

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
FACULTE DES SCIENCES D'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en Aéronautique
Option : STRUCTURE

Thème

**Réalisation d'un code de calcul pour la détermination
des caractéristique aérodynamique d'un profil d'aile
par la méthode des différences finies spectrale**

Dirigé par :

Mr T ZEBBICHE

Présenté par :

BOUTHRAIA Mourad

Année : 2011

REMERCIEMENTS

Mes vifs et respectueux remerciements vont tout d'abord à mon Encadreur Monsieur T. ZEBBICHE, Maître de conférences au département d'Aéronautique à l'université de Blida, à qui je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance surtout pour sa disponibilité et ses prestigieux conseils dérivant de sa très haute compétence, qui ont donné un encadrement de très haut niveau et de qualité dans la faisabilité de ce travail.

Egalement va notre reconnaissance a tous les enseignants du département d'Aéronautique sous l'égide de qui nous a vous eu la joie et l'honneur d'étudier.

Je remercie Monsieur SALHI Merouane, Magister au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour ses conseils et perspectives concernant mon travail.

Je remercie enfin tout le personnel du département d'aéronautique de l'université de Blida, ainsi que tous mes amis, pour l'aide amical qu'ils m'ont apportés à des titres divers.

Enfin, mes vives pensées vont à toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ce parcours et à toutes celles qui m'ont aidée et ont ainsi contribué par leurs présences au bon déroulement de mon mémoire de magister.

REMERCIEMENTS

Mes vifs et respectueux remerciements vont tout d'abord à mon Encadreur Monsieur T. ZEBBICHE, Maître de conférences au département d'Aéronautique à l'université de Blida, à qui je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance surtout pour sa disponibilité et ses prestigieux conseils dérivant de sa très haute compétence, qui ont donné un encadrement de très haut niveau et de qualité dans la faisabilité de ce travail.

Egalement va notre reconnaissance a tous les enseignants du département d'Aéronautique sous l'égide de qui nous a vous eu la joie et l'honneur d'étudier.

Je remercie Monsieur SALHI Merouane, Magister au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour ses conseils et perspectives concernant mon travail.

Je remercie Monsieur KHODJA Med, Magister au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour ses conseils et perspectives concernant mon travail.

Je remercie Monsieur BOUKERT Billel, Magister au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour ses conseils et perspectives concernant mon travail.

Enfin, mes vives pensées vont à toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ce parcours et à toutes celles qui m'ont aidée et ont ainsi contribué par leurs présences au bon déroulement de mon mémoire de magister.

DEDECACES

Je dédier ce modeste travail, synonyme de concrétisation de tous mes efforts fournis ces dernières années

A mes très chers parents, ma raison de vivre, symbole de courage. Et de sacrifice, que Dieu les gardes.

A mes très chères sœurs.

A mes très chers frères

A tous mes amis

*Mohamed, Abd nour, Samir, Amine,
Abd Elkader, Ahmed, Mahdi, Mustapha,
Mohamed, Billel, Merouane*

A tous mes Amis de la promotion d'ingénieur 2010-2011

Bouthraia mourad

INTRODUCTION GENERALE

Les phénomènes physiques qui composent les écoulements en aérodynamique sont régis par les lois de conservations de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie. L'objectif final d'une étude en ingénierie est d'obtenir une description quantitative du problème physique par des méthodes analytiques, expérimentales ou numériques.

Il est connu par tous que les méthodes analytiques sont limitées à des cas simples. Dans la plupart des écoulements réels, les hypothèses simplificatrices qui permettent de trouver une solution analytique, ne sont plus valables. L'outil expérimental a prouvé son efficacité dans la reproduction des écoulements, grâce notamment au concept de similitude. La preuve est la large utilisation des souffleries aérodynamiques. L'inconvénient majeur de l'expérimental est le coût exorbitant des stations de mesure. Cela est dû à plusieurs facteurs tels que le besoin de précision dans les mesures et la réalisation des installations qui sont spécifiques au problème.

L'amélioration qu'a connue l'outil informatique depuis 1980, du point de vue vitesse de calcul des ordinateurs, a contribué au développement du Calcul Numérique en Dynamique des Fluides (Computational Fluid Dynamic CFD).

Ces dernières années ont vu l'apparition de nouvelles méthodes numériques qui ont pris leurs racines des méthodes conventionnelles tel que la Méthode des Eléments Finis et la méthode des Volumes Finis. La méthode qu'on rencontre le plus dans la littérature est la *Discontinuous Galerkin Finite Element*. La spécificité de ces méthodes émergentes est qu'elles permettent l'utilisation d'ordres élevés de discrétisation, dont le but est d'optimiser les calculs et accélérer la convergence.

C'est dans cette optique que se situe notre travail. Nous procédons à la réalisation d'un code de calcul des écoulements externes autour d'un profil d'aile. Pour ce faire, nous allons résoudre numériquement les équations de Navier Stokes bidimensionnelles compressibles instationnaires. Nous utilisons une nouvelle méthode numérique appelée Différences Finies Spectrale avec un schéma explicite pour la discrétisation temporelle.

Le développement d'un tel code de calcul permet de déterminer les champs de pression de température et de vitesse pour un écoulement externe autour d'un corps bidimensionnel. Notre objectif est de parvenir à calculer les coefficients aérodynamiques en utilisant les champs de pression et de contrainte. Une des applications les plus importantes de ce code, la caractérisation d'un profil d'aile. Le profil d'aile ou airfoil en anglais, englobe aussi bien les sections droites des pales d'hélicoptère et des aubes des turbines et des

compresseurs et d'autres accessoires qui manipulent les forces aérodynamiques telles que les éoliennes. On espère ainsi valider notre programme dans un premier temps pour des cas simples. Puis en second lieu élargir un peu plus son champ d'action aux cas complexes par exemple le cas des écoulements supersoniques.

Ce rapport est structuré de la façon suivante :

Le premier chapitre introduit l'écoulement autour d'un profil d'aile et les phénomènes physiques qui le caractérisent. Le but de ce chapitre est de définir le type d'écoulement que nous proposons de traiter.

Le deuxième chapitre contient le développement mathématique nécessaire à la conception de deux parties importantes de notre code. La première étant le pré-traitement qui inclue la génération de la géométrie du profil. La deuxième partie est le post-traitement qui est le calcul des coefficients aérodynamiques ainsi que le tracé des courbes du C_p et du C_f .

Le troisième chapitre traite de la formulation des équations qui régissent le phénomène, ainsi que les simplifications et les hypothèses spécifiques au problème étudié.

Au quatrième chapitre on présente la méthode des Différences Finies Spectrale développé par Yen Liu et Z.J.Wang [1, 2, 4]. On explique les différentes étapes de la discrétisation ainsi que le choix du schéma de résolution des équations. Cette partie est très importante car elle constitue le modèle numérique sur lequel se base l'implémentation de notre code. Nous tenons à souligner notre apport personnel au niveau du choix des conditions aux limites ainsi que leur implémentation, cette partie n'étant pas disponible dans les publications propres à la méthode.

Le cinquième chapitre résume, dans une série de tableaux et de diagrammes, l'organisation du code. Nous avons tenu à ajouter cette partie dans le rapport dans le but de faciliter la lecture du code (écrit en Fortran) pour d'éventuelles modifications ou apports futures.

Le dernier chapitre est dédié à la présentation d'une série de cas tests pour la validation du code. On choisit pour ces tests des cas dont la documentation est disponible pour pouvoir comparer les résultats par la suite. Ces résultats peuvent être qualitatifs, tel que les lignes de courant et les contours de vitesses, ou bien quantitatifs tel que les courbes du C_p , la valeur du C_L ou du C_d .

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS

Le calcul numérique d'un écoulement autour d'un profil consiste à déterminer les champs de pression, vitesse, température et masse volumique, à partir desquelles on va calculer les caractéristiques aérodynamiques du profil. Pour que ce calcul soit adéquat, le problème traité doit être bien spécifique, du point de vue ; régime d'écoulement, type de fluide et phénomènes physiques engendrés.

Dans ce chapitre, on présente quelques notions sur les régimes d'écoulements compressible incompressible et laminaire turbulent, tout en mentionnant les phénomènes engendrés par chaque régime d'écoulement.

I.1 Écoulement compressible et écoulement incompressible

Un écoulement est dit compressible si les variations de pression sont suffisamment importantes pour engendrer des modifications non négligeables de la masse volumique du fluide considéré. Les écoulements de liquides ou ceux concernant des gaz s'écoulant à une vitesse très inférieure à la vitesse du son sont dits « incompressibles ». On considère alors la masse volumique du fluide constante, ce qui permet de simplifier les équations de Navier-Stokes.

