

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté de Technologie

Département de Mécanique

THESE DE DOCTORAT

en Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

CONCEPTION A HAUTE TEMPERATURE DES TUYERES
SUPERSONIQUES AXISYMETRIQUES A CORPS CENTRAL

Par

ABDALLAH ELHIRTSI Ahmed

Devant le jury composé de :

KETFI Omar,	Maître de Conférences A,	Université de Blida 1	Président
MEKADEM Mahmoud,	Maître de Conférences A,	E.M.P. Alger	Examineur
AZZOUZI Djelloul,	Professeur,	Université Khemis-Miliana	Examineur
BENNEMIA Ismail,	Maître de Conférences A,	Centre Universitaire-Tipaza	Examineur
BENAROUS Abdallah,	Professeur,	Université de Blida 1	Examineur
YAHIAOUI Toufik,	Professeur,	Université de Blida 1	Directeur de Thèse

Blida, 25 Juin 2025

DEDICACES

Ce travail est dédié à :

- ✓ la mémoire de mon père
- ✓ ma mère
- ✓ mes frères et sœurs

Une dédicace particulière à :

Ma femme et à mes deux chers enfants ; Raouf et Samah.

RESUME

Dans cette étude, une méthode de conception des tuyères supersoniques à corps central axisymétriques à haute température (HT) a été proposée. L'approche est basée sur la théorie de la détente de Prandtl-Meyer pour le modèle HT avec l'utilisation de la méthode des caractéristiques pour le cas axisymétrique. En effet, un code en langage Fortran a été développé afin d'obtenir le design de la tuyère. Une fois que le profil du corps central est déterminé, nous nous sommes intéressés à l'évolution des paramètres thermodynamiques et physiques de l'écoulement ; tels que la pression, la température, la masse volumique et le nombre de Mach. Les résultats obtenus ont été confrontés à ceux obtenus pour un modèle de gaz parfait (GP). Concernant les paramètres de conception (longueur, rapport de section, coefficient de poussée et coefficient de masse), nous avons constaté que le modèle GP donne des résultats très satisfaisants pour des valeurs de M_S et T_0 inférieures, respectivement, à 2,00 et 1000 K. À mesure que M_S et T_0 augmentent, cela affecte les performances, nécessitant l'utilisation de notre modèle HT pour corriger le calcul des paramètres de la tuyère. Afin de minimiser le poids de cette tuyère, on a opté à la troncature du corps central pour augmenter ses performances. L'ensemble des résultats ont été effectués pour l'air.

Mots Clés

Forme des tuyères, Ecoulement Supersonique, Ecoulement à Haute Température, Tuyère axisymétrique, Tuyère à corps central, Méthode des caractéristiques (MOC), Fonction de Prandtl-Meyer.

ABSTRACT

In this study, a design method for supersonic axisymmetric plug nozzles at high-temperature (HT) has been proposed. The approach is based on the theory of Prandtl-Meyer expansion for the HT model, with the use of the characteristic method for the axisymmetric case. Indeed, a code in Fortran language was developed in order to obtain the nozzle design. Once the central body profile had been determined, we turned our attention to the evolution of thermodynamic flow parameters such as pressure, temperature, density and Mach number. The results obtained were compared with those obtained for a perfect gas model (GP). With regard to the design parameters (length, cross-section ratio, thrust coefficient and mass coefficient), we found that the GP model gives very satisfactory results for values of M_E and T_0 below 2.00 and 1000 K respectively. As M_E and T_0 increase, this affects performance, necessitating the use of our HT model to correct the calculation of nozzle parameters. To minimize the weight of this nozzle, we opted to truncate the central body to increase its performance. All calculations have been performed for air.

Key words

Nozzle shape, Supersonic flow, High-temperature flow, axisymmetric nozzle, Plug nozzle, Method of Characteristics (MOC), Prandtl-Meyer function.

ملخص

في هذه الدراسة، تم اقتراح طريقة تصميم للفوهات ما فوق سرعة الصوت ذات درجة الحرارة العالية (HT) محورية الجسم المركزي. ويعتمد المنهج على نظرية تمدد براندتل-ماير عند درجات حرارة عالية مع استخدام طريقة الخصائص لحالة التناظر المحوري. وبالفعل تم تطوير كود بلغة فورترن من أجل الحصول على تصميم الفوهة. بمجرد تحديد ملف تعريف الجسم المركزي، ركزنا اهتمامنا على تطور المعلمات الديناميكية الحرارية للتدفق؛ مثل الضغط ودرجة الحرارة والكتلة الحجمية وعدد ماك. تمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك التي تم الحصول عليها لنموذج الغاز المثالي (GP). فيما يتعلق بمعلمات التصميم (الطول، نسبة القسم، معامل الدفع ومعامل الكتلة)، وجدنا أن نموذج GP يعطي نتائج مرضية للغاية لقيم M و T_0 أقل على التوالي من 2.00 و 1000 K. مع ارتفاع M_s و T_0 ، فهو يؤثر على الأداء، مما يتطلب استخدام نموذج HT الخاص بنا لتصحيح الحسابات. من أجل تقليل وزن هذه الفوهة، اخترنا اقتطاع الجسم المركزي لزيادة أدائه. تم إجراء جميع الحسابات في حالة الهواء.

الكلمات المفتاحية

شكل الفوهة، التدفق فوق الصوتي، التدفق بدرجة حرارة مرتفعة، فوهة محورية التناظر، فوهة الجسم المركزي، طريقة الخصائص (MOC)، دالة براندتل-ماير.

REMERCIEMENTS

En premier lieu nous remercions ALLAH, le Tout Puissant, Qui nous a donné le courage, la volonté et la patience pour bien mener ce modeste travail. Mes vives pensées vont à l'égard de ma mère, ma femme et mes deux enfants, ainsi que mes frères et sœurs.

Je voudrais tout d'abord remercier ceux sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Je voudrais notamment exprimer toute ma gratitude à T. YAHIAOUI pour son encadrement, sa disponibilité, ses corrections, son soutien dans les moments difficiles et surtout ses conseils qui m'ont permis de progresser. Un autre merci également à O. ABADA, H. KBAB et S. HAIF pour leur aide pour accomplir ce travail.

Monsieur O. KETFI, Maître de Conférences " A " au Département de Mécanique de l'Université de Blida 1, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes sincères remerciements s'adressent à Monsieur M. MEKADEM, Maître de Conférences " A " à l'E.M.P. d'Alger, d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent à Monsieur D. AZZOUZI, Professeur à l'Université Khemis-Miliana, pour sa confiance et d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Monsieur I. BENNEMIA, Maître de Conférences " A " du Centre Universitaire de Tipaza, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent à Monsieur A. BENAROUS, Professeur au Département de Mécanique de l'Université de Blida 1, pour sa confiance et d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail et d'avoir bien voulu participer au jury.

Mes remerciements vont aussi à l'égard de tous les enseignants et les travailleurs de l'Institut d'Aéronautiques et des Études Spatiales et du Département de Mécanique ainsi que toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ce parcours.

TABLE DES MATIERES

RESUME	iii
REMERCIEMENTS	vi
TABLE DES MATIERES	vii
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	ix
LISTE DES SYMBOLES	xxi
INTRODUCTION	14
Chapitre 1 : ETAT DE L'ART ET POSITION DU PROBLEME	17
1.1. Introduction	17
1.2. Recherche bibliographique sur les tuyères supersoniques	19
1.2.1 Tuyère idéale	21
1.2.2 Tuyère conique	24
1.2.3 Tuyère cloche (Bell nozzle)	28
1.2.4 Tuyère à corps central (Plug nozzle)	32
1.2.5 Tuyère type Expansion-Déflexion (E-D)	36
1.2.6 Tuyère double galbe	38
1.3. Objectif de l'étude	41
Chapitre 2 : METHODE DES CARACTERISTIQUES A HAUTE TEMPERATURE	43
2.1 Introduction	43
2.2 Hypothèses fondamentales	43
2.3 Equations descriptives de l'écoulement	44
2.4 Equations des caractéristiques	47
2.5 Relation de compatibilité	49
Chapitre 3 : INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE COMPATIBILITES ET DES CARACTERISTIQUES	53
3.1. Introduction	53
3.2. Résolution des équations des caractéristiques et de compatibilités	53
3.3. Différentes approches d'intégrations numériques des équations	56
3.3.1. Linéarisation des équations	56
3.3.2. Approches par différence finie	59
3.4 Application pour différents nœuds	63
3.4.1. Procédure pour un nœud interne	63
3.4.2. Procédure pour un nœud sur la paroi rigide	64
Chapitre 4 : RESULTATS ET COMMENTAIRES	67
4.1 Maillage en caractéristiques	67
4.2 Effet de la température génératrice T_0 sur le contour de la tuyère	71
4.3 Calcul de l'écoulement dans une tuyère à corps central axisymétrique	76

4.4	Effet du nombre de Mach de sortie M_s sur les paramètres de conception	81
4.5	Variation des paramètres thermodynamiques le long du contour du corps central	84
4.6	Calcul de l'erreur entre les modèles haute température (HT) et gaz parfait (GP)	87
4.7	Etude de la troncature de la tuyère à corps central (Plug Nozzle)	89
CONCLUSION		91
APPENDICES		95
A.	Les équations thermodynamiques d'un écoulement supersonique pour les modèles GP et HT.	95
B.	Tuyère à corps central bidimensionnelle type à bouchon (2D Plug Nozzle)	96
REFERENCES		109

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Profil d'une tuyère idéale [85]	22
Figure 1.2	Abaque de 12 profils idéaux avec un calcul de couche limite [85]	23
Figure 1.3	Comparaison de la longueur (calculée) de plusieurs types de tuyères (MNG : Multi Grid Nozzle, E-D : Expansion-Déflexion Nozzle) [27]	23
Figure 1.4	Tuyère conique	24
Figure 1.5	Variation de λ en fonction de l'angle α sous forme graphique [73]	25
Figure 1.6	Tracé de la pression statique centrale (mesurée) pour différents rapports de pression (NPR) [68]	26
Figure 1.7	Comparaison d'une tuyère conique 15° (tuyère de référence) avec des tuyères cloches 80% et 60%, le tout à un taux d'expansion ε de 25 [85]	28
Figure 1.8	Variation des angles de la paroi θ_n avec le taux d'expansion ε pour différentes valeurs de L_f [64]	29
Figure 1.9	Variation des angles de la paroi θ_s (calculés) avec le taux d'expansion ε pour différentes valeurs de L_f [64]	30
Figure 1.10	Tuyère à corps central idéale	35
Figure 1.11	Tuyère à corps central tronqué	35
Figure 1.12	Tuyère type Expansion – Déflexion (E-D)	37
Figure 2.1	Illustration de la direction de l'écoulement et de l'angle de Mach	48
Figure 2.2	Les caractéristiques C+ et C- et les lignes de Mach η et ξ	48
Figure 2.3	Relation entre les lignes de Mach et les coordonnées cartésiennes	50
Figure 3.1	Nœud interne particulier	62
Figure 3.2	Nœud interne quelconque	63
Figure 3.3	Nœud sur la paroi rigide	65
Figure 4.1	Effet du raffinement du nombre de caractéristiques N_c sur le contour de la tuyère à corps central axisymétrique pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$	68
Figure 4.2	Effet du raffinement du pas Δx sur le contour de la tuyère à corps central axisymétrique pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$	70
Figure 4.3	Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères à corps central axisymétrique pour $M_S=1,50$	72

Figure 4.4	Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique pour $M_S=2,00$	73
Figure 4.5	Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique pour $M_S=3,00$	74
Figure 4.6	Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères supersoniques à corps central axisymétriques pour $M_S=4,00$	75
Figure 4.7	Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_S= 3.00$ et $T_0=2000$ K	77
Figure 4.8	Variation du rapport de température T/T_0 le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_S= 3.00$ et $T_0=2000$ K	78
Figure 4.9	Variation du rapport de pression P/P_0 le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_S= 3.00$ et $T_0=2000$ K	79
Figure 4.10	Variation du rapport de pression ρ/ρ_0 le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_S= 3.00$ et $T_0=2000$ K	80
Figure 4.11	Variation de la longueur de la tuyère à corps central axisymétrique	81
Figure 4.12	Variation du rapport de section A_S/A^* de la tuyère à corps central axisymétrique	82
Figure 4.13	Variation du coefficient de poussée C_F de la tuyère à corps central axisymétrique	83
Figure 4.14	Variation de l'angle de déviation θ^* en fonction du nombre de Mach de sortie	84
Figure 4.15	Variation du nombre de Mach M le long du contour du corps central pour $M_S=3,00$	85
Figure 4.16	Variation du rapport des températures T/T_0 le long du contour du corps central pour $M_S=3,00$	86
Figure 4.17	Variation du rapport de pression P/P_0 le long du contour du corps central pour $M_S=3,00$	86
Figure 4.18	Variation de l'erreur relative de la longueur (L/y^*) entre les modèles <i>HT</i> et <i>GP</i> en fonction du nombre de Mach de sortie	87
Figure 4.19	Variation de l'erreur relative du coefficient de masse (C_{Masse}) entre les modèles <i>HT</i> et <i>GP</i> en fonction du nombre de Mach de sortie	88

Figure 4.20	Variation de l'erreur relative du coefficient de poussée (C_F) entre les modèles <i>HT</i> et <i>GP</i> en fonction du nombre de Mach de sortie	88
Figure 4.21	Variation de l'erreur relative du rapport de section (A_S/A^*) entre les modèles <i>HT</i> et <i>GP</i> en fonction du nombre de Mach de sortie	89
Figure 4.22	Représentation du gain en masse et de la perte de C_F d'une tuyère à corps central axisymétrique tronqué pour $M_S=3.00$ et $T_0=2000$ K	90
Tableau 1.1	Les importantes études effectuées sur les tuyères coniques	27
Tableau 1.2	Les importantes études effectuées sur les tuyères à corps central	36
Tableau 1.3	Les importantes études effectuées sur les tuyères de type E-D	37
Tableau 1.4	Les importantes études effectuées sur les tuyères à double galbe	40
Tableau 1.5	Les principales études effectuées sur les tuyères multi-galbes	40
Tableau 4.1	Effet de la discrétisation du nombre de caractéristiques N_c sur les paramètres de dimensionnement de la tuyère axisymétrique pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$	69
Tableau 4.2	Effet de la discrétisation du pas Δx sur les paramètres de dimensionnement de la tuyère axisymétrique pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$	71
Tableau 4.3	Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.3 pour $M_S=1,50$	72
Tableau 4.4	Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.4 pour $M_S=2,00$	73
Tableau 4.5	Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.5 pour $M_S=3,00$	74
Tableau 4.6	Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.6 pour $M_S=4,00$	75
Tableau 4.7	Effet de la température de stagnation T_0 sur la conception de la tuyère à corps central axisymétrique pour un nombre de Mach de sortie $M_S=5,00$	90

LISTE DES SYMBOLES

M	Nombre de Mach.
M_S	Nombre de Mach de sortir (ou M_E : Exit Mach number).
x	Abscisse axiale d'un point (dans le système de coordonnées cylindriques).
y	Rayon d'un point.
a	Vitesse du son.
V	Vitesse de l'écoulement.
u, v	Composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.
A	Aire d'une section de la tuyère.
P	Pression.
T	Température.
$\dot{m}$	Débit massique.
L	Longueur de la tuyère.
l	Unité de profondeur de la tuyère bi-dimensionnelle.
S	Longueur curviligne suivant le segment d'une courbe iso-valeur
r	Constante thermodynamique de l'air (pour le cas d'un GP : $r = 287,15 \text{ J/kg.K}$).
r	Coordonnée radiale (dans le système de coordonnées cylindriques).
t_M	Epaisseur du matériau de la structure de la tuyère.
H	Enthalpie à une constante près (enthalpie dynamique).
C_P	Chaleur spécifique à pression constante.
x_{Plug}	Distance entre la carène et la section de sortie de la tuyère à corps central.
F_x	Force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère.
N	Nombre des caractéristiques descendantes régulières pour la tuyère MLN , et représente le nombre de points de la discrétisation de la zone de détente pour la tuyère à corps central.
N_i	Nombre des caractéristiques descendantes insérées dans la région de Kernel.
C_{Force}	Coefficient de la force de pression.
C_{Gas}	Coefficient de la masse du gaz.
C_{Masse}	Coefficient de la masse de la structure de la tuyère.
C_y	Coefficient de l'interpolation de l'ordonnée y .
C_θ	Coefficient de l'interpolation du paramètre θ .
C_T	Coefficient de l'interpolation du paramètre T .
b_1, b_2	Coefficients de la fonction de condensation.
μ	Angle de Mach.
v	Fonction de Prandtl Meyer.
θ	Déviation du vecteur vitesse.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques.
ρ	Masse volumique.
Δ	Coefficient de la fonction de condensation
Φ	Angle polaire d'un point de la paroi par rapport à la carène 'lip'.
Ψ	Déviation de la carène par rapport à la verticale.
ρ_M	Masse volumique du matériau de la structure de la tuyère.
ε	Tolérance de calcul (précision voulue)
σ	Coefficient d'interpolation de la pression P .

α, β	Angles aux sommets i et $i+1$ d'un triangle.
δ	Géométrie de la tuyère ; $\delta=0$ pour le cas $2D$ et $\delta=1$ pour le cas axisymétrique.
ξ, η	Lignes de Mach descendante et montante, respectivement.
Δx	Pas non-dimensionnel ($\Delta x/y^*$) pour le calcul dans la région de transition

Abréviations

<i>HT</i>	Haute Température.
<i>GP</i>	Gaz Parfait (ou <i>PG</i> : Perfect Gas).
<i>MLN</i>	Abréviation du terme Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée).
<i>MOC</i>	Abréviation du terme Method Of Characteristics (méthode des caractéristiques).
<i>NPR</i>	Abréviation du terme Nozzle Pressure Ratio (Rapport des Pressions de la tuyère).
C^+	Caractéristique montante.
C^-	Caractéristique descendante.

Indices

13	Valeur moyenne entre les points 1 et 3.
23	Valeur moyenne entre les points 2 et 3.
<i>GP</i>	Valeur moyenne entre les points <i>G</i> et <i>P</i> .
<i>GD</i>	Valeur moyenne entre les points <i>G</i> et <i>D</i> .
3	Concernant la valeur au point 3.
0	Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion)
*	Condition critique.
<i>e</i>	Exit
<i>S</i>	Section de sortie.
<i>d</i>	Détente de Kernel.
<i>(j)</i>	Tronçon.
<i>j</i>	Nœud.
<i>t</i>	Throat (col)
<i>W</i>	Paroi.

Exposant

*	Valeur au col juste après la détente.
<i>K</i>	Itération.
<i>Iso</i>	Courbe iso-valeurs.
-	Valeur en un point sur la caractéristique descendante.
+	Valeur en un point sur la caractéristique montante

INTRODUCTION

Les tuyères supersoniques interviennent énormément dans les structures aéronautiques et aérospatiales telles que : les moteurs-fusées, les missiles, les moteurs-avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques destinées à la modélisation des écoulements supersoniques. La poussée d'un moteur dépend principalement de la vitesse des produits de combustion à travers la section de sortie de la tuyère qui le propulse. Durant leur passage à travers une tuyère de Laval, les gaz d'échappement sont accélérés des vitesses subsoniques jusqu'aux vitesses supersoniques. L'optimisation du choix d'une tuyère de propulsion doit tenir compte : des matériaux utilisés, du mode de fabrication de la paroi, des exigences de refroidissement et des limites admissibles de dimensionnement, en plus du calcul de la dynamique des gaz qui nous intéressent.

De nombreuses études ont été effectuées pour la conception de ces dernières. Il existe des travaux qui sont limités seulement aux tuyères bidimensionnelles [12, 132, 133] et d'autres à celles axisymétriques [1, 13, 128, 129, 134]. Les références [3, 30, 32, 62] présentent des méthodes de dimensionnement des tuyères supersoniques tridimensionnelles complexes en appliquant la méthode des caractéristiques (MOC). Cette méthode est appliquée dans notre étude pour le cas axisymétrique en utilisant le modèle HT. Une méthode a été développée pour la conception et la détermination des paramètres thermodynamiques des tuyères à corps central axisymétriques. Cette méthode consiste à prendre en considération la variation de la température génératrice T_0 .

Les travaux antérieurs ont été réalisés dans le cas d'un gaz parfait (GP) où la chaleur spécifique à pression constante C_P et le rapport γ sont constants. Ces travaux sont cependant limités pour les basses températures, où nous pouvons aller jusqu'à 1000 K et pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas $M_S = 2,00$ environ. Dans le cas réel, C_P et γ varient avec la température. En effet, notre étude tient compte de l'effet de la variation de C_P et γ en fonction de la température pour concevoir une tuyère supersonique à corps central axisymétrique à haute température ; inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. Dans ce cas, le gaz parfait est en plus nommé par gaz calorifiquement imparfait ou gaz à haute température et thermiquement parfait (c'est le modèle HT). L'application est faite pour l'air.

Les relations thermodynamiques pour le modèle HT sont présentées dans les références [1, 4, 5, 6, 130, 131, 134, 135]. Dans ce cas, le modèle mathématique du gaz parfait (GP) devient un cas particulier de notre modèle à Haute Température (HT). Les références [133, 136] illustrent l'effet de variation de la température génératrice T_0 , et par conséquent, l'effet de la chaleur spécifique C_p et le rapport γ sur la conception des tuyères supersoniques bidimensionnelle et axisymétrique [132, 134, 136].

Le problème de l'amélioration des performances des tuyères supersoniques représente un sujet d'actualité et joue un rôle très important dans le domaine de la propulsion aérospatiale qui se traduit par la résolution de trois grands problèmes différents.

Le premier problème consiste à concevoir des nouvelles formes des tuyères supersoniques en conservant le même nombre de Mach de sortie entre les deux types de tuyères ; c'est-à-dire la même durée de vol et autonomie des deux engins en conservant encore la même section au col de la tuyère, dont le but d'améliorer la masse et le coefficient de poussée par rapport à la tuyère de référence (*MLN*). Cette amélioration varie avec la température génératrice T_0 , le nombre de Mach de sortie M_S et le rayon du corps central.

Le deuxième problème rencontré c'est de concevoir des nouvelles formes de la tuyère afin d'améliorer le coefficient de poussée et le nombre de Mach de sortie par rapport à la tuyère *MLN* en gardant la même masse des deux tuyères ainsi que l'aire de la section au col.

Le troisième problème consiste à développer une nouvelle forme de tuyère par rapport à la tuyère *MLN* permettant d'améliorer la masse de la tuyère ainsi que le nombre de Mach de sortie en gardant la même force de poussée délivrée par la tuyère et la même aire de la section au col.

En réalité, on peut avoir plusieurs problèmes à considérer en termes de performances d'une tuyère supersonique.

La tuyère développée dans notre étude répond avec succès comme solutions à ces trois problèmes à travers les résultats obtenus, ce qui montre l'actualité et l'intérêt de notre travail ; c'est le cas axisymétrique à Haute Température (*HT*). Dans ce cas la paroi de la tuyère possède un point d'inflexion.

Le but de ce travail consiste à développer un nouveau programme de calcul numérique permettant de concevoir de nouveaux contours des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique. Les contours obtenus donnent un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie dont le but est d'éliminer les pertes de poussée causées par la forme de la tuyère à la sortie de la tuyère.

Le modèle *HT* considéré est utilisé lorsque la température est élevée ; mais elle est inférieure au seuil de dissociation des molécules, dans le but de résoudre trois fameux problèmes d'amélioration des performances déjà mentionnés par rapport à la tuyère type *MLN*.

La tuyère *MLN* est choisie pour comparer les améliorations des performances déterminées pour notre cas de la tuyère développée dans ce travail, car la construction aérospatiale actuelle utilise toujours la tuyère *MLN* tronquée dans la construction de leurs lanceurs vu qu'elle possède les meilleures performances par rapports aux autres types de tuyères existant dans ce domaine ainsi que la simplicité de sa construction.

La méthode de conception est basée sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques en axisymétrique, dans le cadre d'un gaz parfait, à haute température [1]. La résolution des équations obtenues se fait par l'algorithme de prédictor correcteur des différences finies [137]. Le profil externe ainsi que la longueur du corps central de la tuyère sont des inconnus à priori. Ils seront déterminés numériquement et point par point afin d'avoir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Cette condition va utiliser toute la force de poussée délivrée par la tuyère pour la propulsion. Dans ce cas, la poussée utilisée sera maximale et par conséquent, aucune perte de poussée ne sera obtenue. La détente de l'écoulement dans la tuyère sera complète.

La validation des résultats est assurée par la convergence du rapport des sections critiques calculé numériquement par notre programme numérique, pour une discrétisation élevée, vers le rapport des sections critiques obtenu théoriquement. Dans ce cas, tous les autres paramètres de conception comme la forme de la paroi de la tuyère, la poussée délivrée par la tuyère, la longueur de la tuyère, la longueur du corps central, la masse de la structure ainsi que la distribution de tous les paramètres de l'écoulement convergent aussi et d'une façon automatique vers la solution physique désirée.

Le gaz utilisé est de l'air. Il est considéré comme parfait. Notamment l'équation d'état ($P=\rho RT$) reste toujours valable, sauf qu'il est considéré comme calorifiquement imparfait vu l'utilisation du modèle *HT* (Haute Température). Dans ce cas, la chaleur spécifique à pression constante varie avec la température. Pour l'air, une interpolation polynomiale par un polynôme de 9^{ème} degré est effectuée aux valeurs tabulées présentées dans les références [1, 28]. Les coefficients de ce polynôme sont présentés dans les références [29-30]. Le gaz est considéré encore comme thermiquement parfait vu que la température de dissociation des molécules n'est pas atteinte. Le domaine d'application de la température est jusqu'à 3550 K et le nombre de Mach peut arriver à 5.00.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART ET POSITION DU PROBLEME

1.1 Introduction

Depuis plusieurs années, les chercheurs scientifiques dans le domaine aérospatial ont intensifié leurs recherches pour satisfaire la demande continue de satelliser des charges de plus en plus lourdes et répondre aux impératifs de la compétition internationale soit sur le plan commercial ou sur le plan de la conquête de l'espace. Évidemment, sur le plan stratégique, des études ont été faites sur les moteurs-fusées pour consolider et améliorer la maîtrise de la technique des lanceurs lourds dont un pays doit se doter pour assurer son indépendance. Les aptitudes de ces moteurs-fusées dépendent étroitement des performances des moteurs utilisés et que ces dernières sont liées aux performances des tuyères équipant ces moteurs. Tous les travaux actuels sont orientés pour améliorer l'efficacité de ces tuyères. Pour cela, plusieurs techniques et designs ont été proposés pour arriver à de meilleures performances.

Au début, à cause de sa simplicité, la tuyère a été considérée comme un organe annexe, dont le rôle consiste essentiellement à assurer le fonctionnement d'un moteur à un régime donné par adaptation convenable de sa forme géométrique. Même l'avènement du vol supersonique à ses débuts n'a pas provoqué de changement d'attitude chez les constructeurs.

Depuis plusieurs années, la résolution numérique des problèmes d'aérodynamique, tels que, les écoulements des fluides dans les tuyères supersoniques sont devenus possibles. Ces tuyères, dont le but essentiel est d'assurer l'accélération des gaz de combustion à des vitesses supersoniques, interviennent dans beaucoup de structures, comme : les moteurs-fusées, les moteurs d'avions et dans les souffleries supersoniques destinées aux études expérimentales des écoulements réels.

La conception de la partie divergente d'une tuyère supersonique fait l'objet d'intenses recherches pour atteindre des poussées de plus en plus importantes. La poussée maximale est obtenue quand l'écoulement à la sortie est uniforme.

Lors de l'optimisation du choix d'une tuyère supersonique de propulsion, en plus des calculs de dynamique des gaz, il est essentiel de prendre en compte une série de paramètres. Ces paramètres incluent le matériau utilisé pour la construction de la tuyère, le mode de fabrication de la paroi, les exigences de refroidissement, les limites admissibles de refroidissement etc...., pour assurer un fonctionnement sûr et optimal de la tuyère supersonique de propulsion.

Avec l'avènement de la propulsion spatiale, les motoristes ont été contraints par une spécification limitant le poids et la longueur du divergent d'une tuyère à déterminer en fonction de la plage d'altitudes de vol, les optimums du rapport de section et de la poussée poids, tout en essayant de minimiser les pertes de poussée par rapport à la tuyère idéale. Pour cela, ils proposèrent plusieurs solutions pour réduire la longueur du divergent. Entre autres, des tuyères avec un divergent conique de demi-angle de 15° [5]. Ces tuyères sont caractérisées par un faible rapport de section, c'est le cas de la fusée allemande V2. À cette époque-là, les chercheurs allemands ne voyaient aucun avantage à utiliser des méthodes numériques pour le design de profils des tuyères équipant les moteurs supersoniques.

Néanmoins, après la Deuxième Guerre mondiale, les tuyères supersoniques ont pris une grande importance pour l'industrie militaire. Il fallait augmenter les performances des moteurs-fusées pour, non seulement des applications stratégiques dans le domaine militaire, mais également dans la course vers la conquête spatiale.

C'est dans ce contexte que des tuyères à grands rapports de sections ont été développées pour les moteurs-fusées fonctionnant à haute altitude. L'utilisation du concept de tuyères coniques est devenue alors, impraticable au vu de leur longueur et leur diamètre de sortie. Mais, ces dernières continuent toujours à être utilisées sur des moteurs fonctionnant à basse altitude. Pour les hautes altitudes, les moteurs-fusées sont équipés par des tuyères à profils optimisés par la méthode des caractéristiques.

La tuyère propulsive du moteur-fusée d'un lanceur est soumise sur l'ensemble du vol à une pression ambiante (Pa) voisine de 1 bar au niveau du sol et à des pressions inférieures au dix millième de Pascal en hautes altitudes.

Par ailleurs, pour la conception de ce genre de tuyère, il est nécessaire que son régime d'adaptation soit atteint à une altitude moyenne. Au sol, son dimensionnement conduit à un régime sur-détendu où la structure de décollement n'est pas au sein du divergent. L'origine du choc de décollement est alors positionnée sur la lèvre de sortie de la tuyère. Ainsi, l'apparition des charges latérales nuisibles à la structure est évitée et l'intégrité mécanique du lanceur est préservée.

Au cours du processus de conception d'une tuyère supersonique, un compromis doit être fait entre les performances au niveau de la mer (décollage et montée à basse altitude) et celles à vide (haute altitude), afin de satisfaire au mieux les exigences de la mission dans les limites des performances de cette tuyère.

De plus, on n'omet pas de tenir compte du rapport d'expansion de la tuyère. Il doit être limité pour éviter le décollement de la couche limite dans la partie divergente de la tuyère au niveau de la mer.

Plusieurs solutions ont été proposées. Par exemple, une tuyère à rapport d'expansion variable permet d'optimiser l'impulsion délivrée sur toute la trajectoire du vol, entraînant des gains de performances considérables.

Les tuyères à compensation idéale d'altitude (ACN : Altitude Compensating Nozzle) ont été proposées. Ce type de tuyères permet de varier en continu, le rapport de la section de sortie de telle sorte que la tuyère a toujours une pression adaptée. L'étude de ses ACN a été confrontée à plusieurs contraintes, comme : le poids, le coût, la complexité mécanique et le refroidissement, ce qui a privé leur mise en œuvre sur des lanceurs réels.

1.2. Recherche bibliographique sur les tuyères supersoniques

A la fin des années 1930 et au début des années 1940, des scientifiques Allemands ont effectué des recherches approfondies sur les tuyères [2, 4] en examinant tous les aspects de la conception. Ils ont estimé qu'il n'y avait aucun avantage majeur à utiliser des contours très complexes. Après la seconde guerre mondiale, l'étude des tuyères est devenue un domaine d'actualité, de concurrence et de compétitivité entre les États-Unis, l'Union Européenne, la Russie, le Japon et la Chine. Plusieurs agences de programmes (ESA, CNES, CNSA, ...), d'organismes de recherches (NASA, ONERA, NASDA, DLR, LEA-Poitier, ...) et industriels (Boeing, Rocketdyne, Pratt & Whitney, Snecma Moteurs, Volvo Aero, Astrium, Mitsubishi Heavy Industries, ...) travaillent sur l'amélioration des performances des moteurs fusées et les tuyères propulsives.

Pour concevoir les contours de la tuyère, les chercheurs scientifiques ont utilisé le calcul des variations comme une approche simple et directe. Guderley et Hantsch [49] ont étudié le problème de déterminer le contour et la zone de sortie de la tuyère pour générer la poussée optimale pour des valeurs données de pression ambiante et de longueur de la tuyère. Cependant, la méthode n'a pas été largement acceptée jusqu'à ce qu'une technique simplifiée soit proposée par Rao [91].

Les tuyères de fusées sont disponibles dans une variété de configurations telles que : idéale, conique, cloche, expansion-déflexion (E-D), double galbe, à corps central (plug nozzle) et la tuyère multi- grille (MNG) récemment développée.

Une tuyère idéale est définie comme celle qui produit un écoulement isentropique (c'est-à-dire sans chocs internes) et donne une vitesse uniforme à la sortie. Le contour d'une telle tuyère peut être conçu à l'aide de la méthode des caractéristiques [132].

Le type conique a toujours été le contour le plus courant pour les tuyères de fusées en raison de sa simplicité de conception et de sa facilité de fabrication [4, 5].

Dans une tuyère conique, la vitesse de sortie est essentiellement unidimensionnelle (1D) correspondant au rapport de section, mais le flux n'est pas dans une direction axiale à travers la zone de sortie, ce qui entraîne une perte de performance due à la divergence du flux [5, 6]. En raison de ses pertes élevées, les tuyères courtes de type conique trouvent leurs applications dans les petits propulseurs et les propulseurs à fusée solide, où la simplicité de fabrication est préférée aux performances aérodynamiques [5].

En augmentant l'angle de la tuyère conique, la perte de poussée conique est améliorée en raison de la divergence du débit. Cette perte de poussée peut être minimisée en contournant la paroi de la tuyère et ce type est appelé tuyère en cloche. En effet, ce faisant, le flux peut être amené à tourner plus près de la direction axiale [6].

