ainsi, nous concluons que les seules transformations de coordonnées qui préservent la convergence de $\widetilde{\eta}_+$ sont des transformations de coordonnées de types linéaires (avec $k_0 \neq 1$) et non-linéaires.

Cas d'une masse constante (M.C.) – Le cas d'un système doté d'une masse constante est un cas particulier et sa déduction revient à admettre quelques contraintes sur un système de type M.D.P. et dont voici quelques conséquences :

1. Un système de type M.C. est obtenu moyennant quelles conditions. En supprimant le déplacement effectué sur l'impulsion et en posant $U(x) = 1$ dans (4.64) et (4.65), on déduit :
$$\eta_+ = \left(\eta_-^\dagger - \frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}\right)\left(\eta_- - \frac{d}{dx}\ln\sqrt{R(x)}\right), \tag{4.66}$$
ou
$$\eta_+ = \eta_-^\dagger\eta_- + \frac{1}{2}\frac{R''(x)}{R(x)} - \frac{1}{4}\frac{R(x)-3}{R(x)-1}\left(\frac{R'(x)}{R(x)}\right)^2. \tag{4.67}$$
2. Si on pose $\widetilde{\eta}_+ \equiv \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} = \mathbb{1}$ dans la condition de la pseudo-hermiticité $\widetilde{\eta}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger\widetilde{\eta}_+$, alors notre hamiltonien modifié $\mathcal{H}$ est hermitien. Il est clair dans ce cas que $\mathcal{D}$ est un opérateur unitaire, i.e. $\mathcal{D}^\dagger = \mathcal{D}^{-1}$. Il en est de même pour le cas $\eta_+ \equiv d^\dagger d = \mathbb{1}$.
3. Enfin, il est intéressant d'étudier le cas spécial de la factorisation :
$$\eta_+ = \eta_-^\dagger\eta_-.$$
Ceci est possible si et seulement si l'expression :
$$\frac{1}{2}\frac{R''(x)}{R(x)} - \frac{1}{4}\frac{R(x)-3}{R(x)-1}\left(\frac{R'(x)}{R(x)}\right)^2 = 0,$$
de (4.67) est nulle, menant à une équation différentielle ordinaire (E.D.O.) très facile à résoudre en termes de la fonction $R(x)$. Cependant, la résolution de cette E.D.O. est intimement liée à la classification des E.D.O. ainsi que leurs solutions en théorie des groupes. Mais ceci est une autre histoire.

Conclusion générale

Il a été question dans ce mémoire de master d'aborder l'un des concepts le plus important introduit en mécanique quantique ces dernières années, à savoir *la pseudo-hermiticité*.

Nous avons commencé par décrire au premier chapitre la notion de la $\mathcal{PT}$-symétrie, importante pour construire des hamiltoniens pseudo-hermitiens. Le second chapitre est entièrement consacré au concept de la pseudo-hermiticité, quand au troisième chapitre, il été question d'étudier des systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position (MDP), puisque nous pensons que ce genre de système nous renseigne d'avantage sur les systèmes ayant une masse constante.

L'essentiel de notre travail se trouve dans le quatrième chapitre. Il été question de chercher un moyen rigoureux, sur le plan mathématique, afin de connecter les deux concepts de la pseudo-hermiticité faible et forte. En effet, sous l'action d'un déplacement de l'impulsion p, nous avons vu que la pseudo-hermiticité, pour des systèmes MDP, possède des propriétés très intéressantes, telles que celles de la linéarité portée par l'opérateur η et l'anti-linéarité associée par l'opérateur τ. Nous avons par la suite déduit des fonctions génératrices des potentiels complexes associées aux deux pseudo-hermiticités. Nous avons aussi obtenu, via une transformation de jauge, l'hamiltonien hermitien h, l'équivalent de $\mathcal{H}$ associé à la pseudo-hermiticité. Afin d'établir la connexion entre les deux pseudo-hermiticités, nous avons opté à suivre le raisonnement suivant :

1. Au premier lieu, nous avons soumis l'hypothèse que les deux fonctions génératrices déduites, appartenant au même espace de configuration, sont intimement connectées par des transformations de coordonnées. Il s'est avéré que ces transformations sont de type linéaires (sauf la transformation ayant une tangente différente de 1) et non-linéaires.