Pour les gaz, il est nécessaire de s'intéresser aux gammes de vitesses mises en jeu. On considère pour cela un nombre sans dimension bien connu en aérodynamique, le nombre de Mach, défini comme le rapport entre la vitesse de l'écoulement V et la vitesse du son a :

$$M = \frac{V}{a}$$

Le nombre de Mach permet de distinguer les régimes subsoniques ($M < 0.8$), transsoniques ($0.8 < M < 1.2$), supersoniques ($1.2 < M < 3$) et hypersoniques ($M > 3$). Les trois derniers régimes comportent le phénomène d'apparition d'ondes de choc qui rend l'approche numérique plus complexe et plus coûteuse.

D'autre part, pour des écoulements dont le nombre de Mach est inférieur à 0.3, le calcul des variables de l'écoulement se fait souvent en considérant le fluide incompressible, tandis que pour $M > 0.3$, l'écoulement est considéré compressible. Par exemple, pour un avion civil, le

nombre de Mach de croisière se situe autour de $M = 0.8$, imposant la prise en compte des effets de compressibilité.

I.2 Écoulement laminaire et turbulent

Une autre caractéristique importante en dynamique des fluides concerne le régime d'écoulement dans lequel on se place. On est ainsi amené à considérer deux grandes catégories d'écoulements : les écoulements laminaires et les écoulements turbulents. Le régime laminaire se caractérise par un glissement des couches fluides les unes sur les autres. Il présente ainsi une « régularité structurelle » qui se traduit au niveau des variables de l'écoulement (vitesse, pression, masse volumique, température...) par des variations de faible amplitude et très basses fréquences. Par comparaison, le régime turbulent se distingue par une agitation du fluide et l'apparition de structures tourbillonnaires. En régime turbulent, les variables de l'écoulement subissent des fluctuations erratiques tant en amplitude qu'en fréquence, qui sont intrinsèques à ce régime et constituent en quelque sorte la « signature » locale de l'agitation turbulente. Ainsi, en régime laminaire, les variables caractéristiques de l'écoulement sont des fonctions déterministes de l'espace et du temps, au sens où la répétition d'un mouvement réel à partir de conditions initiales et aux limites identiques redonne des valeurs identiques à ces fonctions, aux seules incertitudes de mesure près. En régime turbulent, il n'en va plus ainsi.

I.3 Fluide parfait et fluide visqueux

Au cours du mouvement d'un fluide, les molécules transportent leur masse, leur quantité de mouvement et leur énergie d'un point à un autre du milieu. Ces processus de transport à l'échelle moléculaire se traduisent à l'échelle macroscopique par les phénomènes de diffusion de masse et de quantité de mouvement ainsi que par la conduction thermique.

La diffusion de quantité de mouvement s'effectue par frottement des couches fluides les unes sur les autres et le coefficient de diffusion associé est appelé viscosité du fluide ($\mu = 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ pour l'air dans les conditions normales de température et de pression). Cette propriété est notamment à l'origine d'efforts de frottement lorsque le fluide est en contact avec une paroi solide. Sous certaines conditions, la viscosité peut être négligée. On considère alors un fluide à viscosité nulle : *le fluide parfait*.

Les problèmes de type visqueux sont ceux pour lesquels les frottements ont une influence notable sur la solution. Lorsqu'on souhaite évaluer si l'approche fluide parfait peut être envisagée pour un problème, on a classiquement recours au nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

Où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide, V une échelle de vitesse caractéristique du problème et L une échelle de longueur similaire. Ce nombre permet de comparer les effets d'inertie liés à la quantité de mouvement du fluide (numérateur), et les effets visqueux liés à la viscosité (dénominateur).

I.4 Approche bi- ou tri-dimensionnelle

La réalité physique est tridimensionnelle par nature. On ne peut donc espérer restituer un écoulement dans toute sa complexité qu'en utilisant l'approche tridimensionnelle. Parfois, sous certaines approximations, une étude bidimensionnelle peut s'avérer suffisante pour dégager les caractéristiques essentielles d'une configuration.

Si on prend le cas de la détermination des caractéristiques aérodynamiques des ailes d'avion. Un profil est une coupe transversale d'aile. L'envergure de l'aile est généralement suffisamment importante pour que l'on puisse considérer que l'écoulement est identique sur toutes ses coupes transversales, tout au moins sur la majorité d'entre elles, situées suffisamment loin des bouts d'aile. On peut donc s'attendre à ce que les qualités aérodynamiques de l'aile (portance et traînée en particulier) soient, en fait, dictées en grande partie par la forme de son profil caractéristique.

Il est donc très pertinent de s'intéresser à l'écoulement sur un profil et d'adopter ainsi une approche bidimensionnelle de l'aile afin de dégager ses performances aérodynamiques en première approximation.

I.5 L'effet de l'écoulement autour d'un profil

Un profil qui a un certain angle d'incidence par rapport à l'écoulement incident subit des forces de surpression à l'intrados et des forces de dépression à l'extrados. Ces forces se résument globalement en une résultante F_R (**figure I.1**), qui elle-même peut se décomposer en portance F_y , perpendiculaire au vent relatif, et en traînée F_x , parallèle à l'écoulement incident.

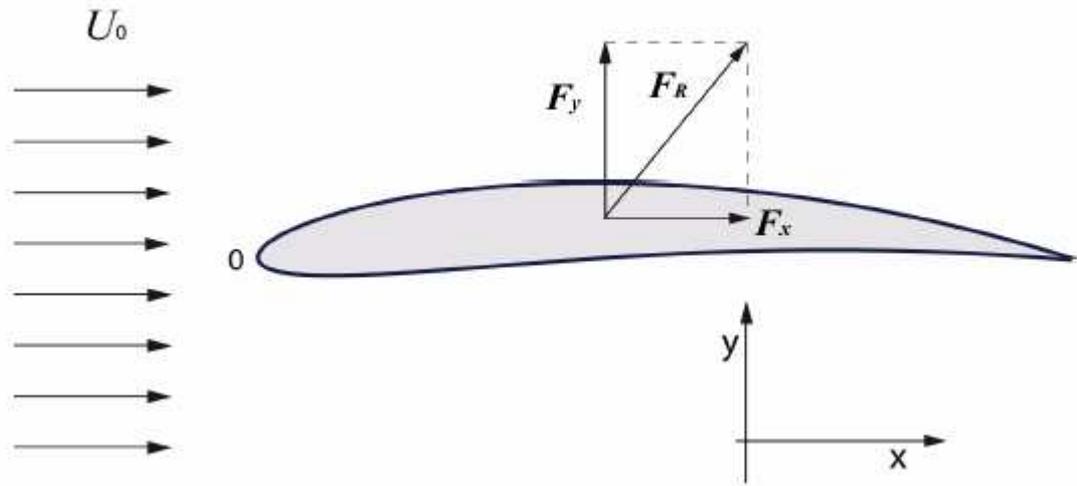


Figure I.1: Résultante des forces aérodynamiques

I.6 Notion de couche limite

Autour d'un profil, l'air en mouvement se comporte comme s'il était constitué de lames superposées infiniment minces. La première lame en contact avec la paroi de l'aile reste immobile. Les lames suivantes possèdent des vitesses croissantes les unes par rapport aux autres jusqu'à une lame, qui, comme celles qui se superposent ensuite, est animée de la vitesse de l'écoulement libre. L'ensemble des lames se déplaçant à des vitesses différentes de celle de l'écoulement libre forme la couche limite.

La couche limite joue un rôle important car elle conditionne directement la résistance de frottement de l'aile. Cette couche peut être laminaire comme celle illustrée sur la figure I.2, avec des filets d'air parallèles à la surface de l'aile, ou turbulente avec une répartition des vitesses tout à fait désordonnée. Toute fois, la définition de la couche limite reste valable; c'est encore la zone dans laquelle la vitesse moyenne des filets d'air est différente de la vitesse de l'air en écoulement libre.