La tuyère conventionnelle de type cloche a été utilisée pour dilater les produits propulsifs [8]. La tuyère à corps central (plug nozzle) est une tuyère à compensation d'altitude qui étend le débit à un rapport de surface fixe quelles que soient les conditions de l'écoulement libre. La limite du jet libre qui agit comme une paroi extérieure virtuelle sur une tuyère à corps central se dilate pour correspondre à la pression ambiante de l'écoulement libre [9, 10].

La première analyse conceptuelle des tuyères à corps central a été réalisée dans les années 1950 [8]. Bien que les avantages en termes de performances aient été revendiqués dans la plupart des publications, les tuyères de type « plug nozzle » n'ont pas obtenu le statut de vol matériel. A l'avenir, cela pourrait changer car le moteur-fusée à tuyère à corps central linéaire est prévu comme système de propulsion pour le concept RLV X-33 de Lockheed Martin Corporation [8, 11, 12].

Dans la tuyère E-D (Expansion-Déflexion), le flux de la chambre est dirigé radialement vers l'extérieur et à l'opposé de l'axe de la tuyère. L'écoulement est dévié vers le contour incurvé de la paroi externe divergente de la tuyère [13]. Le flux du gaz chaud sortant de la chambre se dilate autour d'un corps central.

1.2.1. Tuyère idéale

Lorsqu'un écoulement est uniforme et parallèle avec une pression de sortie correspondant à la pression ambiante à la sortie de la tuyère, la poussée de la tuyère devient maximale. Ce type de tuyère est qualifié de tuyère idéale. Le rapport de la section à la sortie (A_s) à la section au col (A_*) d'une telle tuyère peut être exprimé par l'équation (1.1) suivante [6] :

$$\frac{A_s}{A_*} = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left(\frac{P_a}{P_0}\right)^{-1/\gamma} \left[1 - \left(\frac{P_a}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{-1/2} \quad (1.1)$$

Le rapport des pressions (P_a/P_0) est très inférieur pour les moteurs-fusées fonctionnant à haute altitude, et donc plus de rapports d'expansion pour les tuyères idéales sont nécessaires. Un moteur-fusée fonctionnant sur une large gamme d'altitudes donnera des performances optimales lorsque le taux d'expansion de la tuyère est variable.

Du fait des températures très élevées mises en jeu, la variation mécanique du taux de détente n'est pas aisée. Ainsi, un taux d'expansion fixe approprié est sélectionné en tenant compte des exigences de performances sur la trajectoire complète de la fusée. La performance de la section divergente de la tuyère peut être calculée (équation 1.2) en termes de son coefficient de poussée à vide [6] et peut être exprimé comme suit :

$$C_{fv} = \frac{F_v}{P_0 A_*} \quad (1.2)$$

où F_v est la poussée lors de la décharge dans le vide, (P_0) et (A_*) sont respectivement la pression de la chambre de combustion et la section du col de la tuyère. Le coefficient de poussée du vide d'une tuyère idéale est une fonction de l'exposant isentropique γ et du rapport des sections A_s/A_* . Le coefficient de poussée d'une tuyère idéale [6] fonctionnant dans une pression ambiante P_a est donné par l'expression suivante :

$$C_f = C_{fvi} - \frac{P_a}{P_0} \cdot \frac{A_s}{A_*} \quad (1.3)$$

L'écoulement uniforme à la sortie peut être obtenue lorsque la configuration de la paroi de la tuyère est conçue par la méthode des caractéristiques [3, 4, 21]. A l'aide de cette méthode, le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) peut être converti à un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) valables le long des lignes caractéristiques qui représentent le chemin de propagation des perturbations dans les écoulements supersoniques.

Une caractéristique peut être définie comme une ligne le long de laquelle les équations aux dérivées partielles gouvernantes se réduisent à un opérateur intérieur qui est une équation différentielle totale connue sous le nom d'équation de compatibilité. Ainsi, le long d'une caractéristique, les variables dépendantes ne peuvent être spécifiées arbitrairement étant contraintes de satisfaire l'équation de compatibilité [22-30].

Foelsch [40] a donné une approximation grâce à laquelle le contour de la tuyère peut être obtenu par un calcul manuel. La longueur d'une tuyère idéale peut être réduite en permettant à toute l'expansion de se produire juste au col en aval, puis en construisant le contour de la tuyère pour faire tourner le flux de sortie qu'il puisse atteindre un écoulement uniforme axial à la sortie de la tuyère. Il faut noter que l'utilisation des ordinateurs puissants (à grande vitesse d'exécution) est nécessaire pour le calcul des contours des tuyères.

Pour obtenir un débit uniforme à la sortie, la longueur minimale de la tuyère nécessaire pour différentes valeurs de taux de détente (calculées pour $\gamma = 1.23$) est indiquée sur la figure (1.3) [85]. En calculant ces longueurs de tuyères, il a été constaté qu'en aval du col, un angle vif devait être étudié. Ainsi, un contour de paroi d'un rayon de courbure égal à 0.4 fois le rayon du col a été utilisé [6, 32].

Un profil d'une tuyère idéal est celui qui produit un écoulement isentropique (sans chocs internes) et un champ de vitesses uniformes à la sortie de la tuyère, figure (1.1). Un tel profil peut être conçu en utilisant la méthode des caractéristiques. La procédure détaillée est présentée par Zurcow M. J. & Hoffman J. D [56] et Anderson J.D. [4 - 6].

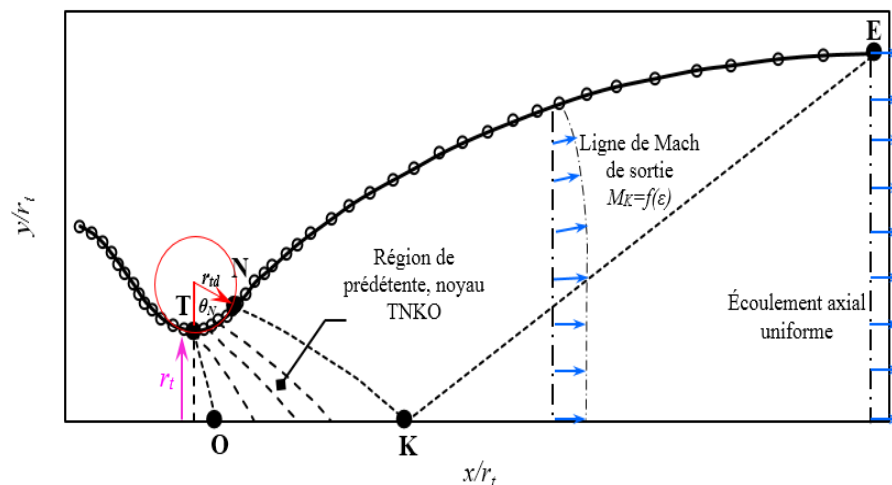


Figure 1.1 : Profil d'une tuyère idéale [85].

D'après la figure (1.1), il est clair que la tuyère idéale qui donne les performances de poussée maximales est plus lourde et plus longue. Après la zone d'expansion TN, le contour NE permet à l'écoulement d'avoir une direction axiale à la sortie de la tuyère.

Une fois, la ligne caractéristique NK est calculée avec la condition que la ligne KE est une caractéristique uniforme de sortie. Il est possible d'utiliser la méthode des caractéristiques (MOC) pour construire le champ des caractéristiques entre N et E.

La figure (1.2) représente douze (12) profils idéaux avec les iso-coefficients de poussée à haute altitude, les iso-rapports de sections et les iso-coefficients de pression pariétale [23].

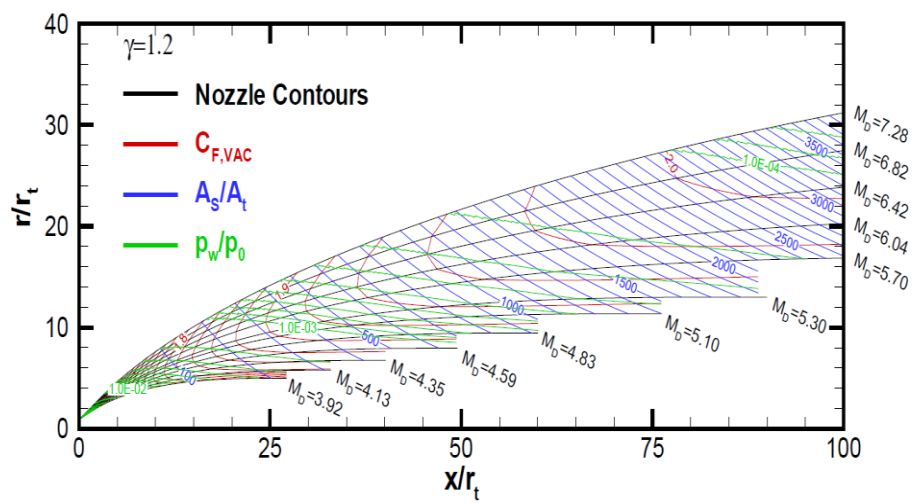


Figure 1.2 : Abaque de 12 profils idéaux avec un calcul de couche limite [23].

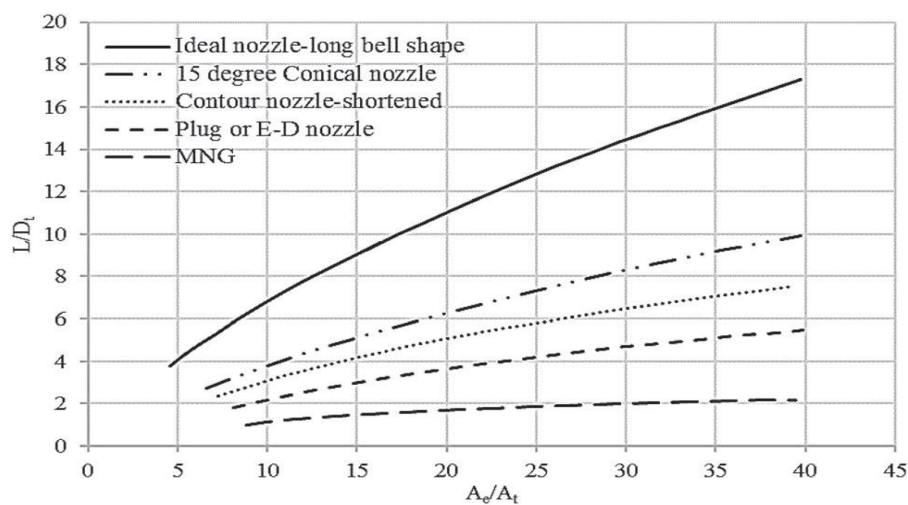


Figure 1.3 : Comparaison de la longueur (calculée) de plusieurs types de tuyères (MNG : Multi Grid Nozzle, E-D : Expansion-Déflexion Nozzle) [27].

1.2.2 Tuyère conique

L'application d'une tuyère conique était très courante dans les premiers moteurs de fusées. Le principal attrait de la tuyère conique est qu'elle est facile à fabriquer et qu'elle a la flexibilité de convertir une conception existante en un rapport de section inférieur ou supérieur sans trop de préconception. Une configuration d'une tuyère conique typique est illustrée à la figure (1.4). Sur la base de longueur, des performances et du poids, le meilleur angle compromis (α) du divergent pour une tuyère conique est de 15° [5, 23].

Le coefficient de poussée d'une tuyère conique 15° n'est que de 1.7% inférieur à celui de la tuyère idéale et change légèrement avec l'altitude [6]. Ainsi, les performances et les longueurs des tuyères les plus récentes sont souvent comparées à une tuyère conique 15° . La limitation de la tuyère conique étant dans sa masse (plus lourde) et dans sa longueur (plus longue), qui peut être atténuée en augmentant le demi-angle du cône divergent (α). Dans une tuyère conique, la perte de performances se produit à une altitude inférieure car une pression ambiante plus élevée entraîne une séparation du flux et une sur-expansion. Le principal inconvénient des tuyères coniques est le compromis entre l'angle de divergent et la longueur de la tuyère [35].

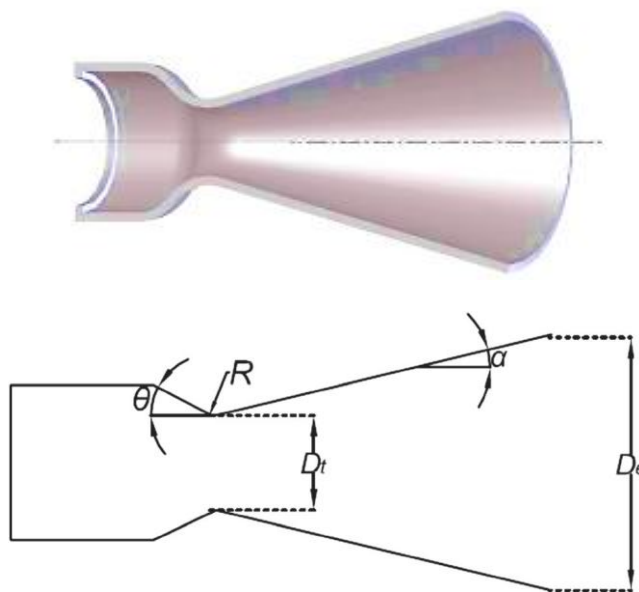


Figure 1.4 : Tuyère conique.

L'écoulement dans la tuyère conique entraîne une réduction de la poussée car la direction de l'écoulement n'est pas complètement axiale à la sortie.

Malina [36] a montré que la quantité de mouvement à la section de sortie était égale à la valeur calculée à partir de la théorie 1D multipliée par un facteur de correction, λ [4, 5]. L'amplitude de ce facteur diminue à mesure que l'angle α augmente, comme le montre la figure (1.5) [58].

$$\lambda = (1 + \cos \alpha) / 2 \quad (1.4)$$

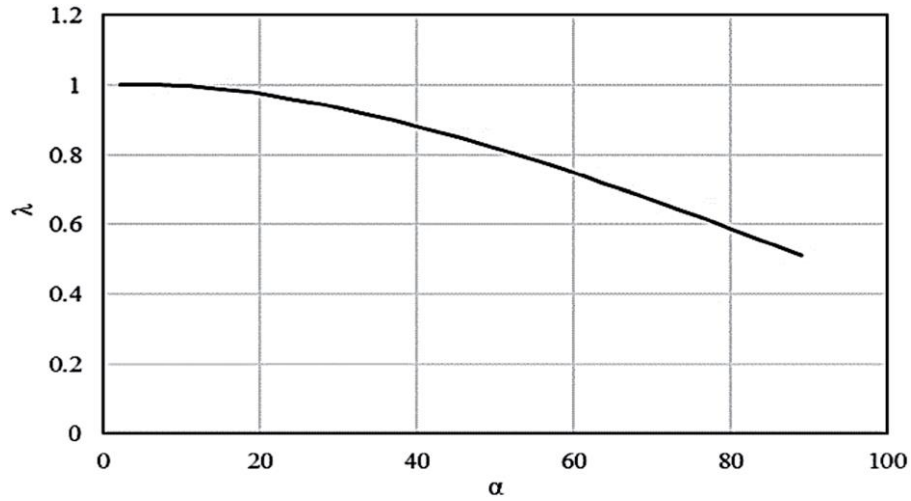


Figure 1.5 : Variation de λ en fonction de l'angle α sous forme graphique [58].

Le coefficient de poussée de la tuyère conique fonctionnant dans le vide (C_{fvc}) est donné par l'expression (1.5) suivante :

$$C_{fvc} = \frac{P_s}{P_0} \cdot \frac{A_s}{A_*} + \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) \frac{\rho_s V_s^2 A_s}{P_0 A_*} \quad (1.5)$$

Avec ρ_s , V_s , P_s sont, respectivement, la masse volumique, la vitesse et la pression à la section de sortie de la tuyère.

Darwell et Badham [35] ont prouvé la possibilité de formation de chocs à l'intérieur de la tuyère par la méthode des caractéristiques. Ils ont découvert qu'en modifiant le contour de la paroi près de la jonction du profil au col du cône, la formation de choc pouvait être éliminée.

Khan et Shembharkar [68] ont déployé que l'on peut capturer l'écoulement dans une tuyère Convergente-Divergente (CD) dans un régime d'écoulement sur-expansé en utilisant un code de dynamique des fluides (CFD). Ils ont calculé les caractéristiques de l'écoulement

telles que les répliques, l'endroit des chocs et les chocs lambda dans la tuyère CD. La variation de la pression statique centrale (figure 1.6) pour différents rapports de pression de la tuyère (NPR) montre que l'endroit du choc se déplace vers la section de sortie à mesure que le NPR augmente.

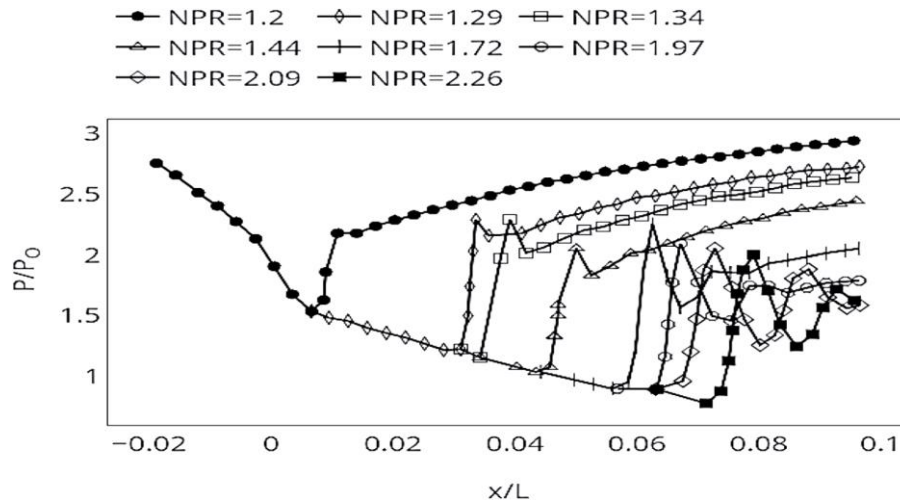


Figure 1.6 : Tracé de la pression statique centrale (mesurée) pour différents rapports de pression (NPR) [68].

Belabel et al [15] ont étudié la dynamique de l'écoulement de gaz turbulent dans une tuyère CD bidimensionnelle (2D) et les phénomènes physiques associés ont été analysés pour différentes conditions de fonctionnement.

Hoffman et Lorenc [56] ont étudié les effets du flux de particules de gaz 2D dans les tuyères coniques. Wehofer et Moger [111] ont développé une méthode analytique pour prédire les champs d'un écoulement transsonique non visqueux liés au CFD et aux tuyères coniques convergentes.

Jia et al [61] ont analysé numériquement l'influence de l'événement de l'étagement du feu dans le trou sur la séparation de l'écoulement au démarrage et les charges latérales dans une tuyère conique pendant le vol. En outre, Jia et al [62] ont étudié numériquement les charges latérales tridimensionnelles (3D) et la physique de l'écoulement associé d'une tuyère conique lors de l'événement de mise en scène du feu dans le trou d'une fusée à plusieurs étages.

Zmijanovic et al [139] ont étudié l'injection transversale du gaz secondaire dans l'écoulement supersonique d'une tuyère convergente-divergente pour expliquer l'influence de

la vectorisation de poussée fluidique dans le cadre d'un petit lanceur de satellite. Les résultats ont démontré la possibilité d'atteindre des forces vectorielles latérales pertinentes avec des rapports modérés entre les débits massiques secondaire et primaire de l'ordre de 5%. Ils ont également révélé que la géométrie et le positionnement de l'injecteur avaient une forte influence sur les performances de la tuyère et sur le système de contrôle du vecteur de l'onde de choc.

Zhang et al [138] ont effectué l'étude informatique des tuyères coniques convergentes. Les influences de la traînée de base et du nombre de Mach d'un écoulement libre sur le coefficient de vitesse calculé ont été analysées.

Sunley et Ferriman [123] ont effectué des tests pour étudier la séparation du jet dans des tuyères coniques et ont démontré que la pression à laquelle le gaz se sépare n'était ni constante ni indépendante de la longueur de la tuyère.

Migdal et Kosson [77] ont étudié les prédictions de choc dans des tuyères coniques. Migdal et Landis [78] ont étudié les performances de ces tuyères par l'application de la méthode des caractéristiques.

Le tableau 1.1 suivant résume les différentes études numériques, analytiques et expérimentales dans le domaine des tuyères coniques abordant les aspects aérodynamiques tels que la séparation des flux et la formation des ondes de choc.

Tableau 1.1 : Les importantes études effectuées sur les tuyères coniques.

Les auteurs	Année	Nature de l'étude	Objectif de l'étude
Migdal et Landis [78]	1962	Numérique	Performances des tuyères coniques.
Darwell et Badham [35]	1963	Numérique	Formation des ondes de choc.
Sunley et Ferriman [123]	1964	Expérimentale	Séparation de jet.
Migdal et Kosson [77]	1965	Numérique	Prédiction des chocs.
Hoffman et Lorenc [56]	1965	Numérique	Effets des particules du gaz.
Wehofer et Moger [111]	1970	Analytique	Champs d'écoulements transsoniques non visqueux.
Khan et Shembharkar [68]	2008	Numérique	Lieu de choc.
Balabel et al [15]	2011	Numérique	Dynamique des gaz d'un écoulement turbulent
Zmijanovic et al [139]	2014	Numérique/ expérimentale	Vecteur de poussée fluidique.
Zhang et al [138]	2015	Numérique	Tuyères coniques convergentes.
Jia et al [61]	2015	Numérique	Séparation des flux et charges latérales
Jia et al [62]	2016	Numérique	Charges latérales.

1.2.3 Tuyère cloche (Bell nozzle)

La tuyère de type cloche est la forme la plus couramment utilisée dans les moteurs-fusées. Cette catégorie de tuyères offre des avantages significatifs en termes de performances de la taille par rapport à la tuyère de type conique.

La tuyère cloche a une section d'expansion progressive à angle élevé (20° à 50°) juste derrière le col de la tuyère. Ceci est suivi d'une inversion progressive de la pente du contour de la tuyère de sorte qu'à la section de sortie, l'angle de divergence soit petit, de préférence un demi-angle inférieur à 10° . Il est possible d'avoir de grands angles du divergent immédiatement derrière le col (20° à 50°) car la pression relative élevée, le grand gradient de pression et l'expansion rapide du fluide de fonctionnement ne permettent pas la séparation dans cette partie à moins qu'il y ait des discontinuités dans le contour de la tuyère [85].

La longueur d'une tuyère cloche est généralement exprimée en fraction de la longueur de la tuyère cloche de référence. Comme le montre la figure (1.7), une configuration d'une tuyère à 80% qui a le même taux d'expansion (ε) est 20% plus petite en longueur qu'une tuyère conique à demi-angle de 15° .

Les angles à la section de sortie des deux tuyères en cloche 80% et 60% sont, respectivement, 8.5° et 11° [85].

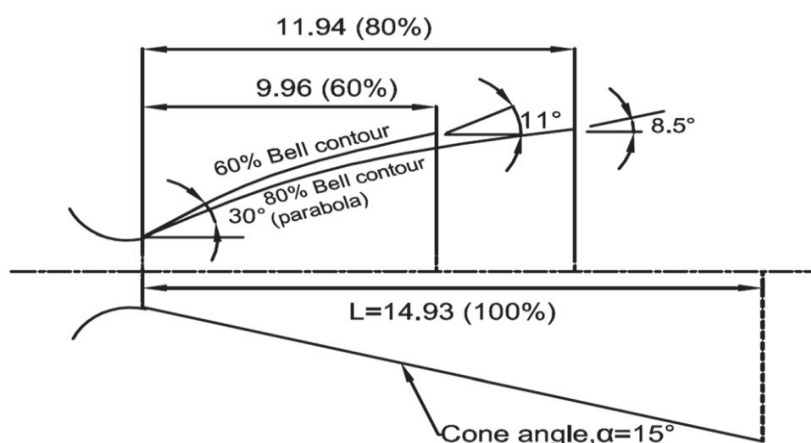


Figure 1.7 : Comparaison d'une tuyère conique 15° (tuyère de référence) avec des tuyères cloches 80% et 60%, le tout à un taux d'expansion $\varepsilon = 25$ [85].

Un contour presque optimal de la tuyère en cloche peut être conçu en utilisant une simple procédure d'approximation parabolique donnée par Rao [113, 114].

L'approximation parabolique de la conception est illustrée par la figure (1.8) [64], où en amont du col, le contour de tuyère est un arc de cercle dont le rayon est de $1.5R^*$. Du point T au point N, la partie divergente du contour de la tuyère est constituée d'une section d'entrée circulaire de rayon $1.5R^*$, puis de N à la section de sortie E, c'est une parabole [64].

Les données requises pour la conception d'une tuyère cloche spécifique sont : le diamètre du col D^* , l'angle de la paroi initiale de la parabole θ_n , l'angle de la paroi à la section de sortie de la tuyère θ_s , le rapport des sections ε et la longueur axiale de la tuyère depuis le col jusqu'au plan de sortie L_n (ou la longueur fractionnaire souhaitée L_f , basée sur une tuyère conique 15°) [64].

Les variations des angles de la paroi θ_n et θ_s avec le taux d'expansion à différentes valeurs de L_f sont illustrées, respectivement, par les figures 1.8 et 1.9. Il est évident sur la figure 1.8 qu'en augmentant le taux d'expansion de la tuyère, la valeur de θ_n augmente. Pour un rapport d'expansion particulier, l'amplitude de θ_n est plus grande pour une longueur fractionnaire L_f inférieure. En choisissant les entrées appropriées, les contours optimaux des tuyères peuvent être approximés.

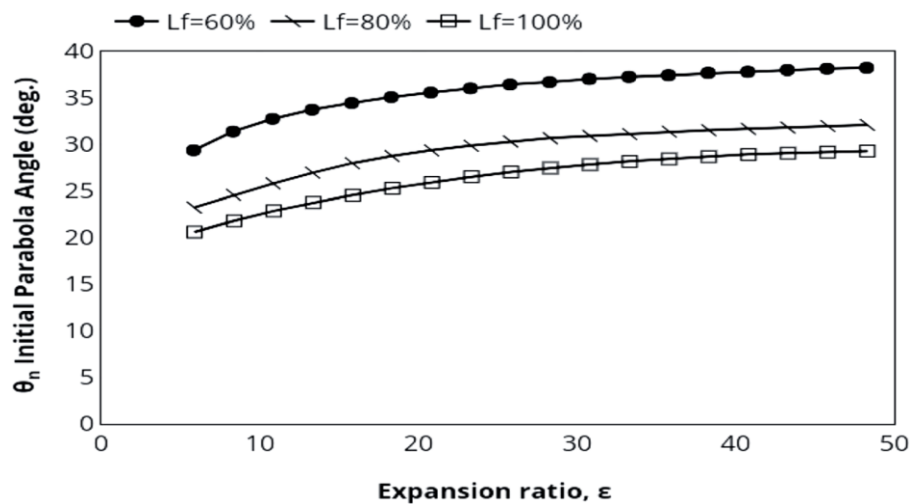


Figure 1.8 : Variation des angles de la paroi θ_n avec le taux d'expansion ε pour différentes valeurs de L_f [64].

La perte de la poussée peut être minimisée en contournant la paroi de la tuyère, car ce faisant, le flux peut être amené à s'écouler plus près de la direction axiale [36].

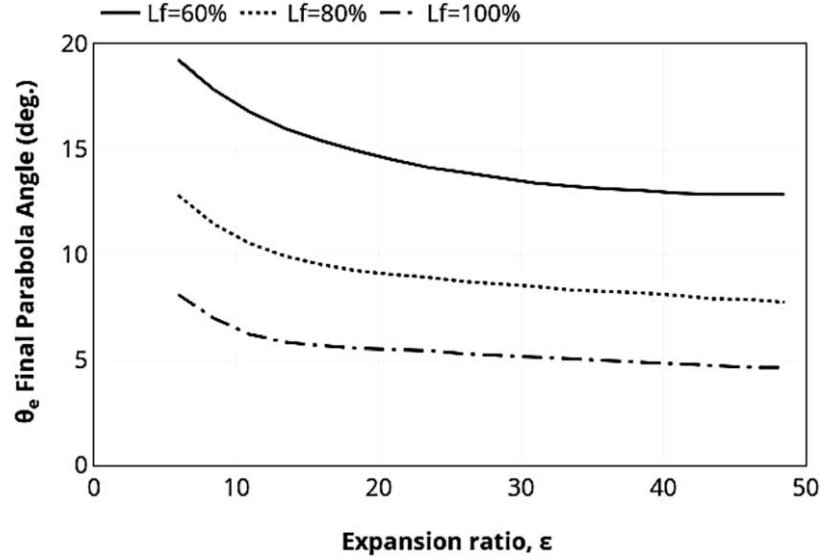


Figure 1.9 : Variation des angles de la paroi θ_s (calculés) avec le taux d'expansion ϵ pour différentes valeurs de L_f [64].

Pour la déviation des parois de la tuyère, diverses méthodes ont été proposées dans la littérature. Dillaway [36] a calculé les contours de la tuyère en réduisant progressivement la pente de la paroi à mesure que l'on s'approche de la sortie de la tuyère.

Dans une tuyère profilée, il existe une forte dépendance du débit de sortie et le contour de la tuyère. Le coefficient de poussée sous vide d'une tuyère profilée peut être évalué d'après l'expression (1.6) [36].

$$C_{fvc} = \int_{A_s} \frac{P}{P_{CA^*}} 2\pi r dr + \int_{A_s} \frac{\rho V^2 \cos \theta}{P_{CA^*}} 2\pi r dr \quad (1.6)$$

L'intégrale est effectuée sur toute la surface A_s du plan de sortie, qui est perpendiculaire à l'axe de la tuyère. La vitesse V , la direction θ , la masse volumique ρ et la pression P sont calculées à une distance r de l'axe de la tuyère dans le plan de sortie.

Selon Landsbaum [70], on peut analyser les différentes tuyères idéales tronquées de différents taux d'expansion puis sélectionner celle qui donne les meilleures performances [61].

Farley et Campbell [54] ont étudié expérimentalement de telles tuyères idéales tronquées et les résultats se sont avérés très proches des valeurs théoriques.

Ahlberg et al [7] ont présenté la technique graphique pour choisir les contours optimaux des tuyères à partir d'une famille de tuyères parfaitement tronquées.

Rao a développé une méthode en utilisant le calcul des variations pour concevoir le contour de la paroi d'une tuyère de poussée optimale. Pour les mêmes performances que celles de la tuyère conique à 15° , la longueur requise pour la tuyère en cloche est illustrée par la figure (1.3) [91].

Allman et Hoffman ont examiné une technique de conception des contours de tuyères à poussée maximale par l'utilisation des méthodes d'optimisation directes. Le contour de la tuyère a été donné par un polynôme du second ordre [9] :

$$y(x) = A_w + B_w x + C_w x^2 \quad (1.7)$$

Les coefficients A_w , B_w et C_w sont déterminés en mentionnant l'angle d'attache, le rayon de sortie et en exigeant que le contour polynomial s'attache en continu au contour d'expansion initial en arc de cercle. Les auteurs ont comparé les poussées développées par le calcul des contours de variation (méthode de Rao) avec les poussées générées par les contours polynomiaux. Il a été conclu que les deux méthodes prédisent essentiellement la même poussée maximale (c'est-à-dire que pour une pression ambiante nulle, l'accord était de 0,2 %), ce qui justifie la technique proposée.

Frey et al ont présenté une nouvelle technique de contour de tuyère appelée TICTOP, fusionnant les conceptions à contour idéal tronqué (TIC) et parabolique à poussée optimisée (TOP). La tuyère obtenue est sans choc comme la conception TIC et n'induit pas de séparation restreinte par choc (RSS) « restricted shock separation », ce qui conduit à des charges latérales élevées. Simultanément, il permet une pression plus élevée sur la paroi de la tuyère à la sortie, ce qui donne une meilleure marge de séparation que la conception TOP [42].

Pilinski et Nebbache ont analysé numériquement le flux séparé à divers NPR dans une tuyère TIC et le modèle d'une séparation par choc libre (FSS) a été obtenu pour des rapports de pression très basses et élevées. Entre ces deux plages de rapports de pression, un modèle de choc de capuchon rare sans rattachement de la couche limite est apparu [88].

Verma et al ont mené une campagne de tests sur une tuyère TOP à petite échelle afin d'étudier le lien entre les caractéristiques instables des chocs de séparation et de rattachement et la source des charges latérales dans les tuyères de fusée [69].

1.2.4 Tuyère à corps central (Plug nozzle)

La tuyère à corps central est une tuyère de fusée perfectionnée qui consiste en une tuyère primaire dont la forme est assez conventionnelle et d'un corps permettant une expansion externe. La caractéristique principale de cette tuyère est son interaction directe avec le milieu extérieur, ce qui permet d'éviter les phénomènes de séparation d'écoulement qui affecte une tuyère à profil conventionnel. Cet avantage provient de la génération d'un ventilateur d'expansion au niveau de la lèvre de la tuyère primaire et de son influence sur l'évolution de la pression le long de la paroi du corps central.

Le principal attrait d'une tuyère à corps central réside dans sa capacité de compenser l'altitude (compensation automatique d'altitude). Autrement dit, là où une tuyère convergente-divergente conventionnelle dilate l'écoulement jusqu'à un rapport de surface fixe, quelles que soient les conditions de l'écoulement libre, la limite du jet libre, qui agit comme une paroi extérieure virtuelle sur une tuyère à corps central, se dilate pour correspondre à la pression ambiante de l'écoulement libre. Cette fonctionnalité est utile pour les fusées utilisées dans les lanceurs, où le NPR peut varier d'une faible amplitude au lancement à l'infini dans le vide spatial [52]. À un NPR de conception ou au-dessus, la tuyère à corps central se comporte comme une tuyère CD conventionnelle éjectant les gaz d'échappement directement vers l'arrière axialement (à la conception), ce qui entraîne une condition d'écoulement sous-détendu typique. Pour les NPR inférieurs à la valeur de conception, la limite du jet est tirée plus près du corps central par une série d'ondes de compression et de ventilateurs d'expansion qui se produisent naturellement pour tenter de correspondre à la pression ambiante.