2. Au second lieu, nous avons construit une transformation de similarité et qui conduit aux relations (4.64) et (4.65), reliant ainsi $\widetilde{\eta}_+$ à $\widetilde{\eta}_-$.

Le cas d'une masse constante a été aussi déduit.

Références

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Mécanique Quantique, Édition Hermann (1977).

[2] H. Bouchriha, Introduction à la physique quantique : cours et applications. Centre de publication universitaire, Tunis (2002).

[3] N. Zettili, Quantum Mechanics, Concepts and Applications, Second edition, John Wiley and Sons Ltd, (2009).

[4] D. Bessis, Private communication with C. M. Bender (1993).

[5] C. M. Bender, S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT-Symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[6] C. M. Bender, S. Boettcher, Peter N. Meisinger, PT-Symmetric Quantum Mechanics, J. Math. Phys. **40**, 2201 (1999).

[7] C. M. Bender and Q. Wang, Comment on " Some properties of eigenvalues and eigen-functions of the cubic oscillator with imaginary coupling constant" J. Phys. A **34**, 3325 (2001).

[8] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics,Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).

[9] C. M. Bender, Making sense of No-Hermitian Hamiltonians. Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).

[10] C. M. Bender, G. V. Dunne, P.N. Meisenger, Complex periodic potentials with real band spectra, Phys. Lett. A **252**, 272 (1999).

[11] C. M. Bender and S. Boettcher, and V. M. Savage, Conjecture on the interlacing of zeros in complex Sturm-Liouville problems, J. Math. Phys. **41**, 6381 (2000).

[12] A. Zafer, C, PT and CPT-invariance of pseudo-Hermitian Hamiltonians, J. Phys. A : Math. Gen. **36**, 9711 (2003).

[13] M. Znojil, PT-Symmetric model with an interplay between kinematical and dynamical non-localities, J. Phys. A : Math. Theor. **48**, 195303 (2015).

[14] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).

[15] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. **43**, 2814 (2002).

[16] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. **43**, 3944 (2002).

[17] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7**, 1191 (2010).

[18] A. Mostafazadeh, Conceptual Aspects of PT-Symmetry and pseudo-Hermiticity : A status Report. Phys, Scr. **82**, 038110 (2010).

[19] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity for a Class of Nondiagonalizable Hamiltonians, J. Math. Phys. **43**, 6343 (2002).

[20] A. Mostaphazadeh, On the Pseudo-Hermiticity of a Class of PT-Symmetric Hamiltonians in One Dimension, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1973 (2002).

[21] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity and generalized PT and CPT-symmetries, J. Math. Phys. **44**, 974 (2003).

[22] A. Mostaphazadeh, Exact PT-Symmetry is Equivalent to Hermiticity, J. Math. Phys. **44**, 974-989 (2003).

[23] A. Mostafazadeh, Is Weak Pseudo-Hermiticity Weaker than Pseudo-Hermiticity. J. Math. Phys. **47**, 092101 (2006).

[24] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian Description of PT-Symmetric Systems Defined on a Complex Contour, J. Phys. A **38**, 3213 (2005).

[25] A. Mostafazadeh, A. Batal, Physical Aspects of Pseudo-Hermitian and PT-Symmetric Quantum Mechanics, J. Phys. A : Math. Gen. **37**, 11645 (2004).

[26] L. Solombrino, Weak pseudo-Hermiticity and antilinear commutant. J. Math. Phys. **43**, 5439 (2002).

[27] B. Bagchi, C. Quesne, Pseudo-Hermiticity, weak pseudo-Hermiticity and η-orthogonality condition. Phys. Lett. A **301**, 173 (2002).