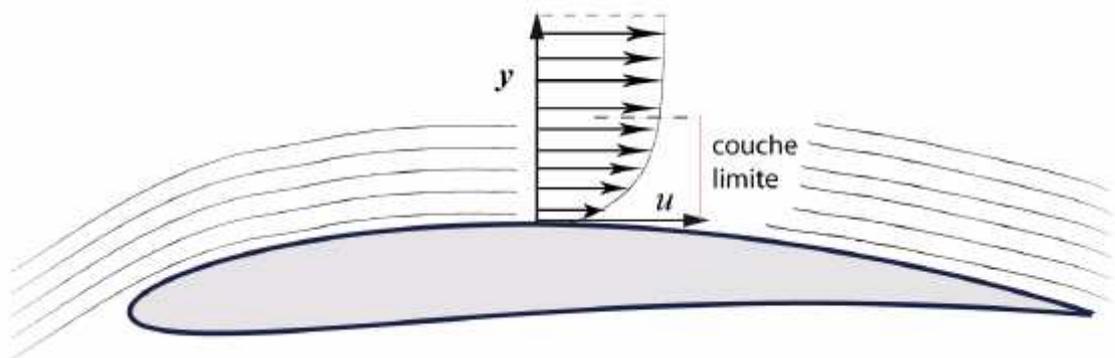


Figure I.2 : Couche limite laminaire

I.6.1 Couche limite laminaire et turbulente

La couche limite commence par être laminaire sur la surface voisine du bord d'attaque puis devient turbulente à partir d'un point appelé point de transition correspondant au point de transition du nombre de Reynolds critique Re_{cr} . Pour l'écoulement sur une plaque plane, le nombre de Reynolds critique peut varier entre les limites suivantes :

$$500,000 < Re_{cr} < 3,000,000$$

Donc, plus la zone de transition est éloignée du bord d'attaque, plus le profil est laminaire. Pour les nombres de Reynolds élevés (supérieurs à 106), le changement de couche limite sur le profil entre forme laminaire et turbulente de l'écoulement s'accomplit aux environs du point de pression minimale.

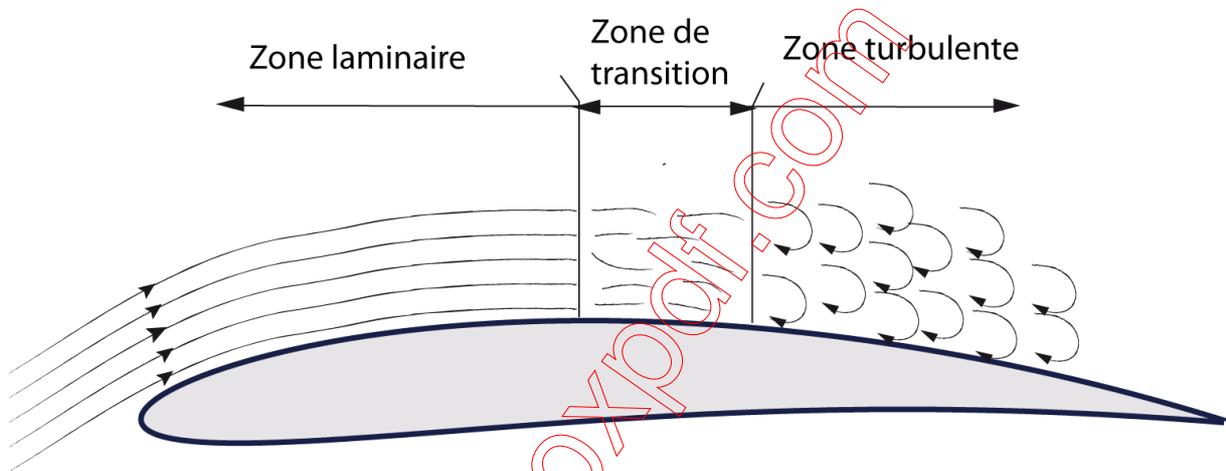


Figure I.3 : Transition laminaire-turbulente

Pour les petites valeurs de Re , la couche limite peut ne pas devenir turbulente. Elle se décolle laminairement de l'extrados après le point de pression minimum. En dessous se forme une zone morte.

La couche limite décollée turbulente s'épaissit très fortement à l'aval et ne peut plus se recoller sur l'extrados. Cet écoulement, à couche limite décollée de l'extrados et à zone morte s'étendant au delà du bord de fuite est dit "écoulement sous critique". Le profil possède alors une portance faible et une traînée importante due au décollement.

I.6.2 Décollement de la couche limite

Sur l'extrados, les particules d'air ont tendance à se décoller car elles sont aspirées par la dépression située au dessus de l'extrados. Tant qu'elles ont une énergie suffisante (une vitesse suffisante), elles restent au voisinage de la paroi, Mais lorsque leur énergie cinétique n'est plus suffisante, elles sont aspirées et il y a décollement de la couche limite. Les particules perdent de l'énergie cinétique essentiellement pour deux raisons:

- Par frottement entre les filets gazeux résultant de la viscosité de l'air.
- A cause des mouvements antagonistes qui viennent de la zone turbulente et qui créent une pression antagoniste qui tend à freiner les particules d'air.

Pour l'écoulement autour d'un profil d'aile, en augmentant l'angle d'attaque, le décollement va provoquer, dans la zone où il se produit, la chute de la pression sur l'extrados avec pour conséquence la baisse importante de la portance. Quand le point de décollement atteint le bord d'attaque il se produit le décrochage de l'aile.

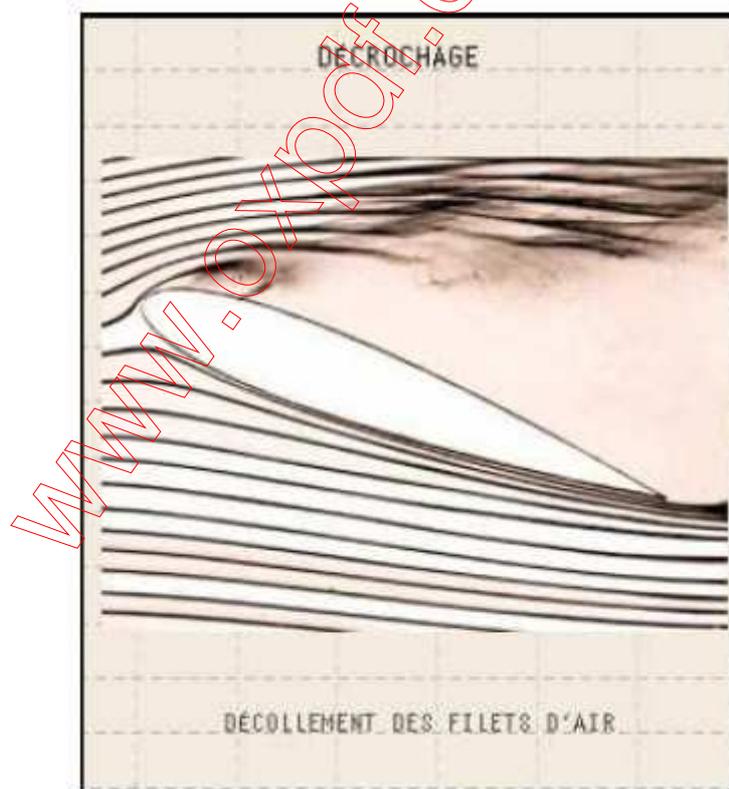


Figure I.4 : *Décollement de la couche limite*

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu que l'écoulement autour d'un profil prend plusieurs formes, dont certaines sont difficiles à traiter, tel que les régimes turbulent, transsonique et supersonique. Nous avons vu aussi que certains phénomènes ne peuvent pas être exclus comme la couche limite. Dans notre travail nous nous limitons à l'écoulement compressible bidimensionnel en restant dans la plage du subsonique et sans traitement de la turbulence .La prochaine étape est la détermination des caractéristiques aérodynamiques des profils.

www.oxpdf.com

CHAPITRE II

CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES PROFILS

Dans la première partie du chapitre il est question de définir la géométrie du profil d'aile. On y décrit les étapes de la construction d'un profil NACA à partir de sa désignation normalisée.

La seconde partie traite de la détermination des coefficients aérodynamiques à partir du champ de pression autour du profil.

II.1 Géométrie d'un profil d'aile

II.1.1 Description:

Un profil d'aile, et plus généralement celui d'une surface portante, comporte plusieurs parties dont la définition est essentielle.

Corde : c'est la ligne droite la plus longue de la section.

Bord d'attaque : c'est la partie de l'aile qui entre, en premier, en contact avec le fluide.

Bord de fuite : c'est la dernière partie de l'aile à être en contact avec le fluide, c'est aussi la partie la plus mince de l'aile.

Extrados : partie supérieure de l'aile. On peut dire aussi qu'elle est sous le vent.

Intrados : partie inférieure de l'aile. On dit aussi que cette partie de l'aile est « au vent »

On note

c : la corde ;

e_{\max} : l'épaisseur maximum;

$y(x)$: la ligne de cambrure moyenne ou squelette ;

U_{∞} : la vitesse à l'infini amont ;

α : l'angle d'incidence, compris entre la corde et la direction de l'écoulement ;

s : l'abscisse curviligne le long du contour du profil.