Les tuyères à corps central font référence à la fois à des tuyères à pointe complète et à des tuyères à pointe tronquée. La tuyère à pointe profilée sur toute la longueur est normalement appelée « aérospike » ; tandis qu'une tuyère à pointe conique sur toute la longueur est définie comme une tuyère à bouchon. L'aérospike vient de l'idée d'introduire un flux supplémentaire dans la région de base du pic tronqué, formant ainsi un « pic aérodynamique » avec le flux de base. Fondamentalement, le débit de base aide à remplir la zone située sous la base et les supports compensent la perte de performance due à la troncature de la tuyère [58].

Le col de la tuyère à corps central est localisé sous forme d'un anneau au niveau du diamètre extérieur (ce n'est pas toutes les tuyères à corps central qui utilisent un col annulaire ; certaines utilisent des moteurs regroupés sur un corps partagé) avec les gaz d'échappement s'écoulant vers l'intérieur.

Au niveau du bord extérieur de l'anneau, ou la lèvre du capot, les gaz d'échappement se dilatent soudainement jusqu'à atteindre la pression ambiante. Les ondes d'expansion générées par la lèvre du capot contrôlent l'écoulement des gaz d'échappement et la rotation du flux est affectée par la surface du bouchon. La conception de la surface du corps central permet une expansion douce des gaz d'une pression de chambre p_c jusqu'à une pression ambiante p_a , produisant un écoulement uniforme à la sortie, parallèle à l'axe de la tuyère. Le diamètre externe d'un tel bouchon idéal est le même que le diamètre de sortie d'une tuyère Convergente-Divergente (CV) à écoulement uniforme, expansant les gaz à la même pression ambiante p_a . Cependant, la tuyère à corps central est beaucoup plus petite qu'une tuyère CD équivalente [91].

Quelques articles et travaux antérieurs seront abordés dans ce chapitre afin de faire valoir l'importance de l'étude de la conception et de l'analyse des écoulements à travers les tuyères supersoniques. Des progrès remarquables ont été observés dans le domaine de la propulsion aérospatiale et aéronautique. Au début les tuyères des différents types de machines (moteurs de fusées, turboréacteurs, éjecteurs de vapeurs, pompes et compresseurs) ont longtemps été considérées comme des organes annexes ; en but d'amener le fluide à un régime souhaité pour une meilleur fluidité pour son acheminement et son évacuation. Mais avec le développement actuel dans le domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial, et la sollicitation de systèmes plus complexes afin d'avoir une manœuvrabilité optimale en vol ou en atterrissage des avions, les tuyères sont devenues l'une des plus importantes préoccupations de la recherche. Quelques articles issus des publications et de congrès scientifiques ont abordé l'étude de conception et l'analyse des écoulements dans les tuyères supersoniques, cela afin d'optimiser leur exploitation et atteindre des géométries idéales avec un rendement maximal.

Berman et Crimp ont fait une comparaison entre les tuyères conventionnelles et les tuyères à corps central. Les résultats montrent qu'une tuyère de type plug nozzle présente un avantage de poussée par rapport à une tuyère conventionnelle lorsqu'elle fonctionne à un rapport de pression inférieur à celui de la conception car la nature du débit dans ce cas est auto-ajustable[23].

Rao a élaboré une étude numérique sur les contours de tuyères à corps central (type à bouchon) optimaux typiques. Par l'utilisation d'un bouchon, la réduction de longueur de la tuyère peut être obtenue [114].

Ruf et McConnaughey ont déclaré qu'une troncature de 50 % de la tuyère à corps central entraîne une réduction de 0,5 % de ses performances. Afin d'éviter une base plate au sommet du bouchon après la troncature, un plus grand angle de cône pourrait être utilisé à l'extrémité du bouchon [115].

Ito et al ont étudié les champs d'écoulement d'une tuyère à bouchon, à l'aide d'une simulation numérique. Ils ont conçu le contour du corps central par la méthode des caractéristiques et divers types de tuyères type à bouchon ont été considérés en tronquant la longueur de la tuyère à différentes positions. Les résultats ont montré une augmentation des performances de poussée de la tuyère à bouchon profilé d'environ 5 à 6 % par rapport à la tuyère à bouchon conique, et la répartition de la pression sur la surface de la tuyère n'était pas affectée par le débit externe pour les rapports de pression supérieurs au point conçu [60].

Besnard et al ont présenté la conception, la fabrication et les tests d'un moteur aérospike annulaire ablatif de poussée de 1000 lbf. Les résultats ont montré que la variation de γ avec la température a provoqué des petites différences, quoique non nulles, dans les caractéristiques de poussée. De plus, la tuyère s'est avérée très efficace [24].

Lahouti et Tolouei ont réalisé une modélisation numérique des écoulements externes et internes d'une tuyère à corps central tronqué avec plusieurs niveaux de ressuage de base dans des conditions de travail de sous-détente, d'optimum et de sur-détente pour obtenir la poussée de base de la tuyère, la distribution de la pression de base et le schéma d'écoulement [9].

Shahrokhi et Noori ont étudié les propriétés de l'écoulement de divers contours de tuyère à corps central, avec l'utilisation du modèle de turbulence $k-\varepsilon$ et les équations de Navier stocks pour la simulation du champ de l'écoulement. Une courbe B-spline cubique uniforme a été utilisée pour générer les différentes formes du corps central. La meilleure configuration a été déterminée en considérant la force de poussée totale comme un mérite de performances [120].

Shanmuganathan et al ont mené une étude des tuyères aérospikes linéaires et annulaires et des caractéristiques de son champ d'écoulement. Ils étaient d'avis que la tuyère aérospike annulaire était meilleure que la tuyère aérospike linéaire.

Une tuyère à corps central tronqué (figure 1.10) possède une longueur inférieure par rapport à une tuyère idéale (figure 1.11). Par conséquent, on obtient un gain en masse pour les tuyères tronquées [121].

Par rapport aux autres types, l'inconvénient majeur d'une tuyère à corps central réside dans ses exigences de refroidissement élevées en raison de flux de chaleur plus élevés et de plus grandes surfaces à refroidir [93,]. Le bouchon central d'une tuyère à pointe (aérospike), s'il est chauffé à des valeurs plus élevées (supérieures aux limites du matériau), nécessiterait l'installation d'un système de refroidissement secondaire pour refroidir le corps central et éviter les pannes. Surmonter ce problème en utilisant un système de refroidissement actif secondaire affecte grandement la masse du véhicule.

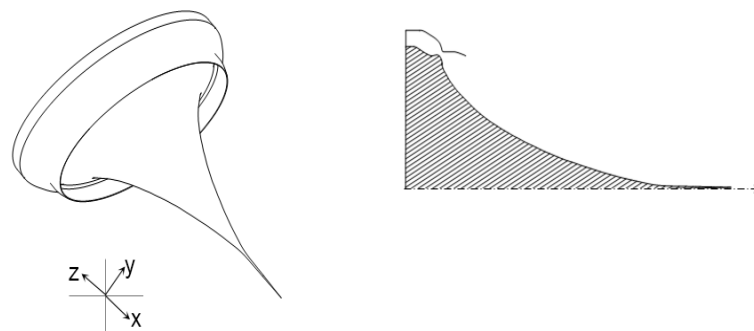


Figure 1.10 : Tuyère à corps central idéale

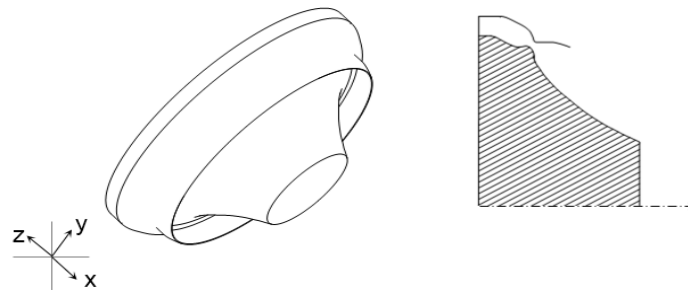


Figure 1.11 : Tuyère à corps central tronquée

Dans le cas des tuyères à corps central, les domaines clés qui ont attiré l'attention des chercheurs sont l'optimisation du contour de la tuyère et sa troncature.

Le tableau 1.2 donne un résumé des importantes études faites auparavant sur les tuyères à corps central.

Tableau 1.2 : Les importantes études effectuées sur les tuyères à corps central.

Les auteurs	Année	Nature de l'étude	Objet de l'étude
Krasé [69]	1959	Numérique	Conception des contours idéaux de la tuyère à corps central.
Berman et Crimp [23]	1961	Analytique	Modification de l'extrémité du corps central.
Rao [90]	1961	Numérique	Optimisation des contours des tuyères à corps central.
Johnson et al [63]	1974	Numérique	Optimisation des tuyères à corps central axisymétrique
Rommel et al [93]	1997	Numérique	Développement du champ d'écoulement à différentes pressions ambiantes.
Rufet McConnaughey [6]	1997	Numérique	Troncature de la tuyère à corps central.
Ito et al [60]	2002	Numérique	Conception du contour du bouchon
Besnard et al [24]	2002	Expérimentale	Conception et test d'un moteur aérospike annulaire ablatif de poussée.
Lahouti et Tolouei [9]	2006	Numérique	Écoulements externes et internes d'une tuyère à corps central tronqué avec purges de base.
Shahrokhi et Noori [120]	2010	Numérique	Propriétés de l'écoulement dans une tuyère aérospike.
Chutkey et al [31]	2014	Numérique / expérimentale	Champs d'écoulement dans les tuyères à bouchon annulaire tronqué de différentes longueurs
Shanmuganathan et al [121]	2015	Numérique	Etude du champ de l'écoulement dans les tuyères aérospike linéaires et annulaires.
Kumar et al [13]	2017	Numérique / expérimentale	Procédure de conception de la tuyère aérospike.

1.2.5 Tuyère type Expansion – Déflexion (E-D)

La tuyère à expansion-déflexion (E-D) est une tuyère de fusée à compensation d'altitude. Elle ressemble à une tuyère à contour profilé, avec un "corps central" placé au centre de la tuyère. De ce fait, le flux est dévié vers l'atmosphère. L'avantage du corps central est qu'il permet au gaz d'échappement de s'écouler dans une direction plus extérieure que dans les tuyères profilées. Ce type de tuyères possède des longueurs considérablement plus petites que celles des tuyères conventionnelles ayant le même rapport d'expansion.

Schomberg et Olsen ont conçu et testé la tuyère E-D à différents rapports de pression, pour représenter son fonctionnement sur une plage d'altitudes théoriques. Ils ont signalé que l'efficacité de la tuyère E-D est supérieure à celle de la tuyère Convergente-Divergente (CD) conventionnelle [116].

Wasko a étudié les performances des tuyères à bouchon et E-D. Les résultats ont montré que les performances de la tuyère à bouchon pleine longueur est meilleure, alors que les performances de la tuyère E-D n'est comparable qu'à celle d'une tuyère conique CD [110].

Schomberg et al ont remarqué la dépendance du coefficient de poussée de la géométrie quand les conditions de l'écoulement sont fortement en sur détente. Dans ces mêmes conditions, les résultats montrent que la poussée de la tuyère dépend du taux de changement de la surface dans la région transsonique et que la tuyère E-D linéaire a une poussée plus élevée par rapport à la tuyère conventionnelle [117, 181].

Currao et al ont étudié expérimentalement sur une petite tuyère asymétrique linéaire par l'utilisation d'une peinture sensible à la pression (PSP) et une caméra infrarouge. Leur projet visait à valider les résultats numériques grâce aux mesures PSP [33].

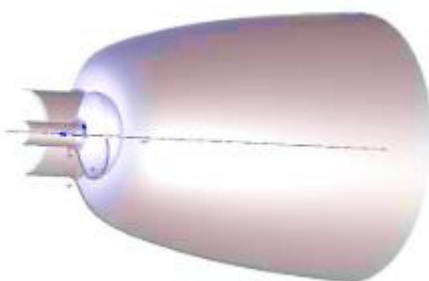


Figure 1.12 : Tuyère type Expansion – Déflexion (E-D).

Les importantes études sur ce type de tuyères sont résumées dans le tableau 1.3 suivant :

Tableau 1.3 : Les importantes effectuées sur les tuyères de type E-D.

Les auteurs	Année	Nature de l'étude	Objet de l'étude
Rao [90]	1960	Numérique / expérimentale	Méthode de conception du contour de la paroi de la tuyère pour produire une poussée optimale.
Mueller et Hall [79]	1968	Expérimentale	Région d'écoulement séparé.
Wasko [110]	1968	Expérimentale	Effets du ressuage de base.
Taylor et Hemsell [125]	2004	Numérique	Optimisation des tuyères E-D pour la poussée par le vide.
Taylor et al [126]	2010	Expérimentale	Analyse de l'effet d'évacuation dans les tuyères ED
Schomberg et Olsen [116]	2012	Expérimentale	Conception et test de tuyères E-D à différents rapports de pression.
Schomberg et al [117]	2014	Numérique et expérimentale	Effet de la géométrie de la tuyère ED sur le coefficient de poussée calculé
Schomberg et al [118]	2014	Expérimentale	Comparaison de la variante linéaire de la tuyère ED à une tuyère CD conventionnelle.
Schomberg et al [119]	2014	Numérique	Analyse des tuyères annulaires CD et E-D.
Currao et al [33]	2014	Expérimentale	Application de PSP et caméra infrarouge à une petite tuyère asymétrique linéaire.

1.2.6 Tuyère double galbe

La tuyère double galbe est considérée comme une solution pour maximiser l'efficacité à haute altitude, tout en évitant les charges latérales dangereuses à des altitudes plus basses. Une tuyère à double galbe se compose de deux contours différents. Le premier galbe fonctionne à basse altitude par contre le deuxième est destiné à fonctionner à haute altitude. Ces deux contours sont séparés par un point de jonction.

Cowles et Foster ont introduit le concept de la tuyère double galbe. Le concept a été breveté par la société Rocket dyne dans les années 60 [67].

Horn et Fisher ont confirmé la faisabilité de cette tuyère en procédant à des essais à Rocketdyne et en Europe par le « Future European Space Transportation Investigations Programme (FESTIP) » ; programme d'investigation sur le transport spatial européen. Ils ont étudié quatre combinaisons de contours pour trouver l'extension qui offrait les caractéristiques de transition d'écoulement et des performances à haute altitude les plus favorables. Il a été démontré que les performances des tuyères à double galbe sont inférieures à l'optimum théorique en raison des pertes liées à la traînée d'aspiration en mode basse altitude et de contour non optimal en mode haute altitude. On a constaté que même avec de telles pertes, une tuyère à double cloche pouvait fournir une poussée suffisante pour transporter 12,1% de charge utile supplémentaire par rapport à une tuyère CD conventionnelle ayant le même taux d'expansion [57].

Frey et Hagemann ont étudié divers aspects de la conception de l'inflexion de paroi et de l'extension de la tuyère en mettant l'accent sur la dépendance du comportement de transition sur le type d'extension de la tuyère [41].

Genin et al ont mené des études expérimentales et numériques sur les tuyères à double galbe pour l'évaluation de la distribution du flux de chaleur. Pour les deux modes de fonctionnement (niveau de la mer et en altitude). Ils ont démontré que la valeur du flux thermique augmente dans la région de l'inflexion du contour. La séparation des écoulements au niveau de l'inflexion augmente ce phénomène. Dans des conditions au niveau de la mer, l'écoulement se sépare à l'inflexion du contour de manière contrôlée et symétrique. La génération de charge latérale continue de diminuer et la poussée augmente en raison du faible rapport de surface. Pendant le vol, la pression ambiante diminue, ce qui entraîne dans une augmentation du NPR. A une certaine hauteur, la transition NPR est atteinte et le point de séparation quitte l'inflexion du contour et se déplace rapidement vers la sortie de la tuyère. La poussée est améliorée en raison du plus grand rapport de surface. Ils ont testé aussi un modèle

de tuyère plane à double galbe dans plusieurs conditions d'essai en écoulements froids et chauds. L'analyse du choc au niveau de l'inflexion du contour a donné une idée de la forme et de la position du front de séparation. En mode niveau de la mer, les résultats numériques et expérimentaux étaient en bon accord pour des valeurs NPR plus élevées, la position de séparation calculée était située plus en amont que celle mesurée dans les expériences [45- 47].

Verma et al (en 2013, 2014 et 2015) ont mené trois études expérimentales ; une pour étudier l'effet du nombre de Reynolds sur le comportement de transition d'une tuyère à double galbe pour des tests à l'intérieur d'une chambre de simulation à haute altitude, la deuxième pour étudier la dépendance du comportement de transition sur les fluctuations de la pression ambiante dans une tuyère à double galbe, la dernière pour étudier les conditions d'écoulement instable survenues pendant la transition sournoise en effectuant un test de gaz froid sur une tuyère à double galbe de sous-échelle fonctionnant dans des conditions de niveau de la mer. Dans cette dernière, les résultats ont montré que le débit pendant la transition furtive était très instable et était la principale source de génération de charge latérale [106 - 108].

Schneider et Genin ont analysé l'effet de divers modèles de turbulence et de gradients de pression d'alimentation sur le comportement de transition de l'écoulement dans la tuyère double galbe. Ils ont trouvé de meilleurs résultats pour la turbulence de contrainte de Reynolds et le modèle Spalart-Allmaras [94].

Toufik et al ont étudié la conception de tuyères à double galbe et évaluer plusieurs paramètres de paroi et performances à l'aide de la méthode des caractéristiques [101].

Kbab et al ont effectué une étude numérique et de simulation sur les tuyères double galbe. Ils ont proposé pour la première fois un profil TOP pour la tuyère de base [67].

Chasman et al (en 2005 et 2012) ont menée trois études expérimentales sur les tuyères multi galbe (MNG), dans la première, ils ont étudié l'optimisation multidisciplinaire (MDO) pour concevoir une configuration multi galbe innovante. Dans la deuxième ils ont effectué les tests à feu chaud de 91 tuyères de configuration MNG caractérisées par une érosion de tuyère extrêmement élevée à une vitesse moyenne de 0,5 lb/sec. et dans la troisième, ils ont étudié les pertes visqueuses du MNG lors d'essais de moteurs hybrides. Les pertes visqueuses dans l'écoulement à travers le MNG ont fait chuter l'efficacité de 3% par rapport à celle d'une tuyère unique équivalente (ESN). Il peut être mentionné ici qu'une seule tuyère qui partage le même contour de tuyère à l'échelle et la même zone de gorge globale ainsi que la même zone de sortie est appelée un ESN. Le système MNG peut améliorer les performances de plus de 11% en raison de ses économies de masse et de longueur [27, 28, 29].

Tableau 1.4 : Les importantes études effectuées sur les tuyères à double galbe.

Les auteurs	Année	Nature de l'étude	Objet de l'étude
Horne et Fisher [57]	1994	Expérimentale	Caractéristiques de performance des tuyères à double galbe
Frey et Hagemann [41]	1999	Analytique expérimentale	/ Dépendance du comportement de transition sur le type de rallonge de tuyère
Hagemann et al [52]	2002	Analytique expérimentale	/ Caractéristiques aérodynamiques
Stark et Genin [99]	2010	Expérimentale	Caractéristiques de la charge latérale
Genin et al [44]	2012	Numérique	Comportement du débit dans une tuyère à double galbe
Genin et al [45]	2013	Numérique expérimentale	/ Optimisation du comportement transitionnel par variation de la géométrie d'extension
Genin et al [46]	2013	Numérique expérimentale	/ Détermination de la répartition du flux thermique.
Genin et al [47]	2013	Numérique expérimentale	/ Tuyère planaire à double cloche dans plusieurs conditions d'essai.
Verma et al [106]	2013	Expérimentale	Influence du nombre de Reynolds sur le comportement de transition à double galbe
Verma et al [107]	2014	Expérimentale	Influence des fluctuations de la pression ambiante sur le comportement de transition à double galbe
Davis et al [34]	2015	Numérique expérimentale	/ Procédure de conception de contour de buse à double cloche
Verma et al [108]	2015	Expérimentale	Conditions d'écoulement instable rencontrées pendant la transition sournoise
Schneider et Genin [94]	2016	Numérique	Effet de divers modèles de turbulence et gradients de pression d'alimentation sur le comportement de transition à double galbe.
Toufik et al [101]	2016	Numérique	Conception de la tuyère à double galbe
Kbab et al [67]	2017	Numérique	Conception du profil de la tuyère à double galbe

Tableau 1.5 : Les principales études effectuées sur les tuyères multi-galbes.

Les auteurs	Année	Nature de l'étude	Objet de l'étude
Chasman et al [28]	2005	Expérimentale	Méthode MDO pour la conception de MNG
Chasman et al [29]	2005	Expérimentale	Érosion par tuyère dans un MNG Pertes visqueuses de MNG dans les tests de moteurs hybrides.
Chasman et al [30]	2012	Expérimentale	

1.3. Objectif de l'étude

Les moteurs-fusées classiques ne donnent de meilleures performances qu'à une altitude donnée. Le rendement du moteur-fusée est en effet déterminé par la forme de la tuyère qui est fixe. Dans celle-ci les gaz brûlés se détendent et transforment leur énergie thermique en énergie cinétique qui est à l'origine de la poussée qui propulse la fusée. La forme et la longueur de la tuyère déterminent la pression de sortie des gaz brûlés ; or pour que le moteur fonctionne à son meilleur rendement, il est nécessaire que cette pression de sortie soit égale à la pression atmosphérique externe.

Pour optimiser la poussée du moteur il serait nécessaire que la pression des gaz en sortie diminue progressivement (allongement de la tuyère et évolution de sa forme) au fur et à mesure que la fusée s'élève et que la pression atmosphérique ambiante diminue.

La tuyère à corps central apporte une solution au problème de l'adaptation de celle-ci à la pression ambiante. Avec ce type de tuyère les gaz en sortie de la chambre de combustion sont éjectés, non pas dans une tuyère aux parois fixes mais le long d'une structure fixe (la rampe). Les gaz se détendent en étant canalisés, d'une part par la rampe, d'autre part par la masse d'air ambiante. Par cette manière, la pression des gaz éjectés s'adapte automatiquement à la pression ambiante. Différentes formes de tuyères à corps central ont été étudiées : linéaire, annulaire, tronquée, etc....

L'idée derrière la conception de la tuyère à corps central est qu'à basse altitude la pression ambiante comprime le jet de gaz contre la rampe centrale. La recirculation dans la zone de base de la rampe permet d'élever la pression ambiante à proximité. Comme la pression sur le dessus du moteur est ambiante, cela signifie que la base ne donne aucune poussée générale (mais cela signifie aussi que cette partie de la tuyère ne perd pas de poussée en formant un vide partiel, donc la partie de base de la tuyère peut être ignorée à basse altitude).

Lorsque la fusée prend de l'altitude, la pression d'air qui comprime le jet de gaz contre la rampe diminue, mais la pression au-dessus du moteur diminue en même temps et ce n'est donc pas nuisible. En outre, bien que la pression de base chute, la zone de redirection maintient la pression sur la base jusqu'à une fraction de 1 bar, une pression qui n'est pas équilibrée par le vide à proximité sur le dessus du moteur ; cette différence de pression donne une poussée supplémentaire en altitude, créant un effet de compensation d'altitude. Cela produit le même effet que celui d'une cloche qui devient plus grande à mesure que la pression baisse, fournissant une compensation d'altitude.

L'optimisation du choix de la forme d'une tuyère supersonique doit tenir compte en plus des calculs de dynamique des gaz qui nous intéressent tels que le matériau utilisé, le mode de fabrication de la paroi, les exigences de refroidissement, les limites admissibles de dimensionnement etc.

L'objectif principal de notre étude consiste à tenir compte de l'effet de la variation de C_p et γ en fonction de la température pour concevoir des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique, à une température inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. Le calcul des performances de ces tuyères est fait. La comparaison sera faite avec les résultats concernant l'étude et la conception à haute température des tuyères supersoniques axisymétriques *MLN* [134].

Notre présent modèle répond bien à la marge supersonique jusqu'à $M_S=5,00$ et des températures de la chambre de combustion allant jusqu'à 3550 K inférieure au seuil de dissociation des molécules de l'air utilisé précisément pour la tuyère type *MLN*.

CHAPITRE 2

METHODE DES CARACTERISTIQUES A HAUTE TEMPERATURE

2.1. Introduction

La solution numérique des divers problèmes qui peuvent se poser et qui ne peuvent pas être traités analytiquement à cause principalement de leur complexité est réalisée grâce à l'application des lois mathématiques décrivant leur comportement physique qui s'expriment généralement par des équations différentielles aux dérivées partielles. Les approches numériques doivent tenir compte afin de relater la réalité le plus précisément possible. Le principe d'une approche numérique est essentiellement basé sur la transformation des équations différentielles régissant le problème en équations algébriques.

Ainsi, les solutions des équations de base d'un fluide compressible ou non dans un régime subsonique et supersonique diffèrent selon le type des régimes et on peut les partager en elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Ils sont de type elliptique pour un écoulement subsonique ($M < 1$) et de type hyperbolique pour un écoulement supersonique.

Pour obtenir les solutions numériques des équations de base non linéaires de types elliptiques et paraboliques, on utilise de préférence une méthode fondée sur les éléments finis. Par contre dans le cas où l'écoulement est supersonique, une méthode issue de la formulation caractéristique des équations hyperboliques est plus appropriée. Dans ce chapitre, on va décrire quelques éléments de la méthode des caractéristiques pour un écoulement supersonique bi-dimensionnel plan et axisymétrique à haute température.

2.2. Hypothèses fondamentales

La résolution directe du problème de l'écoulement dans les tuyères supersoniques, consiste en principe, à résoudre les équations de base décrivant l'écoulement à savoir l'équation de continuité, les équations de la dynamique et de l'énergie. Ce sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution n'est pas connue car on ne connaît pas a priori les conditions aux limites, étant donné que le profil de la tuyère est lui-même inconnu et recherché. Il est évident qu'on doit émettre, pour rendre le problème plus abordable, certaines hypothèses plus ou moins simplificatrices concernant les propriétés du gaz s'écoulant dans la tuyère et ensuite sur l'écoulement lui-même. A cet effet, on a considéré les hypothèses suivantes [5] :

- L'écoulement est considéré comme étant entièrement établi et stationnaire (les dérivées par rapport au temps sont nulles).
- Les forces à distances, telle que, l'effet de la pesanteur et les interactions entre les particules de fluide sont négligées et les forces extérieures de source électrique et magnétique sont absentes.
- Le gaz utilisé est considéré comme parfait. Cependant, le volume occupé par les molécules du gaz est supposé nul, ce qui implique que l'effet de la viscosité est négligé.
- Le gaz est considéré comme étant thermiquement parfait. Le seuil de dissociation des molécules n'est pas encore atteint, c'est-à-dire que nous travaillons avec des molécules et non pas avec des atomes.
- Le gaz est calorifiquement imparfait, c'est-à-dire que ses propriétés calorifiques telles que C_p et γ sont considérées comme variables dépendant uniquement de la température lorsque cette dernière croît.
- L'écoulement est entièrement isentropique. Cette propriété est expliquée par l'absence de dissipation causée par la naissance des ondes de choc.
- L'écoulement est idéal, le transfert de chaleur par conduction entre les différentes particules de gaz est négligé.
- L'écoulement est irrotationnel. Cette hypothèse est vérifiée tant que l'entropie est invariable.
- Le transfert de chaleur forcé par convection ou rayonnement avec la paroi de la tuyère est absent.

2.3. Equations descriptives de l'écoulement

Pour qu'un écoulement bi-dimensionnel, stationnaire, adiabatique, non visqueux et non soumis à des forces extérieures, les équations qui en décrivent le mouvement relativement à un système de coordonnées cartésiennes s'expriment comme suit [5] :

- **Equation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \delta \frac{\rho v}{y} = 0 \quad (2.1)$$

- **Equations de conservation de la quantité de mouvement**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

- **Equation de conservation de l'énergie**

$$V^2 = 2H(T) \quad (2.4)$$

$$\text{Avec : } H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT \quad ; \quad V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad ; \quad a(T) = \sqrt{\gamma(T) r T}$$

- **Equation d'état du gaz parfait**

$$P = \rho r T \quad (2.5)$$

Après des transformations mathématiques des équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.5), on peut obtenir une équation unique pour les composantes du vecteur vitesse de la forme suivante [1] :

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 - v^2) \frac{\partial u}{\partial y} - uv \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \delta a^2 \frac{v}{y} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Avec : $\delta = 0$: le cas plan

$\delta = 1$: le cas axisymétrique

On obtient ainsi l'équation générale de la dynamique des gaz. Dans cette équation la vitesse du son est fonction de la température selon l'équation d'énergie (2.4).

Pour l'écoulement axisymétrique, la symétrie est suivant l'axe x . Cependant, la direction y dans les équations est alors celle de la direction radiale.

Il existe un potentiel des vitesses φ défini par [5] :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

L'équation (2.6) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{a^2}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) représente une équation différentielle aux dérivées partielles de deuxième ordre. Elle est non linéaire. Les coefficients des termes de deuxième ordre contiennent les dérivées de premier ordre de la fonction φ .

L'équation (2.8) est de type hyperbolique, si le discriminant Δ est supérieur à zéro pour tout point du domaine d'écoulement :

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0 \quad (2.9)$$

Avec : $A = a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = a^2 - u^2$, $B = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2uv$

$$C = a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = a^2 - v^2$$

La condition (2.9) se réduit à :

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} > 1 \quad (2.10)$$

Avec : $M > 1$

Les coordonnées cartésiennes x et y sont généralement mal adaptées à une description de l'écoulement supersonique et les équations présentées précédemment ne peuvent donc être utilisées directement. Dans le plan (xoy) , il y a certaines directions pour lesquelles les dérivées des variables de l'écoulement telles que $\partial P / \partial x$, $\partial u / \partial x$, ... etc sont indéterminées ou discontinues [5]. Ces directions sont appelées les caractéristiques. Si l'on choisit, de nouvelles coordonnées avec l'une d'entre elles dans la direction des caractéristiques, le système d'équations (2.6) est considérablement simplifié.

2.3.1. Propriétés des équations hyperboliques

Sans entrer dans les détails de la théorie mathématique des équations hyperboliques, une équation est de type hyperbolique si une certaine relation est satisfaite par les coefficients des dérivées du plus grand ordre. Dans notre cas, cette condition est la relation

$$M^2 = \left\{ \frac{u^2 + v^2}{a^2} \right\} > 1.$$

Les équations de cette forme se distinguent par le fait qu'il existe des directions caractéristiques dans le plan (x, y) le long desquelles la dérivée normale des variables dépendantes (dans notre cas u et v) peut être discontinue mais la vitesse elle-même doit être continue. En plus, le long de ces caractéristiques, les variables dépendantes doivent satisfaire une certaine relation appelée l'équation de compatibilité. Cette dernière constitue la base de la méthode numérique.

2.4. Equations des caractéristiques

Les équations des caractéristiques sont obtenues dans la première étape par la multiplication des équations (2.6) et (2.7) par des inconnues σ_1 et σ_2 . Après la sommation on obtient :

$$\sigma_1(a^2 - u^2) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_2}{\sigma_1(a^2 - u^2)} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \sigma_2 \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \sigma_1 \frac{\delta a v^2}{y} = 0 \quad (2.11)$$

En assumant que les composantes du vecteur vitesse $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des fonctions continues. On peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec $\lambda = \frac{dv}{dx}$ étant la pente des courbes caractéristiques.

En faisant correspondre les équations (2.11) et (2.12), il vient :

$$\lambda = \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_2}{\sigma_1(a^2 - u^2)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2}$$

A partir des équations précédentes, on obtient un système d'équations en σ_1 et σ_2 par :

$$\begin{cases} \sigma_1[(a^2 - u^2)\lambda + 2uv] + \sigma_2 = 0 \\ \sigma_1(a^2 - v^2) - \sigma_2\lambda = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour que le système (2.13) possède une solution autre que la triviale, il faudrait que le déterminant de la matrice formée par les coefficients soit nul. Ce qui donne :

$$(A^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (a^2 - v^2) = 0 \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) donne deux solutions qui sont :

$$\lambda^{\pm} = \left[\frac{dy}{dx} \right]^{\pm} = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) définit deux courbes dans le plan (x, y) qui sont les caractéristiques. Elles sont réelles si $M > 1$.

Une autre forme de cette équation fait intervenir d'autres paramètres plus faciles à manipuler tels que le nombre de Mach, la vitesse $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, l'angle représentant la direction de l'écoulement noté θ et l'angle de Mach μ .

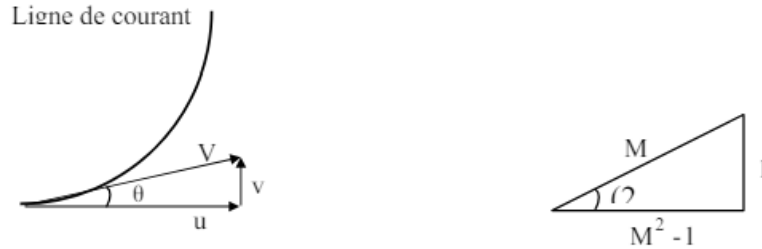


Figure 2.1 : Illustration de la direction de l'écoulement et de l'angle de Mach

D'après la figure 2.1, on a :

$$u = V \cos \theta \quad ; \quad v = V \sin \theta \quad ; \quad \theta = \arctg\left(\frac{v}{u}\right) \quad (2.16)$$

$$M = \frac{1}{\sin(\mu)} \quad ; \quad \sqrt{M^2 - 1} = \cot(\mu) \quad (2.17)$$

Substituons les équations (2.16) et (2.17) dans (2.15) et après quelques transformations trigonométriques on aboutit à :

$$\lambda^{\pm} = \left[\frac{dy}{dx}\right]^{\pm} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (2.18)$$

Cette équation est illustrée par la figure 2.2 où les caractéristiques montantes et descendantes C^+ et C^- sont représentés.

