

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA
Faculté des Sciences
Département de MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Sur la Théorie des Jeux Appliquée aux Files d'Attente

Par

Amina BOUKOFTANE

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI Mustapha	Professeur, Univ. Blida 1	Président
Mme. OUKID Nadia	Professeur, Univ. Blida 1	Directrice de thèse
M. LATRECHE Abdelouahab	Professeur, ENSSEA. Koléa	Examineur
M. LAISSAOUI Difallah	Professeur, Univ. Médéa	Examineur
M. SEBAOUI Madjid	Maître de Conférences/ A, Univ. Médéa	Examineur
M. TALBI Mohamed Elamine	Maître de Conférences/ A, Univ. Blida 1	Examineur

Remerciements

Je tiens avant tout à rendre grâce à **DIEU**, le Tout-Puissant, pour m'avoir donné la force, la sagesse et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail. Sa guidance et Sa bénédiction m'ont permis de surmonter les défis et de rester concentrée sur mon objectif. Sans Sa grâce infinie, rien de tout cela n'aurait été possible.

Au Professeur Oukid,

Je tiens tout d'abord à vous exprimer toute ma gratitude pour m'avoir accueillie au sein de votre équipe. Les mots que je vous adresse ici semblent bien insuffisants pour rendre compte à l'ensemble de l'accompagnement que vous m'avez offert tout au long de mon parcours doctoral. Avec toute ma reconnaissance et mon affection, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements pour tout ce que vous avez fait pour moi. Vous avez été bien plus qu'une promotrice : vous avez été une véritable guide, une source d'inspiration constante, et un soutien inébranlable. Votre bienveillance, écoute attentive et patience m'ont permis de traverser les moments de doute, les épreuves difficiles et les périodes de remise en question. Vous avez toujours su, par vos encouragements sincères et votre générosité, me redonner confiance et me pousser à persévérer. Un grand merci à vous.

Aux membres du jury,

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à Monsieur Mustapha Chellali, Professeur à l'Université de Blida 1, pour avoir accepté d'examiner mon travail et de présider le jury de soutenance. Je suis profondément honorée par votre présence. Votre expertise ainsi que vos remarques éclairées contribueront sans doute à enrichir ce travail.

Je remercie vivement Monsieur Abdelouahab Latreche, Professeur à l'ENSSEA, Monsieur Difallah Laissaoui, Professeur à l'Université de Médéa, Monsieur Madjid Sebaoui, Maître de conférences classe A, à l'Université de Médéa et Monsieur Mohamed Elamine Talbi, Maître de conférences classe A, à l'Université de Blida 1, pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Vos conseils précieux, vos observations constructives et vos retours permettront d'enrichir ce travail et d'affiner ma réflexion tout au long de sa présentation.

Au Chef de Département et Staff administratif,

Je remercie particulièrement Monsieur Tami Omar, Chef de Département, dont sa présence est toujours attendue avec enthousiasme. J'exprime ma gratitude à Monsieur Hamid Ouldrouis pour son soutien tout au long de mon parcours académique, sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation. Mes remerciements s'adressent également à toute l'équipe du laboratoire LAMDA-RO et au staff administratif du département de Mathématiques.

DEDICACE

Je souhaite exprimer ma reconnaissance infinie à **mes parents**, qui sont pour moi à la fois la lune et le soleil. Ma mère, telle la lune, m'a guidée avec douceur et sérénité, m'offrant son amour constant et sa lumière dans les moments d'ombre. Mon père, tel le soleil, m'a apporté sa force et sa chaleur, m'éclairant de son soutien indéfectible et de sa sagesse. Ensemble, ils ont été mes repères, mes sources d'inspiration et de force. Grâce à eux, j'ai trouvé mon équilibre et la conviction nécessaire pour mener à bien ce projet.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mes **frères** : Redha (la loyauté), Sofiane (l'optimisme), Ahmed (la bienveillance) et Zakaria (le soutien et la générosité) ; ainsi qu'à mes **sœurs** : Samia (la source d'énergie), Fouzia (la source de joie communicative) et Meriem (qui est sans aucun doute le trésor de la famille). Chacun de vous m'a donné la force de continuer, même dans les moments les plus difficiles. Votre amour et votre complicité ont été des sources de réconfort et de motivation tout au long de ce parcours.

Un grand merci à mes **belles-sœurs** et **beaux-frères** : Amine (aide constante), Kamel (source de réconfort) pour leur bienveillance et leur soutien. Vous avez su apporter chaleur et solidarité dans notre famille, et votre présence a été un véritable soutien moral tout au long de ce voyage. Un merci particulier à mes **nièces** et **neveux** : Ibtissem, Houda, Hadil, Yasmine, Bouchra, Khalil, Sohaib, Abdelbasset....dont la joie de vivre et l'énergie m'ont souvent apporté une bouffée d'air frais durant cette aventure, sans oublier le petit Wassim (Ta joie innocente et ton sourire ont illuminé mes journées).

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à mes chères amies : Wafia, Nadia, Fatiha, Sabrina (aussi pour le temps qu'elle m'a consacré avec une générosité exceptionnelle), Houria, Nora, Nacéra et Merci pour vos encouragements, vos précieux conseils et vos instants de partage. Votre présence à mes côtés a été essentielle, et je vous en suis profondément reconnaissante.

ملخص

تطبيق نظرية الألعاب على أنظمة الانتظار يتيح تحليل التفاعلات الاستراتيجية داخل هذه الأنظمة. في هذه الرسالة، قدمنا أولاً نوعاً جديداً من ألعاب التوجيه التي تشمل الروابط، والخسائر، والازدحام. ثم اقترحنا نموذجاً خطياً متعدد الأهداف، يسمى نموذج اللعبة التنافسية، مرتبطاً بهذه اللعبة، وقررنا حله الأمثل وكذلك توازنه المتناظر، مع تسليط الضوء على مفارقة. علاوة على ذلك، قمنا بتحديد التوازن الفريد لنش وقيّمنا سعر الفوضى. تم التحقق من صحة نموذج اللعبة التنافسية من خلال تجارب عديدة ورسمية في مرحلة ثانية، سعينا إلى تحسين طول طوابير الانتظار ووقت الانتظار للمرضى في خدمة العيادات الخارجية في مستشفى. لتحقيق ذلك، أنشأنا محاكاة للأحداث المنفصلة ونماذج للأنظمة الديناميكية، بهدف تحسين طول طوابير الانتظار وتقليل وقت الانتظار للمرضى في الخدمة من خلال استخدام دوال توزيع مخصصة. وأخيراً، قمنا بتكييف نموذجنا للعبة التنافسية لتقييم توازن نش وسعر الفوضى، خصيصاً في سياق طوابير الانتظار للمرضى، مما يتيح إدارة أكثر فعالية لأداء النظام.

الكلمات المفتاحية : طوابير الانتظار، الخدمة الإسعافية، وقت الانتظار، مقاييس الأداء، الأنظمة غير الخطية، توازن ناش، التحسين الأمثل، لعبة التوجيه.

RESUME

L'application de la théorie des jeux aux systèmes de files d'attente permet d'analyser les interactions stratégiques au sein de ces systèmes. Dans cette thèse, nous avons d'abord introduit un nouveau type de jeu de routage intégrant des liens, des pertes et de la congestion. Nous avons ensuite proposé un modèle multi-objectif, appelé modèle de jeu compétitif, associé à ce jeu, et déterminé sa solution optimale ainsi que son équilibre symétrique, tout en mettant en lumière un paradoxe. Par ailleurs, nous avons établi l'équilibre de Nash unique et évalué le prix de l'anarchie. Nous avons validé notre modèle de jeu compétitif par des expérimentations numériques et graphiques. Dans un second temps, nous avons cherché à optimiser la longueur des files d'attente et le temps d'attente des patients dans un service ambulatoire d'un hôpital. Pour ce faire, nous avons créé, avec Anylogic, des simulations d'événements discrets et des modèles de systèmes dynamiques, afin d'optimiser la longueur des files d'attente et diminuer le temps d'attente des patients dans le service par le biais de fonctions de distribution personnalisées. Enfin, nous avons adapté notre modèle de jeu compétitif pour évaluer l'équilibre de Nash et le prix de l'anarchie, spécifiquement dans le contexte des files d'attente des patients, permettant ainsi une gestion plus efficace des performances du système.

Mots clés : files d'attente, service ambulatoire, temps d'attente, mesures de performance, systèmes nonlinéaire, équilibre de Nash, prix de l'anarchie, jeu de routage.

ABSTRACT

The application of game theory to queueing systems allows for the analysis of strategic interactions within these systems. In this thesis, we first introduced a new type of routing game that incorporates links, losses, and congestion. We then proposed a multi-objective linear model, referred to as the competitive game model, associated with this game, and determined its optimal solution and symmetric equilibrium while highlighting one paradox. Additionally, we established the unique Nash equilibrium and assessed the price of anarchy. We validated our competitive game model through numerical and graphical experiments. Subsequently, we aimed to optimize queue length and patient waiting time in an outpatient department of a hospital. To achieve this, we created discrete event simulations and dynamic system models using AnyLogic, in order to optimize queue length and reduce patient waiting time through customized distribution functions. Finally, we adapted our competitive game model to evaluate the Nash equilibrium and the price of anarchy, specifically in the context of patient queues, thereby enabling more effective management of system performance.

Keywords : Queue, outpatient department, waiting time, performance measures, nonlinear systems, Nash equilibrium, price of anarchy, routing game.

Table des matières

Introduction	1
1 NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES JEUX	4
1.1 Concepts de base de la théorie des jeux	4
1.1.1 Joueurs	4
1.1.2 Stratégies	5
1.1.3 Fonction gain	5
1.1.4 Rationalité	5
1.2 Classification des jeux	6
1.2.1 Ordre	6
1.2.2 Relations entre les joueurs	6
1.3 Formulaire stratégique	8
1.3.1 Interprétations d'un formulaire stratégique	9
1.4 Domination	9
1.5 Équilibre de Nash	10
1.5.1 Dilemme du prisonnier	12
1.6 Prix de l'Anarchie	13
1.6.1 Jeux de congestion et prix de l'Anarchie	14
1.7 Paradoxe de Braess	15
1.7.1 Paradoxe classique de Braess	16
1.8 Conclusion	17
2 PHÉNOMÈNE DE FILES D'ATTENTE	18
2.1 Processus Stochastiques	18
2.1.1 Processus de comptage	18
2.2 Chaîne de Markov à temps discret	19
2.3 Chaîne de Markov à temps continu	20
2.4 Processus de naissance et de mort	20
2.4.1 Relations de base et matrice de transition	21

2.5	Files d'attente	21
2.5.1	Processus d'arrivée	22
2.5.2	Processus de service	22
2.5.3	Discipline de la file	23
2.5.4	Notations de Kendall	23
2.6	Caractérisation d'un système de file d'attente	24
2.6.1	Formule de Little	24
2.6.2	Analyse du modèle $M/M/1$	25
2.6.3	Caractéristiques du système $M/M/1$	26
2.7	Conclusion	27
3	FILES D'ATTENTE ET THÉORIE DES JEUX : LIENS ET APPLICATIONS	28
3.1	Routing et congestion	28
3.1.1	Routing fixe	28
3.1.2	Routing dynamique	29
3.1.3	Routing probabiliste	30
3.1.4	Congestion du réseau	30
3.2	Réseaux de files d'attente dans la théorie des jeux	31
3.2.1	Classification des réseaux de files d'attente	32
3.2.2	Modélisation des systèmes à l'aide des réseaux de files d'attente	32
3.2.3	Simulation des systèmes d'attente	33
3.3	Théorie des jeux dans les files d'attente Markoviennes	36
3.3.1	Applications du jeu de routing dans les files d'attente	36
3.3.2	Comportement d'une File d'attente $M/M/1$ observable	37
3.3.3	Comportement d'une file d'attente $M/M/1$ non-observable	37
3.4	Conclusion	38
4	ROUTAGE MULTICRITÈRE ET PARADOXES : NOUVELLE APPROCHE	39
4.1	Modèle et mesures de performance	39
4.1.1	Coût total	41
4.2	Calcul de l'optimum global	41
4.2.1	Conditions d'existence	42
4.3	Calcul de l'équilibre de Nash	43
4.3.1	Conditions d'existence	43
4.4	Prix de l'anarchie et nouveau paradoxe	44
4.5	Résultats numériques	45
4.5.1	Discussions	47
4.6	Conclusion	48

5	INNOVATION DANS L'OPTIMISATION DES PERFORMANCES AMBULATOIRES	49
5.1	Systèmes Dynamiques : Concepts et éléments essentiels	50
5.1.1	Système	50
5.1.2	Système dynamique	50
5.1.3	Classification des systèmes dynamiques	51
5.1.4	Système dynamique à l'hôpital	52
5.1.5	Modélisation et simulation des systèmes dynamiques avec Anylogic .	53
5.2	Modèle DES et SD	55
5.3	Simulation par le modèle DES dans l'OPD	56
5.3.1	Système à événements discrets	56
5.3.2	Service de consultation externe	56
5.3.3	Structure d'un modèle DES	57
5.3.4	Modèles de simulation	58
5.3.5	Planification dans le service ambulatoire	59
5.4	Approche dynamique de la modélisation des performances ambulatoires . . .	60
5.5	Méthodologie de recherche	60
5.5.1	Développement du modèle	61
5.5.2	Initialisation du modèle	65
5.6	Analyse des résultats et interprétations	66
5.6.1	Taux d'arrivée des patients	66
5.6.2	Résultats du scénario 1	66
5.6.3	Résultats du scénario 2	69
5.7	L'équilibre de Nash dans le modèle OPD	71
5.8	Prix de l'anarchie	72
5.9	Conclusion	74
	Conclusion et perspectives	75