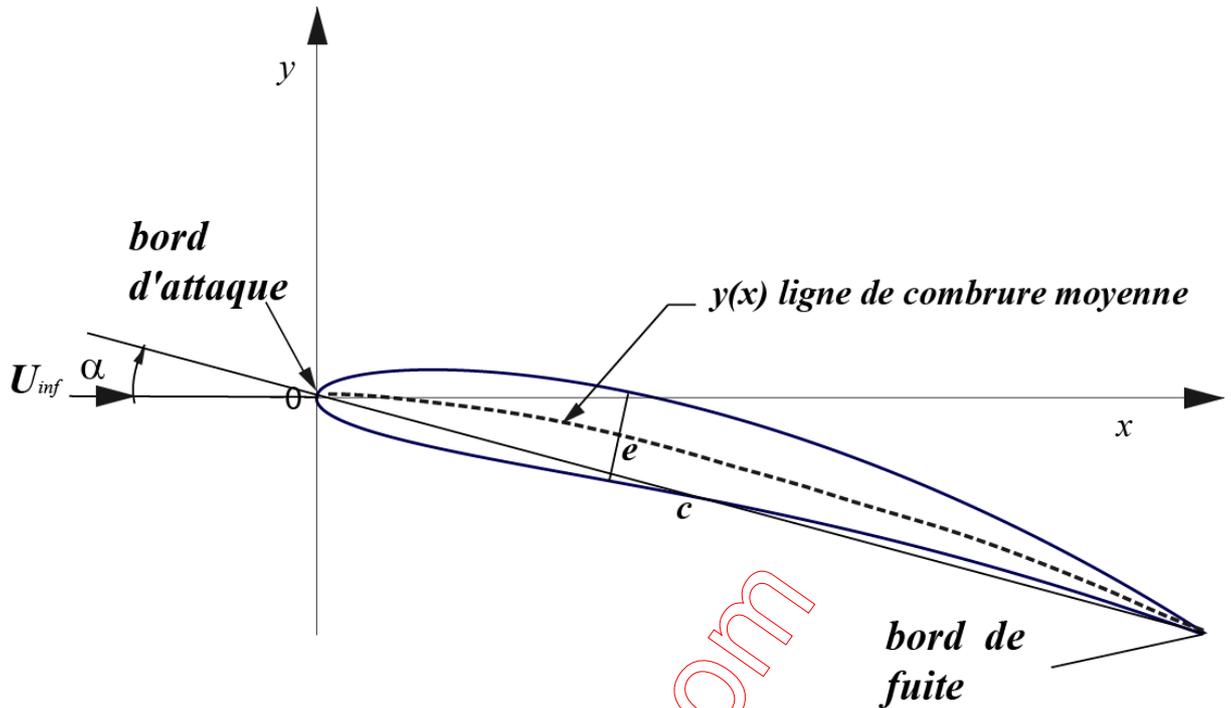


Figure II.1 : Composantes géométriques d'un profil d'aile

II.1.2 Les différents types de profils NACA

Il existe différents profils, tels les profils CLARK, GOTTINGEN, NACA. Nous présentons ici quelques familles de profils que nous avons utilisés pour notre projet. Le but de cette partie est de réaliser un code pour générer la géométrie du profil à partir de sa désignation. On donne ci-après les principales équations nécessaires pour écrire le code.

II.1.2.1 Profils NACA à 4 chiffres.

Les quatre chiffres utilisés dans la désignation NACA donnent en fait trois informations pour la génération du Profil. Le profil est désigné de la façon suivante : NACA p m x x . Les deux premiers chiffres concernent la cambrure du profil (p le maximum de cambrure en pourcentage de corde et m la position de ce maximum exprimé en dixième de longueur de corde), les deux derniers concernent le rapport épaisseur corde (e/c) donné en pourcentage.

- Équation de la ligne de cambrure :

La première équation concerne la définition de la ligne moyenne. Ce sont en fait deux paraboles tangentes entre elles qui se rejoignent au point du maximum de courbure.

$$\frac{y}{c} = \frac{p}{m^2} \left(2m \frac{x}{c} - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right) \quad 0 \leq x \leq m$$

$$\frac{y}{c} = \frac{p}{(1-m)^2} \left[(1-2m) + 2m \frac{x}{c} - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right] \quad m \leq x \leq c$$

- Équation de la distribution d'épaisseur :

$$\left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}} = \frac{e}{0,2} \left[0,2969 \left(\frac{x}{c} \right)^{\frac{1}{2}} - 0,126 \left(\frac{x}{c} \right) - 0,3516 \left(\frac{x}{c} \right)^2 + 0,2843 \left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0,1015 \left(\frac{x}{c} \right)^4 \right]$$

- Equation de l'intrados et de l'extrados :

A partir des équations précédentes nous pouvons construire le profil en utilisant les formules ci-dessous :

o Pour l'extrados

$\left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}}$ est positif

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{c} \right)_{\text{extrados}} = \left(\frac{x}{c} \right) - \left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}} \sin \theta \\ \left(\frac{y}{c} \right)_{\text{extrados}} = \left(\frac{y}{c} \right) + \left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}} \cos \theta \end{cases}$$

o Pour l'intrados

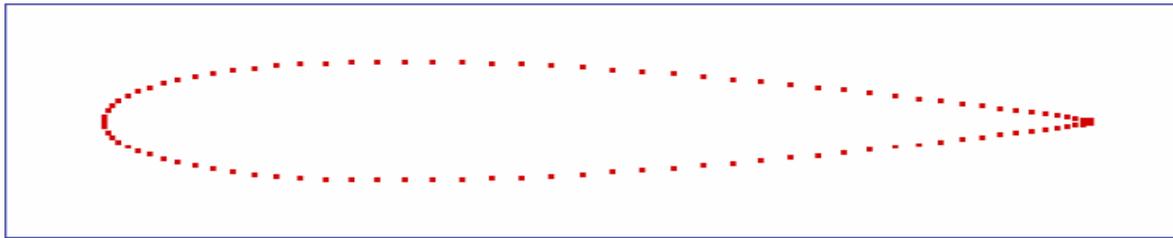
$\left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}}$ est négatif

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{c} \right)_{\text{intrados}} = \left(\frac{x}{c} \right) - \left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}} \sin \theta \\ \left(\frac{y}{c} \right)_{\text{intrados}} = \left(\frac{y}{c} \right) + \left(\frac{y}{c} \right)_{\text{épaisseur}} \cos \theta \end{cases}$$

Avec θ l'inclinaison locale de la ligne moyenne

$$\theta = \frac{dy_c}{dx}$$

où y_c est la cambrure (pour $c=1$)



NACA 0015

Figure II.2 : Exemple de profil NACA généré avec 100 points
à partir des équations ci-dessus

II.1.2.2 Profils NACA à 5 chiffres.

Les profils NACA à 5 chiffres sont peu différents de ceux à 4 chiffres.

Exemple NACA 2 30 12

2: la cambrure max

30: position de la cambrure max en 1/50 de la Corde

12 : l'épaisseur max en %

La différence vient uniquement de la définition de la ligne moyenne qui est une fonction de degré trois. L'équation de la ligne de cambrure est définie de la manière suivante :

$$\frac{y}{c} = \frac{k_1}{6} \left[\left(\frac{x}{c} \right)^3 - 3r \left(\frac{x}{c} \right)^2 + r^2(3-r) \frac{x}{c} \right] \quad \text{pour } 0 \leq \frac{x}{c} \leq r$$

$$\frac{y}{c} = \frac{k_1 r^3}{6} \left(1 - \frac{x}{c} \right) \quad \text{pour } r \leq \frac{x}{c} \leq 1$$

Avec: $r = m/c$ et k_1 , une constante qui dépend de la cambrure max et sa position r

Pour construire le profil on injecte les formules ci dessus dans les équations

Angle d'incidence α :

Il est défini comme étant l'angle compris entre l'axe de l'écoulement et l'axe de la corde du profil. Il y a deux manières de considérer cet angle selon la position du repère. Si le repère est fixé sur le profil, l'axe de la corde est confondu avec l'axe Ox du repère et l'axe de l'écoulement est variable, dans ce cas l'angle α n'intervient pas dans les coordonnées des points du profil mais dans le vecteur de vitesse à l'entrée du domaine.