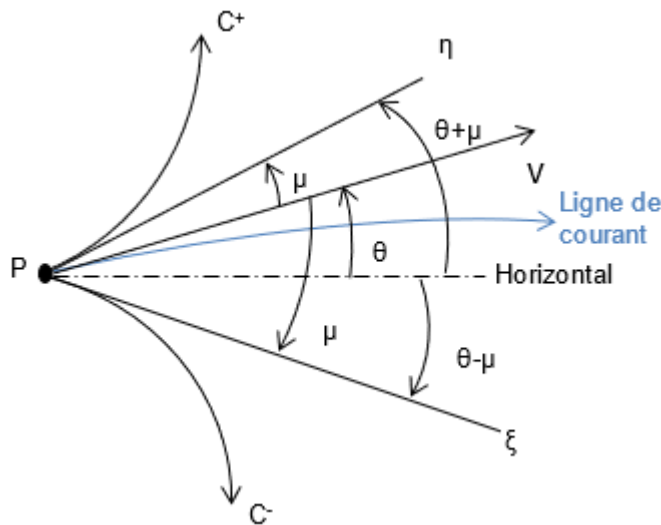


Figure 2.2 : Les caractéristiques C^+ et C^- et les lignes de Mach η et ξ .

2.5. Relation de compatibilité

Les lignes ξ et η sont définies en général comme des lignes courbées et constantes puisque u , v , μ et θ sont des valeurs locales dans le champ de l'écoulement. Ces lignes ne sont pas connues à priori mais si on introduit les lignes ξ et η constantes comme nouvelles coordonnées dans les équations (2.6) et (2.7). Nous obtenons par cette transformation deux familles de courbes $\xi(x, y) = \text{constante}$ et $\eta(x, y) = \text{constante}$ qui prennent ainsi la fonction d'un nouveau réseau de coordonnées.

Cette transformation se révélera très utile pour la description d'un écoulement supersonique lors de la mise en forme des équations de base. Pour cette transformation, on constate qu'il est avantageux de travailler à partir des équations (2.4) à (2.7) avec comme variable dépendante.

D'après la figure 2.2 on a :

$$\begin{cases} u = V \cos \theta \\ v = V \sin \theta \end{cases} \quad (2.19)$$

Les dérivées partielles deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta - V \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta - V \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \end{cases} \quad (2.20)$$

Par substitution des relations (2.19) et (2.20) dans (2.6) et (2.7) on obtient, à l'aide de la définition de μ selon l'équation (2.17). Après quelques manipulation mathématiques et réarrangement :

$$\begin{cases} \sin \mu \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial v}{\partial y} \cos \theta \right] + \frac{\cot \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right] \cos \mu - \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta + \frac{1}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta \right] = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Si on multiplie l'équation (2.22) par $\cos \mu$ et ensuite, soit par l'addition ou la soustraction avec l'équation (2.21). Après quelques transformations trigonométriques, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] + \frac{\cot \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] - \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} = 0 \\ \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] - \frac{\cot \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] + \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} = 0 \end{cases}$$

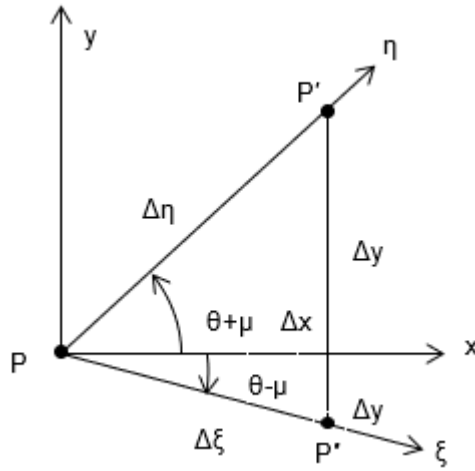


Figure 2.3 : Relation entre les lignes de Mach et les coordonnées cartésiennes.

On introduit, à cette étape, les coordonnées $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$. D'après la figure 2.3, si on se déplace du point p à un point p' le long de la caractéristique η , on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta \eta \quad (2.23)$$

Suivant x , puis suivant y , on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (2.24)$$

Avec : f une fonction arbitraire.

Par identification des équations (2.23) et (2.24), on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta x} \quad (2.25)$$

De la figure 2.3, on peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \\ \frac{\Delta \eta}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(\theta + \mu)} \end{cases} \quad (2.26)$$

Remplaçons les équations du système (2.26) dans l'équation (2.25), puis multiplions par $\cos(\theta + \mu)$, on obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta + \mu) = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (2.27)$$

De même, en allant de p à p'' suivant la direction de ξ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta - \mu) = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (2.28)$$

A la fin on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\cot \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} & \text{Suivant } \eta = \text{cste} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\cot \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} & \text{Suivant } \xi = \text{cste} \end{cases} \quad (2.29)$$

Ce résultat est particulièrement intéressant, puisque dans l'équation applicable le long de la ligne $\eta = \text{constante}$ n'interviennent que les dérivées dans la direction η et vice-versa. Les lignes à ξ et η constantes sont les lignes caractéristiques du système d'équations (2.29).

$$\begin{cases} \frac{\partial(v+\theta)}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} & \text{Suivant } \xi \\ \frac{\partial(v-\theta)}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} & \text{Suivant } \eta \end{cases} \quad (2.30)$$

• Cas Plan

Pour le cas plan, c'est-à-dire $\delta = 0$, le système d'équations (2.30) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial(v+\theta)}{\partial \xi} = 0 & \text{Suivant } \xi \\ \frac{\partial(v-\theta)}{\partial \eta} = 0 & \text{Suivant } \eta \end{cases} \quad (2.31)$$

Le système (2.31) peut être simplifié, on aura :

$$\begin{cases} v + \theta = Q^- & \text{Suivant } \xi \\ v - \theta = Q^+ & \text{Suivant } \eta \end{cases} \quad (2.32)$$

Q^- et Q^+ sont des constantes appelées les invariants de Riemann.

- **Cas axisymétrique**

Pour le cas axisymétrique, c'est-à-dire $\delta = 1$, le système d'équations (2.30) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial(v+\theta)}{\partial\xi} = \frac{\sin\mu \sin\theta}{y} & \text{Suivant } \xi \\ \frac{\partial(v-\theta)}{\partial\eta} = \frac{\sin\mu \sin\theta}{y} & \text{Suivant } \eta \end{cases} \quad (2.33)$$

On peut remarquer qu'une fois le problème résolu en fonction de v et θ , on peut facilement obtenir les variations des autres paramètres, tel que M , λ , les rapports thermodynamiques à partir des équations appropriées.

CHAPITRE 3

INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE COMPATIBILITES ET DES CARACTERISTIQUES

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va décrire la méthode d'intégration des équations obtenues dans le chapitre précédent connues par les équations de compatibilités et des caractéristiques. L'intégration sera faite numériquement vu la complexité des équations obtenue. Ce sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires. Le nombre de ces équations est égal à quatre avec quatre inconnues ; (x, y, θ, M) pour le cas d'un gaz parfait et (x, y, θ, T) pour le cas d'un gaz à haute température [5].

3.2. Résolution des équations des caractéristiques et de compatibilités

Les équations de compatibilité et des caractéristiques déterminées dans le chapitre 3 sont des équations différentielles non linéaires avec comme inconnues T, θ, x et y et elles s'écrivent comme suit :

- Suivant ξ :

$$\begin{cases} d(v + \theta) = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \end{cases} \quad (3.1)$$

- Suivant η :

$$\begin{cases} d(v - \theta) = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\eta \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec :

$\delta = 0$: Le cas plan.

$\delta = 1$: Le cas axisymétrique.

Les relations dans le système présenté par les équations (3.1) et (3.2) sont données pour notre modèle d'un gaz à haute température par [4, 5] :

$$dv = -\frac{1}{2} \frac{C_P(T)}{H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT \quad (3.3)$$

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (3.4)$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T) r T} \quad (3.5)$$

Dans les équations (3.1) et (3.2), θ l'angle de déviation du vecteur vitesse de l'écoulement par rapport à l'horizontal et :

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right) \quad (3.6)$$

On peut exprimer les directions ξ et η des caractéristiques en fonctions des coordonnées cartésiennes x et y par :

$$d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \quad (3.7)$$

$$d\eta = \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \quad (3.8)$$

Dans l'équation (3.7) on a préféré la relation entre ξ et x . On peut utiliser la relation entre ξ et y . dans cette dernière, le système (3.1) et (3.2) change de forme après le remplacement. Même remarque pour l'équation (3.8), on a préféré une relation entre η et y et non entre η et x . Remplaçant les relations (3.7) et (3.8) ainsi que la relation (3.3) dans le système (3.1) et (3.2) on obtient :

- Suivant ξ :

$$\begin{cases} -\frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT + d\theta = \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y} \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \end{cases} \quad (3.9)$$

- Suivant η :

$$\begin{cases} -\frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT - d\theta = \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y} \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \end{cases} \quad (3.10)$$

μ , $M(T)$ et $a(T)$ sont données par les relations (3.6), (3.4) et (3.5), respectivement.

Comme on a mentionné que les caractéristiques C^+ et C^- sont des courbes, l'application de la méthode des caractéristiques oblige à introduire un maillage fin afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de ligne droite.

Les propriétés $(x, y, M, \theta, \psi, T, \rho/\rho_0, P/P_0)$ en un point de champ d'écoulement, peuvent être déterminées à partir de celles des deux points reliés avec le point considéré par les lignes caractéristiques qui le précèdent.

Sous le signe intégral, les équations (3.9) et (3.10) prennent les formes suivantes :

$$\begin{cases} \int_{T_1}^{T_3} \left[-\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \right] dT + \int_{\theta_1}^{\theta_3} d\theta = \int_{x_1}^{x_3} \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \cos(\theta - \mu)} dx \\ \int_{y_1}^{y_3} dy = \int_{x_1}^{x_3} \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \int_{T_2}^{T_3} \left[-\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \right] dT - \int_{\theta_2}^{\theta_3} d\theta = \int_{y_2}^{y_3} \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \sin(\theta + \mu)} dy \\ \int_{y_2}^{y_3} dy = \int_{x_2}^{x_3} \operatorname{tg}(\theta + \mu) dx \end{cases} \quad (3.14)$$

Après intégration des systèmes d'équations (3.13) et (3.14) sans hypothèses et sans considération, les équations prennent respectivement les formes suivantes :

$$\begin{cases} \int_{T_1}^{T_3} \left[-\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \right] dT + (\theta_3 - \theta_1) = \int_{x_1}^{x_3} \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \cos(\theta - \mu)} dx \\ y_3 - y_1 = \int_{x_1}^{x_3} \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \int_{T_2}^{T_3} \left[-\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \right] dT + (\theta_3 - \theta_2) = \int_{y_2}^{y_3} \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \cos(\theta + \mu)} dy \\ y_3 - y_2 = \int_{x_2}^{x_3} \operatorname{tg}(\theta + \mu) dx \end{cases} \quad (3.16)$$

Dans les systèmes (3.15) et (3.16), les expressions sous le signe intégrale sont valables sur les lignes de Mach montantes et descendantes et seront nommées comme suit :

$$A_{13}(T) = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \quad ; \quad A_{23}(T) = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \quad (3.17)$$

$$B_{13}(y, T, \theta) = \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \cos(\theta - \mu)} \quad ; \quad B_{23}(y, T, \theta) = \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \sin(\theta + \mu)} \quad (3.18)$$

$$C_{13}(T, \theta) = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \quad ; \quad C_{23}(T, \theta) = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \quad (3.19)$$

Alors, les équations des caractéristiques et de compatibilités qui sont décrites dans les systèmes d'équations (3.15) et (3.16), prennent les formes abrégées suivantes :

$$\begin{cases} \int_{T_1}^{T_3} A_{13}(T)dT + (\theta_3 - \theta_1) = \delta \int_{x_1}^{x_3} B_{13}(y, T, \theta)dx \\ y_3 - y_1 = \int_{x_1}^{x_3} C_{13}(T, \theta)dx \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} \int_{T_2}^{T_3} A_{23}(T)dT - (\theta_3 - \theta_2) = \delta \int_{y_2}^{y_3} B_{23}(y, T, \theta)dy \\ y_3 - y_2 = \int_{x_2}^{x_3} C_{23}(T, \theta)dx \end{cases} \quad (3.21)$$

Les paramètres T et θ dans les relations (3.18) et (3.19) dépendent de la variable y , et y dépend lui-même de la variable x .

3.3. Différentes approches d'intégrations numériques des équations

Pour évaluer le reste des intégrales dans les relations (3.15) et (3.16), il faut faire des approximations convenables pour que le phénomène physique et les considérations mathématiques dans l'intervalle considéré ne posent aucun problème. Pour cela, on considère l'approche de linéarisation des équations par différence finie.

3.3.1. Linéarisation des équations

Dans cette approche, on considère que les paramètres de l'écoulement dans chaque intervalle d'intégration des relations (3.15) et (3.16) sont constants et prennent la valeur du nœud de gauche de départ. Dans ce cas les équations de compatibilité et des caractéristiques sont séparées. Cependant, les équations des caractéristiques dans les relations (3.20) et (3.21) peuvent donner individuellement et directement la position du point 3 en fonction des paramètres aux points 1 et 2. Alors, les relations (3.18) dans les intégrales des relations (3.20) et (3.21) prennent chacune une valeur constante par :

$$C_{13} = C_{13}(T_1, \theta_1) = \text{tg}(\theta_1 - \mu_1) \quad (3.22)$$

$$C_{23} = C_{23}(T_2, \theta_2) = \text{tg}(\theta_2 + \mu_2) \quad (3.23)$$

La valeur de l'angle de Mach μ_1 et μ_2 dans les relations (3.22) et (3.23) sont données par :

$$\mu_1 = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right); \mu_2 = \arcsin\left(\frac{1}{M_2}\right) \quad (3.24)$$

$$\text{Avec :} \quad M_1 = \frac{\sqrt{2H(T_1)}}{a(T_1)} \quad ; \quad M_2 = \frac{\sqrt{2H(T_2)}}{a(T_2)} \quad (3.25)$$

$$a(T_1) = \sqrt{\gamma(T_1)rT_1} \quad ; \quad a(T_2) = \sqrt{\gamma(T_2)rT_2} \quad (3.26)$$

Après intégration des équations des systèmes (3.20) et (3.21) on obtient :

$$y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1) \quad (3.27)$$

$$y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2) \quad (3.28)$$

La résolution des équations (3.27) et (3.28) par rapport à x_3 et y_3 donne :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \\ y_3 = E_1 + C_{13}x_3 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\text{Avec :} \quad E_1 = y_1 - C_{13}x_1 \quad (3.30)$$

$$E_2 = y_2 - C_{23}x_2 \quad (3.31)$$

Pour l'intégration des équations de compatibilités des systèmes (3.20) et (3.21), on considère que les paramètres T et θ ainsi que le rayon y sont constants et sont égaux aux valeurs du nœud de départ. Cette approximation n'est vraie que si le maillage est fin. Alors, les relations (3.18) dans les intégrales des systèmes d'équations (3.20) et (3.21) prennent chacune une valeur constante par :

$$B_{13} = B_{13}(y_1, T_1, \theta_1) = \frac{\sin\theta_1 \sin\mu_1}{y_1 \cos(\theta_1 - \mu_1)} \quad (3.32)$$

$$B_{23} = B_{23}(y_2, T_2, \theta_2) = \frac{\sin\theta_2 \sin\mu_2}{y_2 \sin(\theta_2 + \mu_2)} \quad (3.33)$$

La valeur de l'angle de Mach μ_1 et μ_2 dans les relations (3.32) et (3.33) sont données par l'équation (3.24). Pour les autres intégrales dans les systèmes (3.20) et (3.21), elles seront écrites en termes de la fonction v de Prandtl-Meyer puisqu'ici nous avons une intégrale d'une fonction qui ne dépend que de la température T . On aura :

$$\int_{T_2}^{T_3} A_{13}(T) dT = -A_{13}(T) dT \Big|_{T_*}^{T_1} + A_{13}(T) dT \Big|_{T_*}^{T_3} = v(T_3) - v(T_1) = v_3 - v_1 \quad (3.34)$$

$$\int_{T_2}^{T_3} A_{23}(T) dT = -\int_{T_*}^{T_2} A_{23}(T) dT + \int_{T_*}^{T_3} A_{23}(T) dT = v(T_3) - v(T_2) = v_3 - v_2 \quad (3.35)$$

Alors, les équations des caractéristiques deviennent :

$$v_3 - v_1 + (\theta_3 - \theta_1) = \delta B_{13}(x_3 - x_1) \quad (3.36)$$

$$v_3 - v_2 + (\theta_3 - \theta_2) = \delta B_{23}(x_3 - x_2) \quad (3.37)$$

La résolution des équations (3.36) et (3.37) par rapport à v_3 et θ_3 donne :

$$\begin{cases} v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\delta}{2}[B_{13}(x_3 - x_1) + B_{23}(y_3 - y_2)] \\ \theta_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{\delta}{2}[B_{13}(x_3 - x_1) - B_{23}(y_3 - y_2)] \end{cases} \quad (3.38)$$

Avec B_{13} B_{23} sont données par les relations (3.32) et (3.33).

Après la détermination de v_3 à partir de l'équation (3.38), on peut déterminer la température T_3 par l'utilisation de l'algorithme de dichotomie combiné avec la quadrature de SIMPSON, en posant $v_S = v_3$ et $T_S = T_3$.

Il faut noter que [5] :

- Pour un écoulement plan, la valeur de δ devient égale à zéro, et le deuxième membre dans le système d'équations (3.38) sera nul, ce qui donne le non nécessité de calculer les paramètres B_{13} et B_{23} .
- Pour l'écoulement axisymétrique, le rapport $(\sin\theta)/y$ est indéterminé pour le point 2 de l'axe de symétrie ($y_2 = 0$ et $\theta_2 = 0$). Cette indétermination est traduite par l'impossibilité d'évaluation du terme B_{23} . Cette situation est présentée dans la figure 3.1. Le problème se pose au niveau du deuxième membre de l'équation des caractéristiques du système (3.14) qui sera approximé par :

$$\int_{y_2}^{y_3} \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \sin (\theta + \mu)} dy = \delta \frac{\sin \theta_3 \sin \mu_2}{y_3 \sin (\theta_2 + \mu_2)} (y_3 - y_2) = \theta_3 \quad (3.39)$$

En substituant le résultat de (3.39) dans le système (3.21) et en se référant à la figure 3.2b, les relations déterminant θ_3 et v_3 deviennent :

$$v_3 - v_1 + (\theta_3 - \theta_1) = B_{13}(x_3 - x_1) \quad (3.40)$$

$$v_3 - v_2 - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (3.41)$$

La résolution des équations (3.40) et (3.41) donne :

$$v_3 = \frac{1}{3}[2v_1 + 2\theta_1 + v_2 + 2B_{13}(x_3 - x_1)] \quad (3.42)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2}(v_3 - v_2) \quad (3.43)$$

3.3.2. Approche par différence finie

Les équations caractéristiques et de compatibilités dérivées dans les deux paragraphes précédents sont des équations non linéaires ordinaires. Leur solution sera recherchée par l'application de la technique dite des différences finies. Le maillage qui sera mis en place assumera la portion de caractéristique reliant deux points (nœuds) par des segments de droite. La méthode d'intégration numérique employée est celle d'Euler qui est du type prédicteur – correcteur.

On approxime dans ce cas, les paramètres y , θ et T des fonctions sous le signe intégral dans les systèmes d'équations (3.20) et (3.21) par l'approximation suivante :

$$\theta_{13} = \alpha_{\theta_{13}} \theta_1 + (1 - \alpha_{\theta_{13}}) \theta_3 \quad : \quad \theta_{23} = \alpha_{\theta_{23}} \theta_2 + (1 - \alpha_{\theta_{23}}) \theta_3 \quad (3.44)$$

$$T_{13} = \alpha_{T_{13}} T_1 + (1 - \alpha_{T_{13}}) T_3 \quad : \quad T_{23} = \alpha_{T_{23}} T_2 + (1 - \alpha_{T_{23}}) T_3 \quad (3.45)$$

$$y_{13} = \alpha_{y_{13}} y_1 + (1 - \alpha_{y_{13}}) y_3 \quad : \quad y_{23} = \alpha_{y_{23}} y_2 + (1 - \alpha_{y_{23}}) y_3 \quad (3.46)$$

Avec $\alpha_{\theta_{13}}$, $\alpha_{\theta_{23}}$, $\alpha_{T_{13}}$, $\alpha_{T_{23}}$, $\alpha_{y_{13}}$, $\alpha_{y_{23}}$ sont des coefficients d'interpolations appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Si les valeurs de ces coefficients sont égales à l'unité, on obtient, la formulation mathématique de calcul est présentée dans le paragraphe précédent.

Si les valeurs des coefficients sont prises égales à 0.5, on obtient la valeur moyenne de considération de paramètre dans les relations (3.20) et (3.21). Alors, les équations de (3.44), (3.45) et (3.46) sont données par :

$$\theta_{13} = \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \quad ; \quad \theta_{23} = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \quad (3.47)$$

$$T_{13} = \frac{T_1 + T_3}{2} \quad ; \quad T_{23} = \frac{T_2 + T_3}{2} \quad (3.48)$$

$$y_{13} = \frac{y_1 + y_3}{2} \quad ; \quad y_{23} = \frac{y_2 + y_3}{2} \quad (3.49)$$

Les fonctions sous le signe intégrale dans les relations (4.20) et (4.21) sont approximées par :

$$A_{13} = A_{13}(T_{13}) = -\frac{C_P(T_{13})}{2H(T_{13})} \sqrt{M^2(T_{13}) - 1} \quad (3.50)$$

$$A_{23} = A_{23}(T_{23}) = -\frac{C_P(T_{23})}{2H(T_{23})} \sqrt{M^2(T_{23}) - 1} \quad (3.51)$$

$$B_{13} = B_{13}(y_{13}, T_{13}, \theta_{13}) = \frac{\sin \theta_{13} \sin \mu_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \quad (3.52)$$

$$B_{23} = B_{23}(y_{23}, T_{23}, \theta_{23}) = \frac{\sin \theta_{23} \sin \mu_{23}}{y_{23} \cos(\theta_{23} - \mu_{23})} \quad (3.53)$$

$$C_{13} = C_{13}(T_{13}, \theta_{13}) = \operatorname{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) \quad (3.54)$$

$$C_{23} = C_{23}(T_{23}, \theta_{23}) = \operatorname{tg}(\theta_{23} - \mu_{23}) \quad (3.55)$$

Avec

$$\mu_{13} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{13}}\right) \quad ; \quad \mu_{23} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{23}}\right)$$

$$M_{13} = \frac{\sqrt{2H(T_{13})}}{a(T_{13})} \quad ; \quad M_{23} = \frac{\sqrt{2H(T_{23})}}{a(T_{23})}$$

$$a(T_{13}) = \sqrt{\gamma(T_{13})rT_{13}} \quad ; \quad a(T_{23}) = \sqrt{\gamma(T_{23})rT_{23}}$$

- Suivant $\xi(1-3)$:

$$\begin{cases} A_{13}(T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = \delta B_{13}(x_3 - x_1) \\ y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1) \end{cases} \quad (3.56)$$

- Suivant $\xi(2-3)$:

$$\begin{cases} A_{23}(T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \delta B_{23}(y_3 - y_2) \\ y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2) \end{cases} \quad (3.57)$$

Les relations (3.56) et (3.57) constituent un système d'équations à quatre inconnus (x_3, y_3, T_3, θ_3). La résolution des équations des caractéristiques des systèmes d'équations (3.56) et (3.57) par rapport à x_3 et y_3 donne :

$$x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \quad (3.58)$$

$$y_3 = E_1 + C_{13} x_3 \quad (3.59)$$

Avec :

$$E_1 = y_1 - C_{13} x_1 \quad (3.60)$$

$$E_2 = y_2 - C_{23} x_2 \quad (3.61)$$

De même, la résolution des équations de compatibilités dans les relations (3.56) et (3.57) par rapport à T_3 et θ_3 donne :

$$T_3 = \frac{D_1 + D_2 + \delta[B_{23} y_3 + B_{13} x_3]}{A_{13} + A_{23}} \quad (3.62)$$

$$\theta_3 = D_1 + \delta B_{13} x_3 - A_{13} T_3 \quad (3.63)$$

Avec :

$$D_1 = \theta_1 + A_{13} T_1 - \delta B_{13} x_1 \quad (3.64)$$

$$D_2 = -\theta_2 + A_{23} T_2 - \delta B_{23} y_2 \quad (3.65)$$

Les relations (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61) constituent un système d'équations de calcul par itérations pour un écoulement supersonique plan et axisymétrique permanent et irrotationnel pour le gaz à haute température.

Pour la résolution de ce système, on introduit à cette étape une procédure d'intégration numérique. A partir de l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de y_3 , T_3 , θ_3 à l'itération, $k = 0$, sont données par [5] :

$$y_3^0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad ; \quad T_3^0 = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad ; \quad \theta_3^0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (3.66)$$

Dans les relations (3.66), on n'a pas donné une valeur initiale à x_3 et qu'une fois il y'a convergence de l'abscisse du point 3, on a la convergence automatiquement.

Pour l'algorithme de correcteur d'Euler, les équations (3.44), (3.45) et (3.46) sont utilisées et substituées dans les équations (3.58), (3.59), (3.62) et (3.63) pour obtenir les nouvelles valeurs des paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont $(x_3^1, y_3^1, T_3^1, \theta_3^1)$.

L'algorithme de correcteur d'Euler avec itérations est répété jusqu'à arriver à la précision ε voulue. Autrement dit, pour k itérations de l'algorithme de correcteur d'Euler, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence [5] :

$$\text{Max}[|y_3^k - y_3^{k-1}|, |\theta_3^k - \theta_3^{k-1}|, |T_3^k - T_3^{k-1}|] < \varepsilon \quad (3.67)$$

Avec :

ε : Tolérance spécifiée.

k : Nombre des itérations effectuées.

3.3.3 Point interne particulier

On rencontre ce type de point comme le montre la figure 3.1, où le point 2 de la ligne de Mach montante se trouve sur l'axe de symétrie. Pour l'écoulement axisymétrique, si le coefficient $\alpha_{y23} \neq 1,0$, aucun problème ne se pose et on peut considérer ce point comme un point interne. Mais, si $\alpha_{y23} = 1,0$, le terme B_{23} dans l'équation (3.18) est indéterminé pour le point 2 ($y_2 = 0$, $\theta_2 = 0$).

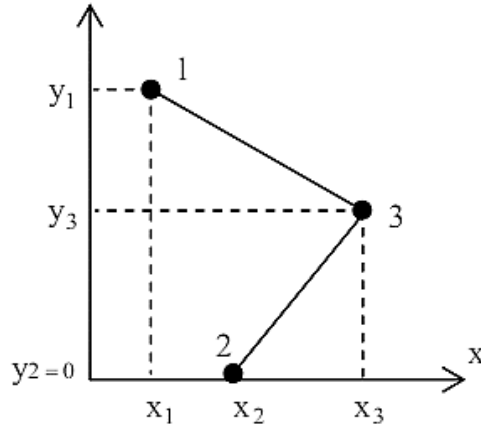


Figure 3.1 : Nœud interne particulier

Pour résoudre ce problème, on va approximer l'intégrale de B_{23} par :

$$\int_{y_2}^{y_3} B_{23}(y, T, \theta) dy = \int_{y_2}^{y_3} \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \sin(\theta + \mu)} dy = \frac{\sin \theta_3 \sin \mu_2}{y_3 \sin(\theta_2 + \mu_2)} (y_3 - y_2) \quad (3.68)$$

Comme au point 2, on a $y_2 = 0$, $\theta_2 = 0$ pour $\delta = 1$ et puisque le segment de la ligne de Mach montante reliant les points 2 et 3 est petit, alors, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie et dans ce cas, on peut approximer $\sin \theta_3 \approx \theta$ et le résultat (3.68) devient :

$$\int_{y_2}^{y_3} B_{23}(y, T, \theta) dy = \frac{\theta_3}{y_3} \quad (3.69)$$

La relation du système (3.57) sera changée par la relation suivante :

$$A_{23}(T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \frac{\theta_3}{y_3} (y_3 - 0) \quad (3.70)$$

Alors, l'équation (3.69) devient :

$$\theta_3 = \frac{1}{2} (A_{23} T_3 - A_{23} T_2) + \theta_2 \quad (3.71)$$

Remplaçant l'équation (3.71) dans la relation (3.56), on peut obtenir la valeur de T_3 par :

$$T_3 = \frac{2(D_1 + \delta B_{13} x_3) + A_{23} T_2}{2A_{13} + A_{23}} \quad (3.72)$$

Donc pour déterminer les propriétés $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$ de ce type de point particulier, on peut utiliser les mêmes équations pour un point interne quelconque sauf qu'il faut changer l'équation (3.56) et de la remplacer par l'équation (3.72).

3.4. Application pour différents nœuds

Dans ce cas on présente l'application des algorithmes de détermination des paramètres (x, y, T, θ) pour différents points internes du champ d'écoulement à l'intérieure de la tuyère. Par raison de symétrie par rapport à l'axe longitudinale de la tuyère, notre calcul est limité dans une moitié, par exemple supérieure. Nous utilisons la méthode par différences finies pour notre application et l'autre est donnée à titre d'information.

3.4.1. Procédure pour un nœud interne

Un point est nommé point interne s'il est situé dans le champ de l'écoulement supersonique comme le point 3 dans la figure 3.1. Ce point est lié aux deux points 1 et 2 par des lignes de Mach ξ et η , respectivement. Les propriétés (x, y, T, θ) aux points 1 et 2 sont connues et le problème devient à déterminer ces propriétés au point 3 par l'une des méthodes présentées au paragraphe précédent et qui sont développées spécialement pour un nœud interne typique. On rappelle ici l'algorithme de calcul en présentant les grandes étapes comme suit :

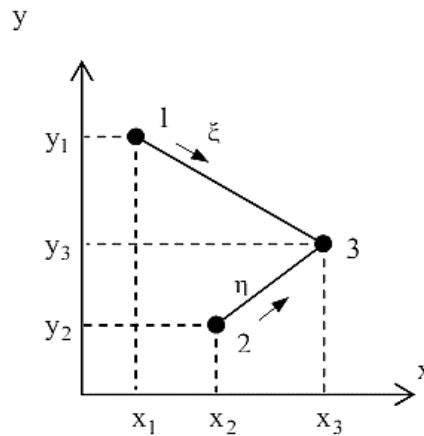


Figure 3.2 : Nœud interne quelconque

1. Les données sont :

$$(x_1, y_1, T_1, \theta_1), (x_2, y_2, T_2, \theta_2), \text{Tol}, \delta,$$

$$\text{et } \alpha_{\theta_{13}}, \alpha_{\theta_{23}}, \alpha_{T_{13}}, \alpha_{T_{23}}, \alpha_{y_{13}}, \alpha_{y_{23}}$$

2. Approximation initiale $k = 0$ est donnée par la relation (3.66).

3. Calcul de $y_{13}, y_{23}, T_{13}, T_{23}, \theta_{13}, \theta_{23}$ en utilisant les relations (3.44), (3.45) et (3.46) par la considération de l'approximation initiale. Alors :

$$\theta_{23} = \alpha_{\theta_{23}} \theta_2 + (1 - \alpha_{\theta_{23}}) \theta_3^0$$

$$T_{23} = \alpha_{T_{23}} T_2 + (1 - \alpha_{T_{23}}) T_3^0$$

$$y_{23} = \alpha_{y_{23}} y_2 + (1 - \alpha_{y_{23}}) y_3^0$$

4. Calcul de M_{13} , M_{23} , μ_{13} , μ_{23} , A_{13} , A_{23} , B_{13} , B_{23} , C_{13} , C_{23} , E_1 , E_2 , D_1 , D_2 par les relations (3.50), (3.51), (3.52), (3.53), (3.54) et (3.55).
5. Calcul de $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$ par :

Calculer (x_3, y_3) en utilisant les relations (3.58) et (3.59).

Si $y_2 = 0$ alors

Utiliser la relation (3.71) pour calculer T_3 du point particulier.

Sinon

Utiliser la relation (3.62) pour déterminer T_3 du point interne quelconque

Fin si

Calculer θ_3 en utilisant la relation (3.63).

6. Calcul de l'erreur commise pour cette itération et faire le test de convergence par :

$$ER = \text{Max}[|y_3 - y_3^0|, |\theta_3 - \theta_3^0|, |T_3 - T_3^0|]$$

Si $(ER \leq \text{Tol})$ alors

Allez à l'étape 7

Sinon

$$y_3^0 = y_3 \quad T_3^0 = T_3 \quad \theta_3^0 = \theta_3$$

$$K = K+1$$

Allez à l'étape 3.

Fin si

7. Calcul des autres paramètres et affichage des résultats.

3.4.2. Procédure pour un nœud sur la paroi rigide

Comme le montre la figure 3.3, le point 1 n'existe plus physiquement, parce qu'il se trouve à l'extérieur du champ d'écoulement. En conséquence, seulement la ligne de Mach η joignant les nœuds 2 et 3 est employée. Les équations des caractéristiques et de compatibilités valables sur cette ligne, sont utilisées pour déterminer la position et les propriétés de l'écoulement au point 3. Il nous manque de condition pour avoir une solution unique, puisque sur la ligne de Mach η , on peut écrire deux conditions.

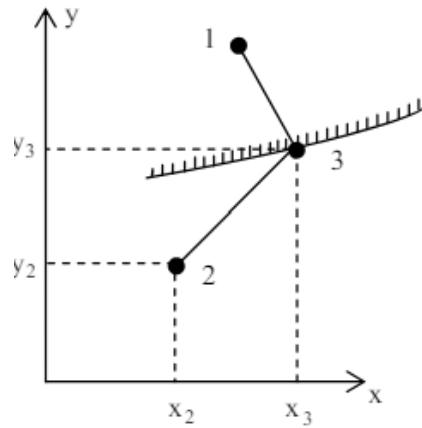


Figure 3.3 : Nœud sur la paroi rigide

Cependant, sur la paroi, la direction du vecteur vitesse de l'écoulement doit être identique avec la pente de la paroi (condition de glissement) et que la réflexion de la ligne de Mach montante sur la paroi de la tuyère donne mathématiquement un point d'intersection entre la ligne (droite) et la courbe de la paroi. Alors, on peut écrire les deux conditions suivantes au point 3 de la figure 3.3 :

$$y_3 = f(x_3) \quad (3.73)$$

$$\theta_3 = \arctg\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_3}\right] \quad (3.74)$$

Avec : $f(x)$ est la fonction, sous forme explicite, de la paroi rigide de la tuyère.