Table des figures

1	Chapitre 1	4
1.1	Modèle de congestion	14
1.2	Exemple de paradoxe de Braess	16
2	Chapitre 2	18
2.1	Système de files d'attente	22
2.2	Graphe de transition de la file $M/M/1$	25
3	Chapitre 3	28
3.1	Schéma de flux de service	33
3.2	Schéma de flux d'entrée de l'unité dans le système	33
3.3	Réseau de files d'attente dans une unité de chimiothérapie	35
4	Chapitre 4	39
4.1	Modèle de routage compétitif	40
4.2	Équilibre et solution optimale	46
4.3	Fonctions des coûts	46
4.4	Variation de la fonction coût	46
4.5	Coût d'équilibre en fonction du délai	46
4.6	Prix de l'anarchie	47
5	Chapitre 5	49
5.1	Taux d'arrivée des patients à la clinique.	61
5.2	Taux de service des patients à l'accueil.	61
5.3	Paramètres, fonctions de distribution personnalisées du modèle.	61
5.4	Modèle de simulation à événements discrets conçu dans Anylogic.	62
5.5	Modèle du système dynamique synchronisé avec le modèle DES.	64

5.6	Initialisation du modèle DES.	66
5.7	Taux d'arrivée des patients par simulation du modèle SD.	67
5.8	Longueur de la file d'attente à la réception et au triage.	67
5.9	Longueur de la file d'attente pour différents types de médecins.	68
5.10	Coûts, revenus et bénéfices attendus de l'OPD dans le scénario 1.	69
5.11	Longueur de la file d'attente à la réception et au triage.	69
5.12	Longueur de la file d'attente après diminution d'un médecin.	70
5.13	Longueur de la file d'attente après l'augmentation d'un médecin.	70
5.14	Coûts, revenus et bénéfices attendus de l'OPD dans le scénario 2.	71

INTRODUCTION

La théorie des jeux étudie les situations interactives où deux individus ou plus, appelés joueurs, prennent des décisions qui influencent conjointement le résultat final. Cette théorie, fondée sur les travaux de Neumann [42], repose sur une approche mathématique structurée et est appliquée à divers domaines. Parmi ses nombreuses applications, on trouve celle des systèmes de files d'attente, qui permettent de dériver et de calculer plusieurs mesures de performance. Celles-ci incluent le temps d'attente moyen dans la file ou dans le système, le nombre attendu d'attentes ou de services, ainsi que la probabilité de se retrouver dans certains états du système.

En 1969, Naor a initié l'étude des systèmes de files d'attente Markoviennes en adoptant une approche basée sur la théorie des jeux [46]. Il a examiné une file d'attente M/M/1 avec une structure de récompenses et de coûts. Ce travail a été approfondi par Edelson et Hildebrand, qui ont considéré le même système de file d'attente tout en supposant que les clients prenaient leurs décisions sans être informés de l'état du système. Depuis lors, de nombreuses publications se sont multipliées, abordant l'analyse du comportement des clients et des serveurs dans les différentes formes de files d'attente.

Un aspect essentiel qui se manifeste dans de nombreux types de jeux de files d'attente est la congestion, qui influence à la fois les coûts et les délais. Parmi les travaux majeurs dans ce domaine, ceux d'Altman [2] se distinguent, car il a étudié un type de jeu dynamique intégrant les files d'attente. Altman a mené plusieurs recherches en théorie des jeux, ce qui lui a valu d'être considéré comme l'un des fondateurs de ce domaine, remportant de nombreux prix internationaux. Nous avons également eu l'opportunité de collaborer avec lui et de publier nos travaux, cette publication ayant été reconnue parmi les 15 meilleurs papiers au Gamenets[15].

Dans ce travail, nous avons créé un modèle de jeu de routage prenant en compte les pertes et la congestion. Notre analyse a abordé un problème multi-objectif où chaque joueur doit gérer une somme pondérée incluant un coût de retard et un coût de perte. Nous avons calculé l'équilibre et la solution optimale, qui se révèlent uniques. En plus du paradoxe classique de

Kameda, nous avons observé un autre comportement paradoxal : des taux de perte plus élevés peuvent avoir un impact positif sur le retard, ce qui peut entraîner des performances dégradées, même avec un seul joueur.

Dans un problème d'optimisation, notre objectif est de maximiser ou minimiser une fonction en contrôlant les valeurs d'un vecteur qui doit satisfaire un ensemble de contraintes. Le jeu de routage est un processus par lequel nous sélectionnons un chemin pour le trafic dans un réseau, utilisé pour évaluer les mesures de performance dans de nombreux cas. L'une des approches pour modéliser ces systèmes et analyser les effets secondaires lorsqu'un système est remplacé par un autre est la simulation à événements discrets. Cette technique est couramment utilisée dans l'étude des systèmes dynamiques ; elle repose sur une modélisation informatique où le changement d'état d'un système se déroule à travers une séquence d'événements discrets. Chaque événement se produit à un moment précis et modifie l'état du système. Le comportement dynamique du système est ainsi modélisé par l'évolution interdépendante de divers éléments au fil du temps.

Dans une approche basée sur les événements, nous décrivons de manière complète le fonctionnement du système et les phénomènes qui s'y produisent lors d'une campagne de production, en mettant l'accent sur les conditions d'occurrence et les conséquences de ces événements. Il convient de noter que la modélisation des événements discrets se concentre sur les processus d'un système à un niveau intermédiaire d'abstraction. Cette approche est largement utilisée dans les secteurs de la santé, de la fabrication et de la logistique.

Dans le secteur de la santé, les délais d'attente constituent un phénomène récurrent. Il est courant que les patients attendent plusieurs jours, voire semaines, pour obtenir un rendez-vous médical ou planifier une intervention. De plus, lors de leur consultation, un temps d'attente supplémentaire est souvent nécessaire avant d'être pris en charge. Dans les établissements hospitaliers, il est fréquent de rencontrer des patients en attente de lits dans les couloirs ou confrontés à des délais prolongés pour des interventions chirurgicales. Les délais pour la réalisation de tests individuels sont également des occurrences courantes.

Les délais d'attente résultent d'une différence entre la demande de services et la capacité disponible pour y répondre. La modélisation des systèmes à événements discrets peut être formalisée par la théorie des files d'attente, une technique de recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système où se manifeste un phénomène d'attente, d'évaluer ses performances et de déterminer ses caractéristiques, afin d'aider les gestionnaires dans leur prise de décision. Les résultats théoriques et les formulations sont bien établis pour les modèles de files d'attente avec des arrivées suivant un processus de Poisson et des temps de service

exponentiels.

Dans cette thèse, et dans un second temps, nous avons développé une approche innovante pour réduire la longueur des files d'attente dans le service de consultation externe d'un système $M/M/1$, en diminuant le temps d'attente, ce qui favorise une meilleure gestion du flux de patients et améliore leur satisfaction. Nous avons proposé un nouveau scénario en augmentant le nombre de réceptionnistes tout en réduisant le nombre de médecins généralistes dans le service ambulatoire. Pour modéliser ce système, nous avons conçu des fonctions de distribution personnalisées. En outre, en intégrant des concepts avancés de la théorie des jeux, nous avons déterminé l'équilibre de Nash pour les deux scénarios, tout en calculant le prix de l'anarchie afin d'identifier la stratégie optimale. Le modèle que nous avons élaboré est non seulement théoriquement pertinent, mais également applicable dans les services ambulatoires, offrant ainsi une solution concrète pour réduire la congestion des patients.

Cette thèse vise à étudier la théorie des files d'attente en intégrant la théorie des jeux et est divisée en cinq chapitres :

- Le chapitre 1 présente les concepts fondamentaux de la théorie des jeux, leur classification en analysant les différents types des jeux.
- Les notions fondamentales des files d'attente ont été explorées en deuxième chapitre, avec un accent particulier sur le modèle $M/M/1$.
- Le troisième chapitre est consacré au lien et aux applications entre les files d'attente et la théorie des jeux. Ce phénomène s'intéresse aux interactions stratégiques entre joueurs concurrents et repose sur les interactions sociales au sein d'un groupe.
- Le quatrième chapitre concerne notre première contribution, qui s'intéresse à un modèle du jeu de routage avec pertes et congestion. Cela nous a permis de calculer la solution optimale, l'équilibre symétrique et de révéler un paradoxe, en plus de celui de Kameda.
- Dans le chapitre 5, nous abordons notre seconde contribution, en commençant par examiner les systèmes dynamiques, leurs classifications, et l'impact de la distribution des événements discrets sur l'OPD. La simulation des systèmes de files d'attente a été étudiée pour modéliser le système. Notre objectif est d'optimiser la performance du système ambulatoire en développant des approches pratiques et en utilisant des fonctions de distribution personnalisées. La validation des scénarios et l'efficacité de notre approche ont été démontrées par le calcul de plusieurs paramètres et mesures de performance. L'obtention de l'équilibre de Nash et du prix de l'anarchie a confirmé cette efficacité. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au dernier chapitre. Enfin, nous terminons par une conclusion et quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES JEUX

En 1928, le mathématicien Émile Borel publie un livre intitulé *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, dans lequel il introduit les concepts de jeux de stratégie et d'équilibres. Il pose ainsi les fondations de ce qui deviendra la théorie des jeux [14]

Cependant, ce n'est qu'en 1944 que cette théorie gagne en notoriété grâce à la parution de *Theory of Games and Economic Behavior* rédigé par le mathématicien et physicien hongrois John von Neumann et l'économiste autrichien Oskar Morgenstern. Ce livre marque la reconnaissance de la théorie des jeux comme un domaine de recherche à part entière. La théorie des jeux est un domaine des mathématiques et de l'économie qui étudie les comportements stratégiques et les interactions entre les individus quand ils doivent prendre une décision [50]. Dans ce chapitre, nous présentons les définitions, notations et concepts fondamentaux associés à la théorie des jeux. Pour des informations plus approfondies, le lecteur est invité à consulter les références [67, 60, 39].

1.1 Concepts de base de la théorie des jeux

Un *jeu* est décrit par les éléments suivants :

1.1.1 Joueurs

Ce sont les décideurs ou agents qui participent au jeu. Chaque joueur prend des décisions qui influencent le résultat du jeu.

Si dans un jeu, il y a N joueurs ($N \geq 2$), on note $J = \{1, 2, \dots, N\}$ l'ensemble des joueurs.

1.1.2 Stratégies

Chaque joueur dispose d'un ensemble d'actions ou de stratégies possibles parmi lesquelles il peut choisir. Ces actions peuvent être déterminées à chaque étape du jeu.

Dans un jeu, on distingue deux catégories de stratégies :

1. **Stratégie pure** : Une stratégie pure d'un joueur $i \in J$ est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur chaque fois qu'il est susceptible de jouer.

On note par $S_i = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ l'ensemble de toutes les stratégies possibles du joueur i où s_j , $j = \overline{1, k}$ désigne la stratégie j disponible pour le joueur i .

2. **Stratégie mixte** : Une stratégie mixte d'un joueur $i \in J$ est une mesure de probabilité p_i définie sur S_i . On note Π_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i et π une stratégie mixte de ce joueur.

1.1.3 Fonction gain

Dans un jeu, la *fonction de gain* (ou *fonction d'utilité*) représente la récompense qu'un joueur reçoit en fonction des actions choisies par lui-même et par les autres joueurs. Elle quantifie l'intérêt ou le bénéfice que le joueur retire d'une issue particulière du jeu.

Formellement, la fonction de gain u_i d'un joueur i associe à chaque combinaison d'actions des joueurs un gain, c'est-à-dire :

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N \rightarrow \mathbb{R}$$

où :

- S_1, S_2, \dots, S_N sont les ensembles des stratégies possibles pour les N joueurs,
- $u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est le gain du joueur i lorsque les joueurs choisissent respectivement les stratégies s_1, s_2, \dots, s_n .

Un jeu peut être donc formellement défini par le triplet ;

$$\langle J, S, u \rangle$$

1.1.4 Rationalité

La rationalité est la capacité des joueurs à prendre des décisions de manière logique et optimale, en vue de maximiser leur propre gain ou utilité, compte tenu des informations disponibles et des choix des autres joueurs. Un joueur est considéré comme rationnel s'il choisit une stratégie qui maximise son gain ou son utilité, étant donné les stratégies possibles des autres joueurs.

1.2 Classification des jeux

La classification des jeux permet de différencier les types de jeux selon les critères d'ordre suivants :

1.2.1 Ordre

Les jeux peuvent être classifiés selon l'ordre dans lequel les joueurs prennent leurs décisions. Cette classification distingue les jeux simultanés des jeux séquentiels :

1.2.1.1 Jeux simultanés

Un jeu est dit simultané lorsque les joueurs prennent leurs décisions en même temps, sans connaître les choix des autres joueurs. Les décisions sont prises de manière simultanée, et chaque joueur doit anticiper les actions des autres sans information préalable.

Exemple : *Le dilemme du prisonnier* : Les deux prisonniers choisissent de coopérer ou de trahir sans savoir ce que l'autre a choisi.