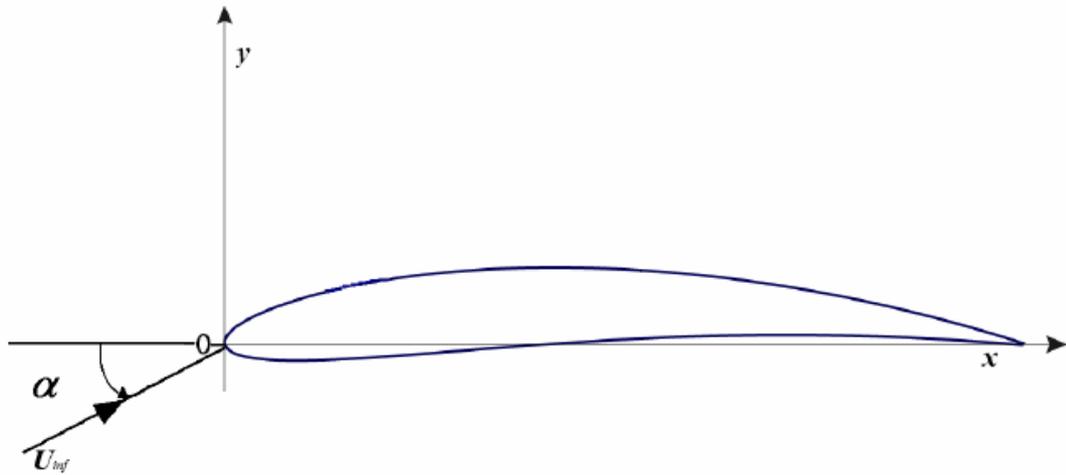


Figure II.3 : Angle d'incidence dans le cas d'un repère solide au profil.

Si le repère est fixé sur l'axe de l'écoulement, on doit effectuer une rotation d'angle α du profil pour trouver les coordonnées des points le composant dans le repère réel.

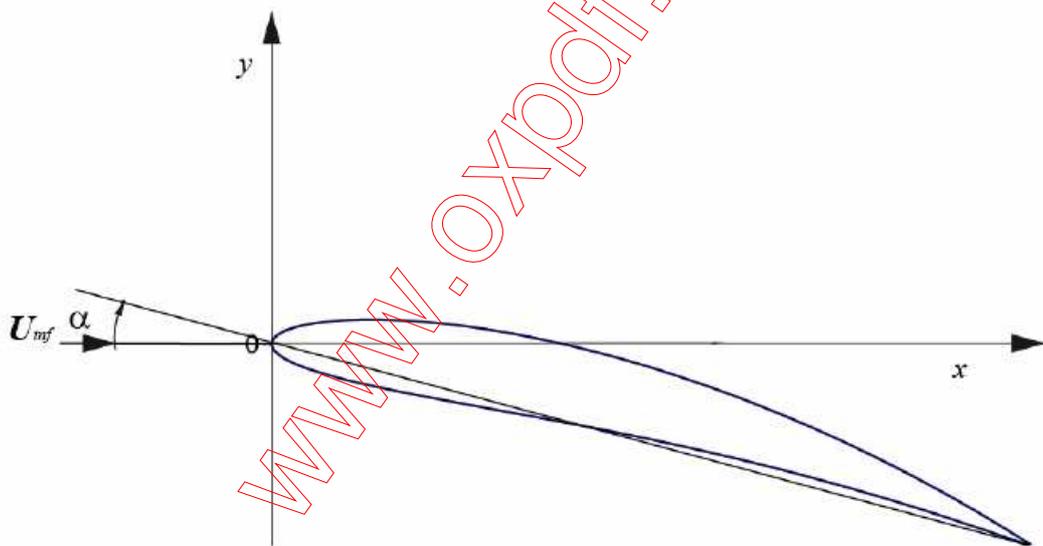


Figure II.4 : Angle d'incidence dans le cas d'un repère solide à la direction de l'écoulement

L'avantage du premier cas est qu'on peut, avec un seul maillage, faire le calcul pour différents angles d'incidences, ce qui n'est pas possible dans le deuxième où il faut générer un maillage pour chaque angle.

Mais il présente l'inconvénient de modifier la position des conditions aux limites. Pour ne pas redéfinir pour chaque angle l'ensemble des frontières du domaine on a décidé de choisir la deuxième option qui consiste à fixer les frontières une fois pour toutes même si pour ce faire il faut générer un maillage pour chaque angle d'incidence.

Comme montré sur la figure précédente, le profil subit une rotation autour de l'axe Oz. Numériquement, cela consiste à multiplier le vecteur des coordonnées des points du profil par une matrice R_α .

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

II.2 Caractéristiques aérodynamique d'un profil d'aile :

II.2.1 Efforts aérodynamiques

Nous considérons un repère $R(O, x, y)$ dont l'origine O est située au bord d'attaque. L'axe Ox est suivant la direction de l'écoulement, l'axe Oy perpendiculaire à l'écoulement. On définit les efforts aérodynamiques suivants :

$F_x = D$: la force axiale ; la traînée

$F_y = L$: la force normale ; la portance

la force résultante ;

$$\mathbf{F}_R = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

M_{BA} : le moment de tangage de bord d'attaque.

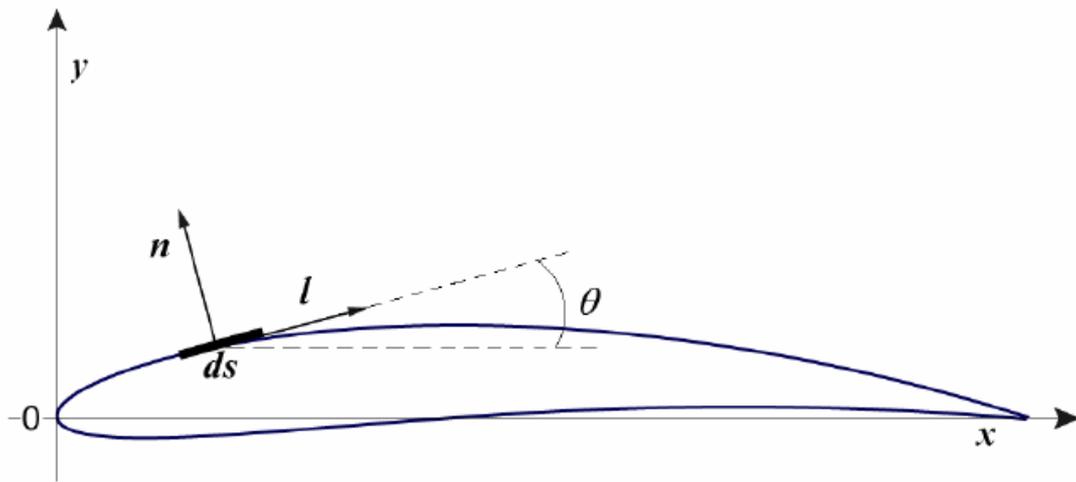


Figure II.5 : Repère local d'intégration

On note $P(s)$ la distribution surfacique de pression et $\tau(s)$ la distribution surfacique de la contrainte de cisaillement visqueuse, sur l'intrados (indice i) et l'extrados (indice e) du profil. On définit un repère mobile (O', Y, Z) qu'on utilise pour l'intégration numérique sur le contour du profil. θ est défini comme étant l'angle entre l'axe Ox et Z . Les deux vecteurs Y, Z peuvent être exprimés dans le repère Oxy :

* $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ sur l'extrados et $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$ sur l'intrados.

* $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$ sur l'extrados et l'intrados.