Les équations (3.73) et (3.74) constituent donc deux conditions additionnelles pour la détermination de la position et les propriétés du point 3 sur une paroi rigide et qui doivent être ajoutées aux équations du système (3.57) pour la résolution simultanée par la méthode des différences finies. Il nous reste de déterminer deux expressions analytiques permettant de corriger les valeurs de T_3 et x_3 pour fermer le processus d'itérations. La résolution du système d'équations (3.57) par rapport à T_3 et x_3 donne :

$$T_3 = T_2 + \frac{\theta_3 - \theta_2 + \delta B_{23}(y_3 - y_2)}{A_{23}} \quad (3.75)$$

$$x_3 = x_2 + \frac{y_3 - y_2}{C_{23}} \quad (3.76)$$

On propose l'algorithme suivant de calcul en présentant les grandes étapes de calcul des propriétés en un point 3 sur la paroi rigide de la tuyère.

1. Les données sont : $(x_2, y_2, T_2, \theta_2)$, Tol , $\delta, \alpha_{\theta_{23}}, \alpha_{y_{23}}, \alpha_{T_{23}}$

2. Approximation initiale $k = 0$ est donnée par

$$y_3^0 = x_2 \quad y_3^0 = f(x_3^0) \quad \theta_3^0 = \arctg\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_3^0}\right]$$

3. Calcul de y_{23} , T_{23} et θ_{23} en utilisant les relations (3.44), (3.45) et (3.46) par la considération de l'approximation initiale. Alors :

$$\theta_{23} = \alpha_{\theta_{23}} \theta_2 + (1 - \alpha_{\theta_{23}}) \theta_3^0$$

$$T_{23} = \alpha_{T_{23}} T_2 + (1 - \alpha_{T_{23}}) T_3^0$$

$$y_{23} = \alpha_{y_{23}} y_2 + (1 - \alpha_{y_{23}}) y_3^0$$

4. Calcul de M_{23} , μ_{23} , A_{23} , B_{23} , C_{23}

5. Calcul de $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$ en utilisant respectivement les relations (3.73), (3.74), (3.75) et (3.76).

6. Calcul de l'erreur commise pour cette itération et faire le test de convergence par :

$$ER = \text{Max}[|x_3 - x_3^0|, |T_3 - T_3^0|]$$

Si $(ER \leq \text{Tol})$ alors

Allez à l'étape 7

Sinon

$$x_3^0 = x_3 \quad T_3^0 = T_3$$

$$K = K+1$$

Allez à l'étape 3.

Fin si.

7. Calcul des autres paramètres et affichage des résultats.

CHAPITRE 4

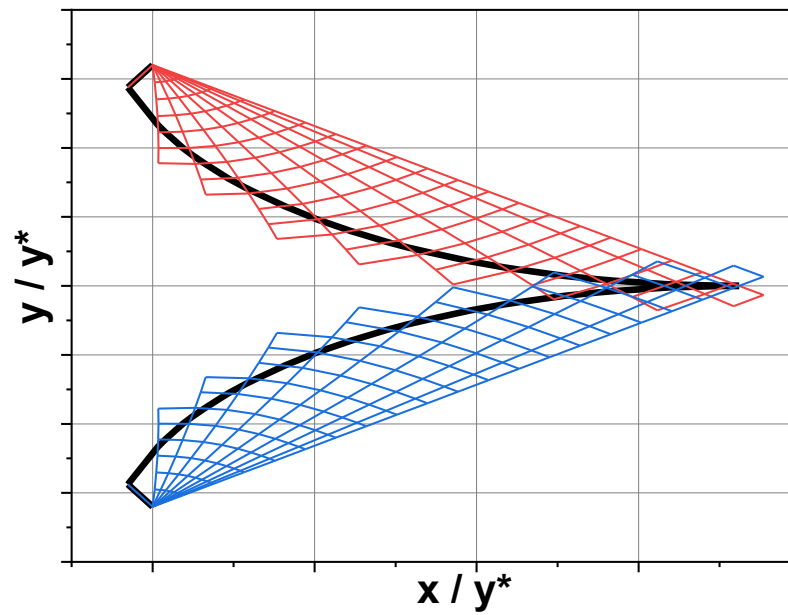
RESULTATS ET COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, on présente les divers résultats obtenus à l'aide du développement d'un code de calculs élaboré pour des tuyères supersoniques à corps central (Plug Nozzle) à haute température et de l'utilisation du logiciel de simulations numériques « Ansys-Fluent ». L'objectif de ces résultats est de présenter les différents cas possibles de conception et les différents paramètres qui influents sur le dimensionnement et la conception des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique. Ces résultats sont divisés en quatre parties. La première partie comporte les résultats obtenus pour déterminer les contours des tuyères type plug nozzle ainsi que les paramètres d'influence sur la conception (entre autres le nombre des caractéristiques N_c et le pas Δx). La deuxième partie concerne les résultats sur l'effet du nombre de Mach de sortie M_S et de la température de stagnation T_0 sur le contour de la tuyère supersonique à corps central afin de montrer avec précision la différence qui existe entre le modèle gaz parfait (GP) et notre modèle haute température (HT). La troisième partie est consacrée au calcul du flux de l'écoulement dans la tuyère à corps central axisymétrique. A la fin de notre étude, une comparaison est faite avec la tuyère à corps central bidimensionnelle (2D) à haute température.

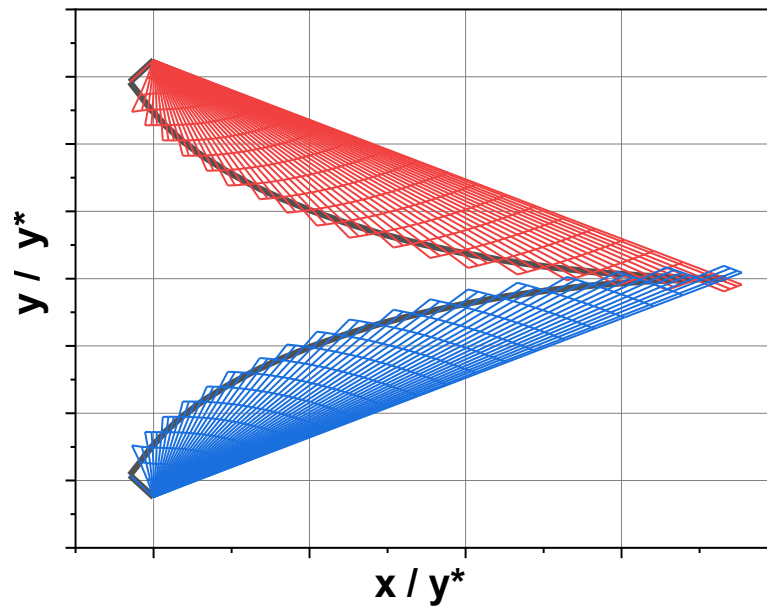
4.1. Maillage en caractéristiques

La nature d'un écoulement supersonique dépend des conditions en amont de la tuyère (col). Une erreur au début du col se propagera tout au long de la tuyère jusqu'à être maximum à la section de sortie. Pour diminuer l'effet de cette erreur, il faut choisir un maillage adéquat. De plus, les erreurs causées par le calcul d'opérations mathématiques, appelées viscosité artificielle, vont aussi influencer sur les résultats de l'écoulement.

La figure 4.1 représente les cas de maillages en caractéristiques N_c , afin de montrer l'effet de raffinement du nombre de caractéristiques insérées sur la conception. Pour le cas (a), on a pris un maillage large avec $N_c=10$, pour le cas (b) un maillage modéré avec $N_c=30$. Les deux cas présentés à un pas $\Delta x=0,1$. Pour la figure 4.2, on a présenté un maillage plutôt fin avec $N_c=50$ pour deux pas (a) $\Delta x=0,05$ et (b) $\Delta x=0,01$. L'exemple sélectionné est pour $T_0 = 2000K$ et $M_S = 3,00$. On remarque que plus le nombre d'ondes de Mach N_c est grand, plus le contour du corps central a une meilleure présentation. De plus, le raffinement va aussi diminuer les erreurs causées par les approximations mathématiques.



(a) : Maillage large ($Nc = 10$ et $\Delta x = 0.1$)



(b) : Maillage modéré $Nc = 30$ et $\Delta x = 0.1$

Figure 4.1 : Effet du raffinement du nombre de caractéristiques Nc sur le contour de la tuyère à corps central axisymétrique pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$

Le tableau 4.1 représente les valeurs numériques, calculées par notre code de calcul, du nombre de caractéristiques Nc sur les paramètres de dimensionnement de la tuyère pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$. On remarque que plus le maillage, dans la zone d'expansion entre les ondes de Mach au col et à la section de sortie, est raffiné plus on obtient une bonne présentation de l'allure du corps central, ce qui engendre automatiquement une diminution de l'erreur.

Tableau 4.1 : Effet de la discrétisation du nombre de caractéristiques N_c sur les paramètres de dimensionnement de la tuyère à corps central axisymétrique pour

$$T_0=2000 \text{ K et } M_S=3,00$$

N_c	L/y^*	C_{Masse}	C_F	y_s/y^* (Théorique)	y_s/y^* (Calculé)	ε (%)
10	1.556280	13.63737	0.757984	4,220027	4.022494	4,681
30	1.452907	14.53834	0.824524	4,220027	4.072776	3,487
50	1.432815	15.60965	0.854326	4,220027	4.160688	1,406

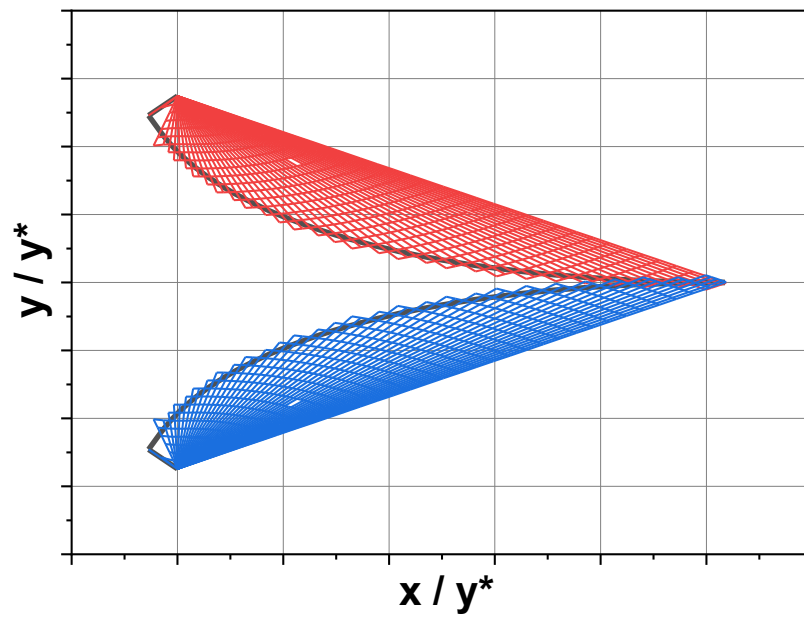
La figure 4.2 représente l'effet de discrétisation du pas Δx sur le contour du corps central de la tuyère axisymétrique. Pour un nombre de caractéristiques insérées $N_c=50$, deux exemples ont été présentés ; le cas (a) est pour $\Delta x=0,05$ et le cas (b) est pour $\Delta x=0,01$. A partir de cette figure, on voit clairement que l'allure du corps central est meilleure lorsqu'on diminue le pas Δx .

Le tableau 4.2 représente les valeurs numériques des allures du corps central de la figure 4.2 pour $T_0=2000 \text{ K}$ et $M_S=3,00$. On remarque que plus le pas des caractéristiques dans la zone d'expansion est petit plus l'erreur diminue.

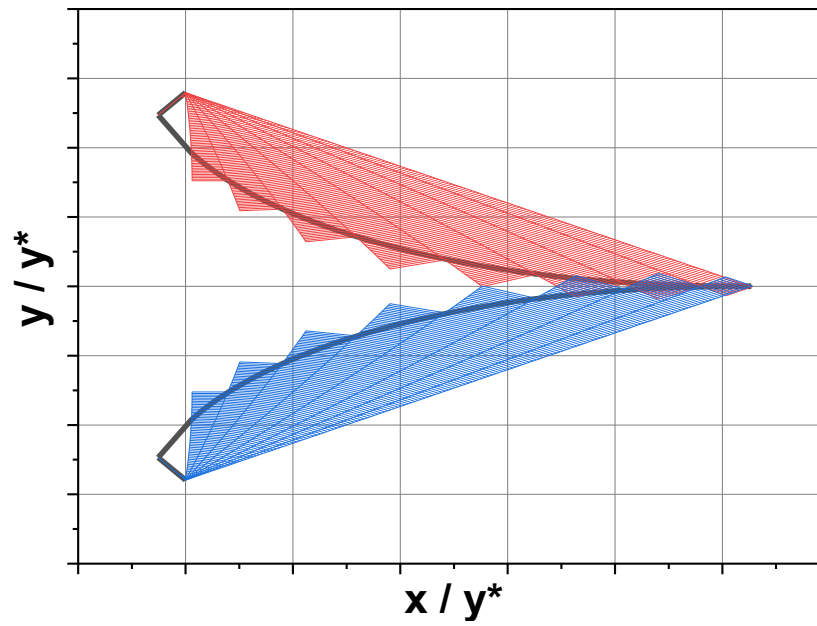
Il convient de noter qu'il existe des paramètres de conception dépendant toujours du raffinement du pas Δx et du nombre des caractéristiques N_c .

La convergence des résultats se fait toujours par l'utilisation du rapport des sections qui reste toujours valable puisque la direction de l'écoulement du débit est uniforme et parallèle à la section de sortie de la tuyère.

On peut conclure que pour avoir une bonne présentation des contours avec des valeurs de dimensionnement acceptables de la tuyère à corps central axisymétrique, on doit avoir un maillage avec un raffinement des caractéristiques N_c et un pas Δx petit.



(a) : Maillage raffiné $NC = 50$ et $\Delta x = 0.05$



(b) : Maillage fin $NC = 50$ et $\Delta x = 0.01$

Figure 4.2 : Effet du raffinement du pas Δx sur le contour de la tuyère à corps central axisymétrique pour $T_0=2000$ K et $M_S=3,00$

Tableau 4.2 : Effet de la discrétisation du pas Δx sur les paramètres de dimensionnement de la tuyère à corps central axisymétrique pour $T_0=2000\text{ K}$ et $M_S=3,00$

Δx	L/y^*	C_{Masse}	C_F	y_s/y^* (Théorique)	y_s/y^* (Calculé)	ε (%)
0,05	1.734167	0.81359	0.757741	4,220027	4.093172	12,686
0,01	1.632815	0.60965	0.734326	4,220027	4.122491	2,311
0,005	1.615093	10,56849	0,730225	4,220027	4.182374	0,892

4.2. Effet de la température génératrice T_0 sur le contour de la tuyère

Dans cette partie, on va étudier l'effet de la variation de la température génératrice T_0 sur les formes des tuyères supersoniques axisymétriques à corps central pour des nombres de Mach de sortie $M_S=1,50, 2,00, 3,00$ et $4,00$.

Les figures 4.3 à 4.6 illustrent les résultats obtenus par notre code de calcul pour des températures génératrices $T_0=1000\text{ K}, 2000\text{ K}$ et 3000 K .

La figure 4.4 représente la variation à haute température des formes des tuyères à corps central axisymétrique pour différentes températures génératrices $T_0=1000\text{ K}, 2000\text{ K}$ et 3000 K délivrant un nombre de Mach de sortie $M_S=2,00$. On note que les trois courbes obtenues pour les trois valeurs de la température sont presque confondues. Le tableau 4.3 montre les valeurs numériques pour une précision $\varepsilon=10^{-5}$.

Ce résultat s'interprète par la possibilité d'utiliser le modèle *GP* dans la conception des tuyères supersoniques à corps central tant que M_S est inférieur à $2,00$ quel que soit la température génératrice T_0 .

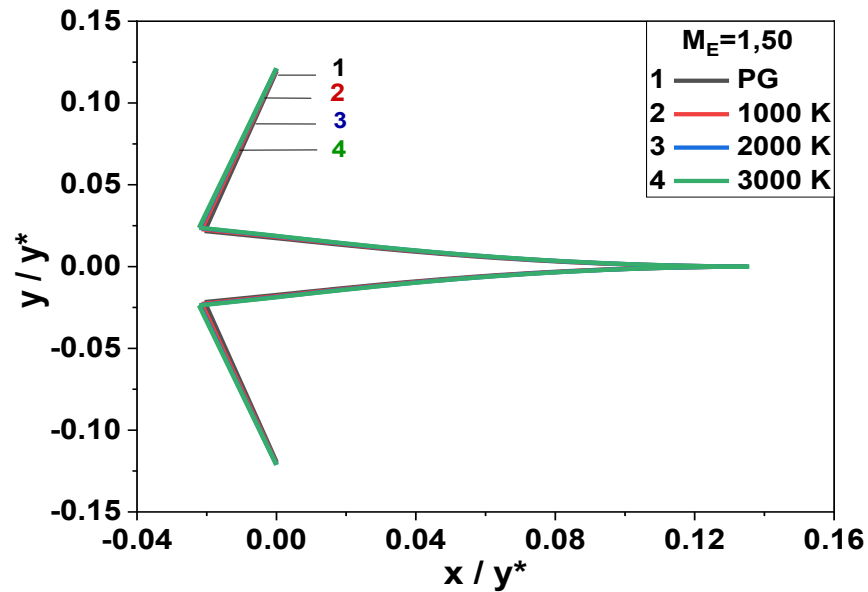


Figure 4.3 : Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères à corps central axisymétrique pour $M_S=1,50$

Tableau 4.3 : Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.3 pour $M_S=1,50$

$M_S = 1.50$	$\frac{L}{y^*}$	$\frac{A_S}{A^*}$	C_{mass}	C_F
PG	0.13365	1.17592	1.53604	0.09103
$T_0 = 1000 K$	0.13472	1.18438	1.54739	0.09729
$T_0 = 2000 K$	0.13539	1.18981	1.56881	0.10203
$T_0 = 3000 K$	0.13563	1.19167	1.64006	0.12373

Dans les figures 4.4 à 4.6, les allures des tuyères à corps central axisymétriques commencent à être différentes au fur et à mesure que le nombre de Mach de sortie M_S devient supérieur à 2,00 et au fur à mesure que la température génératrice T_0 augmente.

A partir des graphes et les valeurs numériques, on peut remarquer l'influence de la température T_0 de la chambre de combustion sur l'allure des tuyères axisymétriques à corps central et les paramètres de conception. On conclut que plus la valeur du nombre de Mach est élevée ($M_S > 2,00$), plus l'écart entre les deux modèles augmente, ce qui rend la nécessité de tenir en compte de la température génératrice T_0 .

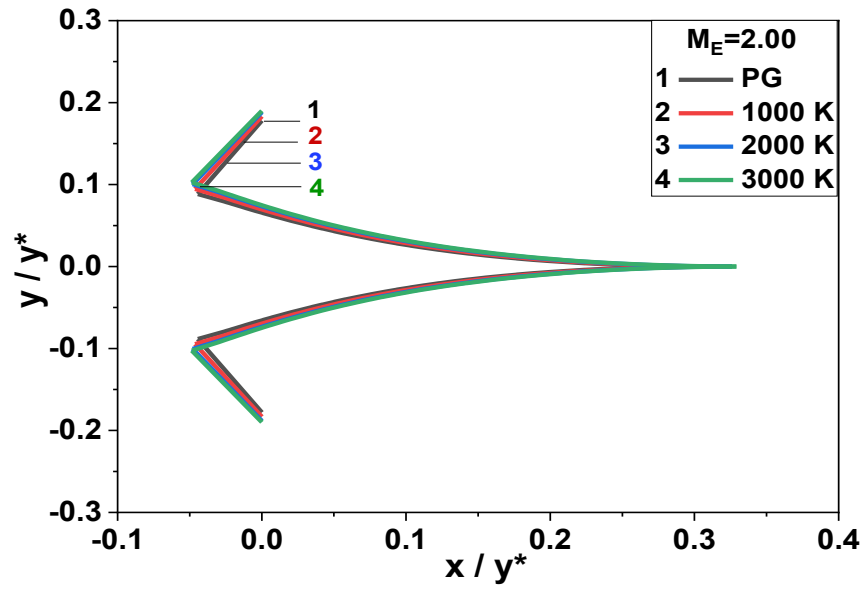


Figure 4.4 : Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique pour $M_S=2,00$

Tableau 4.4 : Valeurs numériques des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique de la figure 4.4 pour $M_S=2,00$

$M_S = 2.00$	$\frac{L}{y^*}$	$\frac{A_S}{A^*}$	C_{mass}	C_F
PG	1.22333	4.22003	13.49941	0.75008
$T_0 = 1000 K$	1.29684	4.47133	14.30399	0.80023
$T_0 = 2000 K$	1.45267	4.99581	15.97384	0.88816
$T_0 = 3000 K$	1.51574	5.20999	18.23161	0.98652

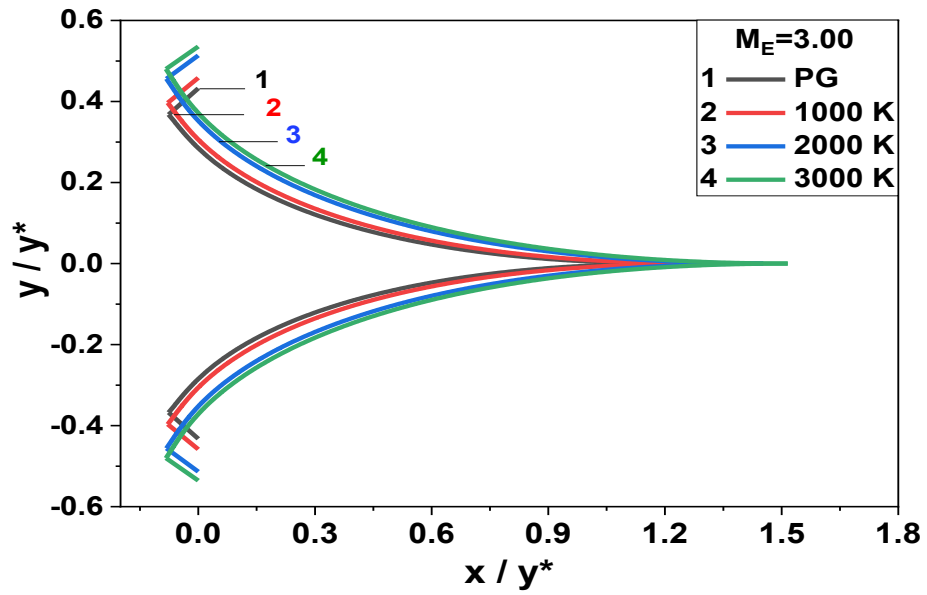


Figure 4.5 : Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique pour $M_S=3,00$.

Tableau 4.5 : Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.5 pour $M_S=3,00$

$M_S = 3.00$	$\frac{L}{y^*}$	$\frac{A_S}{A^*}$	C_{mass}	C_F
PG	1.22333	4.22003	13.49941	0.75008
$T_0 = 1000 K$	1.29684	4.47133	14.30399	0.80023
$T_0 = 2000 K$	1.45267	4.99581	15.97384	0.88816
$T_0 = 3000 K$	1.51574	5.20999	18.23161	0.98652

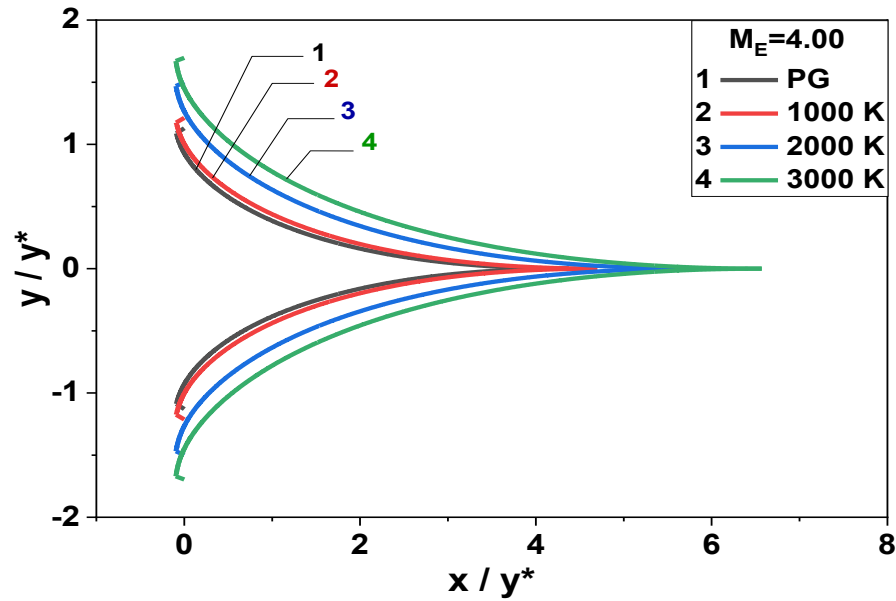


Figure 4.6 : Effet de la température génératrice T_0 sur les contours des tuyères à corps central axisymétriques pour $M_S=4,00$

Tableau 4.6 : Valeurs numériques des tuyères à corps central axisymétrique de la figure 4.6 pour $M_S=4,00$

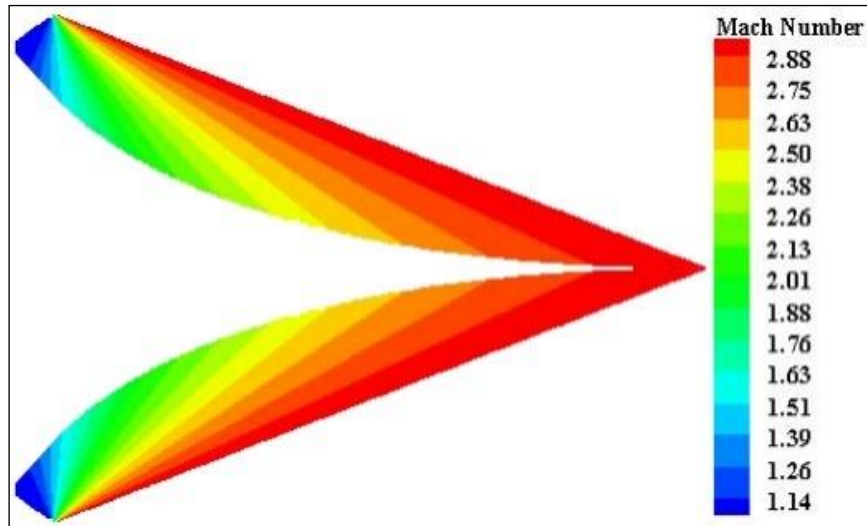
$M_S = 4.00$	$\frac{L}{y^*}$	$\frac{A_S}{A^*}$	C_{mass}	C_F
PG	4.37544	10.6470	43.46563	1.13114
$T_0 = 1000 \text{ K}$	4.69795	11.3912	46.35709	1.19075
$T_0 = 2000 \text{ K}$	5.80648	13.8615	58.73796	1.37478
$T_0 = 3000 \text{ K}$	6.57013	15.5141	65.02532	1.44654

Les figures 4.3 à 4.6, avec les tableaux 4.3 à 4.6, illustrent bien l'influence de la température génératrice T_0 sur l'allure du contour de la tuyère à corps central axisymétrique en fonction du nombre de Mach de sortie de la tuyère. En effet, il a été constaté qu'en augmentant le nombre de Mach de sortie, l'évolution de la température génératrice influe considérablement sur le contour de la tuyère, ceci est caractérisé par la variation des coordonnées du point d'attache du contour avec le rayon du col du corps central. Dans la figure 4.4 ; pour un nombre de Mach de sortie égal à 2,00, on remarque que les trois courbes obtenues pour les trois valeurs de la température génératrice T_0 sont presque confondues avec celle obtenue pour le cas d'un gaz parfait. Par contre, pour les courbes obtenues à des nombres de Mach de sortie supérieurs à 2,00, l'écart devient plus important et augmente en fonction de la température T_0 et en fonction du nombre de Mach M_S .

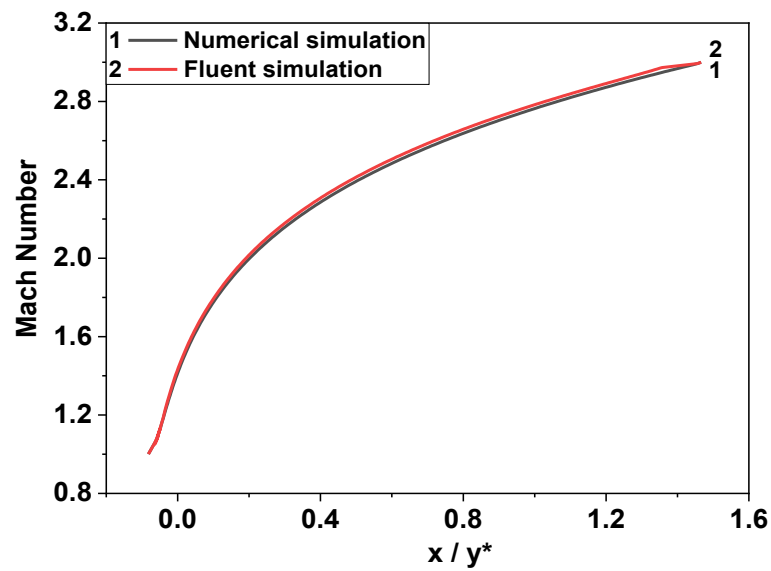
4.3. Calcul de l'écoulement dans une tuyère à corps central axisymétrique

Le calcul CFD est devenu indispensable pour comprendre les différents phénomènes physiques intervenants dans les écoulements. Ces derniers se divisent en deux types internes et externes. Les études en CFD en régime laminaire ou turbulent sont décrites par un système d'équations aux dérivées partielles (E.D.P). Tous les phénomènes physiques sont régis par ce système qui est formé d'équations de la continuité, de la quantité de mouvement et d'énergie qu'il convient de résoudre pour déterminer les caractéristiques du champ thermique et de l'écoulement. C'est pourquoi, il est intéressant de définir les écoulements dans les tuyères supersoniques à corps central, telles que : la distribution des contours des vitesses, la distribution des pressions statiques, la distribution des températures statiques et la distribution des masses volumiques.

Les figures 4.7 à 4.10 ci-dessous illustrent les contours des champs d'écoulement, obtenus numériquement par notre code de calcul, des différents paramètres de conception (iso-Mach, rapports de pression P/P_0 , rapports de températures T/T_0 et de densités ρ/ρ_0) de la tuyère à corps central axisymétrique.