1.2.1.2 Jeux séquentiels

Un jeu est dit séquentiel lorsque les joueurs prennent leurs décisions à des moments différents et de manière ordonnée. Chaque joueur peut observer les choix faits par les joueurs précédents avant de prendre sa propre décision. Les jeux séquentiels sont souvent modélisés sous forme d'arbres de décision, où chaque branche représente un choix possible à chaque étape du jeu.

Exemple : *Le jeu d'échecs* : Les joueurs jouent à tour de rôle, et chaque mouvement est visible par l'adversaire avant qu'il ne fasse le sien.

1.2.2 Relations entre les joueurs

Une caractéristique fondamentale des jeux est que le gain d'un joueur dépend non seulement de ses propres choix, mais également des décisions prises par les autres joueurs. La classification des jeux selon les relations entre les joueurs permet de distinguer les types de jeux en fonction de l'interaction et de l'interdépendance des décisions prises par les joueurs. Nous citons les principales catégories :

1.2.2.1 Jeux à somme nulle

Dans un jeu à somme nulle, les intérêts des joueurs sont totalement opposés. Le gain d'un joueur correspond exactement à la perte de l'autre. La somme des gains est égale à zéro, ce qui implique un conflit pur entre les joueurs.

Exemple : *Chifoumi* : Chaque joueur choisit une action et l'un gagne tandis que l'autre perd.

1.2.2.2 Jeux à somme non nulle

Dans un jeu à somme non nulle, les intérêts des joueurs peuvent être partiellement complémentaires ou opposés. La somme des gains des joueurs n'est pas nécessairement égale à zéro, et la coopération peut être bénéfique pour les joueurs.

Exemple : *Le dilemme du prisonnier* : Bien que les intérêts soient en conflit, la coopération permettrait un meilleur résultat pour les deux joueurs.

1.2.2.3 Jeux compétitifs

Dans un jeu compétitif, les joueurs sont en conflit direct, cherchant à maximiser leurs propres gains aux dépens des autres.

Exemple : *La guerre des prix entre entreprises concurrentes* : Les entreprises se battent pour attirer des clients en réduisant les prix.

1.2.2.4 Jeux de coopération

Un jeu est qualifié de coopératif lorsque les joueurs peuvent communiquer librement et conclure des accords. Dans ce cas, ils forment une coalition et visent l'intérêt général. Autrement dit, les joueurs cherchent à maximiser les gains collectifs, ce qui peut entraîner une répartition équitable des ressources ou des bénéfices.

Exemple : *La division d'un terrain* Plusieurs personnes décident ensemble comment répartir équitablement un bien.

1.2.2.5 Jeux mixtes ou hybrides

Les jeux mixtes combinent des éléments de coopération et de compétition. Les joueurs doivent jongler entre leurs intérêts individuels et collectifs.

Exemple : *Les négociations commerciales internationales* : Les pays coopèrent sur certains points tout en étant en compétition sur d'autres aspects.

1.3 Formulaire stratégique

Un formulaire stratégique, aussi appelé forme normale, décrit les stratégies disponibles pour chaque joueur ainsi que les gains associés à chaque combinaison de stratégies choisies. Dans le cas de deux joueurs, il peut être représenté de la manière suivante :

$$\langle S_1, S_2, u_1, u_2 \rangle$$

où

- $S_1 = (s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^{m_1})$ est l'ensemble des stratégies disponibles du joueur 1.
- $S_2 = (s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^{m_2})$ est l'ensemble des stratégies disponibles du joueur 2.
- $u_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur 1, qui associe à chaque paire de stratégies (s_1^i, s_2^j) un gain pour le joueur 1.
- $u_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur 2, qui associe à chaque paire de stratégies (s_1^i, s_2^j) un gain pour le joueur 2.
- Pour une paire de stratégies (s_1^i, s_2^j) , on a $u_1(s_1^i, s_2^j) = x_{ij}$.
- Pour la même paire, on a $u_2(s_1^i, s_2^j) = y_{ij}$.

La forme normale peut être représentée par un tableau des gains, aussi appelé matrice des gains, qui illustre les résultats possibles des interactions entre les joueurs, comme le montre le tableau suivant :

Stratégies	S_2^1	S_2^2	\dots	\dots	\dots	$S_2^{m_2}$
S_1^1	(x_{11}, y_{11})	(x_{12}, y_{12})	\dots	\dots	\dots	(x_{1m_2}, y_{1m_2})
S_1^2	(x_{21}, y_{21})	(x_{22}, y_{22})	\dots	\dots	\dots	(x_{2m_2}, y_{2m_2})
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$S_1^{m_1}$	(x_{m_11}, y_{m_11})	(x_{m_12}, y_{m_12})	\dots	\dots	\dots	$(x_{m_1m_2}, y_{m_1m_2})$

TABLE 1.1 – Tableau des gains dans un jeu à deux joueurs

Exemple 1.1. *Cet exemple illustre les gains pour deux joueurs :*

	Stratégie X (Joueur 2)	Stratégie Y (Joueur 2)
Stratégie X (Joueur 1)	(5, 3)	(0, 2)
Stratégie Y (Joueur 1)	(2, 0)	(3, 5)

Chaque cellule du tableau indique le gain pour chaque joueur. Par exemple, si le Joueur 1 choisit la stratégie X et le Joueur 2 choisit la stratégie X, alors le Joueur 1 obtient 5 et le

Joueur 2 obtient 3.

1.3.1 Interprétations d'un formulaire stratégique

Osborne et Rubinstein [48] proposent deux interprétations de la représentation sous forme stratégique :

1. **Jeu à événement unique** : Le jeu se déroule une seule fois. Tous les joueurs sont informés des détails du jeu et prennent leurs décisions simultanément. Chaque joueur choisit sa stratégie de manière autonome, sans connaître les choix des autres joueurs, mais en sachant précisément les options disponibles.
2. **Jeu répété ou jeu avec anticipation** : Le joueur peut anticiper le comportement des autres en se basant sur des informations sur la manière dont le jeu, ou des jeux similaires, ont été joués dans le passé. Les décisions des joueurs peuvent être influencées par l'historique du jeu ou par l'expérience acquise dans des situations similaires.

1.4 Domination

La notion de domination est l'un des indicateurs les plus fiables dans un jeu. Elle désigne une situation où une stratégie est strictement préférable, quel que soit le choix des autres joueurs. Autrement dit, une stratégie domine une autre si elle entraîne un meilleur résultat, indépendamment des stratégies choisies par les autres joueurs.

Définition 1.2. Une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominante pour le joueur i si, pour tous les profils de stratégie $s_{-i} \in S_{-i}$ et pour toute stratégie $s'_i \neq s_i \in S_i$, on a :

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \text{ et } \forall s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}$$

où :

- S_{-i} désigne l'ensemble des stratégies des autres joueurs que i ne choisit pas.
- $u_i(s_i, s_{-i})$ est la fonction d'utilité du joueur i lorsqu'il choisit la stratégie s_i et que les autres joueurs choisissent s_{-i} .

Définition 1.3. Une stratégie $s_i \in S_i$ pour le joueur i est faiblement dominante si, pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$ (les stratégies des autres joueurs), et pour toute stratégie $s'_i \in S_i$ telle que $s'_i \neq s_i$, on a :

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

et il existe un $s_{-i}^* \in S_{-i}$ tel que :

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i', s_{-i}^*)$$

1.5 Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash est une notion fondamentale en théorie des jeux non coopératifs. Il désigne une situation dans un jeu où aucun joueur n'a intérêt à modifier unilatéralement sa stratégie, étant donné les stratégies des autres joueurs.

Le mathématicien américain John Nash (1950) a démontré que tout jeu ayant un ensemble fini de stratégies disponibles pour chaque joueur possède au moins une stratégie mixte d'équilibre de Nash [45]. Un équilibre de Nash mixte se produit lorsque les joueurs choisissent leurs stratégies selon des probabilités spécifiques, plutôt que de manière déterministe. Cet équilibre est souvent observé dans des jeux où la nature du jeu exige des choix probabilistes. En revanche un équilibre de Nash mixte se produit lorsque les joueurs choisissent leurs stratégies selon des probabilités spécifiques, plutôt que de manière déterministe. Cet équilibre est souvent observé dans des jeux où la nature du jeu exige des choix probabilistes (par exemple, des jeux de hasard). Un jeu peut comporter plusieurs équilibres de Nash ou aucun.

Définition 1.4. *Un équilibre de Nash du jeu*

$$\langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{u_i\}_{i \in J} \rangle \quad (1.1)$$

est un profil de stratégies $s^ = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_N^*) \in S$, qui vérifie l'inégalité suivante pour chaque joueur $i \in J$:*

$$u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_N^*) \geq u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i, \dots, s_N^*), \quad \forall s_i \in S_i$$

Définition 1.5. *Un équilibre de Nash en stratégie pure du jeu (1.1) est un profil de stratégie*

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_N^*) \in S$$

vérifiant :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in J$$

Exemple 1.6. *Deux hôpitaux, A et B, doivent décider s'ils vont fournir des soins intensifs. Leur matrice de gains est la suivante :*

<i>Hôpital B \ Hôpital A</i>	<i>Fournir soins</i>	<i>Ne pas fournir soins</i>
<i>Fournir soins</i>	$(-5, -5)$	$(10, 0)$
<i>Ne pas fournir soins</i>	$(0, 10)$	$(5, 5)$

Les gains sont interprétés ainsi :

- $(-5, -5)$: congestion, pertes financières.
- $(10, 0)$: A gagne, B perd.
- $(0, 10)$: B gagne, A perd.
- $(5, 5)$: aucun des hôpitaux ne fournit des soins, économies pour les deux.

L'équilibre de Nash pur est $(5, 5)$, où aucun hôpital ne change de stratégie.

Définition 1.7. Un équilibre de Nash en stratégie mixte du jeu (1.1) est un ensemble de stratégies mixtes α^* tel que

$$u_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*), \forall \alpha_i \in \Delta_{S_i}, \quad \forall i \in J.$$

où $\Delta_{S_i} = \{\alpha_i : S_i \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{s_i \in S_i} \alpha_i(s_i) = 1\}$

Exemple 1.8. Deux pharmacies (A et B) choisissent entre Prix bas (P1) et Prix élevé (P2). La matrice des gains est la suivante :

<i>Pharmacie B \ Pharmacie A</i>	<i>Prix bas (P1)</i>	<i>Prix élevé (P2)</i>
<i>Prix bas (P1)</i>	$(10, 10)$	$(0, 15)$
<i>Prix élevé (P2)</i>	$(15, 0)$	$(5, 5)$

Les gains attendus pour chaque pharmacie sont :

$$u_A = 10p_A p_B + 0(1 - p_A)p_B + 15(1 - p_A)(1 - p_B) + 5(1 - p_A)p_B$$

$$u_B = 10p_A p_B + 15(1 - p_A)p_B + 0(1 - p_A)(1 - p_B) + 5(1 - p_A)p_B$$

L'équilibre de Nash en stratégie mixte nécessite que chaque joueur soit indifférent entre ses choix de stratégie. Cela donne l'équation d'indifférence suivante : $u_A = u_B$

La solution obtenue est $p_A = \frac{1}{3}$ et $p_B = \frac{1}{2}$, ce qui signifie que chaque pharmacie choisit "Prix bas" avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et "Prix élevé" avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Cet équilibre de Nash en stratégie mixte montre que les deux pharmacies choisissent aléatoirement entre "Prix bas" et "Prix élevé" selon des probabilités spécifiques, rendant les joueurs indifférents entre leurs choix. Ce type d'équilibre diffère d'un équilibre en stratégie pure où un seul choix est fait sans aléa.

1.5.1 Dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier est l'exemple le plus emblématique de la théorie des jeux ; c'est un jeu où chaque joueur peut choisir de coopérer ou non. Ce dilemme a été formulé pour la première fois en 1950 par les mathématiciens américains Merrill Flood et Melvin Dresher [22]. Il a ensuite été popularisé par le mathématicien John Nash, qui a introduit des concepts liés à la théorie des jeux permettant d'analyser les interactions stratégiques entre les individus [44].

1.5.1.1 Jeu associé

Deux complices A et B sont arrêtés pour un crime. Ils sont séparés et interrogés individuellement. Chacun a deux choix : trahir l'autre en témoignant contre lui (défection : D) ou rester silencieux (coopération : C). Les conséquences des choix sont les suivantes :

- Si les deux restent silencieux (coopération) : ils sont condamnés à une peine légère, car les preuves contre eux sont insuffisantes (chacun purgera 1 an de prison).
- Si l'un trahit et l'autre reste silencieux :
 - Le traître est libéré (0 an de prison).
 - Celui qui est resté silencieux reçoit une lourde peine (10 ans de prison).
- Si les deux trahissent (défection) : ils sont tous deux condamnés, mais à une peine modérée (5 ans de prison chacun).

Ce dilemme met en lumière la tension entre la coopération et la trahison. Même si la meilleure option collective serait que les deux restent silencieux, la peur de se faire trahir pousse souvent chaque prisonnier à trahir l'autre, conduisant ainsi à un résultat sous-optimal pour les deux. La matrice de détention est donnée ci-dessous :

		Suspect B	
		C	D
Suspect A	C	(5,5)	(0,10)
	D	(10,0)	(1,1)

1.5.1.2 Explication de l'équilibre de Nash

Dans le dilemme du prisonnier :

- Si le prisonnier A suppose que le prisonnier B va trahir, il a intérêt à trahir aussi, car cela lui évite une lourde peine (10 ans) et lui permet d'obtenir une peine modérée (5 ans).
- Si le prisonnier A suppose que le prisonnier B va rester silencieux, il a aussi intérêt à trahir, car il sera libéré (0 an) au lieu de purger 1 an de prison.