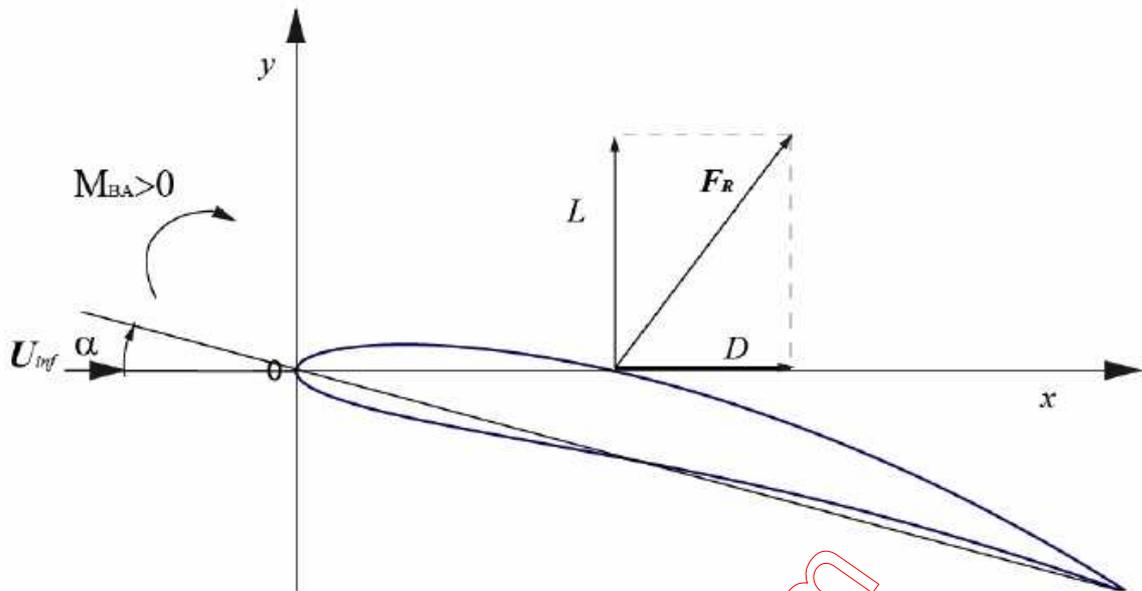


Figure II.6: Efforts aérodynamiques

Soit $d\mathbf{F}_p$ la force de pression qui s'applique sur l'élément de surface $(d\mathbf{s} \cdot \mathbf{x1})$ d'intensité

$$\|d\mathbf{F}_p\| = p(s) ds$$

Et de direction $-\mathbf{n}$ et $d\mathbf{F}_\tau$ la force de frottement qui s'applique sur l'élément de surface $(d\mathbf{s} \cdot \mathbf{x1})$ d'intensité

$$\|d\mathbf{F}_\tau\| = \tau(s) ds$$

et de direction \mathbf{l}

On a alors :

$$d\mathbf{F}_R = -p ds \cdot \mathbf{n} + \tau ds \cdot \mathbf{l}$$

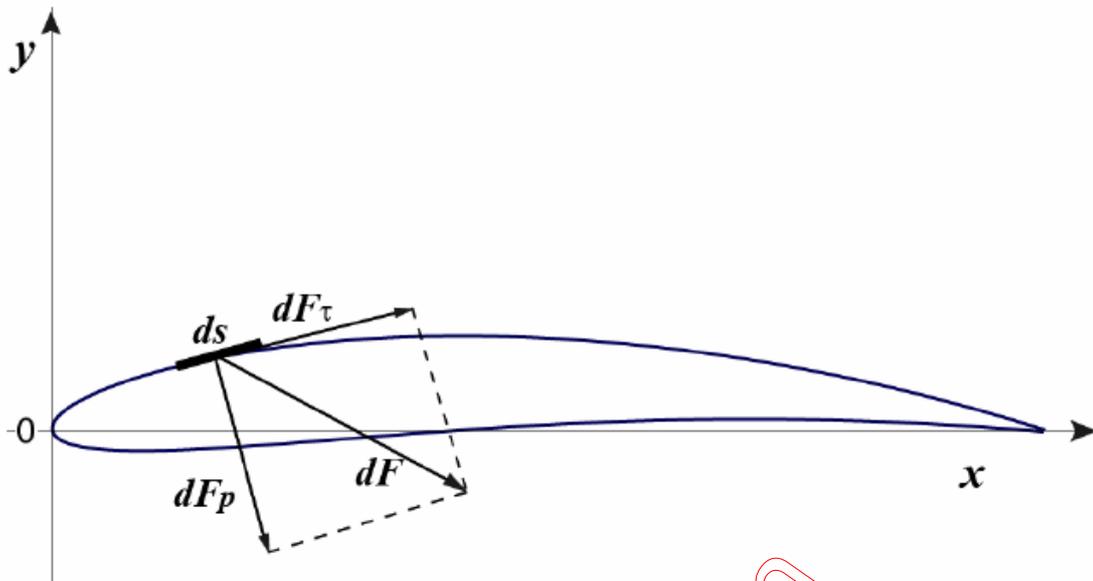


Figure II.7: Forces élémentaires sur l'élément de surface ds

La portance et la traînée élémentaires sont données par les formules suivantes :

$$dL = -n_y p(s) ds + l_y \tau(s) ds$$

$$dD = -n_x p(s) ds + l_x \tau(s) ds$$

la distribution de pression $p(s)$ est obtenue par la résolution numérique des équations de Navier Stokes où. La distribution de contrainte $\tau(s)$ est obtenue en dérivant la composante tangentielle de la vitesse par rapport à la normale.

Chapitre III

MODELE MATHEMATIQUE

La dynamique des fluides est la science qui étudie le mouvement des fluides en déterminant la pression, vitesse, température, masse volumique dans tout le domaine de l'écoulement en fonction du temps. Cette discipline englobe de nombreux sous-domaines comme par exemple l'aérodynamique et l'hydrodynamique.

Les équations fondamentales de la dynamique des fluides expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Elles constituent un système complexe d'équations aux dérivées partielles, le modèle de Navier-Stokes, qu'il n'est envisageable de résoudre que numériquement ou bien dans des cas de figure simples. La paternité de ces équations est partagée par Claude Navier (1785-1836) et George Stokes (1819-1903).

Dans le présent chapitre, nous présentons les équations de Navier-Stokes compressibles bidimensionnelles sous la forme conservative, en précisant les hypothèses et les simplifications retenues. Nous détaillons séparément les différents termes qui constituent ces équations en précisant le rôle de chacun d'eux.

III.1 Système complet des Equations de Navier-Stokes :

Les équations principales exprimant les phénomènes d'écoulements sont basées sur la dérivation de lois physiques suivantes:

- a. Conservation de la masse.
- b. Conservation de la quantité de mouvement.
- c. Conservation de l'énergie.

Ces équations, nommées équations de Navier-Stokes, sont exprimées sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (F_c - F_d) = Q$$

Où : U est le vecteur des variables conservatives, F_c le flux de convection (ou flux non visqueux), F_d le flux de diffusion (ou flux visqueux) et Q le terme source qui contient les forces volumiques et les sources de chaleur.

III.2 Equations de transport

Les équations de Navier-Stokes permettant de déterminer l'évolution, à partir de conditions initiales données, des champs de masse volumique ρ , de quantité de mouvement par unité de volume ρV et de l'énergie totale par unité de volume ρE . L'énergie totale E est égale à la somme de l'énergie interne e et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, qui sont toutes des grandeurs par unité de masse.

Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sans terme source s'écrivent :

www.oxpdf.com

Chapitre III

MODELE MATHEMATIQUE

La dynamique des fluides est la science qui étudie le mouvement des fluides en déterminant la pression, vitesse, température, masse volumique dans tout le domaine de l'écoulement en fonction du temps. Cette discipline englobe de nombreux sous-domaines comme par exemple l'aérodynamique et l'hydrodynamique.

Les équations fondamentales de la dynamique des fluides expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Elles constituent un système complexe d'équations aux dérivées partielles, le modèle de Navier-Stokes, qu'il n'est envisageable de résoudre que numériquement ou bien dans des cas de figure simples. La paternité de ces équations est partagée par Claude Navier (1785-1836) et George Stokes (1819-1903).

Dans le présent chapitre, nous présentons les équations de Navier-Stokes compressibles bidimensionnelles sous la forme conservative, en précisant les hypothèses et les simplifications retenues. Nous détaillons séparément les différents termes qui constituent ces équations en précisant le rôle de chacun d'eux.

III.1 Système complet des Equations de Navier-Stokes :

Les équations principales exprimant les phénomènes d'écoulements sont basées sur la dérivation de lois physiques suivantes:

- a. Conservation de la masse.
- b. Conservation de la quantité de mouvement.
- c. Conservation de l'énergie.

Ces équations, nommées équations de Navier-Stokes, sont exprimées sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_d) = \mathbf{Q}$$

Où : \mathbf{U} est le vecteur des variables conservatives, \mathbf{F}_c le flux de convection (ou flux non visqueux), \mathbf{F}_d le flux de diffusion (ou flux visqueux) et \mathbf{Q} le terme source qui contient les forces volumiques et les sources de chaleur.

III.2 Equations de transport

Les équations de Navier-Stokes permettant de déterminer l'évolution, à partir de conditions initiales données, des champs de masse volumique ρ , de quantité de mouvement par unité de volume ρV et de l'énergie totale par unité de volume ρE . L'énergie totale E est égale à la somme de l'énergie interne e et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, qui sont toutes des grandeurs par unité de masse.

Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sans terme source s'écrivent :

III.2.1 Equation de continuité

L'équation qui exprime la conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel .Elle est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Où $V = (u, v)$ désigne le vecteur vitesse et t le temps.

III.2.2 Equation de quantité de mouvement

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement permet d'établir une relation entre les caractéristiques du fluide, son mouvement et les causes le produisant. Le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées. Cela donne la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V \otimes V + pI - \tau) = 0$$

III.2.3 Equation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie.

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho EV + pV - \tau V + q) = 0$$

Dans les trois équations ci-dessus :

• : Produit de convolution.

ρ : Masse volumique.

V : Vecteur vitesse.

P : Pression statique

$\boldsymbol{\tau}$: Tenseur des contraintes.

E : Energie totale par unité de masse. $E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + e$

e : Energie interne.

\mathbf{q} : Vecteur flux chaleur.

Pour fermer le système qui a plus d'inconnus que d'équations, il faut ajouter les expressions du scalaire p , du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ et du vecteur \mathbf{q} .

III.3 Hypothèses et simplifications

Notre travail consiste à étudier l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion afin de déterminer ses différents coefficients aérodynamiques. Cela nous amène à résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles bidimensionnelles (2D). De plus, nous introduisons les hypothèses simplificatrices suivantes:

- La masse volumique du fluide est suffisamment faible pour que les effets de la gravité puissent être négligés (hypothèse de fluide non pesant).
- Le fluide est considéré comme un gaz parfait.
- Fluide visqueux *Newtonien*.

Pour un fluide *Newtonien*, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes est donné par la loi :

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\mu} \mathbf{D}$$

Avec le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} est défini par :

$$\mathbf{D} = \frac{\boldsymbol{\nabla} \mathbf{V} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{V}^T}{2}$$

λ : Coefficient de viscosité volumique

μ : Coefficient de viscosité dynamique

Le coefficient de viscosité volumique λ relié au coefficient de la viscosité dynamique μ par :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Finalement, les composantes du tenseur des contraintes sont données par les relations:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

De plus, on considère que le vecteur du flux de chaleur est donné par la loi de *Fourier* :

$$q = -k \nabla T$$

III.4 Equations de la thermostatique

Le système précédent est complété par les deux équations de la thermostatique :

Equation d'état :

Cette équation relie la densité ρ , la pression statique p et la température T .

$$P = \rho r T$$

où r est le rapport de la constante universelle des gaz parfaits à la masse molaire du gaz considéré ($r = 287 \text{ J.kg.K}^\circ$).

Relation thermodynamique

L'énergie interne e est donnée en fonction de la température par la relation :

$$e = c_v T$$

En supposant le gaz parfait et à chaleur spécifique constante nous avons :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

A partir des deux relations précédentes, la pression p et la température T peuvent être exprimées en fonction de l'énergie totale E , la masse volumique ρ et les composantes de la vitesse u et v .

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right)$$

$$T = \left(\frac{\gamma - 1}{r} \right) \left(E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right)$$

Ceci sera utilisé dans notre travail.

III.5 Coefficients de transport

Des relations supplémentaires permettent de relier les propriétés physiques du fluide aux variables thermodynamiques.

Viscosité dynamique Elle est donnée par la loi de Sutherland.

Pour l'air la viscosité est donnée par la formule suivante :

$$\mu = \frac{1.45T^{3/2}}{T + 110} \cdot 10^{-6} \quad (S.I)$$

Conductivité thermique On utilise la relation suivante où l'on considère γ (rapport des chaleurs spécifiques) et Pr (nombre de Prandtl) constants.

$$\kappa = \frac{\mu \cdot Cp}{Pr}$$

III.6 Système d'équations retenu

D'après la définition des différents termes du système d'équations et les simplifications décrites précédemment, les équations de Navier-Stokes peuvent être exprimées en coordonnées

Cartésiennes sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}_c(\mathbf{V}) - \mathbf{F}_d(\mathbf{V}, \nabla \mathbf{V})) = 0$$

Avec :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}$$

Les composantes de vecteur flux de convection \mathbf{F}_c ($\mathbf{F}_c^x, \mathbf{F}_c^y$) sont données par :

$$\mathbf{F}_c^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{(u^2+v^2)}{2}\right) u + pu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_c^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{(u^2+v^2)}{2}\right) v + pv \end{pmatrix}$$

Les composantes de vecteur flux de diffusion F_d (F_d^x, F_d^y) sont données par :

$$F_d^x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + k \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix} ; \quad F_d^y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yy}v + \tau_{xy}u + k \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

et

U : Vecteur des variables conservatives.

F_c^x : Composante selon x du flux de convection.

F_c^y : Composante selon y du flux de convection.

F_d^x : Composante selon x du flux de diffusion.

F_d^y : Composante selon y du flux de diffusion.

u : Composante selon x de la vitesse.

v : Composante selon y de la vitesse.

T : Température.

k : Conductivité thermique.

$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$: Contraintes visqueuses.

www.oxpdf.com

Chapitre IV

METHODE DES DIFFERENCES FINIES SPECTRALE

Dans le chapitre précédent, nous avons abouti à un système d'équations aux dérivées partielles. Vu la non linéarité et la complexité de ces équations, il est impossible de les résoudre analytiquement. Ce problème nécessite une approche numérique. La question qui se pose est le choix de la méthode numérique.

Aperçu sur les méthodes numériques

Plusieurs méthodes numériques ont été développées pour la résolution de ce type de problème. En général, le système d'équations aux dérivées partielles est transformé en un système d'équations algébriques. Selon Z.J.Wang [10], les méthodes numériques peuvent être classées de la façon suivante :

a. Les méthodes numériques traditionnelles

Cette catégorie englobe les trois grandes méthodes telles que les volumes finis, les différences finies et les éléments finis.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux noeuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un noeud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux noeuds voisins.

La méthode des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangles ou quadrangles en général). Comme elle permet de modéliser les géométries très complexes, elle est parfois préférée à la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis, choisie par le logiciel FLUENT, consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volume de contrôle puis d'effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement, énergie,...) sur ces volumes en utilisant la forme intégrale des équations.

Limitations des méthodes numériques traditionnelles

Les méthodes précédentes partagent l'inconvénient d'être limitées aux faibles ordres de discrétisation. Dans la méthode des différences finies, les dérivés spatiales sont essentiellement unidimensionnelles, effectuées dans la même direction. Ainsi un grand nombre des points, près des inconnues, sont ignorés. Puisque les générateurs de maillage sont la plupart du temps seulement précis au second ordre, l'exactitude globale de la solution peut

être sévèrement dégradée si le maillage n'est pas suffisamment fin. De plus, Les inconnues sont évaluées aux points du maillage.

b. Méthodes numériques d'ordre élevé

Dans cette catégorie, on distingue trois méthodes numériques, *Spectral Volume*, *Discontinuous Galarkin* et *Spectral Difference*. Au cours des dernières années les méthodes spectrales ont connu un développement spectaculaire. Le nombre important de publications indiquent un perfectionnement certain des méthodes numériques. Notre choix d'utiliser la méthode *Spectral Difference* a pour but de fournir un outil numérique supplémentaire pour la simulation des écoulements

Méthode des Différences Finies Spectrales

La méthode des Différences Finies Spectrales est une méthode récemment développée par le professeur Yen Liu et al [1-2-4] et inspirée de la méthode des Différences Finies. Elle présente l'avantage d'être simple tout en permettant l'utilisation d'ordres élevés, lui procurant ainsi une efficacité du point de vue programmation (précision, nombre d'itérations avant convergence...etc).

Comme pour la méthode des éléments finis, SD (Spectral Difference) utilise un maillage triangulaire non structuré qui permet d'avoir une flexibilité géométrique. Mais à la différence de la MEF (Méthodes des éléments Finies), SD utilise deux types de noeuds dans le maillage, les noeuds des inconnues et les noeuds de flux. SD utilise le concept de représentation locale discontinue.

La répartition des noeuds pour les inconnues et des noeuds pour les flux est la même dans tous les éléments. Elle est dictée par la nécessité de satisfaire la loi de conservation intégrale (voir annexe B) pour chaque triangle (élément) afin de prendre en compte la discontinuité dans la solution. Les noeuds des inconnues sont généralement placés aux points de quadrature de Gauss, alors que ceux des flux sont placés aux points de quadrature de Gauss-Lobatto

IV.1 Equation de base

La discrétisation par la méthode SD, est basée sur la forme différentielle conservative des équations de transport suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (F_c - F_d) = 0$$

Ou $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t$ désigne le vecteur des variables conservatives, F_c le flux de convection et F_d le flux diffusion, comme défini dans le tableau ci-dessous.