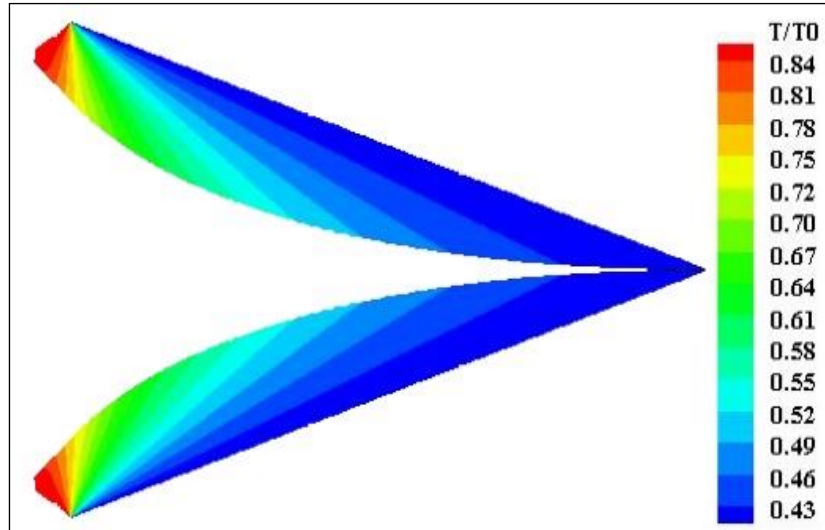


(a): Résultats numériques représentant les courbes iso-Mach

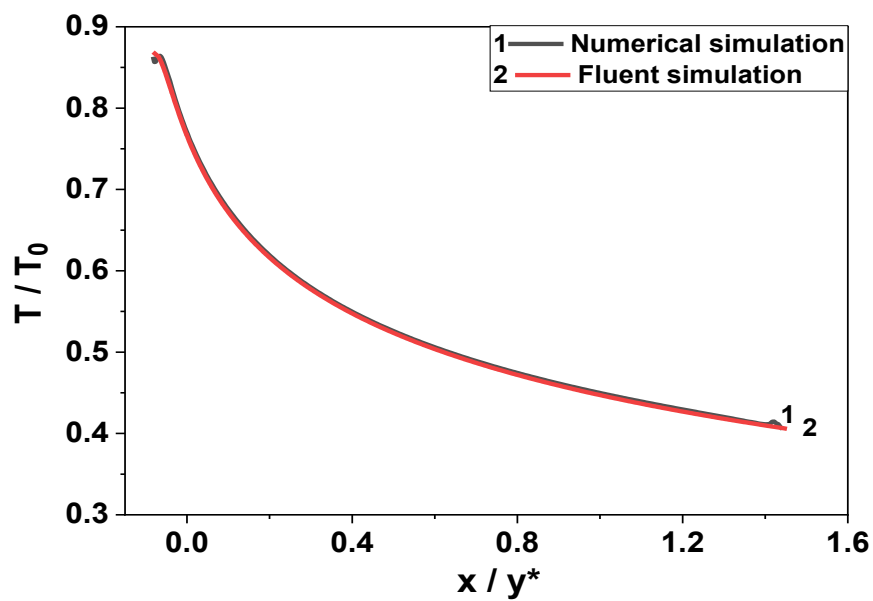


(b) : Comparaison entre les résultats de la simulation numérique (Programme Fortan) et Fluent

Figure 4.7 : Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_S = 3.00$ et $T_0 = 2000$ K

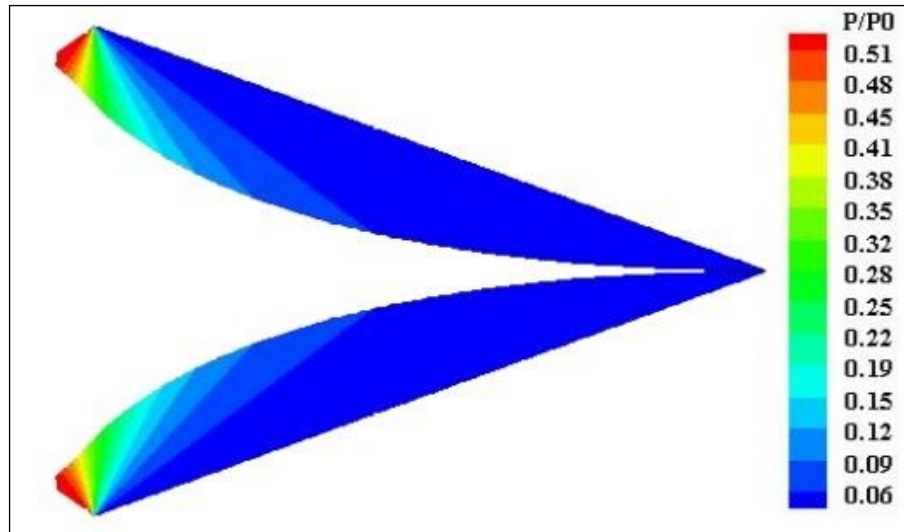


(a) : Résultats numériques des courbes iso-Température T/T_0

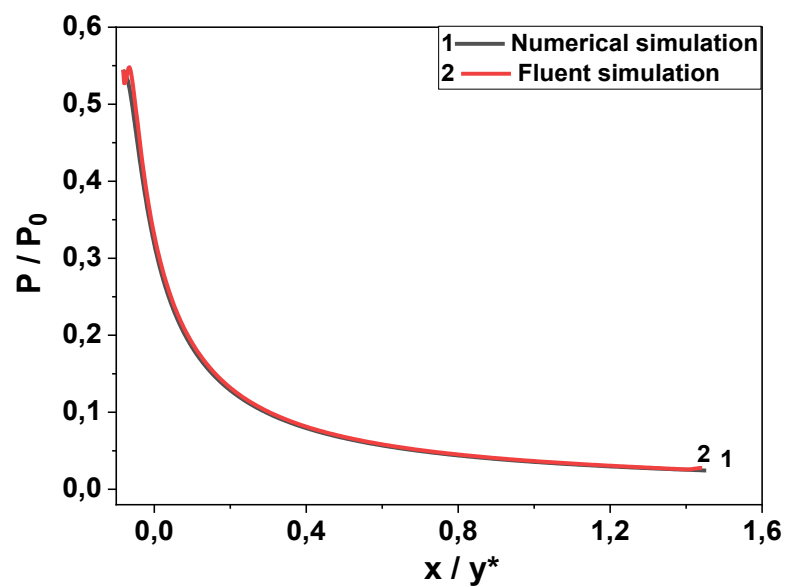


(b) : Comparaison entre les résultats de la simulation numérique (Programme Fortan) et Fluent

Figure 4. 8 : Variation du rapport de température (T/T_0) le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_S = 3.00$ et $T_0 = 2000$ K

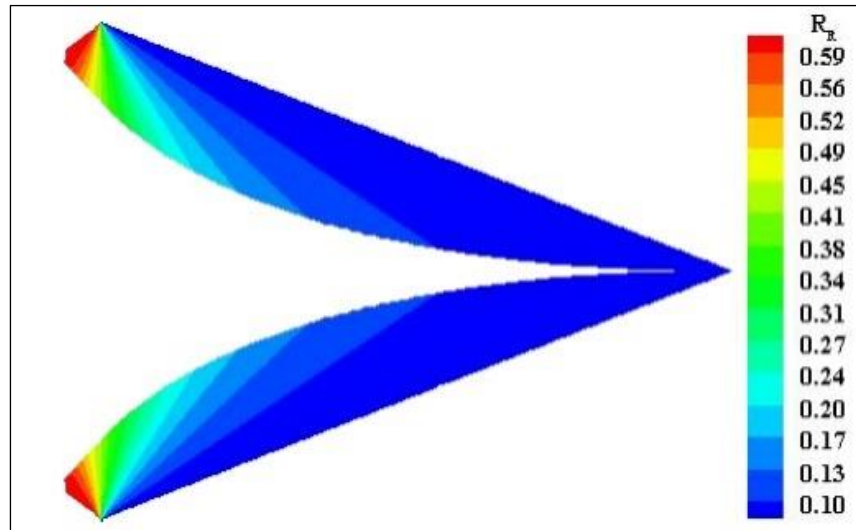


(a) : Résultats numériques des courbes iso-Pression P/P_0

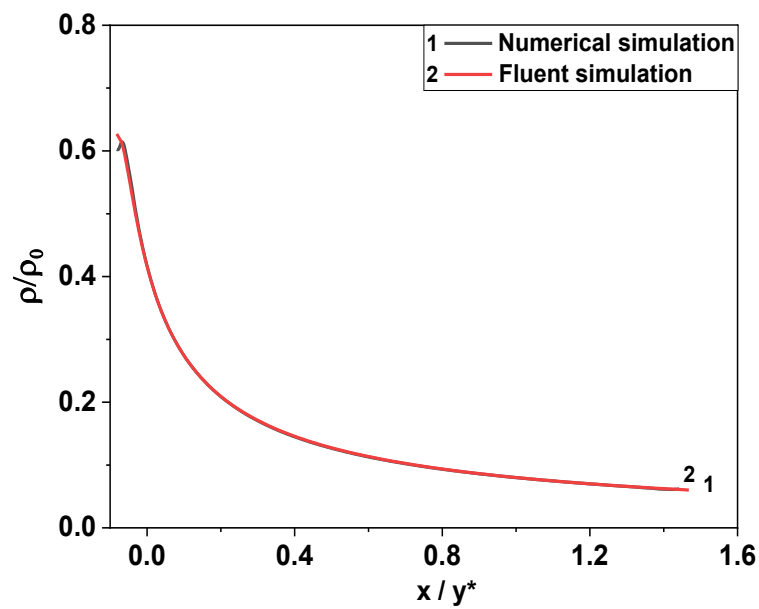


(b) : Comparaison entre les résultats de la simulation numérique (Programme Fortan) et Fluent.

Figure 4.9 : Variation du rapport de pression (P/P_0) le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme Fortran pour $M_s = 3.00$ et $T_0 = 2000$ K



(a) : Résultats numériques des courbes iso-volume ρ/ρ_0

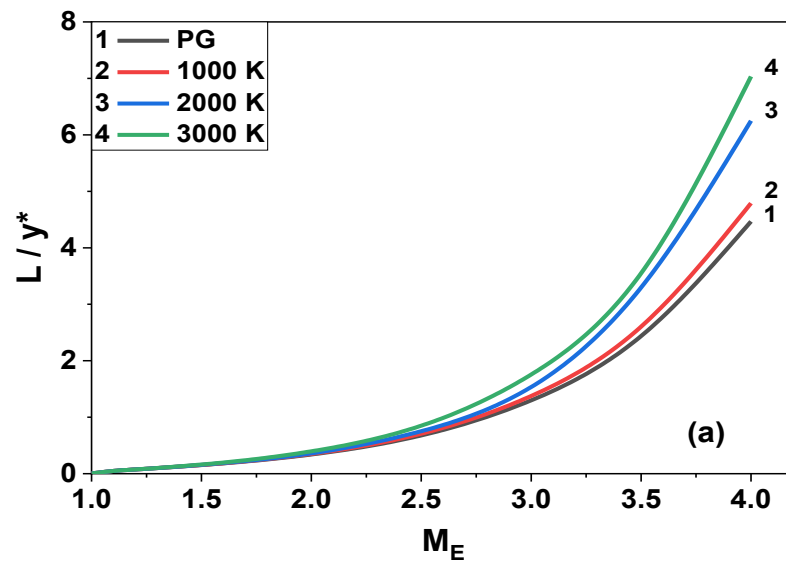


(b) : Comparaison entre les résultats de la simulation
numérique (Programme Fortan) et Fluent

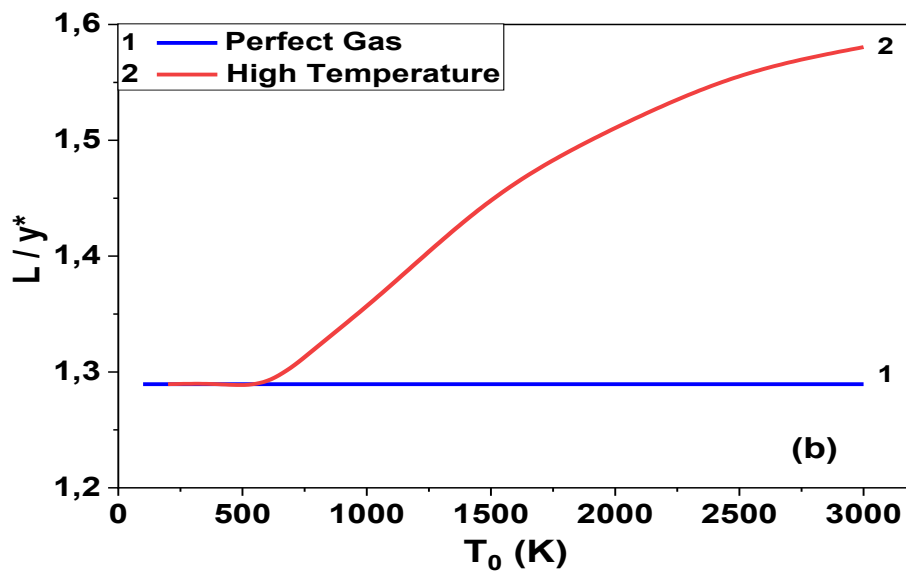
Figure 4.10 : Variation du rapport de la masse volume (ρ/ρ_0) le long de la paroi de la
tuyère à corps central axisymétrique de la simulation Fluent et ceux du programme
Fortran pour $M_s = 3.00$ et $T_0 = 2000$ K

4.4. Effet du nombre de Mach de sortie M_S sur les paramètres de conception

Dans cette section, on va étudier l'effet de la variation du nombre de Mach de sortie M_S sur les paramètres de conception des tuyères supersoniques axisymétriques à corps central pour les différentes températures génératrices $T_0=1000$ K, 2000 K et 3000 K ainsi que pour le cas du gaz parfait (GP). Entre autres, la longueur L/y^* (ou L/λ_B), le rapport des sections A_S/A^* et le coefficient de poussée C_F .



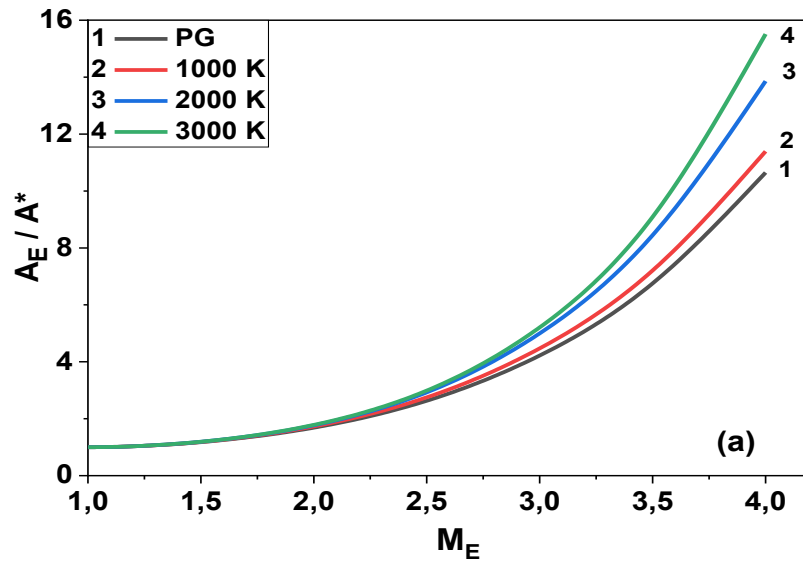
(a) : Variation de la longueur de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie M_S



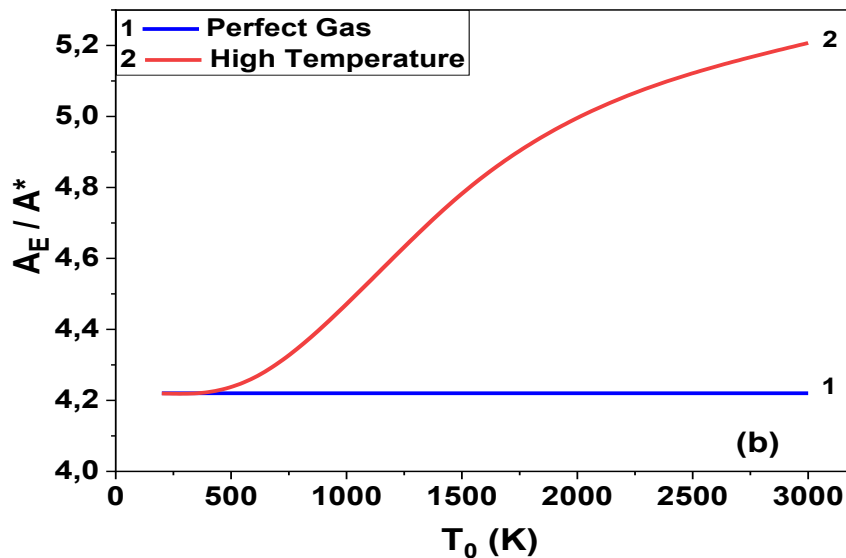
(b) : Variation de la longueur de la tuyère en fonction de la température génératrice T_0

Figure 4.11 : Variation de la longueur de la tuyère à corps central axisymétrique.

La figure 4.11 montre l'évolution de la longueur de la tuyère axisymétrique à corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 . On observe que la longueur de la tuyère axisymétrique augmente non seulement avec l'augmentation de M_S , mais aussi avec l'augmentation de T_0 . On conclut que plus la tuyère délivre un nombre de Mach de sortie plus élevé, plus que la longueur devient plus grande.



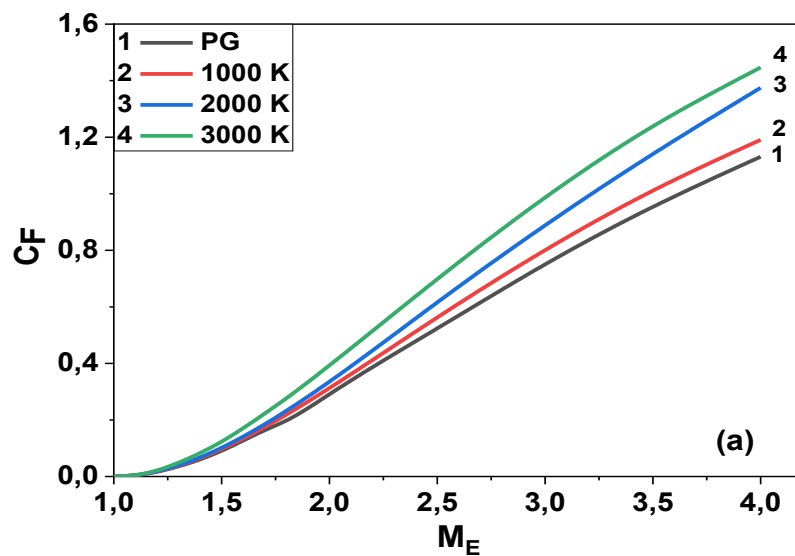
(a) : Variation du rapport de section de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie M_S



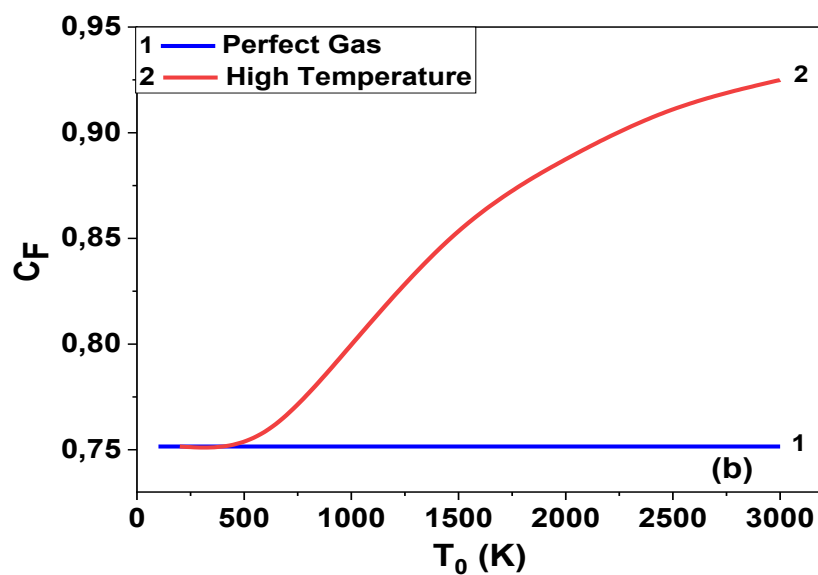
(b) : Variation de la longueur de la tuyère en fonction de la température génératrice T_0

Figure 4. 12 : Variation du rapport de section $\frac{A_E}{A^*}$ de la tuyère à corps central axisymétrique.

La figure 4.12 illustre la variation du rapport des sections (A_S/A^*) de la tuyère à corps central axisymétrique en fonction du nombre de Mach de sortie M_S . On remarque que l'évolution du rapport (A_S/A^*) est identique que celle de la longueur de la tuyère axisymétrique. On remarque également que les quatre courbes, représentant les cas des températures génératrices de 1000 K, 2000 K et 3000 K ainsi que pour le cas du gaz parfait (GP), sont presque confondues à un faible nombre de Mach de sortie jusqu'à environ $M_S=2,00$. Mais, à partir de cette valeur, les écarts entre les quatre courbes commencent à augmenter. On peut conclure que si le nombre de Mach de sortie $M_S < 2,00$, on peut utiliser le modèle gaz parfait (GP) au lieu de notre modèle (HT).



(a) Variation du coefficient de poussée en fonction du nombre de Mach de sortie M_S



(b) Variation du coefficient de poussée en fonction de la température génératrice T_0

Figure 4. 13 : Variation du coefficient de poussée C_F de la tuyère à corps central axisymétrique

La figure 4.13 représente la variation du coefficient de masse C_{Masse} de la tuyère à corps central axisymétrique en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 . Il est à noter que la différence entre la courbe GP et les autres courbes obtenues pour les différentes températures T_0 est négligeable pour un nombre de Mach de sortie inférieur à 2,00. Cette différence devient plus grande et augmente d'avantage lorsque le nombre de Mach de sortie M_S augmente. On en conclut que plus la tuyère produit un nombre de Mach M_S élevé, plus sa masse est grande. En plus, les courbes correspondant au modèle gaz parfait (GP) et à une température $T_0 = 1000$ K se presque confondues pour toute valeur de M_S . Ce résultat montre que le modèle gaz parfait (GP) peut être utilisé pour $T_0 < 1000$ K.

4.5. Variation des paramètres thermodynamique le long du contour du corps central

La figure 4.14 représente la variation de l'angle de déviation θ^* de l'écoulement juste après le col de la tuyère à corps central axisymétrique en fonction du nombre de Mach de sortie M_S . On remarque que, plus la tuyère axisymétrique délivre un nombre de Mach de sortie élevé, plus l'angle de déviation de l'écoulement au niveau du col devient plus grand ; le rayon du col devient plus en plus grand, et par conséquent, la tuyère devient plus ouverte au col pour permettre une détente convenable adaptée et, par conséquent, donner un écoulement uniforme et parallèle à la sortie. On note également que l'écart entre notre modèle haute température (HT) et le modèle gaz parfait (GP) devient important au fur et à mesure que la température T_0 augmente.

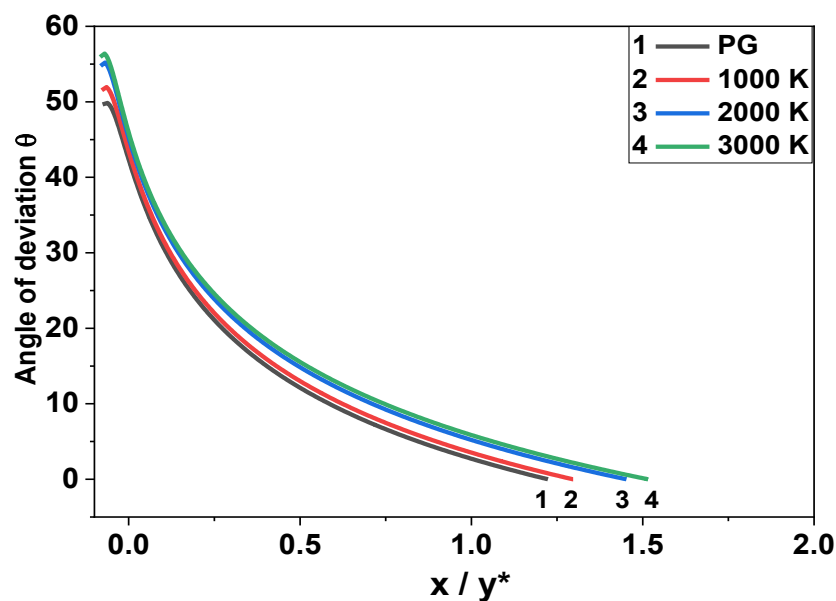


Figure 4.14 : Variation de l'angle de déviation θ^* en fonction du nombre de Mach de sortie

La figure 4.15 montre la variation du nombre de Mach M le long de la paroi de la tuyère à corps central axisymétrique pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 et pour un nombre de Mach de sortie $M_S = 3,00$. Il est égal à l'unité au col jusqu'à atteindre la valeur $M_S = 3,00$ à la sortie de la tuyère. Le nombre de Mach commence à augmenter à partir de 30% de la longueur de la tuyère.

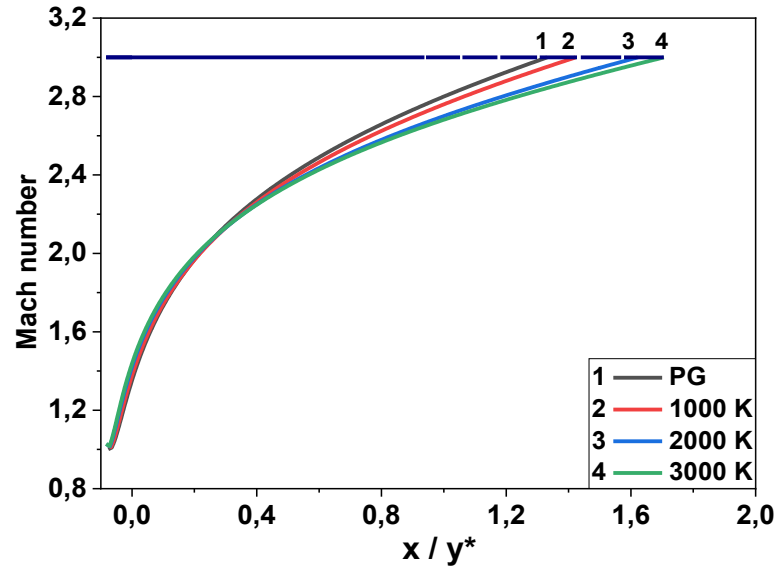


Figure 4.15 : Variation du nombre de Mach M le long du contour du corps central pour $M_S = 3,00$

La figure 4.16 montre l'évolution du rapport des températures T/T_0 le long du contour du corps central de la tuyère axisymétrique. Les valeurs numériques ont été calculées par notre code de calcul pour $M_S = 3,00$ et $T_0 = 2\,000$ K. Le rapport des températures T/T_0 nous permet de choisir de manière appropriée le matériau constructif résistant à cette température. Il est maximal au niveau du col puis diminue le long du contour du corps central de la tuyère axisymétrique. Par exemple, si on prend une température $T_0 = 2\,000$ K, la valeur de la température au col est de l'ordre de $T^* = 1\,640,28$ K et elle est de $T_S = 760$ K à la sortie du contour pour le modèle gaz parfait (GP). Par contre, pour le modèle haute température (HT), la température est de l'ordre de $T^* = 1\,737,84$ K et elle est de $T_S = 861,38$ K pour le contour à la section de sortie.

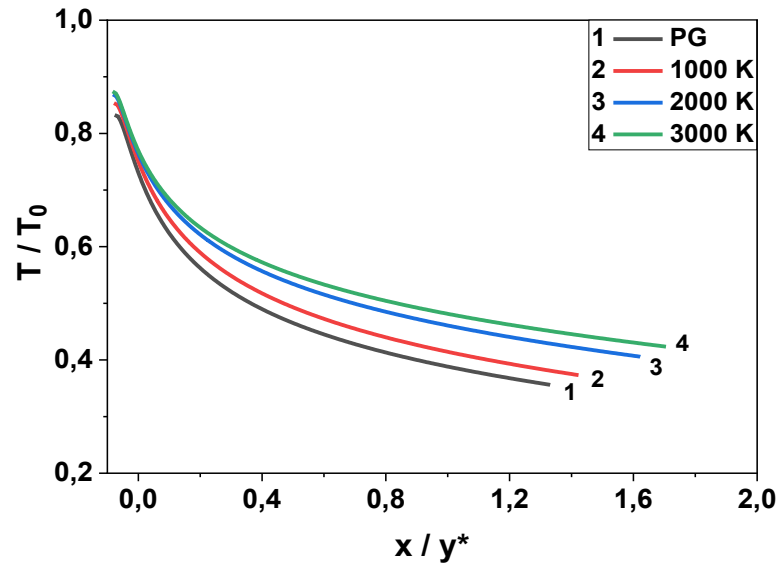


Figure 4.16 : Variation du rapport de températures T/T_0 le long du contour du corps central pour $M_S=3,00$

Le rapport des pressions P/P_0 est utilisé pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergente de la tuyère axisymétrique. Cette quantité est également utilisée pour étudier la distribution des contraintes radiales et tangentielles afin d'étudier la résistance du matériau. La figure 4.17 montre cette évolution pour différentes températures génératrices T_0 . On remarque une chute brusque de la pression dans la partie divergente de la tuyère qui sera transformée en totalité en énergie de poussée (coefficient de poussée C_F).

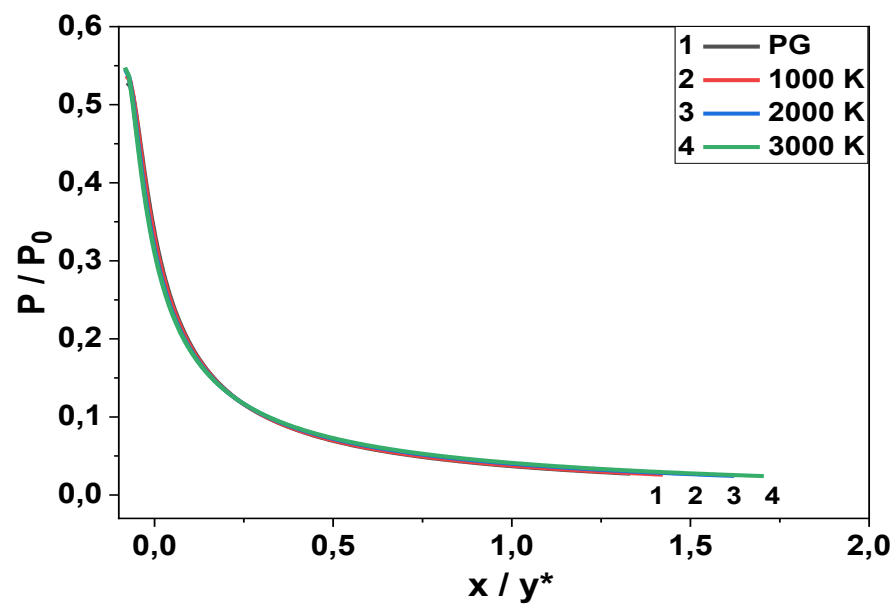


Figure 4.17 : Variation du rapport de pression P/P_0 le long du contour du corps central pour $M_S=3,00$

4.6. Calcul de l'erreur entre les modèles hautes températures (*HT*) et gaz parfait (*GP*)

Le modèle parfait (*GP*) est développé en prenant en compte la constante de chaleur spécifique C_P . Il donne des résultats acceptables pour une température T_0 et un nombre de Mach M_S faibles. Dans cette partie, une étude sur le calcul de l'erreur des résultats donnés entre le modèle gaz parfait (*GP*) et notre modèle haute température (*HT*) sera présentée. L'erreur donnée par le modèle *GP* par rapport à notre modèle *HT* peut être calculée pour chaque paramètre thermodynamique (la longueur et les coefficients de masse et de poussée).

Les figures 4.18 à 4.21 ci-dessous illustrent la variation de l'erreur relative calculée pour ces paramètres : la longueur (L/y^*), le coefficient de masse (C_{Masse}), le coefficient de poussée (C_F) et le rapport des sections (A_S/A^*). Par exemple, si la température génératrice $T_0 = 2000$ K et le nombre de Mach de sortie $M_S = 3,00$, l'utilisation du modèle gaz parfait (*GP*) donnera une erreur relative égale à $\varepsilon = 15,315\%$ pour la longueur, $\varepsilon = 15,490$ pour le coefficient de masse, $\varepsilon = 15,529$ pour le coefficient pour le rapport de section et $\varepsilon = 16,147\%$ pour le coefficient de poussée.

On notera que lorsque le nombre de Mach de sortie M_S est inférieur à 2,00 et la température génératrice T_0 est inférieure à 1000 K, l'erreur ε est faible (inférieure à 5%), ce qui est interprété par l'utilisation du modèle *GP* lorsque $T_0 < 1000$ K ou $M_S < 2,00$.