Dans les deux cas, trahir est la meilleure réponse. Par conséquent, l'équilibre de Nash est atteint lorsque les deux prisonniers trahissent l'autre, chacun recevant une peine modérée (5 ans) ; l'équilibre est donc le profil de stratégie (c, c) .

Cet équilibre met en évidence le fait que même si la coopération (rester silencieux) serait avantageuse pour les deux, la crainte de la trahison entraîne un résultat où les deux décident de trahir, ce qui est sous-optimal.

1.6 Prix de l'Anarchie

L'étude du **prix de l'anarchie** a été lancée par Christos Papadimitriou et Elias Koutsoupias dans un article publié en 1999 [35]. Koutsoupias mentionne : "À l'époque, nous l'appelions le **ratio de coordination**". Cependant, c'est Christos qui a ensuite introduit le terme plus percutant de **prix de l'anarchie**. Ce terme a sans doute contribué à la popularité du concept, puisque des centaines d'articles scientifiques font désormais référence à cette idée ou l'ont élargie. L'objectif principal de cette notion est de mesurer l'écart entre un résultat effectivement atteint dans des contextes où les joueurs agissent de manière rationnelle et égoïste (comme dans les jeux de congestion, le routage de paquets Internet, ou l'ordonnancement des tâches sur des machines), et l'optimum collectif théorique qui pourrait être atteint dans la même situation.

La définition formelle du prix de l'anarchie est la suivante : pour chaque résultat d'un jeu, on calcule la somme des utilités des joueurs. Ensuite, on compare cette somme à l'utilité optimale que les joueurs pourraient obtenir, que le résultat soit ou non un équilibre de Nash. Cette comparaison permet de quantifier à quel point l'issue rationnelle d'un jeu peut être sous-optimale par rapport à la solution idéale.

Définition 1.9. *Pour un jeu minimisation des coûts qui admet des équilibres de Nash purs, le prix de l'anarchie pour ces équilibres est défini comme suit :*

$$P_{oA} = \frac{\max_{s \in PNE} \text{cost}(s)}{\min_{s \in S} \text{cost}(s)}$$

où

- PNE désigne l'ensemble des équilibres de Nash purs de ce jeu.
- $\text{cost}(s) = \sum_{i \in J} c_i(s)$ représente le coût social associé à l'état s , $c_i(s)$ est le coût individuel du joueur i pour une stratégie s .

1.6.1 Jeux de congestion et prix de l'Anarchie

Un jeu de congestion est un type de jeu non coopératif dans lequel plusieurs joueurs partagent une ressource limitée, comme une route, un réseau de communication ou un serveur. Le coût subi par chaque joueur dépend de l'utilisation collective de cette ressource. Ces jeux modélisent des situations où l'inefficacité et la surcharge surviennent lorsque les joueurs prennent des décisions égoïstes, cherchant à minimiser leur propre coût (par exemple, leur temps de trajet ou leur délai), sans considérer l'impact de leurs choix sur les autres. En conséquence, l'utilisation excessive de la ressource par plusieurs joueurs peut entraîner des coûts plus élevés pour tous.

Dans un jeu de congestion, le prix de l'anarchie reflète l'inefficacité induite par le fait que chaque joueur cherche à minimiser son propre coût sans prendre en compte l'impact de son choix sur les autres.

Exemple illustratif Il y a des jeux de congestion avec des fonctions de retard $d_r(x)$ dont le prix de l'anarchie pour les équilibres de Nash purs est de $5/2$.

Considérons le jeu de congestion du réseau suivant : La notation 0 ou x sur une arête signifie

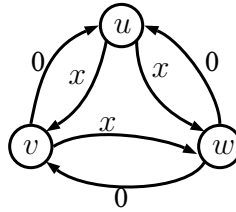


FIGURE 1.1 – Modèle de congestion

que $d_r(x) = 0$ ou $d_r(x) = x$ pour cette arête.

Les différents résultats sont illustrés dans le tableau suivant :

Joueur	Puit	Source	Stratégie Opt	Coût Opt	Stratégie PNE	Coût PNE
1	u	v	$u \rightarrow v$	1	$u \rightarrow w \rightarrow v$	3
2	u	w	$u \rightarrow w$	1	$u \rightarrow v \rightarrow w$	3
3	v	w	$v \rightarrow w$	1	$v \rightarrow u \rightarrow w$	2
4	w	v	$w \rightarrow v$	1	$w \rightarrow u \rightarrow v$	2

TABLE 1.2 – Jeu de congestion dans un réseau

Considérons un réseau avec deux routes R_1 et R_2 menant à la même destination. Les fonctions de retard pour chaque route sont définies comme suit :

- Route1 (principale) : Le temps de trajet est $d_1(x_1) = x_1$, où x_1 est le nombre de véhicules sur cette route.

- Route2 (alternative) : Le temps de trajet est $d_2(x_2) = 2x_2$, où x_2 est le nombre de véhicules sur cette route.

De plus $x_1 + x_2 = N$ où N est le nombre total de véhicules.

À l'équilibre, ces temps de trajet doivent être égaux : $x_1 = 2x_2$.

En utilisant la contrainte $x_1 + x_2 = N$, on remplace x_2 : $x_2 = \frac{x_1}{2} \Rightarrow x_1 + \frac{x_1}{2} = N \Rightarrow \frac{3x_1}{2} = N \Rightarrow x_1 = \frac{2N}{3}$, et $x_2 = N - x_1 = N - \frac{2N}{3} = \frac{N}{3}$.

Le coût total à l'équilibre de Nash est :

$d_1\left(\frac{2N}{3}\right) + d_2\left(\frac{N}{3}\right) = \frac{2N}{3} + 2\left(\frac{N}{3}\right) = \frac{2N}{3} + \frac{2N}{3} = \frac{4N}{3}$. Le coût social optimal se produit lorsque tous les véhicules choisissent la route avec le coût total le plus faible. En effet, si tous les véhicules prennent la Route 1, le coût total est : $d_1(N) = N$.

Le prix de l'anarchie est donc :

$$\text{PoA} = \frac{\text{Coût optimal}}{\text{Coût de Nash}} = \frac{N}{\frac{4N}{3}} = \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

. Cet exemple montre que dans un jeu de congestion avec des fonctions de retard $d_1(x_1) = x_1$ et $d_2(x_2) = 2x_2$, le prix de l'anarchie pour les équilibres de Nash purs est effectivement $\frac{5}{2}$.

1.7 Paradoxe de Braess

Le paradoxe de Braess, découvert par le mathématicien allemand Dietrich Braess en 1968 [18], est un phénomène contre-intuitif observé dans les réseaux de transport ou d'autres systèmes congestionnés. Selon ce paradoxe, l'ajout d'une nouvelle route ou d'une nouvelle capacité à un réseau, loin de soulager la congestion, peut paradoxalement l'aggraver et rendre la situation moins efficace pour tous les utilisateurs. Ce phénomène survient lorsque chaque acteur d'un réseau, en cherchant à optimiser son propre trajet de manière rationnelle, finit par aggraver la congestion pour l'ensemble du système. Le paradoxe met en lumière les conséquences inattendues de la prise de décision individuelle dans des contextes complexes, où l'absence de coordination peut mener à des résultats collectivement sous-optimaux.

Le paradoxe de Braess s'apparente à des situations classiques de théorie des jeux, comme le dilemme du prisonnier, où des décisions rationnelles prises de manière indépendante peuvent aboutir à un résultat défavorable pour tous les participants. Il soulève des questions sur les effets de la liberté individuelle dans les systèmes interconnectés et l'impact de l'absence de régulation ou de coordination collective.

Exemple 1.10. *Considérons un réseau simple où deux routes relient deux points A et B. La fonction de coût pour chaque route peut être modélisée par une fonction affine :*

- Pour le chemin 1 : $C_1(x_1) = a_1 + b_1x_1$

– Pour le chemin 2 : $C_2(x_2) = a_2 + b_2x_2$

où a_1, b_1, a_2 et b_2 sont des constantes positives, et x_1 et x_2 sont les nombres d'utilisateurs empruntant respectivement chaque chemin.

Lorsqu'une nouvelle route est ajoutée au réseau, le nombre total d'utilisateurs sur chaque chemin peut changer, et la distribution du trafic entre les différentes routes peut augmenter le coût global. Le paradoxe de Braess apparaît lorsque l'ajout d'une nouvelle route conduit à une augmentation du coût total, même si l'objectif initial était de réduire la congestion.

1.7.1 Paradoxe classique de Braess

Considérons le réseau de transport à quatre noeuds, tel qu'illustré par le réseau de la Figure 1.2.

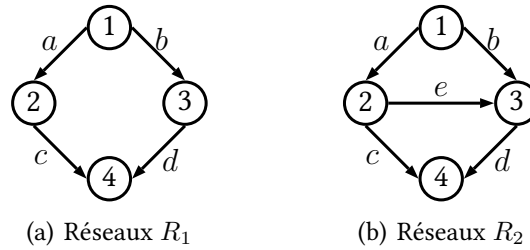


FIGURE 1.2 – Exemple de paradoxe de Braess

Il existe une seule paire de nœuds Origine/Destination (O/D) : $w = (1, 4)$. Un voyageur sur ce réseau peut emprunter l'un des deux chemins suivants :

- Le chemin p_1 constitué des liens (a, c)
- Le chemin p_2 constitué des liens (b, d) .

Nous désignons les flux sur les liens par : f_a, f_b, \dots , et les coûts des liens respectifs par : c_a, c_b, \dots . Dans ce réseau, les fonctions de coût sur ces liens sont :

$$\begin{cases} c_a(f_a) = 10f_a, \\ c_b(f_b) = f_b + 50, \\ c_c(f_c) = f_c + 50, \\ c_d(f_d) = 10f_d. \end{cases}$$

Soit x_p le flux sur un chemin p . Supposons que toutes les voies sont utilisées, nous pouvons donc établir un système d'équations en utilisant les éléments suivants :

$$\begin{cases} C_{p_1} = C_{p_2} = C_{p_3}, \\ x_{p_1}^* + x_{p_2}^* + x_{p_3}^* = d_w = 6. \end{cases}$$

Et ce, en supposant que la demande de déplacement $d_w = 6$ (ce qui représente 6 véhicules de déplacement par unité de temps). Selon la conservation des flux, les équations pour les flux

de liaison et de chemin sont les suivantes :

$$\begin{cases} f_a^* = x_{p_1}^* + x_{p_3}^*, \\ f_b^* = x_{p_2}^*, \\ f_c^* = x_{p_1}^*, \\ f_d^* = x_{p_2}^* + x_{p_3}^*, \\ f_e^* = x_{p_3}^*. \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire les coûts des utilisateurs sur les chemins en fonction des flux associés à chaque chemin, comme suit :

$$\begin{cases} C_{p_1} = 10(x_{p_1}^* + x_{p_3}^*) + x_{p_1}^* + 50 = 11x_{p_1}^* + 10x_{p_3}^* + 50, \\ C_{p_2} = x_{p_2}^* + 50 + 10(x_{p_2}^* + x_{p_3}^*) = 11x_{p_2}^* + 10x_{p_3}^* + 50, \\ C_{p_3} = 10(x_{p_1}^* + x_{p_3}^*) + x_{p_3}^* + 10 + 10(x_{p_2}^* + x_{p_3}^*) = 10x_{p_1}^* + 10x_{p_2}^* + 21x_{p_3}^* + 10. \end{cases}$$

La solution donne le modèle d'écoulement d'équilibre sur le réseau étendu de : $x_{p_1}^* = x_{p_2}^* = x_{p_3}^* = 2$, avec les coûts de déplacement sur le chemin d'équilibre encourus : $C_{p_1} = C_{p_2} = C_{p_3} = 92$. Par conséquent, l'ajout d'un nouveau lien dégrade la situation de chaque utilisateur, dans la mesure où chaque voyageur du réseau élargi subit un coût de déplacement plus élevé qu'auparavant.

Le paradoxe de Braess se manifeste principalement dans un cadre d'optimisation individuelle, où chaque utilisateur choisit son chemin en fonction de ses propres coûts. Toutefois, dans un cadre d'optimisation systémique, l'effet paradoxal peut être évité, car les décisions sont prises en tenant compte de l'impact global sur le réseau.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts fondamentaux de la théorie des jeux, en soulignant son efficacité comme outil pour modéliser des situations stratégiques dans divers domaines. L'importance de l'analyse des équilibres de Nash, du prix de l'anarchie et du paradoxe de Braess a été mise en lumière. Un lien intéressant émerge entre les files d'attente et la théorie des jeux, démontrant comment les décisions individuelles dans une file peuvent être appréhendées à travers cette lentille. Dans le chapitre 2, nous examinerons plus en détail les files d'attente, considérées comme un phénomène omniprésent ayant des répercussions sur plusieurs aspects clés des systèmes de service.

Chapitre 2

PHÉNOMÈNE DE FILES D'ATTENTE

Les files d'attente jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines, allant des services publics aux systèmes de production industrielle. Elles permettent de gérer de manière structurée la demande des clients ou utilisateurs, assurant ainsi un service à la fois équitable et performant. En optimisant les temps d'attente et en réduisant la congestion, ces systèmes améliorent l'expérience client tout en maximisant l'efficacité des ressources. De plus, l'analyse des files d'attente fournit des informations essentielles pour la prise de décision, la planification des capacités et l'allocation des ressources, contribuant ainsi à la performance globale des systèmes. Les travaux d'Artalejo constituent une référence majeure dans ce domaine, auxquels nous renvoyons le lecteur [8].