[28] H. F. Jones, On pseudo-Hermitian Hamiltonians and their Hermitian counterparts J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 1741 (2005).

[29] Z. Ahmed, Pseudo-Hermiticity of Hamiltonian under imaginary shift of co-coordinate real spectrum of complex potentiels. Phys. Lett. A **294**, 287 (2002).

[30] B. Bagchi, C. Quesne, M. Znojil, Generalized continuity equation and modified Normalization PT-Symmetric Mod. Phys. Lett. A **16**, 2047 (2001).

[31] S-A. Yahiaoui, M. Bentaiba, Pseudo-Hermitian coherent states under the generalized quantum condition with position-dependent mass, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 44034 (2012).

[32] S-A. Yahiaoui, O. Cherroud, M. Bentaiba. J. Math. Phys. **48**, 113503 (2007),
M. Bentaiba, S-A. Yahiaoui, L. Chetouani. Phys. Lett. A **331**, 175 (2004),
M. Bentaiba, L. Chetouani, A. Mazouz, Phys. Lett. A **295**, 13 (2002).

[33] O. Von Roos, Position-dependent effective masses in semiconductor theory, Phys. Rev. B **27**, 7547 (1983).

[34] D. J. BenDaniel, C. B. Duke, Phys. Rev. **152**, 683 (1966).

[35] G. Lévai, J. Phys. A : Math. Gen. **37**, 3809 (1994).

[36] M. I. Estrada-Delgado, David J. Fernandez. arXiv : math-ph/1902.09095 (2019).

[37] S. A. Yahiaoui, Sur les procédures de resommation, connexion et génération des potentiels quantiques multidimentionnes, thèse de Doctorat, (2009).

[38] G.-X. Ju, C.-Y. Cai, Z.-Z. Ren, Generalized Harmonic Oscillator and the Schrödinger Equation with Position-Dependent Mass. arXiv : quant-ph/0707.3259 (2007).

[39] M. Djazi, Etude de quelques systèmes quantiques avec masse dépendante de la position par l'approche supersymétrique, Mémoire de Magister, (2012).

[40] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, Supersymmetry and the spontaneous breakdown of PT-symmetry, J. Phys. A **34**, L391 (2001).

[41] B. Khantoul, La pseudo-hermiticité et sa généralisation aux systèmes dépendants du temps, Mémoire de Magister, (2010).

[42] G. A. Mezincescu, Some properties of eigenvalues and eigenfunctions of the cubic oscillator with imaginary coupling constant, J. Phys. A **33**, 4911 (2000).

[43] H. F. Jones, On pseudo-Hermitian Hamiltonians and their Hermitian counterparts. J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 1741 (2005).

[44] Q. Wang, Calculation of C Operator in PT-Symmetric Quantum Mechanics, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, **50**, 986 (2004).

[45] G. Bastard, Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructure, 1988, Les Ulis : Éditions de Physique.

[46] L. I. Serra and E. Lipparini, Europhys. Lett **40**, 667 (1997).

[47] M. Barranco, M. Pi, S. M. Gatica, E. S. Hernandez and J. Navarro, Phys. Rev. B **56**, 8997 (1997).

[48] R. A. Morrov, K. R. Brownstein, Phy. Rev. B **30**, 678 (1984).

[49] M. F. Manning, Phys. Rev. **48**, 161 (1935).

[50] E. Witten, Nucl. Phys. B **185**, 513 (1981).

[51] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatem, Phys. Rep. **251**, 267(1995).

[52] F. Iachello, Lie Algebras and Application, Springer, Berlin (2006).

[53] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhtme, Phys. Rep. **251**, 276 (1995).

[54] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **180**, 1 (1942).

[55] W. Pauli, Rev. Mod.. Phys. **15**, 175 (1943).

[56] T. D. Lee, G. C. Wick, Nucl. Phys. B **9**, 209 (1969).