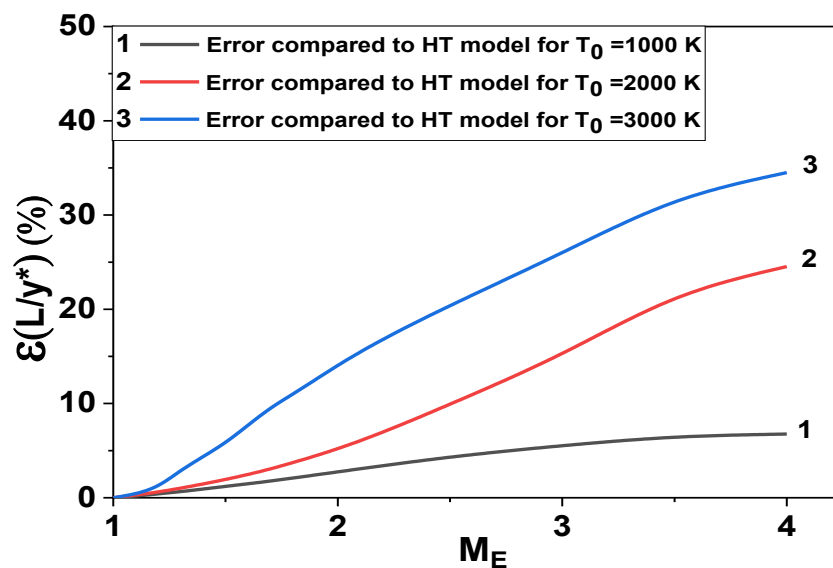


Figure 4.18 : Variation de l'erreur relative de la longueur (L/y^*) entre les modèles *HT* et *GP* en fonction du nombre de Mach de sortie

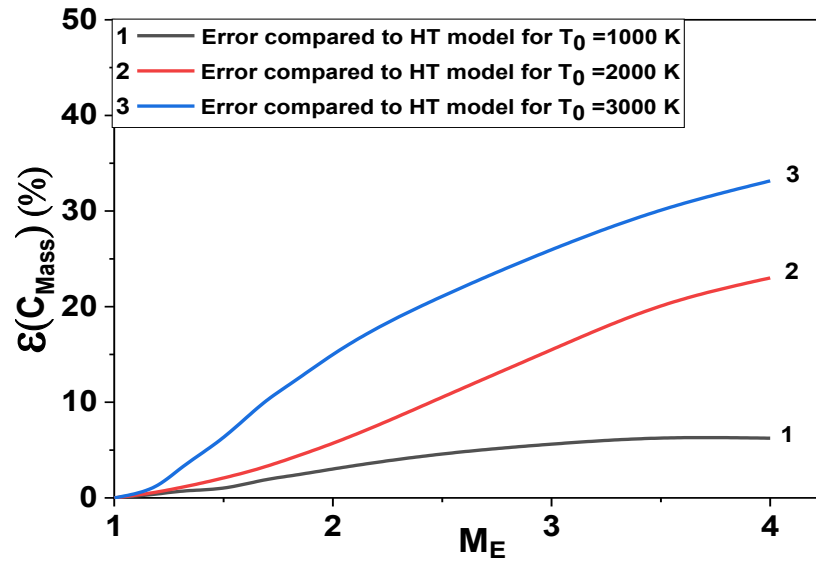


Figure 4.19 : Variation de l'erreur relative du coefficient de masse (C_{Masse}) entre les modèles *HT* et *GP* en fonction du nombre de Mach de sortie

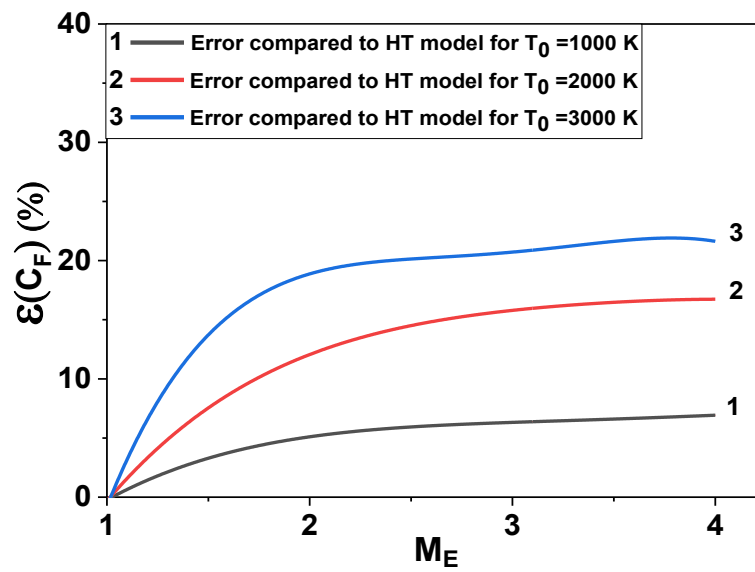


Figure 4.20 : Variation de l'erreur relative du coefficient de poussée (C_F) entre les modèles *HT* et *GP* en fonction du nombre de Mach de sortie

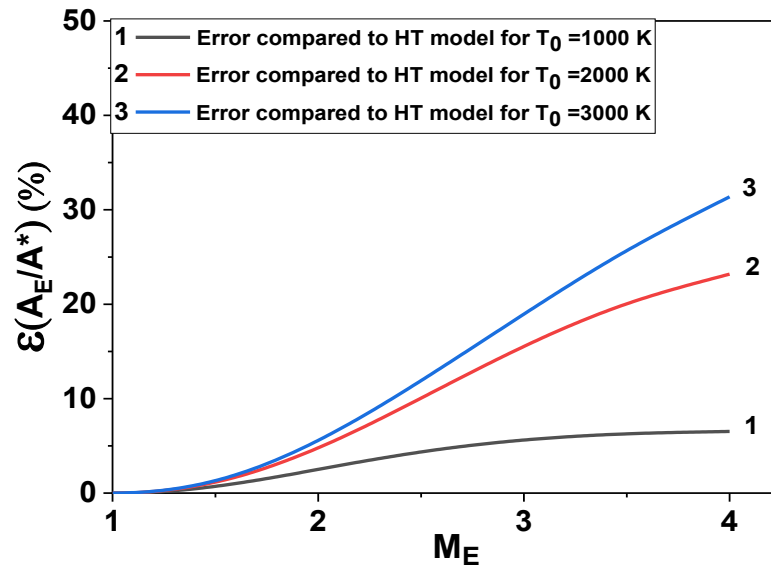


Figure 4.21 : Variation de l'erreur relative du rapport de section (A_E/A^*) entre les modèles *HT* et *GP* en fonction du nombre de Mach de sortie

4.7. Etude de la troncature de la tuyère à corps central (Plug Nozzle)

Dans les tuyères à corps central, la section de la paroi est sensiblement constante et ne contribue donc que pour quelque pourcent à la poussée totale. Pour des raisons d'optimisation, ces tuyères doivent être tronquées afin d'augmenter leurs performances. L'un des principaux avantages des tuyères à corps central est que leurs performances ne sont pas radicalement modifiées si le corps (bouchon) est tronqué, même sur une petite fraction de sa longueur. En effet, la partie terminale du corps (comme dans le cas des tuyères classiques) est assez plate et sa contribution à la poussée ne représente qu'une petite fraction de la poussée globale de la tuyère, car la force agissant sur la paroi du bouchon est presque perpendiculaire à l'axe de la tuyère.

La figure 4.22 montre le coefficient de gain en masse et le coefficient de perte de poussée calculés par le code de calcul à partir d'une tuyère à corps central axisymétrique tronquée à n'importe quelle section depuis la section de sortie jusqu'au col de la tuyère.

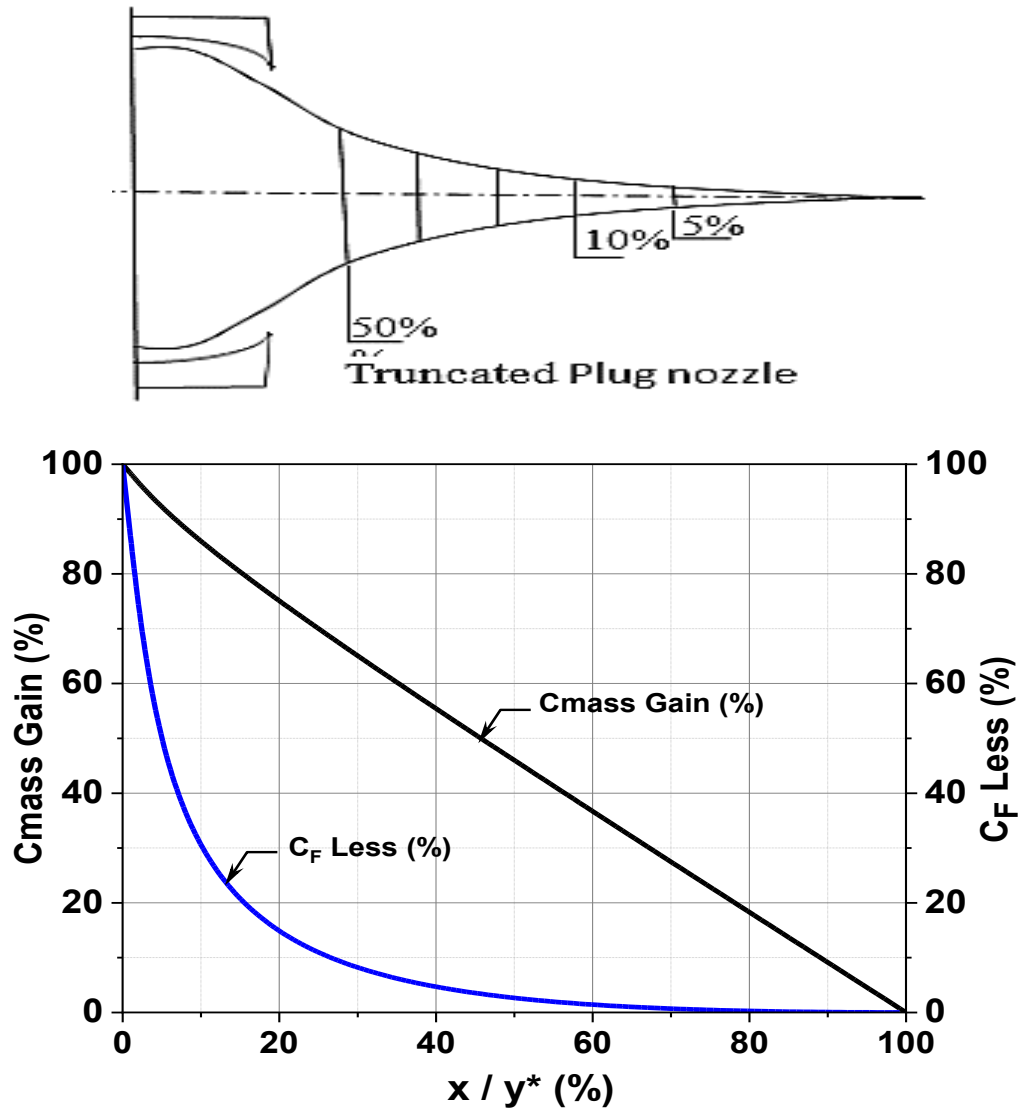


Figure 4.22 : Représentation du gain en masse et de la perte de C_F d'une tuyère à corps central axisymétrique tronqué pour un nombre de Mach de sortie $M_S=3.00$ pour $T_0=2000$ K

Tableau 4.7 : Effet de la température de stagnation T_0 sur la conception de la tuyère à corps central axisymétrique pour un nombre de Mach de sortie $M_S= 5,00$

Troncature de la tuyère	$\frac{L}{y^*}$	Gain % (C_{mass})	Perte % (C_F)
0%	1.5438	0.0000	0,0000
5%	1.4667	4,4665	0,4715
10%	1.3894	9,1548	0,2210
15%	1.3122	13,740	0,5613
20%	1.2351	18,312	0,3860
25%	1.1579	22,890	0,1937
30%	1.0807	27,487	0,3590

CONCLUSION

L'objectif de notre recherche est d'étudier l'impact de la température de stagnation T_0 sur les caractéristiques d'un écoulement supersonique pour la conception d'une tuyère à corps central axisymétrique. En premier lieu, un programme en code Fortran a été développé pour un gaz parfait (modèle *GP*). Ce modèle a donné des résultats très satisfaisants pour des valeurs de M et T_0 inférieures à 2,00 et 1000 K, respectivement. Lorsque Ms et T_0 augmentent, cela affecte les performances de la tuyère, ce qui nécessite l'utilisation de notre modèle *HT*. Le programme réalisé donne des résultats pour tous les gaz rencontrés dans la nature. Les valeurs $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ du gaz sont combinées pour utiliser le modèle $H(T)$. En éliminant toutes les constantes d'interpolation de la fonction $C_p(T)$ sauf la première, on obtient les relations du gaz parfait à partir des relations du modèle *HT*. Le modèle *GP* devient donc un cas particulier de notre modèle *HT* dans cette situation. L'application a été faite sur l'air. On a constaté que la conception et les paramètres de la tuyère à corps central axisymétrique sont fortement influencés par les fonctions $C_p(T)$, $\gamma(T)$ et T . Pour une même précision, on a remarqué que notre modèle *HT* nécessite plus de temps de calcul par rapport au modèle *GP* pour que les résultats convergent. Si pour une erreur inférieure à 5% est acceptable, un écoulement supersonique peut être étudié à l'aide des relations *GP* si la température de stagnation est inférieure à 1000 K pour toute valeur du nombre de Mach, ou si le nombre de Mach est inférieur à 2,00 pour toute température de stagnation jusqu'à environ 3500 K. Pour plusieurs températures de stagnation T_0 , l'erreur entre les modèles *HT* et *PG* a été calculée.

Une méthode de conception des tuyères axisymétriques incluant une cinétique chimique à débit fini a été développée. Le procédé permet de déterminer la limite physique de la tuyère sur la base d'un nombre de Mach de sortie uniforme souhaité pour le cas isentropique. La solution est ensuite couplée et ajustée pour la chimie à débit fini. Les contours ainsi conçus peuvent présenter des longueurs excessives et indésirables, pour une utilisation sur des moteurs-fusées. Une méthode d'analyse des performances des tuyères tronquées a été explorée. Le contour qui produit une poussée maximale pour une longueur de troncature donnée peut être trouvé.

Une méthode de simplification de la procédure d'optimisation par réduction de l'espace de conception a été développée grâce à l'utilisation de cartes de performances. Les cartes de performances peuvent être étendues pour inclure un plus grand nombre de contours afin de réduire encore davantage l'espace de conception pour la tuyère optimale.

La méthode d'analyse des tuyères tronquées ne se limite pas à celle des tuyères à flux isentropique. Le processus peut être étendu aux contours conçus avec une chimie à débit fini incluse.

L'amélioration de la géométrie des contours peut être apportée grâce à l'incorporation de l'effet de couche limite qui pourrait être ajouté à la méthodologie développée. Cela permettrait une géométrie de contour physique plus précise. Une méthode simple pour ajouter une couche limite au développement actuel consisterait à déplacer la paroi de la tuyère d'une distance égale à l'épaisseur estimée de la couche limite.

L'analyse actuelle de la chimie à débit fini dans la partie subsonique de la tuyère se limite à une analyse unidimensionnelle. Cela pourrait être augmenté jusqu'à un degré de liberté plus élevé. Ce faisant, l'analyse considérerait les écoulements striés. Le développement actuel utilise une analyse unidimensionnelle et les distances parcourues par les lignes de courant dans la section convergente sont à peu près égales. La distance parcourue étant relativement uniforme à travers la section convergente, il est raisonnable de supposer que la composition des gaz produits est uniforme au niveau de la ligne sonique.

Les inexactitudes dans l'analyse à vitesse finie sont en grande partie dues aux données fournies sur la vitesse de réaction. Les données sur les taux ne peuvent être aussi bonnes que le processus expérimental pour obtenir de tels taux. Les techniques de mesure des taux de réaction pourraient devenir plus précises et les données sur les taux de réaction et l'influence de tiers devraient être mises à jour en conséquence.

L'approche de la méthode des caractéristiques couplée à la chimie à débit fini présentée pourrait être étendue à l'analyse du panache d'échappement. Cette méthode permettrait de connaître la composition du panache. Cela peut être utile pour l'identification des missiles ou pour optimiser la combustion et l'expansion des gaz afin de produire la composition souhaitée. Un tel processus permettrait de réduire les produits chimiques d'échappement indésirables.

Les travaux de recherche décrits dans cette thèse montrent que les problèmes, posés par la conception d'une tuyère de propulseur aérothermodynamique peuvent être résolus, par le calcul numérique qui est souvent d'une grande précision. Sans même concevoir la tuyère, le constructeur peut étudier le comportement de l'écoulement, développer un design avec les meilleures performances possible et enfin, réaliser la conception.

Ce travail nous a permis d'étudier l'effet de la température génératrice T_0 sur les paramètres influant sur la conception de la tuyère supersonique à corps central axisymétrique à l'aide de la méthode des caractéristiques à haute température. Un code de calcul en langage Fortran a été développé. Les conclusions suivantes peuvent être déduites de cette étude :

- Nous pouvons obtenir des relations du gaz parfait (GP) à partir des relations du modèle (HT) en annulant toutes les constantes d'interpolation de la fonction $C_P(T)$ à l'exception de la première. Dans ce cas, le modèle gaz parfait devient un cas particulier de notre modèle haute température.
- Le programme numérique développé donne des résultats pour tout gaz présent dans la nature. Il faut ajouter $C_P(T)$ et R du gaz et calculer $H(T)$. L'application est uniquement faite pour l'air.
- Le modèle GP donne de meilleurs résultats lorsque $M_S < 2.00$ et $T_0 < 1000$ K. Il perturbe les performances lorsque M_S and T_0 augmentent, d'où la nécessité d'utiliser notre modèle (HT) pour corriger les performances.
- La fonction $C_P(T)$ influe principalement sur la conception et les paramètres de la tuyère supersonique à corps central axisymétrique.
- La convergence des résultats nécessite un temps de calcul supplémentaire pour notre modèle HT par rapport au modèle GP pour la même précision.
- Dans les calculs aérodynamiques, si l'erreur est inférieure à 5%, le résultat est acceptable. Nous pouvons donc étudier un écoulement supersonique à l'aide des relations GP , si la température génératrice est inférieure à 1000 K pour toute valeur du nombre de Mach de sortie M_S ou si ce dernier est inférieur à 2,00 pour toute température génératrice T_0 allant jusqu'à environ 3500 à 3555 K.
- Pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 , l'erreur entre les modèles HT et GP est calculée pour les différents paramètres (longueur, coefficient de poussée et coefficient de masse). Cette erreur augmente avec l'augmentation de cette température.
- En termes de paramètres de conception (longueur, coefficient de poussée et coefficient de masse), les performances obtenues pour la tuyère à corps central axisymétrique sont nettement meilleures que celles obtenues pour la tuyère à corps central bidimensionnelle.
- Une extension peut être réalisée pour déterminer les paramètres physiques de la conception d'une tuyère à corps central à haute température d'une section 3D arbitraire en appliquant la méthode des lignes de flux dans l'espace.

Finalement, on peut affirmer que les résultats obtenus par l'utilisation de notre modèle pour la conception et la détermination des performances des tuyères supersoniques à corps central axisymétriques sont très satisfaisants, car ces résultats sont meilleurs que ceux des travaux des autres auteurs.

PERSPECTIVES :

Comme perspectives, nous proposons d'étendre cette étude à :

- Des tests expérimentaux pour valider d'une manière décisive une telle approche.
- Dans le domaine de l'aérothermique, il serait intéressant de développer des modèles qui prennent en compte les aspects thermiques en plus de la turbulence.
- L'étude des charges latérales exercées sur la tuyère particulièrement au point d'inflexion est nécessaire.
- Une étude plus poussée sur la troncature de la tuyère à corps central axisymétrique afin d'augmenter davantage ces performances.

APPENDICE A

**Les équations thermodynamiques d'un écoulement supersonique
pour les modèles GP et HT.**

RAPPORTS	GAZ CALORIFIQUEMENT PARFAIT ($\gamma = 1.402$) (GP)	GAZ CALORIFIQUEMENT IMPARFAIT ($\gamma = \text{variable}$) (HT)
Température $\frac{T}{T_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-1}$	Résolution de l'équation / T $M^2(T)a^2(T) - 2H(T) = 0$ T : variable principale
Masse volumique $\frac{\rho}{\rho_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$	$\int_{T_0}^T \left\{ \frac{C_P(T)}{\gamma(T) T} \right\} dT$
Pression $\frac{P}{P_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0}$
Section $\frac{A}{A_*}$	$\frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\int_{T_*}^T C_P(T) \left[\frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] dT$
Débit $\frac{\dot{m}}{A_0 \rho_0 a_0}$	$\left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{a}{a_0} M \frac{A}{A_*}$
Vitesse du son $\frac{a}{a_0}$	$\sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$\sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}}$
Enthalpie H(T)	$C_P(T - T_0)$	$\int_{T_0}^T C_P(T) dT$
Fonction de Prandtl Meyer v	$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}$	$\int_{T_*}^T \left\{ \frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2 - 1} \right\} dT$
Nombre de Mach M	M : Variable principale	$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)}$
Vitesse $\frac{V}{a_0}$	$M \sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$M \sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}}$

APPENDICE B

Tuyère à Corps Central bi-dimensionnel (2D Plug Nozzle)

La tuyère supersonique est divisée en deux parties. Cependant, la portion supersonique est indépendante des conditions amont de la ligne sonique. On peut étudier cette partie indépendamment de la portion subsonique. Cette dernière est utilisée pour donner un écoulement sonique au col de la tuyère. Dans cette classe, on va étudier un type de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Cette tuyère est nommée « tuyère à corps central type à bouchon ».

Il existe deux catégories pour ce type de tuyère suivant la ligne sonique (droite ou courbée). Si la ligne sonique est représentée par une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes. Lorsque la ligne sonique est courbée, l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées ; ce type de tuyère est nommé par « Tuyère à corps central avec ligne sonique courbée ». Chaque type existe pour un écoulement bidimensionnel et axisymétrique donnant un nombre de quatre configurations possibles.

Les travaux discutés auparavant sont réalisés pour le cas du gaz parfait à C_p et γ constants. Ces travaux sont limités pour des faibles températures génératrice, où on peut aller jusqu'à 1000 K environ pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas $M_s=2.00$ environ.

Dans ce travail on a développé une méthode numérique de conception et de dimensionnement des tuyères à corps central type à bouchon. Cette méthode est basée sur l'utilisation de la détente de Prandtl Meyer. Le contour de la tuyère est inconnu et il sera déterminé de manière à obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie, et en particulier, la forme obtenue va délivrer une poussée maximale vu que l'écoulement à la sortie est horizontal. Pour justifier le gain en performance, en particulier la longueur, la masse et la force de pression, on a fait une comparaison avec la configuration MLN.

Dans le cas réel, la chaleur spécifique C_p et le rapport γ varient avec la température. Pour l'air, et jusqu'à la température 3550 K, une table de variation est illustrée dans la Référence[3].

Dans cette référence on a ajouté l'effet de cette variation en fonction de la température, inférieure au seuil de dissociation, sur la conception des tuyères supersoniques. Le gaz parfait

dans ce cas est nommé en plus gaz calorifiquement imparfait et thermiquement parfait ou gaz à *Haute Température*. Les rapports thermodynamiques à Haute Température sont présentés dans les Références [7,9], celle de la fonction de Prandtl Meyer à haute température est le but de la Référence [5]. Comme résultats, le modèle mathématique développé dans cette publication est une généralisation des équations du modèle d'un gaz parfait à C_P et γ constants présentées dans les Références [2,4,10]. En général, les résultats dans la dynamique des gaz sont acceptés avec une erreur de 5%.

Afin de trouver une forme analytique à la fonction $C_P(T)$, une interpolation polynomiale aux valeurs de la table. Les relations mathématiques présentées sont valables, dans le cas général, indépendamment de la forme de l'interpolation et de la substance, mais nos résultats seront présentés par le choix d'une interpolation par un polynôme de 9^{ème} degré pour la fonction $C_P(T)$, voir Référence [9]. La substance choisie est l'air. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait dans le but de déterminer la limite d'application de ce modèle. Une étude sur l'erreur donnée par le modèle du gaz parfait est présentée dans ce contexte. La méthode de conception est une méthode approximative basée sur la détente de Prandtl-Meyer.

La forme de ce type de tuyères est illustrée dans la figure B.1.

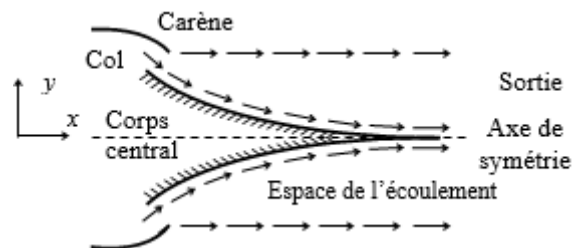


Figure B.1 : Géométrie de la tuyère à corps central.

La différence entre ce type de tuyères et les autres modèles est que l'écoulement au col est incliné d'un angle θ^* par rapport à l'horizontale comme l'indique la figure B.2. Pour les autres types de tuyères, l'écoulement est horizontal au col.

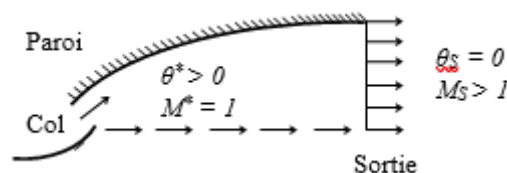
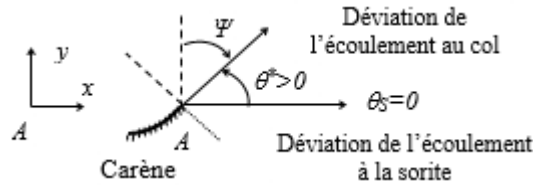


Figure B.2 : Ecoulement au col et à la sortie.

Par conséquent, la carène (Lip) doit être inclinée d'un angle Ψ par rapport à la verticale comme indique la figure B.3.

Figure B.3 : Angle de déviation Ψ de la carène.

L'écoulement au col est sonique et supersonique dans la partie divergente de la tuyère. Pour obtenir la forme du contour de la géométrie de corps central, la ligne de courant déterminée par le calcul sera remplacée par une surface rigide limitant le domaine de l'écoulement, par conséquent, la forme du corps central sera obtenue. Dans ce cas, on s'est intéressé uniquement de la partie divergente supersonique. Des ondes de Mach centrées divergentes sont issues à partir du coin du col. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait à chaleur spécifique constante.

B.1. Formulation Mathématique du Problème

L'écoulement au col et à la section de sortie est unidirectionnel, le rapport des sections critiques reste toujours valable et est pris en considération pour comparer les calculs numériques trouvés par notre modèle et la théorie. Notons ici que le rapport des sections d'un gaz parfait n'est plus valable et que le rapport des sections à haute température est utilisé.

Le calcul de l'écoulement à l'intérieur de la tuyère est assez délicat, puisque la forme de la tuyère est inconnue a priori. La forme à rechercher du corps central accélère l'écoulement du nombre de Mach $M=1.00$ au col jusqu'au nombre de Mach $M=M_s$ à la sortie de la tuyère. Comme la déviation de l'écoulement au col n'est pas nulle, l'écoulement à travers le corps central se redresse uniquement de l'angle $\theta=\theta^*$ au col à l'angle $\theta=0$ à la sortie.

Le calcul de l'écoulement et la détermination du contour du corps central pour un gaz parfait à haute température sont basés sur la détente de Prandtl-Meyer donnée par :

$$v = \int_T^{T^*} F_v(T) dT \quad (B.1)$$

Avec :

$$F_v(T) = \frac{C_P}{2 H(T)} \sqrt{\frac{2 H(T)}{a^2(T)} - 1} \quad (\text{B.2})$$

et

$$V^2 = 2H(T) \quad (\text{B.3})$$

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_P(T) dT \quad (\text{B.4})$$

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (\text{B.5})$$

$$a^2(T) = \gamma(T) r T \quad (\text{B.6})$$

$$M = V / a \quad (\text{B.7})$$

La valeur T^* représente la température au col de la tuyère.

Les tables de variation et les polynômes d'interpolations de la fonction $C_P(T)$ ainsi que la fonction $H(T)$ sont présentés dans la Reference [9]. L'angle v est mesuré par rapport au vecteur vitesse au col. Sur la fig. 4, les lignes AB et AE présentent respectivement les ondes de Mach au col et à la section de sortie. Ces lignes sont inclinées par les angles μ_B et μ_S donnés, respectivement, par $\mu_B = 90^\circ$ et $\mu_S = \arcsin[1/M_E] < 90^\circ$.

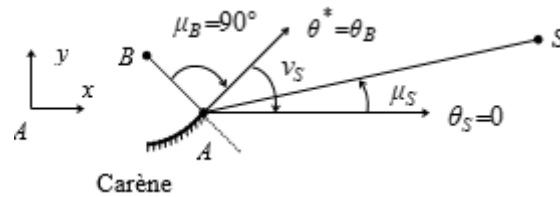


Figure B.4 : Angles de Mach au col et à la sortie de la tuyère à corps central.

Entre ces deux lignes de Mach, il y a une infinité d'ondes de Mach centrées divergentes issues du point A de la carène 'Lip' comme le montre la figure B.5.

Chaque ligne donne un nombre de Mach, qu'on peut facilement, à partir de ce nombre, déduire un point du contour du corps central. Comme le gaz est parfait, le vecteur vitesse est tangent à la ligne de courant, qui sera considérée comme le contour de la paroi du corps central à rechercher. Par conséquent, le point A est un point de discontinuité en paramètres, et en particulier en T , M et θ .

Les propriétés de l'écoulement comme le nombre de Mach, la déviation de l'écoulement θ , les rapports thermodynamiques de pressions, des températures et des masses volumiques sont constants le long de chaque ligne de Mach issues du point A . Cette propriété nous donne un avantage pour déterminer rapidement et explicitement la position du point de la paroi.

Chaque ligne de Mach issue du point A sera absorbée par la paroi du corps central vu que l'écoulement est bidimensionnel. La figure B.5 suivante présente les paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire reliant les points A et i absorbée par la paroi. L'angle θ_S n'est pas connu a priori. Si le dimensionnement se fait sur la base du nombre de Mach de sortie M_S , la température T_S sera déterminée par la résolution de l'équation (B.5) en posant $T=T_S$ et $M=M_S$. Pour avoir un écoulement uniforme et parallèle à la sortie, on peut calculer l'angle θ_S par la relation (B.8) suivante :

$$\theta_B = v_S = \int_{T_S}^{T_*} F_v(T) dT \quad (B.8)$$

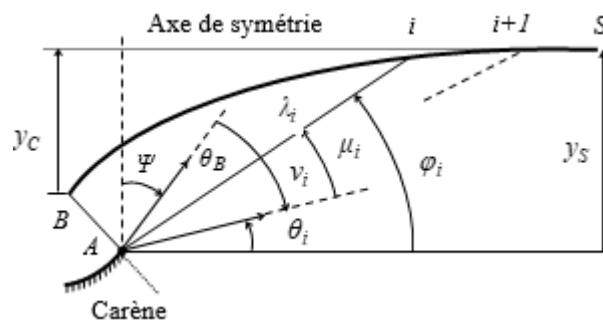


Figure B.5 : Paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire reliant les points A et i ($i=2,3, \dots, N$).

L'inclinaison de la carène 'Lip' par rapport à la verticale sera calculée par :

$$\Psi = 90 - v_S \quad (B.9)$$

B.2 Discretisation

Partageons la zone de détente entre AB et AE en N ondes de Mach y compris les extrémités et numérotons ces ondes de gauche vers la droite on obtient le schéma sur la figure B.6 suivante. Le repère de calcul est placé au point A .

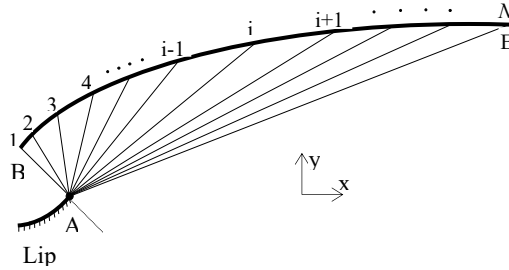


Figure B.6 : Discretisation de la zone de détente.

On remarque clairement que plus le nombre N des ondes de Mach est grand, plus on va voir une très bonne présentation de l'allure du corps central. On préfère dans notre étude de commencer le calcul du point B du col vers le point E de sortie. La détermination des points de la paroi se fait d'une façon explicite. Si on connaît la position et les propriétés d'un point sur la paroi, on peut facilement déterminer celles du point adjacent à droite et vis versa jusqu'à où on arrive à la section de sortie. Notons ici que les ondes de Mach sont des lignes de droites. Le schéma du modèle sous la présence d'une ligne de Mach est illustré dans la figure B.5. La température T_i au point i est connue. Alors, on peut écrire :

$$\mu_i = \arcsin(1/M_i) \quad (B.10)$$

$$v_i = \int_{T_i}^{T_*} F_v(T) dT \quad (B.11)$$

$$\varphi_i = 90 - \Psi - v_i + \mu_i \quad (B.12)$$

$$\theta_i = \varphi_i - \mu_i \quad (B.13)$$

Avec :

$$a(T_i) = \sqrt{\gamma(T_i) r T_i} \quad (B.14)$$

$$M_i = \frac{\sqrt{2 H(T_i)}}{a(T_i)} \quad (B.15)$$

Sur la figure B.5, toutes les propriétés au point i sont connues, c'est-à-dire M_i , φ_i , θ_i , v_i , T_i , x_i , y_i et les autres paramètres sont connues et le problème devient la détermination des propriétés au point $i+1$ adjacent à droite.

Considérons le triangle reliant les points A , i et $i+1$. Ici les points i et $i+1$ sont reliés par une ligne de droite avec le point A . Alors :

$$\alpha = \pi - \varphi_i + \nu_S - \nu_i \quad (\text{B.16})$$

$$\beta = \varphi_{i+1} - \nu_E + \nu_i \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\lambda_i} = \frac{\sin(\alpha)}{\lambda_{i+1}} \quad (\text{B.18})$$

Le rayon polaire du point $i+1$ est donné par :

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad (\text{B.19})$$

Par analogie avec les équations (B.10), (B.11), (B.12), et (B.13), on peut déduire les relations pour le point $i+1$ en changeant l'indice i par $i+1$. Au point $i+1$, la température T_{i+1} est connue. Les coordonnées du point $i+1$ peuvent être calculées par :

$$\frac{x_{i+1}}{\lambda_B} = \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_B} \right) \cos(\varphi_{i+1}) \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{y_{i+1}}{\lambda_B} = \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_B} \right) \sin(\varphi_{i+1}) \quad (\text{B.21})$$

Chaque point i sur la paroi possède son propre température, différente aux autres points, et que tous sont reliés avec le point A par une ligne de Mach. Alors, au point A , il y a une infinité de valeurs de T et par conséquent le point A est un point de discontinuité des propriétés T , M et θ , ... etc.

Pour arriver à concevoir la tuyère, on a choisi la discrétisation de la zone de variation de la température $T \in [T_S, T^*]$ en N valeurs y compris les valeurs des extrémités pour que le calcul soit rapide.

4.3. Procédure du Calcul

Pour un gaz parfait à haute température, les expressions analytiques du calcul des rapports thermodynamiques critiques T^*/T_0 , ρ^*/ρ_0 , et P^*/P_0 sont déterminés. Les rapports thermodynamiques T_S/T_0 , ρ_S/ρ_0 , et P_S/P_0 d'un gaz parfait à haute température correspondant au nombre de Mach de sortie supersonique sont calculés et le rapport des sections critique est donnée par :

$$\frac{A_S}{A^*} = \text{Exp} \left(\int_{T_S}^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (\text{B.22})$$

La valeur T_S représente la température à la section de sortie. Le rapport des sections nous servira comme une source de comparaison de validation des calculs numériques.

La valeur de la fonction de Prandtl Meyer v_S peut être calculée en utilisant la relation (B.1) en remplaçant T par T_S . La déviation Ψ de la carène ‘Lip’ par rapport à la verticale sera calculée en utilisant la relation (B.9). Comme le procédé de calcul est en fonction de deux points successifs (à une forme d’une suite de récurrence), il faut donner les résultats au point de départ. Le point de départ est celui le point B. On a :

- Le nombre de Mach est égale à $M_B=1.00$. Entrée sonique.
- L’angle de Mach est égal à $\mu_B=90.0$ degrés.
- La valeur de la fonction de Prandtl Meyer est égale à $v_B=0.0$ degré.
- L’angle polaire est égal à $\varphi_B=90-\Psi-v_B+\mu_B$.
- Le rayon polaire est égal à $\lambda_B=1.00$ (parmi les données).
- Position du premier point de la paroi est donnée par :

$$\frac{x_E}{\lambda_B} = \cos(\varphi_B) \quad (B.24)$$

$$\frac{y_E}{\lambda_B} = \sin(\varphi_B) \quad (B.25)$$

L’angle de déviation de l’écoulement θ^* au col est donné par :

$$\theta^* = \theta_B = \varphi_B - \mu_B \quad (B.26)$$

Le rayon non-dimensionnel théorique de la section de sortie est donné en utilisant la relation (B.22). On obtient :

$$\frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{A_S}{A^*} \quad (B.27)$$

La même valeur sera recalculée par le modèle numérique en utilisant l’Eq. (4.32) comme le dernier point de calcul.

La deuxième étape consiste à affecter les résultats obtenus au point B comme le premier point de calcul numérique pour $i=1$. Ici la température au point E est égale à T^* .