Dans ce chapitre, nous aborderons les concepts fondamentaux de la théorie des files d'attente, la gestion qui l'accompagne, ainsi que les applications et types de systèmes associés.

2.1 Processus Stochastiques

Les processus stochastiques représentent des modèles mathématiques permettant de décrire des phénomènes aléatoires qui se déroulent dans le temps. Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées, qui pourrait représenter la valeur d'une action à un instant t .

2.1.1 Processus de comptage

Un processus de comptage est un type particulier de processus stochastique qui modélise le nombre d'événements qui se produisent dans un intervalle de temps donné. Il est utilisé pour analyser et modéliser le comportement des systèmes où des entités (clients, données, etc.) attendent d'être servies.

Soit $N(t)$ le nombre d'événements survenant dans l'intervalle de temps $[0, t]$, avec $t \geq 0$ et

$N(0) = 0$. Le processus $N(t)$ prend des valeurs entières positives.

La quantité $N(a+t) - N(a)$ représente le nombre d'arrivées enregistrées entre les instants a et $a+t$, pour tout $a \geq 0$ et $t \geq 0$.

Le processus de Poisson est un processus stochastique utilisé pour modéliser des événements aléatoires se produisant dans le temps ou l'espace. Il est particulièrement adapté aux situations où les événements surviennent indépendamment et à un taux constant. Parmi ses propriétés fondamentales, on distingue :

1. Le nombre d'arrivées dans un intervalle $[a, a+t]$ de longueur t suit une loi de Poisson de moyenne λt , c'est-à-dire que, pour $a, t \geq 0$ et $n = 0, 1, 2, \dots$, on a :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

2. Si $[a, b]$ et $[c, d]$ sont des intervalles de temps disjoints, alors le nombre d'arrivées dans $[a, b]$ est indépendant du nombre d'arrivées dans $[c, d]$
3. $N(0) = 0$.

Quelques commentaires s'imposent au sujet de cette définition :

- La troisième propriété est évidemment requise si $\{N(t) : t \geq 0\}$ doit pouvoir être interprété comme un processus d'arrivée.
- La deuxième propriété n'est pas satisfaite par tous les processus d'arrivée. Intuitivement, elle implique que le nombre d'arrivées enregistrées dans un intervalle $[a, b]$ (par exemple, $[0, 5]$) ne fournit aucune indication sur le nombre d'arrivées à attendre dans un intervalle disjoint $[c, d]$ (par exemple, $[5, 8]$).
- La propriété 1 est encore plus restrictive et beaucoup moins intuitive. Elle implique en particulier que le processus d'arrivée est stationnaire, c'est-à-dire que les nombres d'arrivées enregistrés dans deux intervalles distincts de même durée suivent la même loi de probabilité.

Pour un intervalle de longueur t fixé, $[0, t]$, le nombre attendu d'arrivées se calcule comme suit :

$$E[N(t)] = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

2.2 Chaîne de Markov à temps discret

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique à espace d'états E discret et à temps discret.

X_n est une chaîne de Markov à temps discret si pour tout $n \geq 0$ et pour tout état $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in E$

E , la chaîne de Markov vérifie la propriété de Markov suivante [11] :

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé.

Définition 2.1. *Une chaîne de Markov à temps discret est dite homogène si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall n \in N, P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

l'évolution du processus ne dépend pas de l'origine des temps.

2.3 Chaîne de Markov à temps continu

Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus stochastique à espace d'états E discret et à temps continu. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu si et seulement si pour tout n [11] :

$$P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, \dots, X(t_0) = i_0) = P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

avec $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Définition 2.2. *Une chaîne de Markov à temps continu est dite homogène si pour $s > 0$ elle vérifie la propriété suivante :*

$$P[X(t+s) = j | X(s) = i] = P(X(t) = j | X(0) = i)$$

2.4 Processus de naissance et de mort

Considérons à présent un système très général, dans lequel nous ferons abstraction des caractéristiques telles que nombre de serveurs, capacité,... etc. On peut utilement visualiser un tel système comme une boîte noire, simplement caractérisée par un processus d'arrivée, un processus de sortie et un processus d'état résultant de la combinaison des arrivées et des départs.

A chaque instant $t + \Delta t$, l'état $N(t + \Delta t)$ du système résulte des arrivées et sorties enregistrées entre t et $t + \Delta t$. Sans être parfaitement rigoureuse, la définition suivante permet d'introduire les caractéristiques d'un tel système auxquelles nous allons nous intéresser.

Définition 2.3. *Le processus d'état stochastique $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort si, pour chaque $n = \{0, 1, 2, \dots\}$, il existe des paramètres λ_n et μ_n (avec $\mu_0 = 0$) tels*

que, lorsque le système est dans l'état n , le processus d'arrivée est poissonnien de taux λ_n et le processus de sortie est poissonnien de taux μ_n .

Dans un processus de naissance et de mort, les taux d'arrivée et de service sont donc variables en fonction d'état du système.

2.4.1 Relations de base et matrice de transition

Les processus de naissance et de mort, essentiels dans la modélisation des files d'attente, permettent d'identifier des relations importantes au sein de ces systèmes. Dans ce cadre, les arrivées sont assimilées à des naissances, tandis que les départs (ou services) sont interprétés comme des morts. La distribution de l'état d'équilibre de ces processus de naissance et de mort peut être exprimée de la manière suivante :

$$P_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} P_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

(Cette formule est typiquement utilisée dans le contexte des systèmes de files d'attente, en particulier dans le cadre des chaînes de Markov). Pour un processus de naissance et de mort simple, la matrice est de cette forme :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \mu & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ \mu & 1 - \lambda - \mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 1 - \lambda - \mu & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & \mu & 1 - \lambda - \mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cette matrice de transition est utilisée pour analyser le comportement à long terme d'un système de files d'attente, permettant de calculer des métriques telles que les états stables, les temps d'attente moyens, et d'autres caractéristiques de performance.

2.5 Files d'attente

Une file d'attente peut se décrire comme un système où des clients désirent recevoir un service à un guichet et peuvent avoir à attendre que d'autres clients soient servis. Un système de file d'attente peut être représenté par :

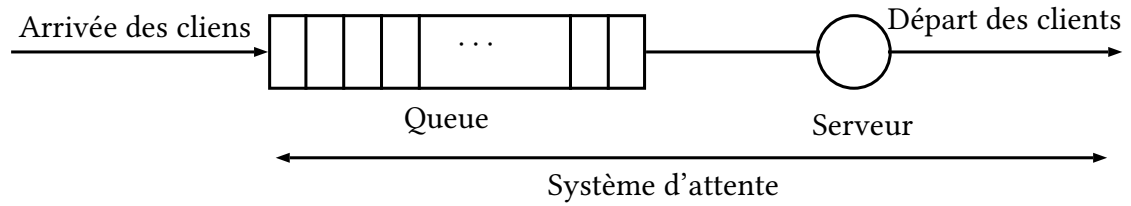


FIGURE 2.1 – Système de files d'attente

Quelques exemples de files d'attente que l'on rencontre dans différents contextes :

- Aéroports : L'enregistrement, le contrôle de sécurité et l'embarquement sont des étapes nécessaires aux passagers aux aéroports. La mise en place de files séparées pour les passagers prioritaires ou en classe affaires est possible.
- Hôpitaux : les patients sont en attente pour des consultations, des examens ou des suivis médicaux. Il est indispensable de gérer les files d'attente afin d'assurer des soins rapides et efficaces.
- Banques : Les clients sont en attente afin de réaliser des opérations bancaires au guichet ou aux distributeurs automatiques.

Pour spécifier la structure d'une file d'attente, il est nécessaire de définir ses caractéristiques, notamment :

2.5.1 Processus d'arrivée

Un processus d'arrivée est une représentation mathématique qui explique comment les clients ou les entités pénètrent dans un système. L'arrivée des clients dans une station sera décrite à l'aide d'un processus de comptage $\{N_t\}_{t \geq 0}$.

La variable aléatoire T_n mesure le temps séparant l'arrivée du $(n - 1)^{ime}$ client et du n^{ime} client et est donnée par :

$$T_n = A_n - A_{n-1}$$

où A_n est la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du n^{ime} client dans le système, avec $A_0 = 0$.

2.5.2 Processus de service

Le départ d'un client indique toujours la fin de son service, mais ne constitue pas forcément le début d'un nouveau service. En effet, un client qui quitte la station peut laisser celle-ci vide, entraînant ainsi une période d'inoccupation pour le serveur jusqu'à l'arrivée d'un nouveau client. Soient :

- D_n : la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du n^{ime} client du système.

- B_n : la variable aléatoire mesurant le temps de service du n^{ime} client. Les temps de service dans les stations sont décrits par les variables aléatoires $\{B_n\}_{n \geq 1}$, qui sont indépendantes et identiquement distribuées.
- μ : taux de service et la durée moyenne de service est $\frac{1}{\mu}$.

Il convient de noter que la distribution du temps de service la plus simple à analyser est la distribution exponentielle. Cependant, ses propriétés rendent cette loi souvent peu réaliste. Pour modéliser des phénomènes réels, il est donc courant de faire appel à d'autres types de distributions de temps de service.

2.5.3 Discipline de la file

La discipline d'une file d'attente désigne les règles qui régissent l'ordre dans lequel les clients sont servis. Les disciplines les plus courantes incluent :

- FIFO (First In First Out) : signifie que le premier client ou la première tâche à arriver dans la file est le premier à être servi. En d'autres termes, les clients sont traités dans l'ordre de leur arrivée, sans favoritisme.
- LIFO (Last In, First Out) : signifie que le dernier client ou la dernière tâche à arriver dans la file est le premier à être servi. En d'autres termes, les clients sont traités dans l'ordre inverse de leur arrivée.
- RS (Random Service) : le client est sélectionné au hasard.
- Priorité : Certains clients sont servis avant d'autres en fonction de critères spécifiques (urgence, type de service, etc.).

Chaque discipline peut influencer les performances du système, comme le temps d'attente et la satisfaction des clients.

2.5.4 Notations de Kendall

Suivant une suggestion de Kendall, on décrit souvent les caractéristiques essentielles d'un système de files d'attente par une notation de la forme $A/B/C/D/E/F$, où A et B désignent deux lois de probabilités indiquant respectivement la distribution des temps d'inter-arrivée des clients et celle des temps de service. Ces lois peuvent être :

- M : loi exponentielle.
- G : loi générale.
- GI : loi générale et indépendant.
- D : loi déterministe.
- E_k : loi d'Erlang d'ordre k .

Les autres symboles désignent :

- C : le nombre de serveurs.

- D : la capacité du système (nombre maximum des clients dans le système).
- E : la taille de la source (population des usagers).
- F : la discipline de service.

Lorsque la capacité du système et de la source est infinie, et que la discipline de la file est de type FIFO, il est suffisant de se concentrer sur les trois premiers symboles.

Remarque 2.4. *Un type de file d'attente notable est celui des files d'attente markoviennes, où le comportement des arrivées et des services est régi par des processus de Markov. Les inter-arrivées et les durées de service suivent une loi exponentielle. L'état du système est défini par le nombre de clients présents, ce qui permet d'analyser son comportement à l'aide de chaînes de Markov. Le nombre de clients dans le système à l'instant t est un processus de naissance et de mort. La notation de Kendall associée prend la forme suivante : $M/M/\dots$*

2.6 Caractérisation d'un système de file d'attente

2.6.1 Formule de Little

Soient :

- L : le nombre moyen de clients dans le système.
- λ : le taux d'arrivée moyen des clients dans le système (nombre d'arrivées par unité de temps).
- W : le temps moyen de séjour passé par un client dans le système.

La relation fondamentale de la formule de Little est :

$$L = \lambda W.$$

Lorsque ces variables sont connues, il devient possible de calculer de nombreuses mesures de performance du système de files d'attente. Parmi les plus importantes, on trouve :

- L_q : nombre moyen de clients dans la file d'attente.
- W_q : temps moyen d'attente d'un client.

Où :

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}.$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = W - \frac{1}{\mu}$$

Ces formules sont cruciales pour analyser les performances des systèmes de files d'attente et pour optimiser le service dans divers contextes.

2.6.2 Analyse du modèle $M/M/1$

Une file d'attente $M/M/1$ est un modèle de base en théorie des files d'attente, où les arrivées se font selon un processus de Poisson avec un taux λ et les temps de service sont distribués exponentiellement avec un paramètre μ . Ce système possède un seul serveur et une capacité illimitée, permettant un service sans abandon selon une discipline FIFO. Cette file se distingue par le graphe de transition suivant :

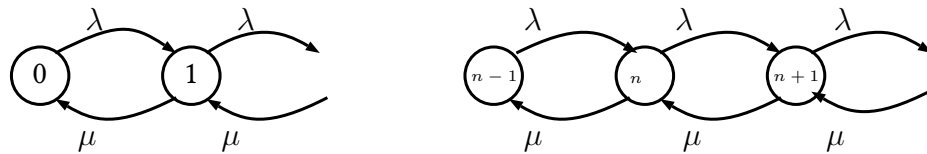


FIGURE 2.2 – Graphe de transition de la file $M/M/1$

Régime transitoire

Pour un intervalle de temps $\Delta(t)$, nous avons les probabilités suivantes :

- $P[\text{exactement une arrivée pendant } \Delta t] = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.
- $P[\text{aucune arrivée pendant } \Delta t] = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.
- $P[\text{deux arrivées au plus pendant } \Delta t] = o(\Delta t)$.
- $P[\text{exactement un départ pendant } \Delta t \mid X(t) \geq 1] = \mu\Delta t + o(\Delta t)$.
- $P[\text{aucun départ pendant } \Delta t \mid X(t) \geq 1] = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$.
- $P[\text{deux départs au plus pendant } \Delta t] = o(\Delta t)$.