Equation	Variables primitives (U_p)	Variables conservatives (U)	Flux de convection (F_c)	Flux de diffusion (F_d)
Continuité	ρ	P		
Quantité de mvt x	u	ρu		
Quantité de mvt y	v	ρv		
Energie	T ou P	ρE		

Tableau IV.1 : Expression des différents termes de l'équation

On distingue dans l'équation deux termes principaux : le terme temporel qui correspond à la dérivée par rapport au temps de la variable conservative, et le terme spatial qui correspond à la divergence du flux. La discrétisation numérique ne se fait pas de la même manière pour les deux termes. Avant de présenter les étapes de la discrétisation, nous allons définir le domaine de calcul ainsi que le maillage utilisé.

IV.2 Maillage

Le maillage sert à la représentation discrète de variables continues. La solution numérique s'appuie sur la qualité du maillage, de ce fait il a une grande importance. Le maillage d'un domaine est un compromis entre précision recherchée et rapidité de calcul. L'utilisation d'un maillage triangulaire non-structuré, dans notre cas, est très utile car il permet de considérer des géométries complexes

IV.2.1 Génération du maillage

La génération adéquate du maillage est primordiale pour la réussite des calculs et à la précision des résultats. Le maillage généré dépend fortement des paramètres de l'écoulement. La première étape a donc été de définir le problème et préciser ce que nous voulons calculer. La connaissance de la méthode numérique utilisée et de la Mécanique des Fluides est indispensable afin d'affiner le maillage aux zones où nous nous attendons à de forts gradients par exemple.

La génération du maillage autour du profil est effectuée au moyen du logiciel

Nous avons subdivisé le travail en trois étapes :

- Importation de la géométrie
- Définition du domaine de calcul
- Génération du maillage

IV.2.2 Génération et importation de la géométrie

Les profils que nous utilisons sont des profils NACA à quatre et à cinq chiffres. La génération de la géométrie du profil est réalisée par notre code avant d'entamer le calcul. Les coordonnées (x, y) des points servant à définir le profil sont données dans un fichier. Pour importer la géométrie on doit lire ce fichier par le générateur de maillage.

IV.2.3 Définition du domaine de calcul

Dans cette partie, l'objectif est de délimiter le calcul dans une zone fermée qui correspond au domaine de calcul. Le domaine doit être suffisamment grand pour que les perturbations numériques n'interfèrent pas avec la physique du problème. Le domaine de calcul est représenté sur la figure suivante :

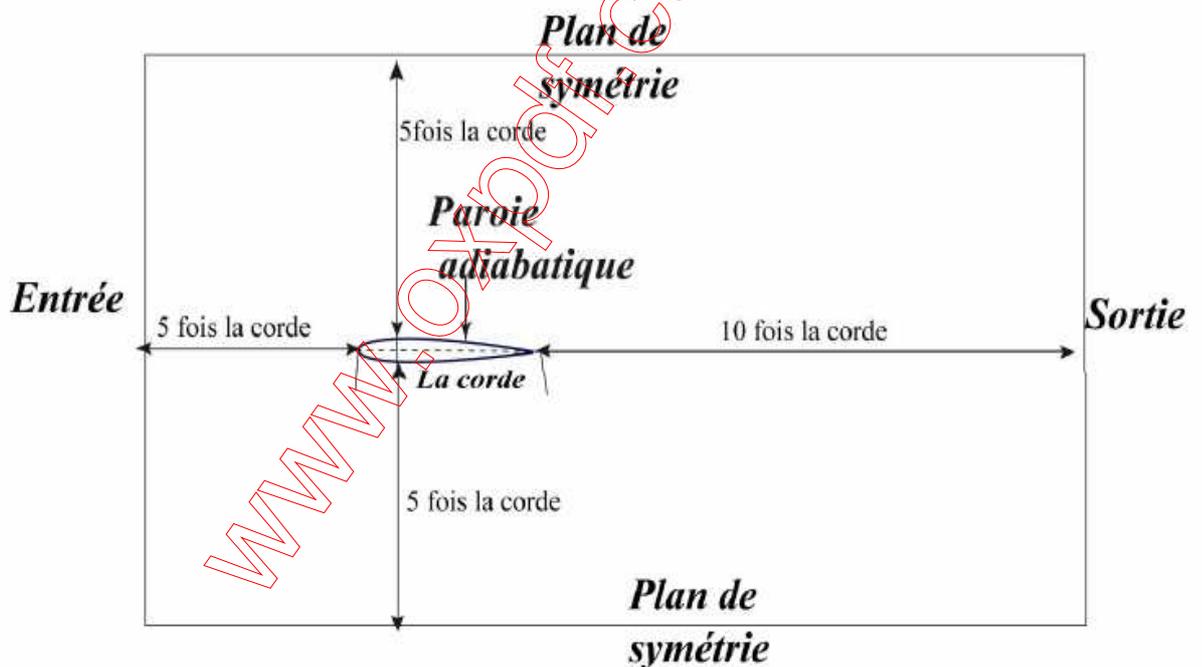


Figure IV.1 : Schéma représentant un domaine de calcul typique

IV.3 Discrétisation spatiale

Dans cette partie nous allons décrire les étapes de discrétisation du terme spatial

$\nabla \cdot \mathbf{F}$ de l'équation 1

IV.3.1 Éléments du maillage

Le domaine de calcul est divisé en éléments triangulaires. L'indice i sert à identifier l'élément. Chaque élément est défini par trois noeuds géométriques de positions respectives r_1, r_2, r_3 , La surface de l'élément est notée S_i ;
 On introduit un repère local dont les vecteurs directeurs g_1 et g_2 sont définis comme suit (Voir figure 2).

$$g_{1,i} = r_{2,i} - r_{1,i}$$

$$g_{2,i} = r_{3,i} - r_{1,i}$$

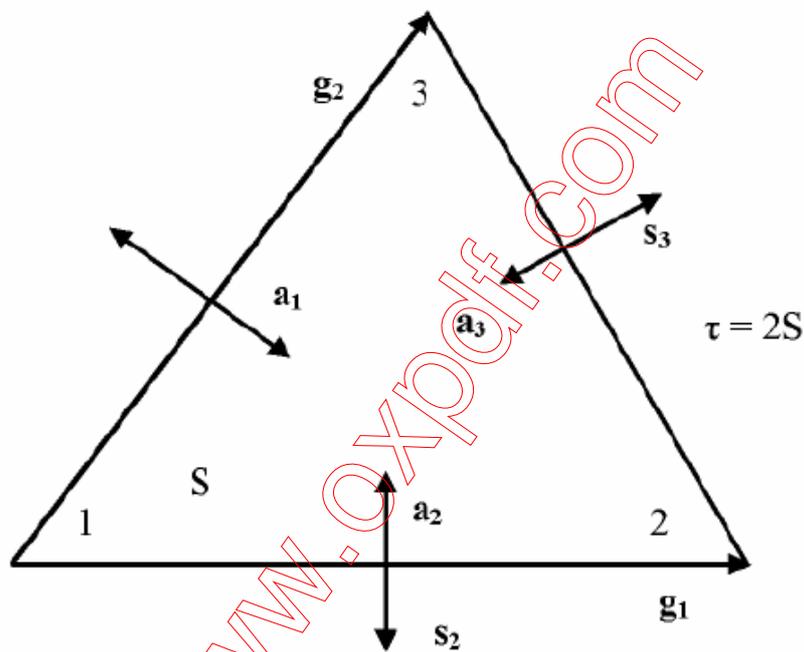


Figure IV.2: Vecteurs de base

Pour tout point de l'élément i , le vecteur position r s'écrit comme suit :

$$r = r_{1,i} + \xi(r_{2,i} - r_{1,i}) + \eta(r_{3,i} - r_{1,i}) \quad , \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad \text{et} \quad \xi + \eta \leq 1$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \xi g_1 + \eta g_2$$

$$g_1 = \frac{\partial r}{\partial \xi}$$

$$g_2 = \frac{\partial r}{\partial \eta}$$

$$\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur \mathbf{g}_3 est perpendiculaire au plan de l'élément.

On définit les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 comme suit :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = -(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Nous n'avons pas écrit la troisième composante des vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 qui est en fait nulle dans l'équation parce qu'ils se trouvent, par définition, dans le plan de l'élément.

Soit J la matrice jacobienne de la transformation du repère physique vers le repère de référence.

On a

$$\tau = 2S = \frac{1}{\det(J)} = 1 / \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]$$