Pour chaque ligne de Mach, il faut connaître la température au centre de détente A qui représente aussi la température sur la paroi. Comme le nombre de point choisi est égale N , alors, on obtient $N-1$ panneaux, d'où, la température au point i est donnée par :

$$T_i = T_* - (i-1) \Delta T \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{B.28})$$

Avec

$$\Delta T = \frac{T_* - T_S}{N-1} \quad (\text{B.29})$$

En incrémentant le compteur de $i=2$ jusqu'à N , on peut déterminer les propriétés thermodynamiques et physiques le long de toutes les lignes de Mach sélectionnées au départ et par conséquent la forme du corps central sera obtenue.

Pour accélérer le processus du calcul de l'intégrale (B.11), on peut considérer cette intégrale sous la forme suivante :

$$v_{i+1} = v_i + \int_{T_{i+1}}^{T_i} F_v(T) dT \quad (\text{B.30})$$

Alors, l'obtention de la valeur v_{i+1} du point adjacent se fait en ajoutant à la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer v_i , l'intégrale entre les températures successifs T_{i+1} et T_i . Dans ce cas, le calcul de l'intégrale (4.30) se fait en utilisant l'algorithme de Simpson avec un nombre de panneaux très réduit. Pour les applications numériques, et si N est grand, on peut choisir environ 5 à 7 points de Simpson pour l'évaluation de cette intégrale avec une précision convenable.

A partir des résultats du dernier point lorsque $i=N$, on peut fixer les résultats suivants :

La position du point S de la section de sortie est donnée sous forme non-dimensionnelle par :

$$\frac{x_S}{\lambda_B} = \frac{x_N}{\lambda_B} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{y_E}{\lambda_B} = \frac{y_N}{\lambda_B} \quad (\text{B.32})$$

La distance axiale entre la section de sortie et le coin de la carène 'Lip' (point A) est donnée par :

$$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B} = \frac{x_S}{\lambda_B} \quad (\text{B.33})$$

La longueur totale de la tuyère est mesurée comme la distance axiale entre le point B du col et le point S de la section de sortie. Elle est donnée, sous forme non-dimensionnelle par :

$$\frac{L}{\lambda_B} = \frac{x_S}{\lambda_B} - \frac{x_B}{\lambda_B} \quad (\text{B.34})$$

Le rapport des sections correspondant à la discrétisation de N points est donné par :

$$\frac{A_S}{A^*}(\text{Calculé}) = \frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{y_N}{\lambda_B} \quad (\text{B.35})$$

B.4 Paramètres thermodynamiques

En chaque points i ($i=1, 2, 3, \dots, N$), les paramètres thermodynamiques peuvent être déterminées par : Le rapport des températures au point i de la paroi est donné par :

$$\left(\frac{T}{T_0} \right)_i = \frac{T_i}{T_0} \quad (\text{B.36})$$

Ce rapport nous servira pour faire le choix convenable du matériau de construction du corps central résistant à cette température. Le rapport des masses volumiques au point i de la paroi est donné par la relation suivante :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_i = \text{Exp} \left(- \int_{T_i}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (\text{B.37})$$

La même remarque mentionnée pour le calcul de la valeur de v_{i+1} par la relation (4.30) reste valable pour calculer le rapport des masses volumiques par la relation (B.37). Alors, on peut considérer cette relation sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_i = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_{i-1} \text{Exp} \left(- \int_{T_{i-1}}^{T_i} F_\rho(T) dT \right) \quad (4.39)$$

Ce rapport servi pour évaluer la masse du gaz existant à chaque instant dans l'espace de l'écoulement du corps central. Le rapport des pressions au point i de la paroi est donné par :

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)_i = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_i \left(\frac{T}{T_0} \right)_i \quad (4.40)$$

Ce rapport nous servira pour la détermination de la force de pression exercée sur la paroi du corps central. On peut calculer ces rapports durant la détermination du contour du corps central.

B.5 Masse du corps central

Le segment numéro (4.i) du corps central est illustré sur la figure B.7. Pour arriver à calculer la masse de la structure du corps central, considérons les deux suppositions suivantes :

- La forme de la paroi entre deux points successifs est approximée par une ligne de droite. Cette supposition donne des bons résultats si le nombre de points N est très élevé.
- Le corps central est constitué du même matériau et d'épaisseur constante.

Le calcul de la masse de la structure est lié avec le calcul de la longueur curviligne de la paroi du corps central. Alors, par unité de profondeur et sous forme non-dimensionnelle, on obtient :

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_B 2 l} = C_{Mass} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \sqrt{\left(\frac{x_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{x_i}{\lambda_B} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{y_i}{\lambda_B} \right)^2} \quad (4.41)$$

B.6 Force de pression exercée sur la paroi

La pression exercée sur le tronçon numéro (4.i) de la figure B.7 est approximer par l'interpolation suivante :

$$P_{(i)} = \sigma P_i + (1-\sigma) P_{i+1} \quad (B.42)$$

Pour les applications, on prend $\sigma=0.5$.

La force de pression axiale exercée sur ce tronçon peut être calculée par :

$$Fx_{(i)} = P_{(i)} (y_{i+1} - y_i) \quad (B.43)$$

La force de pression axiale totale exercée sur le corps central, par unité de profondeur, est calculée comme la somme de toutes les forces de pression axiales exercées sur tous les tronçons. Le corps central est constitué par deux parties par raison de symétrie. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient :

$$\frac{Fx}{P_0 \lambda_B 2 l} = C_F = \sum_{i=1}^{i=N-1} \left(\frac{P}{P_0} \right)_{(i)} \left[\frac{y_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{y_i}{\lambda_B} \right] \quad (B.44)$$

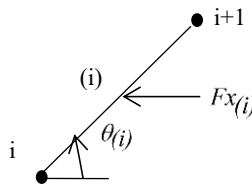


Figure B.7: Paramètres d'un segment du corps central.

B.7 Masse du gaz dans le divergent

La masse du gaz existante dans la partie divergente du corps central entre les lignes de Mach AB et AE y compris la zone uniforme peut être évaluée. On peut considérer l'espace de la tuyère comme l'union des triangles placés l'un adjacents de l'autre comme le montre la fig. 6, y compris la zone uniforme entre la ligne de Mach AE et horizontale. Le nombre total des triangles est égale à $N-1$ en ajoutant le triangle de la zone uniforme.

La masse du gaz, par unité de profondeur, qui se trouve dans l'espace compris entre deux lignes de Mach successives reliant les points A et i et les points A et $i+1$ comme le montre la figure B.5, est approximée par :

$$Masse_{Gaz(i)} = \rho_{(i)} A_{(i)} l \quad (B.45)$$

Avec

$$\rho_{(i)} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \quad (B.46)$$

$$A_{(i)} = \frac{x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}}{2} \quad (B.47)$$

Au point A du triangle considéré, il y a deux valeurs de la masse volumique, l'une égale à celle du point i et l'autre égale à celle du point $i+1$. A cette raison, on a considéré la valeur moyenne de la masse volumique entre les deux points comme présente l'Equation (B.46). La position du point A n'est pas figurée dans la relation (B.47), puisque $x_A = y_A = 0$.

Dans la zone uniforme, la masse du gaz, par unité de profondeur, est donnée par :

$$Masse_{Gaz} (zone \text{ uniforme}) = \rho_S \frac{x_S y_S}{2} l \quad (B.48)$$

La masse totale du gaz dans le divergent y compris la symétrie du corps central, par unité de profondeur, sera donc donnée, sous forme non-dimensionnelle, par la relation suivante :

$$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_B^2 l} = C_{Gaz} = \left(\frac{\rho_E}{\rho_0} \right) \left[\frac{x_E}{\lambda_B} \frac{y_E}{\lambda_B} \right] + \sum_{i=1}^{i=N-1} \left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]_{(i)} \left[\frac{x_{i+1}}{\lambda_B} \frac{y_i}{\lambda_B} - \frac{x_i}{\lambda_B} \frac{y_{i+1}}{\lambda_B} \right] \quad (B.49)$$

4.8 Erreur du modèle du gaz parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé sur la base de considérer la chaleur spécifique C_p et le rapport γ constants, qui donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles température génératrices. D'après cette étude, une différence entre les résultats donnés entre le modèle du gaz parfait et notre modèle sera présentée.

L'erreur donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle peut être calculée pour chaque paramètre de conception. Alors pour chaque couple $(4.T_0, M_E)$, l'erreur relative ε peut être évaluée par la relation suivante :

$$\varepsilon_{paramètre\%} = \left| 1 - \frac{Paramètre_{Gaz\ Parfait}}{Paramètre_{Haute\ Température}} \right| \times 100 \quad (B.50)$$

REFERENCES

- [1] Abdallah Elhirszi A. and Zebbiche T., “Design and performance evaluation of a high temperature axisymmetric plug nozzle”; INCAS Bulletin, Vol. 15, N° 03, pp. 3-18, (2023)
- [2] Abada O., Abada A. and Abdallah Elhirszi A., “Effect of bipropellant combustion products on the rocket nozzle design”; Mechanics & Industry 21, 515, (2020)
- [3] O. Abada, T. Zebbiche, A. Abdallah El-hirszi, “Three-dimensional supersonic minimum length nozzle design at high temperature for arbitrary exit cross section”; Arab. J. Sci. Eng. 39, 7258-7879, (2014)
- [4] Anderson J.D. Jr., “Modern compressible flow with historical perspective”; 2nd edn. McGraw-Hill Book Company, New York, USA, (1982)
- [5] Anderson J.D. Jr., “Fundamentals of aerodynamics”; 2nd edn. McGraw-Hill Book Company, New York, USA, (1988)
- [6] Anderson J. D. Jr, “Modern compressible flow with historical perspective”; 3rd edn. McGraw-Hill, New York, (2004)
- [7] Ahlberg J. H., Hamilton S., Migdal D. and Nilson E. N., “Truncated perfect nozzles in optimum nozzle design”; Am. Rocket Soc. J. 31, pp. 614–620, (1961)
- [8] Al-Ajlouni M., “An Automatic Method for Creating the Profile of Supersonic Convergent-Divergent Nozzle”; Journal of Mechanical and Industrial Engineering, vol 4 No. 3, pp. 404-411, (2010)
- [9] Allman J. G. and Hoffman J. D., “Design of maximum thrust nozzle contours by direct optimization methods”; AIAA J. 19, pp. 750–751, (1981)
- [10] Argrow B.M. and Emanuel G., “Comparison of Minimum Length Nozzles”; Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, pp. 283-288, (September 1988)
- [11] Argrow B. M. and Emanuel G., “Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles”; AIAA-1989-1822, 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, pp. 12-14, (1989)

- [12] Armstrong W. C. and Bauer R. C., “Analysis of Three-Dimensional Inviscid Supersonic Flow Between a Body and an Outer Wall (With Application to a Jet Stretcher System)”; AEDC-TR-76-103 (ADA029123), (August 1976).
- [13] Armstrong, W.C., “A Method of Characteristic Computer Program for Three-Dimensional Supersonic Internal Flows”; AEDC-TR-78-68, (January 1979).
- [14] Aukin M. K., Kraiko A. N., Lubinov D. A., Makarov V. E. and Tillyaeva N. I., “Designing Three-Dimensional Nozzles to Achieve Near Uniform Supersonic or Hypersonic Flow in The Rectangular Exit Section”; Physics and Astronomy, Vol. 30, n° 30, pp. 787-794, (1995)
- [15] Balabel A., Hegab A. M., Nasr M. and El-Behery S. M., “Assessment of turbulence modelling for gas flow in two dimensional convergent-divergent rocket nozzle”; Appl. Math. Modell. 35, pp. 3408–3422, (2011)
- [16] Baloni B. D., Kumar S. P. and Channiwala S. A., “Computational analysis of bell nozzles”; In: 4th International Conference of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer, Toronto, Canada, (August, 2017)
- [17] Bani A. A., “Design and analysis of an axisymmetric aerospike supersonic micro-nozzle for a refrigerant-based cold-gas propulsion system for small satellites”; M.S. dissertation, Missouri University of Science and Technology, (2016)
- [18] Beckwith, I. E., Ridyard, H. W., and Cromer, N., “The Aerodynamic Design of High Mach Number Nozzles Utilizing Axisymmetric Flow with Application to a Nozzle of Square Test Section”; NACA TN 2711, (1952).
- [19] Beckwith, I. E., and Moore, J. A., "An Accurate and Rapid Method for the Design of Supersonic Nozzles"; NACA TN 3322, (February 1955)
- [20] Benecke T. and Quick A. "History of German guided missiles development"; No.20. Verlag E. Appelhans & Co, (1957)
- [21] Berger M., “Géométrie : Convexes et Poly topes, Polyèdres réguliers, aires et Volumes”; Tome 3, Fernand Nathan, Paris, (1978)

- [22] Berdoyes M., “Thrust vector control by injection of hot gas bled from the chamber hot gas valve”; American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), (1989)
- [23] Berman K. and Crimp F. W., “Performance of plug-type rocket exhaust nozzles”; ARS J. 31, pp. 18–23, (1961)
- [24] Besnard E., Chen H. H., Mueller T. and Garvey J., “Design, manufacturing and test of a plug nozzle rocket engine”; In: 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference Exhibit, 4038, (2002)
- [25] Birkhoff G., “Interpolation to Boundary Data in Triangles,” J. of Math. Anal. And Appl., Vol. 42, pp. 474-484, (1973)
- [26] Bolot R., Sokolov D., Klein D. and Coddet C., “Nozzle developments for thermal spray at very low pressure”; J. Thermal Spray Technol. 15, pp. 827–833, (2006)
- [27] Chasman D., Birch M., Haight S. and Graffam R., “A multi-disciplinary optimization method for multi nozzle grid (MNG) design;” - Final Report. In: 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 706, (2005)
- [28] Chasman D., Haight S. and Facciano A., “Excessive nozzle erosion in a multi nozzle grid (MNG) test;” In: 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 4495, (2005)
- [29] Chasman D., Haight S. and Loehr R., “Viscous losses of MNG in hybrid motor tests;” In: 48th AIAA/ASME/SAE/ ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 4266, (2012)
- [30] Chushkin P. I., “Numerical Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic Flows,” Progress in Aerospace Sciences, Vol. 9, pp. 41-122. (1968)
- [31] Chutkey K., Vasudevan B. and Balakrishnan N., “Analysis of annular plug nozzle flowfield”; J. Spacecr. Rockets 51, pp. 478–490, (2014)
- [32] Coburn N. and Dolph C. L. t., “Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic flows”; Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, New York, American Mathematical Society, pp. 55-66, (1949)

- [33] Currao G., Neely A. J., Schomberg K. A. and Ringrose-Voase E. P., “global measurement of temperature and pressure on the sidewall of an altitude-adaptive expansion-deflection rocket nozzle”; In: 19th Australasian Fluid Mechanics Conference, Melbourne, Australia, (December, 2014)
- [34] Davis K., Fortner E., Heard M., Mc Callum H. and Putzke H., “Experimental and computational investigation of a dual-bell nozzle”; In: 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting. 0377, (2015)
- [35] Darwell H. M. and Badham H., “Shock formation in conical nozzles”; AIAA J.1, pp. 1932–1934, (1963)
- [36] Dillaway R. B., “A philosophy for improved rocket nozzle design”; J. Jet Propuls. 27, pp. 1088–1093, (1957)
- [37] Doi T., “Gas-particle nozzle flows and optimum nozzle shape”; The Institute of Space and Astronautical Science, Report No 596, (1981)
- [38] Facciano A. B., Seybold K. G., Westberry T. L. and Widmer D. O., “Evolved SeaSparrow missile jet vane control system prototype hardware development”; J. Spacecr. Rockets 39, pp. 522–531, (2002)
- [39] Farley J. M. and Campbell C. E., “Performance of several method-of-characteristics exhaust nozzles”; NASA TN D-293, (1960)
- [40] Foelsch K., “The analytical design of an axially symmetric laval nozzle for a parallel and uniform jet;” J. Aeronaut. Sci. 16 pp. 161–166, (1949)
- [41] Frey M. and Hagemann G., “Critical assessment of dualbell nozzles”; J. Propuls. Power 15, pp. 137–143, (1999)
- [42] Frey M., Makowka K. and Aichner T., “The TICTOP nozzle: a new nozzle contouring concept”; CEAS Space J. 9, pp. 175–181, (2017)
- [43] Genin C. N. and Stark R. H., “Side loads in dual bell nozzles, part I: Phenomenology”; In: 46th AIAA/ASME/SAE/ ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 6729, (2010)

- [44] Genin C., Stark R., Karl S. and Schneider D., “Numerical investigation of dual bell nozzle flow field”; In: 48th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Virginia, 4164, (2012)
- [45] Genin C., Gernoth A. and Stark R., “Experimental and numerical study of heat flux in dual bell nozzles”; J. Propuls. Power 29, pp. 21–26, (2013)
- [46] Genin C., Stark R., Haidn O., Quering K. and Frey M., “Experimental and numerical study of dual bell nozzle flow”; Progress Flight Phys. 5, pp. 363–376, (2013)
- [47] Genin C. N., Stark R. H. and Schneider D., “Transitional behavior of dual bell nozzles: contour optimization”; In: 49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, 3841, (2013)
- [48] Geron M., Paciorri R., Nasuti F., Sabetta F. and Martelli E., “Transition between open and closed wake in 3D linear aerospike nozzles”; In: 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. 4308, (2005)
- [49] Guderley G. and Hantsch E., “Beste Formen für Achsensymmetrische Überschallschubdüsen”; Z. Flugwiss 3, pp. 305–313, (1955)
- [50] Haddad A. “Supersonic nozzle design of arbitrary cross-section;” Ph.D. Dissertation, Cranfield Institute of Technology, (1988)
- [51] Hagemann G., Immich H., Van Nguyen T. and Dumnov G. E., “Advanced rocket nozzles”; J. Propuls. Power 14, pp. 620–634, (1998)
- [52] Hagemann G., Immich H. and Terhardt M., “Flow phenomena in advanced rocket nozzles - The plug nozzle”; In: 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, 3522, (1998)
- [53] Hagemann G., Terhardt M., Haeseler D. and Frey M., “Experimental and analytical design verification of the dual-bell concept”; J. Propuls. Power 1, pp. 116–122, (2002)
- [54] Hagemann G., Frey M. and Koschel W., “Appearance of restricted shock separation in rocket nozzles”; J. Propuls. Power 18, pp. 577–584, (2002)

- [55] Hall R., Morrow E., Crowe G., Lefebvre C. and Edgett D., “IUS nozzle and extendible exit cone development”; In: 16th Joint Propuls. Conference, 1297, (1980)
- [56] Hoffman J. D. and Lorenc S. A. “A parametric study of gas-particle flows in conical nozzles”; AIAA J. 3, pp. 103–106, (1965)
- [57] Horn M. and Fisher S., “Dual-bell altitude compensating nozzles”; NASA-N94-23057, (1994)
- [58] Huzel D. K. and Huang D. H. “Modern Engineering for Design of Liquid-Propellant Rocket Engines;” AIAA, (1992)
- [59] Hyde J. C. and Gill G. S., “Liquid Rocket Engine Nozzles”; NASA SP-8120, (1976)
- [60] Ito T., Fujii K. and Hayashi A. K., “Computations of axisymmetric plug-nozzle flowfields: flow structures and thrust performance”; J. Propuls. Power 18, pp. 254–260, (2002)
- [61] Jia R., Jiang Z. and Zhang W., “Numerical analysis of flow separation and side loads of a conical nozzle during staging”; In: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, pp. 845–855, (2015)
- [62] Jia R., Jiang Z., Xiang M. and Zhang W., “Three dimensional numerical study of the conical nozzle side loads during staging”; J. Aerosp. Eng. 29 04016038, (2016)
- [63] Johnson G. R., Thompson H. D. and Hoffman J. D., “Design of maximum thrust plug nozzles with variable inlet geometry”; Comput. Fluids 2, pp. 173–190, (1974)
- [64] Kapilavai D., Tapee J., Sullivan J., Merkle C. L., Wayman T. R. and Connors T. R., “Experimental testing and numerical simulations of shrouded plug-nozzle flowfields”; J. Propuls. Power 28, pp. 530–544, (2012)
- [65] Karthikeyan N., Kumar A., Verma S. B. and Venkatakrishnan L., “Effect of spike truncation on the acoustic behaviour of annular aerospike nozzles”; AIAA J. 51, pp. 2168–2182, (2013)

- [66] Katanoda H., Miyazato Y., Masuda M. and Matsuo K., “Pitot pressures of correctly-expanded and underexpanded free jets from axisymmetric supersonic nozzles”; *Shock Waves* 10, pp. 95–101, (2000)
- [67] Kbab H., Sellam M., Hamitouche T., Bergheul S. and Lagab L., “Design and performance evaluation of a dual bell nozzle”; *Acta Astron.* 130, pp. 52–59, (2017)
- [68] Khan A. A. and Shembharkar T. R., “Viscous flow analysis in a convergent–divergent nozzle”; In: *Proceedings of the International Conference on Aerospace Science and Technology*, Bangalore, India, (2008)
- [69] Krase W. H., “Performance analysis of plug nozzles for turbojet and rocket exhausts”; In: *ASME 1959 Gas Turbine Power Conference and Exhibit*, American Society of Mechanical Engineers, Ohio, USA. V001T01A009, (1959)
- [70] Landsbaum E. M., “Contour nozzles”; *ARS J.* 30, pp. 244–250, (1960)
- [71] Lash E. L., “Trajectory analysis and comparison of a linear aerospike nozzle to a conventional bell nozzle for SSTD flight”; M.S. dissertation, University of Tennessee – Knoxville, (2015)
- [72] Lawrence R. A. and Weynand E. E., “Factors affecting flow separation in contoured supersonic nozzles”; *AIAA J.* 6, pp. 1159–1160, (1968)
- [73] Malina F. J., “Characteristics of the rocket motor unit based on the theory of perfect gases”; *J. Frankl. Inst.* 230, pp. 433–454, (1940)
- [74] Martelli E., Nasuti F. and Onofri M., “Numerical parametric analysis of dual-bell nozzle flows”; *AIAA J.* 45, pp. 640–650, (2007)
- [75] McCool A. A., Verble A. J. and Potter J. H., “Space transportation system solid rocket booster thrust vector control system”; *J. Spacecr. Rockets* 17, pp. 407–412, (1980)
- [76] Migdal D. and Landis F., “Characteristics of conical supersonic nozzles”; *ARS J.* 32, pp. 1898–1901, (1962)
- [77] Migdal D. and Kosson R., “Shock predictions in conical nozzles”; *AIAA J.* 3, pp. 1554–1556, (1965)

- [78] Mon K. O. and Lee C., “Optimal design of supersonic nozzle contour for altitude test facility;” *J. Mech. Sci. Technol.* 26 pp. 2589–2594, (2012)
- [79] Mueller T. J. and Hall C. R. Jr, “Separated flow region within a planar expansion-deflection nozzle”; *J. Spacecr. Rockets* 5, pp. 738–740, (1968)
- [80] Naghib-lahouti A. and Tolouei E., “Investigation of the effect of base bleed on thrust performance of a truncated aerospike nozzle in off-design conditions”; In: *European Conference on Computational Fluid Dynamics*, (2006)
- [81] Naveen Kumar K., Gopalsamy M., Antony D., Krishnaraj R. and Viswanadh C. B., “Design and optimization of aerospike nozzle using CFD”; In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 012008, (2017)
- [82] Nebbache A. and Pilinski C. “Pulsatory phenomenon in a thrust optimized contour nozzle”; *Aerosp. Sci. Technol.* 10, pp. 295–308, (2006)
- [83] Nguyen A. T., Deniau H., Girard S. and Alziary De Roquefort T., “Unsteadiness of flow separation and end-effects regime in a thrust-optimized contour rocket nozzle”; *Flow Turbul. Combust.* 71, pp. 161–181, (2003)
- [84] Nurnberger-Genin C. and Ralf S., “Experimental study on flow transition in dual bell nozzles;” *J. Propuls. Power* 26 pp. 497–502, (2010)
- [85] Ostlund J., “Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads;” *Ph.D. Dissertation*, Royal Institute of Technology, (2002)
- [86] Ostlund J. and Muhammad-Klingmann B., “Supersonic flow separation with application to rocket engine nozzles”; *Appl. Mech. Rev.* 58, pp. 143–177, (2005)
- [87] Pedreira P. H., Lauretta J. R. and D’hers S., “Planar nozzles for controllable microthrusters;” *J. Aerosp. Eng.* 30 06016007, (2016)
- [88] Pilinski C. and Nebbache A., “Flow separation in a truncated ideal contour nozzle”; *J. Turbul.* 5, pp. 1–3, (2004)
- [89] Potter J. L. and Carden W. H., 1968 “Design of axisymmetric contoured nozzles for laminar hypersonic flow”; *J. Spacecr. Rockets* 5, pp. 1095–1100, (1968)

- [90] Rao G.V.R. “Exhaust nozzle contour for optimum thrust,” J. Jet Propuls. 28 377–382, (1958)
- [91] Rao G.V.R., “Recent developments in rocket nozzle configurations”; ARS J. 31, pp. 1488–1494, (1961)
- [92] Rao G. V. R. and Beck J. E., “Use of discontinuous exit flows to reduce rocket nozzle length;” In: 30th Joint Propulsion Conference and Exhibit, 3264, (1994)
- [93] Rommel T., Hagemann G., Schley C. A., Krulle G. and Manski D., “Plug nozzle flowfield analysis”; J. Propuls. Power 13, pp. 629–634, (1997)
- [94] Schneider D. and Genin C., “Numerical investigation of flow transition behavior in cold flow dual-bell rocket nozzles”; J. Propuls. Power 32, pp. 1212–1219, (2016)
- [95] Schomberg K., Olsen J., Neely A. and Doig G., “Experimental analysis of a linear expansion-deflection nozzle at highly over-expanded conditions”; In: 19th Australasian Fluid Mechanics Conference, Melbourne, Australia, pp. 74–77, (8–11 December, 2014)
- [96] Schoyer H. F. R., “Thrust vector control for (clustered modules) plug nozzles: some considerations”; J. Propuls. Power 16, pp. 196–201, (2000)
- [97] Shark S. C., Dennis J. D. and Villarreal J. K., “Experimental performance analysis of a toroidal aerospike nozzle integrated with a N₂O/HTPB hybrid rocket motor”; In: 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 6784, (2010)
- [98] Shivang k. and Ujjwal K. S., “Rocket nozzles: 75 years of research and development”; s12046-021-01584-6, Indian Academy of Sciences, (2021)
- [99] Stark R. and Wagner B., “Experimental study of boundary layer separation in truncated ideal contour nozzles”; Shock Waves 19(3), pp. 185–191, (2009)
- [100] Stark R., Genin C., Schneider and Fromm C., “Ariane 5 performance optimization using dual-bell nozzle extension”; J. Spacecr. Rockets 53, pp. 743–750, (2016)
- [101] Toufik H., Mohamed S., Hakim K., Said B. and Lynda L., “Design and performances of the dual-bell nozzle”; In: Aerospace Conference, IEEE. 1–7, (2016)

- [102] Verma S. B., “Study of flow separation in truncated ideal contour nozzle”; J. Propuls. Power 18, pp. 1112–1121, (2002)
- [103] Verma S. B., Stark R. and Haidn O., “Relation between shock unsteadiness and the origin of side-loads inside a thrust optimized parabolic rocket nozzle”; Aerosp. Sci. Technol. 10, pp. 474–483, (2006)
- [104] Verma S. B., “Performance characteristics of an annular conical aerospike nozzle with freestream effect”; J. Propuls. Power 25, pp. 783–791, (2009)
- [105] Verma S. B. and Viji M., “Freestream effects on base pressure development of an annular plug nozzle;” Shock Waves 21 pp. 163–171, (2011)
- [106] Verma S. B., Stark R. and Haidn O., “Reynolds number influence on dual-bell transition phenomena”; J. Propuls. Power 29, pp. 602–609, (2013)
- [107] Verma S. B., Stark R. and Haidn O., “Effect of ambient pressure fluctuations on dual-bell transition behavior”; J. Propuls. Power 30, pp. 1192–1198, (2014)
- [108] Verma S. B., Hadjadj A. and Haidn O., “Unsteady flow conditions during dual-bell sneak transition”; J. Propuls. Power 31, pp. 1175–1183, (2015)
- [109] Verma S. B., Hadjadj A. and Haidn O., “Origin of sideloads in a subscale truncated ideal contour nozzle”; Aerosp. Sci. Technol. 71, pp. 725–732, (2017)
- [110] Wasko R. A., “Performance of annular plug and expansion-deflection nozzles including external flow effects at transonic Mach numbers”; NASA-TN-D-4462, (1968)
- [111] Wehofer S. and Moger W. C., “Transonic flow in conical convergent and convergent-divergent nozzles with nonuniform inlet conditions”; In: 6th Propulsion Joint Specialist Conference, San Diego, California. 635, (1970)
- [112] Wolf S. W., “Supersonic wind tunnel nozzles: A selected, annotated bibliography to aid in the development of quiet wind tunnel technology”; (1990)
- [113] Rao G. V. R., “Analysis of a new concept rocket nozzle Liquid Rockets And Propellants Progress Astron”; Aeron. 2, pp. 669–682, (1960)

- [114] Rao G. V. R., “Spike nozzle contour for optimum thrust”; Planetary and Space Science 4, Jan.:92-101, (1961)
- [115] Ruf J. H. and McConnaughey P. K., “A numerical analysis of a three dimensional aerospike”; In: 33rd Joint Propulsion Conference and Exhibit”; 3217, (1997)
- [116] Schomberg K. and Olsen J., “Altitude compensation in expansion-deflection nozzles”; In: 18th Australasian Fluid Mechanics Conference, Launceston, Australia, (December, 2012)
- [117] Schomberg K., Doig G., Olsen J. and Neely A., “Geometric analysis of the linear expansion-deflection nozzle at highly over-expanded flow conditions”; In: 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, 4001, (2014)
- [118] Schomberg K., Doig G. and Olsen J., “Computational simulation of an altitude adaptive nozzle concept”; Appl. Mech. Mater. 553, pp. 223–228, (2014)
- [119] Schomberg K., Doig G., Olsen J. and Neely A., “Geometric analysis of the linear expansion-deflection nozzle at highly over-expanded flow conditions”; 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, (2014)
- [120] Shahrokhi A. and Noori S., “Survey of the central plug shape of the aerospike nozzle”; In: 17th Australasian Fluid Mechanics Conference, Auckland, New Zealand (December, 2010)
- [121] Shanmuganathan V. K., Gayathri N., Kabilan S. and Umanath K., “Comparative study on performance of linear and annular aero-spike nozzles”; Aust. J. Basic Appl. Sci. 9, pp. 883–892, (2015)
- [122] Stark R. H. and Wagner B. H., “Experimental Flow investigation of a truncated ideal contour nozzle”; In: 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 5208, (2006)
- [123] Sunley H. L. G. and Ferriman V. N., “Jet separation in conical nozzles”; Aeron. J. 68, pp. 808–817, (1964)

- [124] Tapee J. L., “Experimental aerodynamic analysis of a plug nozzle for supersonic business jet application”; Ph.D. dissertation, Purdue University, (2009)
- [125] Taylor N. V. and Hempsell C. M., “Optimising expansion deflection nozzles for vacuum thrust”; *Aeron. J.* 108, pp. 515–522, (2004)
- [126] Taylor N. V., Hempsell C. M., Macfarlane J., Osborne R., Varvill R., Bond A. and Feast S., “Experimental investigation of the evacuation effect in expansion deflection nozzles”; *Acta Astron.* 66, pp. 550–562, (2010)
- [127] Terhardt M., Hagemann G. and Frey M., “Flow separation and side-load behavior of truncated ideal rocket nozzles”; In: 37th Joint Propulsion Conference and Exhibit, 3686, (2001)
- [128] Young R. B., “Automated nozzle design through axisymmetric method of characteristics coupled with chemical kinetics”; M.S. dissertation, Auburn University, (2012)
- [129] Young R. B. and Hartfield R. J., “Automated nozzle design through axis-symmetric method of characteristics coupled with chemical kinetics”; In: 48th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 4162, (2012)
- [130] Zebbiche T. and Youbi Z., “Supersonic Flow Parameters at High Temperature application for Air in Nozzle”; DGLR-2005-256, German Aerospace Congress, Friedrichshafen, Germany, (26-29, September 2005)
- [131] Zebbiche T., “New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature”; AIAA–2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, USA, (5-8 June 2006)
- [132] Zebbiche T. and Youbi Z., “Supersonic Two-Dimensionnel Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air”; *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 20, n° 01, 29-39, (2007)
- [133] Zebbiche T., “Stagnation Temperature Effect on the Prandtl Meyer Function”; *AIAA Journal* Vol. 45, n° 4952-954, (2007)

- [134] Zebbiche T., “Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Conception at High Temperature”; AIAA–2008-3674, 40th AIAA Thermophysics Conference, USA, (23-26 June 2008)
- [135] Zebbiche T., “Tuyères Supersoniques à Haute Température” ; Edition Universitaires Européennes, ISBN 978-613-1-50997-1, (May 2010)
- [136] Zebbiche T., “Stagnation Temperature effect on the Supersonic axisymmetric Minimum Length Nozzle Design with Application for Air”; Advances in Space Research, Vol. 48, n° 23, pp. 1656-1675, (2011)
- [137] Zebbiche T. and Youbi Z., “Effect of Stagnation Temperature on the Supersonic Flow Parameters with Application for Air in Nozzles”; The Aeronautical Journal, Vol, 111, n° 1115, 31-40, (Jan 2007)
- [138] Zhang Y., Chen H., Zhang M., Zhang M., Li Z. and Fu S., “Performance prediction of conical nozzle using Navier- Stokes computation”; J. Propuls. Power 31, pp. 192–203, (2014)
- [139] Zmijanovic V., Lago V., Sellam M. and Chpoun A., “Thrust shock vector control of an axisymmetric conical supersonic nozzle via secondary transverse gas injection”; Shock Waves 24, pp. 97–111, (2014)