Ces probabilités ne dépendent ni du temps ni de l'état $X(t)$ dans lequel se trouve le système. On donne la probabilité pour que le processus $X(t)$ fasse une transition de i vers j pendant la durée Δt par :

$$p_{ij}(\Delta t) = P(X(t + \Delta t) = j \mid X(t) = i).$$

Les arrivées et les départs se produisent indépendamment les uns des autres. ce qui donne :

- $p_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda\Delta t(1 - \mu\Delta t) + o(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$. pour $n \geq 0$
- $p_{n,n}(\Delta t) = \lambda\Delta t\mu\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t) + o(\Delta t) = 1 - ((\mu + \lambda)\Delta t + o(\Delta t))$. pour $n \geq 1$
- $p_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.
- $p_{n+1,n}(\Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)\mu\Delta t + o(\Delta t)$.

Tandis que : $p_{n,m}(\Delta t) = o(\Delta t)$ pour $|m - n| \geq 2$. A partir d'un état, le processus ne peut donc que passer dans l'un des états voisins $n - 1$ et $n + 1$.

Le calcul de $p_n(t)$ se fait comme suit : $p(X(t) = n)$. D'après le théorème des probabilités totales et pour $n \geq 1$

$$p_n(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{in}(t) p_i(\Delta t) = p_{n-1}(t) \lambda \Delta t + p_n(t) (1 - (\lambda + \mu) \Delta t) + p_{n+1}(t) \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

D'où :

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) + o(\Delta t)$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient :

$$\begin{cases} p'_n(t) = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \\ p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \end{cases}$$

Ces équations sont connus sous le nom d'équations différentielles de Kolmogorov, la solution de ce système en connaissant la distribution initiale nous donne la probabilité d'état $p_n(t)$.

Régime stationnaire

Soit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, en supposant la stabilité du système ie $\lambda < \mu$, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n$ existent est indépendantes de l'état initial du processus, de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_n(t) = 0$.

On obtient alors un système d'équations linéaires et homogènes :

$$\begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\lambda + \mu) p_n, \quad n \geq 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \end{cases}$$

La solution de ce système révèle que :

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = p_0 \rho^n$$

Avec $p_0 = 1 - \rho$, représentant la probabilité que le serveur soit libre, on en déduit que :

$$p_n = \rho^n (1 - \rho)$$

Remarque 2.5. Si $\rho \geq 1$, on a : $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = 0$ pour tout n , ce qui signifie que la longueur de la file d'attente dépasse toute limite.

2.6.3 Caractéristiques du système $M/M/1$

Dans cette partie on donne quelques caractéristiques clés de ce système :

1. Nombre moyen de clients dans le système

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \rho / (1 - \rho) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2. Nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

3. Temps moyen passé dans le système :

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

4. Temps moyen d'attente dans la file d'attente :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

5. Probabilité que le système soit vide :

$$P_0 = 1 - \rho$$

6. Probabilité d'avoir n clients dans le système :

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n$$

Ces formules permettent d'analyser les performances d'un système M/M/1, de prendre des décisions sur l'ajout de serveurs ou l'amélioration des performances du système ; évaluer une satisfaction des clients en réduisant le temps d'attente et en optimisant le service.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu de la théorie des files d'attente. Nous avons introduit les concepts de base et les notations d'un système de files d'attente, en nous concentrant sur les files d'attente markoviennes. Nous nous sommes intéressés à la file M/M/1. Il est essentiel de mener une étude approfondie de ce type de système afin d'améliorer et d'évaluer ses performances. Cette amélioration peut également être envisagée dans le contexte de la théorie des jeux, en fusionnant les deux domaines : la théorie des files d'attente et la théorie des jeux. Le but du chapitre suivant est d'explorer en profondeur ces deux concepts.

Chapitre 3

FILES D'ATTENTE ET THÉORIE DES JEUX : LIENS ET APPLICATIONS

La théorie des jeux permet de modéliser le comportement des agents afin de comprendre la dynamique d'un système étendu, en examinant ses routages, en définissant des stratégies et en évaluant leur efficacité [42]. Nous intégrerons des concepts issus de cette théorie pour analyser comment les choix individuels au sein d'une file d'attente peuvent interagir et influencer l'ensemble du système. Cette approche nous aidera à mieux appréhender les dynamiques complexes qui régissent les files d'attente et à les gérer de manière efficace. L'objectif de ce chapitre est d'explorer les différents liens et applications entre la théorie des jeux et les files d'attente, en commençant par quelques définitions utiles.

3.1 Routage et congestion

Un routage désigne un processus de sélection d'un chemin à travers d'un réseau, permettant le transfert efficace d'informations ou de ressources d'une source à une destination. Mathématiquement, un réseau peut être représenté par un graphe $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des noeuds (ou sommets) et E est l'ensemble des arêtes (ou liens) reliant ces noeuds.

Le routage consiste à trouver une ou plusieurs voies $P \subseteq E$ qui relient deux noeuds donnés $s \in V$ (source) et $d \in V$ (destination), en optimisant un critère donné, tel que la distance, le temps de transit ou le coût. Nous distinguons trois types de routage :

3.1.1 Routage fixe

Le routage fixe, également connu sous le nom de routage statique, est une méthode où les chemins de routage sont prédéfinis et ne changent pas en fonction des conditions du réseau. Considérons un réseau avec J liens étiquetés $\{1, 2, \dots, J\}$ et où chaque lien j possède des

circuits C_j . Soit R l'ensemble de toutes les routes possibles du réseau, qui représentent les différentes combinaisons de liens qu'un appel pourrait utiliser.

Nous définissons une matrice A de dimension $J \times |R|$, où chaque élément A_{jr} représente le nombre de circuits que la route r utilise sur la liaison j . Quelques éléments essentiels à considérer sont les suivants :

1. **Matrice A :**

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1|R|} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2|R|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{J1} & A_{J2} & \dots & A_{J|R|} \end{bmatrix}$$

Où chaque A_{jr} indique combien de circuits de la route r passent par le lien j .

2. **Somme des circuits par lien :** La somme des circuits pour chaque lien j peut être calculée comme suit :

$$C_j = \sum_{r \in R} A_{jr}$$

où C_j est le nombre total de circuits passant par le lien j .

3. **Capacité totale :** La capacité totale du réseau en termes de circuits peut être exprimée par :

$$C_{\text{total}} = \sum_{j=1}^J C_j$$

La méthode de routage fixe est employée afin de déterminer des chemins de routage précis dans un réseau. Alors que le routage dynamique permet d'apprendre et de mettre à jour automatiquement les routes grâce à des protocoles de routage, le routage fixe requiert que les administrateurs réseau configurent manuellement chaque route.

3.1.2 Routage dynamique

Le routage dynamique fait appel à des protocoles permettant de modifier automatiquement les chemins de routage en fonction des conditions actuelles du réseau. Le coût d'un chemin entre un nœud source S et un nœud destination D peut être défini comme la somme des coûts des liens qui composent ce chemin :

$$C(S, D) = \sum_{i=1}^n c_i$$

Ce type de routage s'adapte à l'état du système au moment du routage. Par exemple, un client quittant une station i peut choisir la station avec le moins de clients parmi ses destinations

possibles, optimisant ainsi son chemin en fonction des conditions locales du réseau.

3.1.3 Routage probabiliste

Un client sortant d'une station i a une probabilité p_{ij} de passer à la station j , ou une probabilité p_{i0} de quitter le réseau. L'ensemble des probabilités de routage de toutes les stations est regroupé dans une matrice de routage donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1J} & p_{10} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2J} & p_{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{J1} & p_{J2} & \cdots & p_{JJ} & p_{J0} \end{bmatrix}$$

3.1.4 Congestion du réseau

La congestion du réseau dans la théorie de la mise en réseau et de la mise en file d'attente des données est la qualité de service réduite qui se produit lorsqu'un noeud ou une liaison réseau transporte plus de données qu'il ne peut en supporter. Les effets typiques incluent le délai de mise en file d'attente, la perte de paquets ou le blocage de nouvelles connexions. Une des conséquences de la congestion est qu'une augmentation progressive de la charge offerte ne conduit qu'à une légère augmentation, voire à une diminution du débit du réseau.

Les protocoles réseau qui utilisent des retransmissions agressives pour compenser la perte de paquets due à la congestion peuvent augmenter la congestion, même après que la charge initiale ait été réduite à un niveau qui n'aurait normalement pas provoqué de congestion du réseau.

Pour un système $M/M/1$, la probabilité de perte de paquet P_{loss} et le débit effectif D peuvent être modélisés comme :

$$\begin{cases} P_{\text{loss}} = \rho \\ D = \lambda \cdot (1 - P_{\text{loss}}) \end{cases}$$

3.1.4.1 Contrôle de la congestion

Le contrôle de congestion module l'entrée de trafic dans un réseau de télécommunication afin d'éviter un effondrement congestif résultant d'un surabonnement. Ceci est généralement accompli en réduisant le taux de paquets. Alors que le contrôle de la congestion empêche les expéditeurs de saturer le réseau, le contrôle du flux empêche l'expéditeur de submerger le destinataire [68].

La théorie du contrôle de la congestion a été mise au point par Frank Kelly, qui a appliqué la théorie microéconomique et la théorie de l'optimisation convexe pour décrire comment

les individus, contrôlant leurs propres taux, peuvent interagir pour obtenir une allocation de débit optimale à l'échelle du réseau [27, 66].

Les exemples d'allocation optimale des taux sont l'allocation équitable max-min et la suggestion de Kelly d'une répartition proportionnellement juste, bien que beaucoup d'autres soient possibles. Chaque capacité de liaison impose une contrainte, ce qui conduit à l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange p_ℓ . Le prix auquel répond le flux i est donné par la somme de ces multiplicateurs :

$$y_i = \sum_{\ell} p_{\ell} r_{\ell i},$$

où $r_{\ell i}$ est une variable binaire définie comme suit :

$$r_{\ell i} = \begin{cases} 1 & \text{si le flux } i \text{ utilise le lien } \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le contrôle de congestion devient un algorithme d'optimisation distribuée. De nombreux algorithmes actuels de contrôle d'encombrement peuvent être modélisés ainsi, avec p_ℓ représentant la probabilité de perte ou le délai de mise en file d'attente sur le lien ℓ .

3.2 Réseaux de files d'attente dans la théorie des jeux

Les réseaux de files d'attente, dans le cadre de la théorie des jeux, peuvent être abordés sous les angles de la stratégie, de la coopération et de l'optimisation des ressources. Les défis de recherche soulevés par ce domaine sont considérables et nécessitent des avancées méthodologiques substantielles dans plusieurs disciplines. En particulier, l'exploitation optimale des ressources des réseaux de communication et le respect des exigences de qualité de service constituent des enjeux majeurs. L'objectif principal de nombreuses recherches est de développer de nouveaux modèles et méthodes permettant d'évaluer et d'optimiser les performances des réseaux de communication [40].

Il est important de noter la distinction entre les systèmes de files d'attente et les réseaux de files d'attente :

1. Un système de files d'attente fait référence à un seul serveur (ou un ensemble de serveurs) qui traite les demandes des clients. Les clients arrivent, attendent dans une file (s'ils doivent attendre), et sont servis.

Exemple : Une file d'attente dans une banque où un caissier sert les clients un par un.

2. Un réseau de files d'attente consiste en plusieurs systèmes de files d'attente interconnectés. Les clients peuvent passer d'une file d'attente à une autre, créant un réseau complexe de traitements.

Exemple : Un système de télécommunications où les données sont transmises à travers plusieurs nœuds, chaque nœud étant une file d'attente.

3.2.1 Classification des réseaux de files d'attente

Dans le domaine des réseaux de files d'attente, il existe plusieurs types de configurations qui dépendent de la nature et du comportement des clients ainsi que de leur interaction avec le système. La classification des réseaux peut se faire en fonction de plusieurs critères, notamment le nombre de classes de clients présentes dans le réseau, leur mode d'arrivée et de départ, ainsi que le nombre total de clients impliqués dans le système. En fonction de ces critères, on peut définir des réseaux mono-classe ou multi-classe, ouverts ou fermés.

- a . **Réseau mono-classe ouvert** : On appelle réseau mono-classe ouvert un réseau avec une seule classe de client où les clients arrivent de l'extérieur du système, séjournent pour recevoir un ou plusieurs services, puis quittent définitivement le système. Par conséquent, le nombre de clients est infini.
- b . **Réseau mono-classe fermé** : Un réseau est dit mono-classe fermé lorsque tous les clients appartiennent à la même classe et leur nombre en entrée du système est constant. Il n'y a ni de départ ni d'arrivée de clients.
- c . **Réseau mutli-classe mixte** : On appelle réseau multi-classe mixte un réseau contenant au minimum une classe de clients ouverte et une classe fermé. La population de clients externes est infinie, alors que la population de clients internes est finie.

3.2.2 Modélisation des systèmes à l'aide des réseaux de files d'attente

La modélisation des réseaux de files d'attente permet de représenter et d'analyser le comportement des systèmes complexes où plusieurs files d'attente interagissent, souvent avec des serveurs ou des ressources partagées. En utilisant des approches stochastiques, cette modélisation aide à comprendre la distribution des flux, la gestion des ressources et l'impact de différents paramètres sur la performance globale du réseau [40].

Avant de pouvoir analyser un réseau de files d'attente, il est essentiel de commencer par une simulation, qui permet de reproduire le comportement dynamique du système dans des conditions variées. La simulation offre une vue réaliste de l'interaction entre les différentes files d'attente, les serveurs et les demandes, et sert de base pour valider les modèles théoriques et évaluer les performances sous différentes configurations.

3.2.3 Simulation des systèmes d'attente

La définition de l'état du système, des événements qui peuvent se produire, ainsi que de l'horloge de simulation, qui permet de suivre le temps écoulé, est primordiale avant de présenter la simulation des systèmes de files d'attente. Une fois qu'une unité a terminé son service, la simulation se poursuit comme illustré dans la figure 3.1.

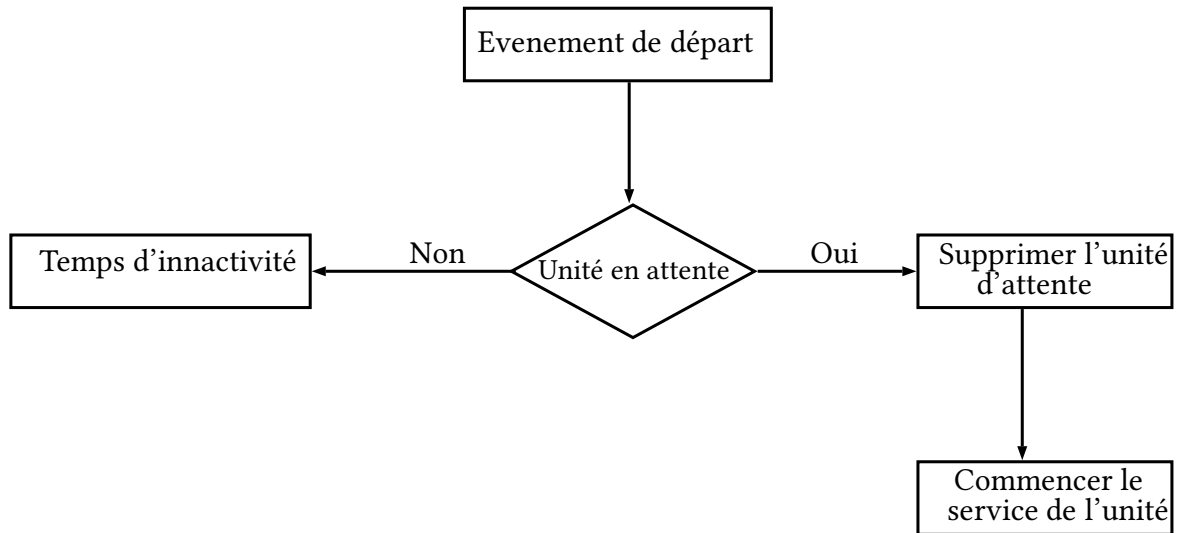


FIGURE 3.1 – Schéma de flux de service

L'événement d'arrivée se produit lorsqu'une unité entre dans le système ; L'organigramme de l'événement d'arrivée est présenté dans la Figure 3.2.

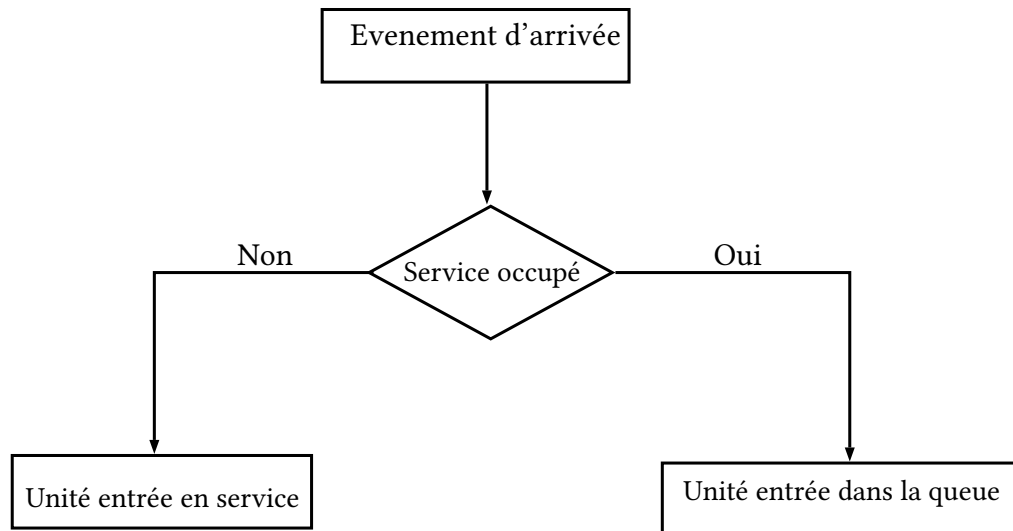


FIGURE 3.2 – Schéma de flux d'entrée de l'unité dans le système

Nous nous intéressons à la question suivante : comment modéliser l'occurrence des événements en temps simulé ? Les simulations de systèmes de files d'attente reposent généralement

sur la gestion d'une liste d'événements, qui permet de déterminer les événements à venir. Cette liste indique les moments futurs où se produiront différents types d'événements. Dans ces simulations, les événements surviennent souvent à des instants aléatoires, ce qui reflète l'incertitude des situations réelles [55, 21]. À titre d'illustration, il est impossible de prédire avec certitude l'heure d'arrivée d'un client à la caisse d'une épicerie, ni la durée exacte de la transaction. Dans ces cas, un modèle statistique est développé à partir de données collectées et analysées, ou encore d'estimations et d'hypothèses subjectives.

3.2.3.1 Modèle d'unité de chimiothérapie

Considérons le cas d'une unité de chimiothérapie d'un hôpital. La chimiothérapie est l'un des traitements les plus courants contre le cancer. Le type de traitement chimiothérapeutique dépend de nombreux facteurs, principalement du type et de l'emplacement de la maladie. On administre habituellement des agents chimiothérapeutiques à chaque patient dans une unité de jour de l'hôpital, mais parfois la chimiothérapie implique un séjour de quelques jours à l'hôpital. La chimiothérapie est généralement administrée en plusieurs séances. Chaque cycle consiste en une période de traitement suivie d'une période de repos de quelques semaines. Le nombre de cycles dépend de la façon dont le cancer réagit à la chimiothérapie. L'unité de chimiothérapie peut être modélisée sous la forme de réseaux fermés, illustrés à la Figure 3.3, avec les probabilités de routage connues [24] (indiquées près des flèches).

Supposons que le changement de classe n'est pas autorisé. Nous distinguons trois catégories de patients, représentées dans des rectangles.

- Classe “1” – 250 patients de l'unité de chimiothérapie de jour (recevant une chimiothérapie une fois durant un cycle),
- Classe “2” – 144 patients recevant une chimiothérapie de quelques jours,
- Classe “3” – 20 patients de l'unité de chimiothérapie de jour (recevant une chimiothérapie cinq fois durant un cycle).

Le modèle consiste en huit systèmes, tous ayant des temps de service distribués exponentiellement :

- Bureau des infirmières S_1 (une infirmière, $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{13} = 67$),
- Salle d'attente S_2 ($\mu_{21} = \mu_{22} = \mu_{23} = 8$),
- Bureau du médecin pour les patients en chimiothérapie de quelques jours S_3 (un médecin, $\mu_{32} = 60$),
- Bureau du médecin pour les patients en chimiothérapie quotidienne S_4 (quatre médecins, $\mu_{41} = \mu_{43} = 8.33$),
- Chambre des malades S_5 (deux infirmières, $\mu_{52} = 12$),
- Unité de chimiothérapie de quelques jours S_6 (66 lits, $\mu_{62} = 0.218$),
- Unité de chimiothérapie de jour S_7 (30 lits, $\mu_{71} = \mu_{73} = 1$),

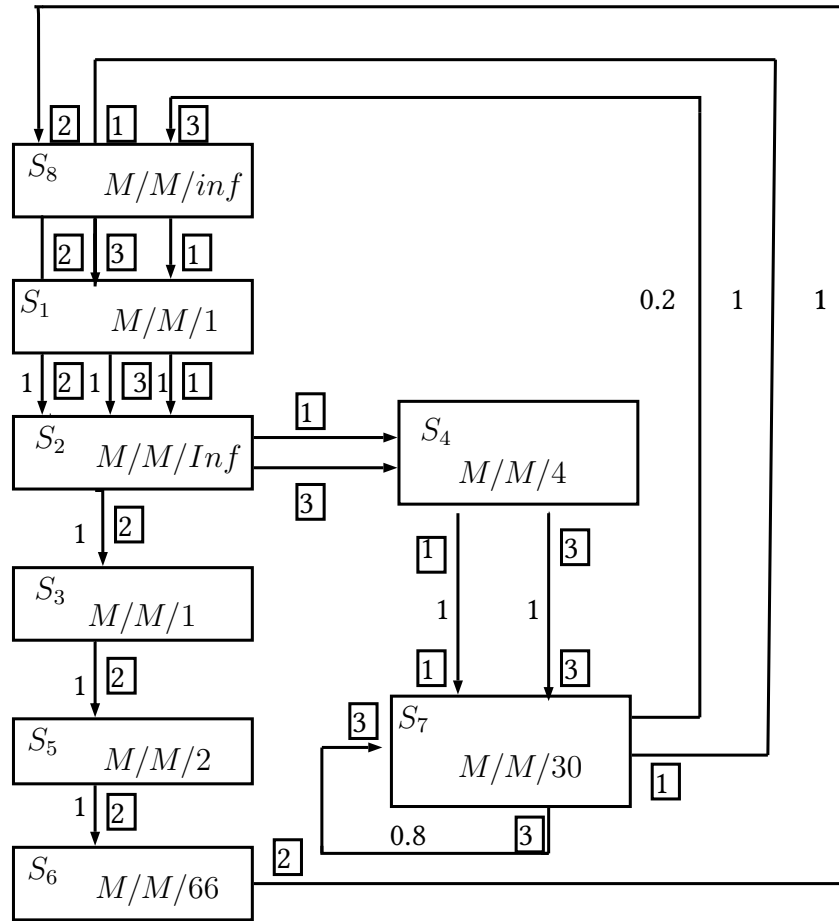


FIGURE 3.3 – Réseau de files d’attente dans une unité de chimiothérapie

- “Salle d’attente à domicile” S_8 (serveurs à lits infinis, taux de service différent selon les classes de patients : $\mu_{81} = 0.092$, $\mu_{82} = 0.137$, $\mu_{83} = 0.053$) : un nœud supplémentaire introduit pour modéliser l’ensemble du cycle de la chimiothérapie. Ce modèle de file d’attente pour l’unité de chimiothérapie constitue une approche efficace et pertinente pour analyser et optimiser le fonctionnement de l’unité. Il permet de simuler le parcours des patients, d’identifier les points de congestion et de proposer des solutions pour améliorer l’efficacité et réduire les temps d’attente, tout en tenant compte des contraintes liées aux ressources humaines et matérielles. Une telle approche analytique est essentielle pour garantir une prise en charge rapide et de qualité des patients, tout en assurant une gestion optimale des ressources dans un contexte de soins de santé de plus en plus complexe.

Une description détaillée de l’unité de chimiothérapie est présentée dans [24]. Afin de déterminer les temps d’attente moyens des patients dans chaque système, nous pouvons appliquer la méthode de sommation en utilisant la loi de Little. Les paramètres nécessaires à ce calcul sont présentés dans le Tableau 5.

	classe 1	classe 2	classe3
S_1	28.4	28.4	28.4
S_2	0	0	0
S_3	0	5.9	0
S_4	40.5	0	40.5
S_5	0	38.2	0
S_6	0	44	0
S_7	56.3	0	56.3
S_8	0	0	0

TABLE 5 – Matrice des temps d'attente des deux scénarios

3.3 Théorie des jeux dans les files d'attente Markoviennes

3.3.1 Applications du jeu de routage dans les files d'attente

Il existe deux types de travaux concernant l'application de la théorie des jeux en files d'attente markoviennes : Des travaux qui considèrent que les joueurs sont les serveurs, où les jeux sont simultanés et non-coopératifs, des travaux qui considèrent que les joueurs sont les clients, où les jeux sont considérés séquentiels et non-coopératifs. Le premier travail qui a été réalisé concernant ce thème a été effectué en 1969 par P.Naor sur un modèle $M/M/1$ [46], où il a étudié le comportement des clients dans une station de péage. Depuis, plusieurs travaux ont vu le jour [43, 64, 25].

Considérons un système distribué typique composé d'un ensemble d'utilisateurs et de machines, avec utilisateurs générant des requêtes et des machines les traitant. Lorsqu'une demande est affectée à une machine, il est placé dans une file d'attente interne premier entré, premier sorti (FIFO) dans la machine. Une machine inactive prend toujours la première requête de sa file d'attente lorsque la file d'attente n'est pas vide et traite cette requête. Le temps nécessaire pour traiter une demande est S / V où S indique la taille de la requête et V la vitesse de la machine. Chaque machine aussi prescrit une taille de file d'attente maximale afin qu'il accepte uniquement les requêtes lorsque sa taille de file d'attente est sous cette limite. Le temps de réponse d'une requête est défini comme étant le temps entre lorsqu'une demande est générée et lorsqu'elle a été traitée. La performance d'un Le système est évalué principalement par la moyenne et la variance du temps de réponse [70]. Notons à titre d'exemple que pour une

file $M/M/1$ le taux de perte dans un système avec une capacité limitée P_L est donné par :

$$P_L = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{n=0}^c \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}$$

3.3.2 Comportement d'une File d'attente M/M/1 observable

3.3.2.1 Modèle

Soit une file d'attente $M/M/1$, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ , le taux de service est μ . Chaque client débourse un coût fixe θ pour l'entrée dans la file, ainsi qu'un coût C par unité de temps, en recevant une récompense R de service. Le temps moyen de séjour dans le système est

$$\frac{n+1}{\mu}$$

3.3.2.2 Exploration du Jeu

L'analyse d'une file d'attente $M/M/1$ observable se concentre sur les caractéristiques que l'on peut observer dans un système de files d'attente où les clients arrivent et sont servis selon des processus exponentiels. Cette situation peut être simulée par un jeu entre les clients. Chaque client a la possibilité de choisir entrer ou de quitter. Au moment où un client entre dans le système et trouve un client, sa fonction d'utilité est indiquée par :

$$U_i = \left(R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \theta \right) j$$

$$\text{où } j = \begin{cases} 1 & \text{si entrer} \\ 0 & \text{si quitter} \end{cases}$$

L'utilisation de cette fonction est identique pour tous les joueurs,

3.3.3 Comportement d'une file d'attente M/M/1 non-observable

Ici les clients qui arrivent n'observent pas la taille du système, les clients ne peuvent pas voir l'état actuel de la file d'attente (c'est-à-dire le nombre de clients en attente ou en cours de service). Cela peut influencer le comportement des clients, notamment leur décision d'entrer ou non dans le système. Ils décident d'entrer ou de quitter sans avoir connaissance de l'état

du système. Les stratégies de chaque joueur se caractérisent ainsi :{ entrer, quitter }.

La fonction d'utilité d'un client i est donné par :

$$U(q, p) = q \left(R - \frac{C}{\mu} - p\lambda - \theta \right)$$

3.4 Conclusion

La théorie des jeux et la théorie des files d'attente sont deux cadres puissants qui, lorsqu'ils sont combinés, offrent des perspectives précieuses sur les processus de prise de décision et la performance des systèmes dans divers domaines. Nous avons effectué dans ce chapitre une analyse approfondie des interactions entre la théorie des jeux et la théorie des files d'attente, mettant en lumière leur complémentarité dans divers contextes.

Chapitre 4

ROUTAGE MULTICRITÈRE ET PARADOXES : NOUVELLE APPROCHE

L'étude des jeux de routage appliqués aux files d'attente a considérablement progressé dans les domaines des réseaux de communication, de la théorie des jeux et de l'optimisation. De nombreux travaux ont été consacrés aux jeux de routage à coûts additifs, où le coût d'un chemin est la somme des coûts des liens [3, 6]. Ces recherches ont été étendues à des critères multi-objectifs additifs, mais peu d'attention a été accordée aux jeux de routage avec des coûts non additifs.

Dans ce chapitre, nous présentons notre première contribution, qui consiste en l'analyse d'un jeu de routage dans un réseau comportant des liens avec pertes. Nous abordons un problème multi-objectifs dans lequel chaque joueur doit minimiser une somme pondérée des coûts de retard et des pertes. Nous déterminons à la fois l'équilibre et la solution optimale, qui sont uniques. Nous mettons également en lumière un paradoxe de type Braess pour la topologie considérée. De plus, nous découvrons un comportement paradoxal supplémentaire : des taux de perte plus élevés peuvent améliorer le retard, ce qui signifie que des liens de meilleure qualité peuvent finalement nuire à la performance, même pour un seul joueur. Cette découverte met en évidence un nouveau type de paradoxe, avec des implications inattendues. Enfin, nous calculons le prix de l'anarchie, apportant ainsi une contribution significative à la compréhension des jeux de routage dans des contextes non additifs.

4.1 Modèle et mesures de performance

La topologie utilisée dans notre approche [15, 16] consiste en un réseau d'équilibrage de charge, composé de trois noeuds : deux noeuds sources, S_r et S_l (où r représente la droite et l la gauche) et un noeud de destination commun D (voir Figure 4.1).

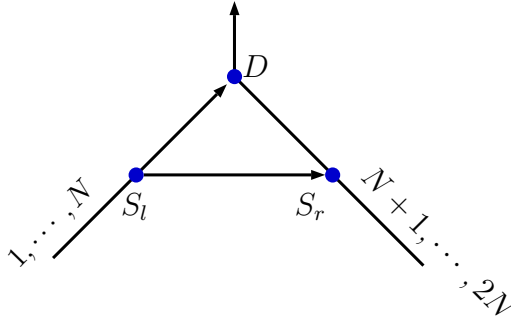


FIGURE 4.1 – Modèle de routage compétitif

Il y a $2N$ sources de flux, pour $S(i), i = 1, \dots, 2N$. Chaque flux est un processus ponctuel de Poisson de paramètre ϕ , indépendant et distribué, avec un débit ϕ . Les paquets provenant de la source $i = 1, \dots, N$ arrivent au noeud S_l , tandis que ceux provenant de $i = N + 1, \dots, 2N$ arrivent au noeud S_r . La source $i = 1, \dots, N$ peut diviser son flux entre son chemin direct $S_l D$ et le chemin indirect $S_l S_r D$. De même, la source $i = N + 1, \dots, 2N$ peut répartir son flux entre son chemin direct $S_r D$ et le chemin indirect $S_r S_l D$.

Chaque fois qu'un paquet arrive de la source i , celle-ci lance une pièce ayant une probabilité p_i d'obtenir un résultat appelé « direct » et une probabilité de $1 - p_i$ d'obtenir un résultat appelé « indirect ». Si le résultat est « direct », alors le paquet emprunte la route directe ; sinon, il emprunte la route indirecte. Ainsi, le processus des paquets provenant de la source i qui empruntent le chemin direct suit un processus de Poisson de taux ϕp_i , tandis que le processus des paquets qui empruntent le chemin indirect suit un processus de Poisson de taux $\phi(1 - p_i)$.

Soit x_l^i le débit du flux envoyé par la source i via la liaison l . Les liaisons $S_r S_l$ et $S_l S_r$ sont supposées être sans fil, de sorte que les paquets envoyés sur ces liaisons subissent des pertes indépendantes avec une probabilité fixe q . Le retard sur ces liaisons est considéré comme une constante notée δ . En revanche, les liens $S_l D$ et $S_r D$ sont supposés sans perte, mais entraînent un coût de congestion par unité de flux qui les utilise, donné par :

$$T_l(x) = \frac{1}{C - x_l}.$$

Où C est la capacité du lien et x_l représente le flux total passant par le lien l .

Par conséquent, pour chaque joueur i , considérons le processus d'arrivée des paquets au noeud S_k , qui sont ensuite redirigés vers le chemin indirect $S_k S_m D$ (avec $k \in l, r$ et $m \neq k$).

Ce processus suit également une loi de Poisson, avec un taux donné par :

$$\phi p(1 - p_i)(1 - q)$$

.

4.1.1 Coût total

Soit $i \leq N$. Le coût associé à la source i est une somme pondérée du retard moyen de son flux et de son taux de perte. Ce coût est donné par la formule suivante :

$$g_i(p) = \frac{\phi p_i}{C' - \phi \left(\sum_{j=1}^N p_j - q \sum_{j=N+1}^{2N} (1 - p_j) \right)} + \frac{\phi(1 - p_i)(1 - q)}{C' - \phi \left(q \sum_{i=1}^N (1 - p_j) - \sum_{j=N+1}^{2N} p_j \right)} + \phi(1 - p_i)[\delta(1 - q) + \gamma q] \quad (4.1)$$

Les trois premiers termes correspondent au coût du retard, tandis que le dernier terme représente le coût des pertes. Le premier terme reflète le coût de congestion sur le trajet direct partant de la source i , alors que les deux termes suivants illustrent le coût de congestion sur le trajet indirect.

La solution optimale symétrique est obtenue en minimisant $g_i(p)$ par rapport à p_i , sous la contrainte que les p_i sont identiques pour tout i (on omet donc i dans la notation de p_i). Soit :

$$X_l(x) = \phi \sum_{j=1}^N p_j + \phi q \sum_{j=N+1}^{2N} (1 - p_j).$$

la quantité qui représente le taux de paquets utilisant le lien $S_l D$.

Supposons que le coût du lien par unité de flux est linéaire dans ce flux. Cela revient à utiliser le premier terme du développement en série de Taylor de (4.1). Ainsi, $g_i(p)$ est approximé par :

$$g_i(p) = \phi p_i(ax_l + b) + \phi(1 - q)(1 - p_i)(ax_l + b) + \delta\phi(1 - p_i) + \gamma\phi q(1 - p_i).$$

où a et b sont des constantes positives.

4.2 Calcul de l'optimum global

Dans le cadre de notre étude, nous avons conçu une approche systématique afin de déterminer la solution optimale globale en termes de coût dans le réseau. Dans ce but, nous avons

formulé l'équation d'optimisation suivante :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{2N} J_i(p)}{\partial p} = 0$$

(À moins que ce ne soit pas à la limite).

En résolvant cette équation, nous avons obtenu une solution unique, qui s'exprime comme suit :

$$p = \frac{1}{2} \frac{a\phi N(2q^2 - 2q + 1) + bq - \gamma q - \delta}{\phi a q N(q - 1)}.$$

Dans le cadre de l'étude numérique, nous trouvons commode, de poser $z = \gamma q + \delta$, car la dépendance de l'optimum global ou de l'équilibre par rapport à chacun des deux paramètres δ et γ (pour un q fixé) ne se traduit que par la valeur de z . Ainsi, p peut s'écrire :

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\phi N(2q^2 - 2q + 1) + bq - z}{\phi a q N(q - 1)}$$

.

4.2.1 Conditions d'existence

Les conditions d'existence de la solution optimale jouent un rôle crucial dans la garantie de la résolution et de l'optimisation du modèle. Nous avons établi que :

$$g'(p) = 2a\phi^2 q^2 N(1 - p) + \phi bq + \phi^2 aN + 2a\phi^2 qN(p - 1) - \phi z.$$

De plus :

$$\begin{cases} g'(p) > 0 & \text{si } z < \phi a N (2q(q - 1)(1 - p) + 1) + qb, \\ g'(p) < 0 & \text{si } z > \phi a N (2q(q - 1)(1 - p) + 1) + qb. \end{cases}$$

Dans le premier cas, g est croissante et le minimum est atteint pour $p = 1$, et dans le second cas, g est décroissante et le minimum est aussi atteint pour $p = 1$.

Ces résultats soulignent les conditions sous lesquelles le comportement de la fonction de coût varie et mettent en lumière l'importance des paramètres z , ϕ , et q dans la détermination de l'optimum.

Les conditions de validité suivantes peuvent être résumées avant d'examiner les implications pratiques de notre modèle :

$$\begin{cases} p < 1 & \text{si } z < a\phi N + qb, \\ p > 0 & \text{si } z > a\phi N(2q^2 - 2q + 1) + qb. \end{cases}$$

Ces conditions reflètent un contexte de modélisation et garantissent que p reste dans une plage raisonnable en fonction des valeurs de z .

4.3 Calcul de l'équilibre de Nash

Dans notre modèle [15, 16], la détermination de l'équilibre de Nash est obtenu en posant : $p_i = p$ pour tous les i , sauf pour $i = 1$ où il est fixé à \hat{p} .

Pour chaque valeur de p , nous déterminons la meilleure réponse $\hat{p} = f(p)$ pour le joueur 1. Un point fixe de cette équation fournit l'équilibre recherché. En appliquant cette méthode, nous avons établi l'équilibre de Nash, qui s'exprime comme suit :

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{a\phi q N(p + q - pq) + q(\phi a p + \phi a - b + \gamma) - \phi a + \delta}{\phi a q}.$$

Ce résultat illustre les interactions stratégiques entre les joueurs et souligne l'influence des paramètres du modèle sur l'équilibre obtenu.

Soit \hat{p} le point obtenu en remplaçant p_1 par p . Nous obtenons ainsi :

$$\hat{p} = \frac{a\phi N q^2 + a\phi(1 - q) + qb - \gamma q - \delta}{a\phi q(qN - N - 1)}.$$

qui s'écrit comme :

$$\hat{p} = \frac{a\phi N q^2 + a\phi(1 - q) + qb - z}{a\phi q(qN - N - 1)}.$$

Ces équations permettent de mieux comprendre comment les variations des paramètres influencent les choix des joueurs et l'équilibre du système.

4.3.1 Conditions d'existence

Pour analyser les conditions d'existence de l'équilibre de Nash, il est crucial de définir le contexte dans lequel nous évoluons. Notre modèle s'appuie sur des relations précises entre les coûts, les quantités produites et les stratégies des joueurs. En dérivant la fonction de coût par rapport à \hat{p} et en égalant la dérivée à zéro, nous sommes en mesure d'identifier les conditions nécessaires pour établir l'équilibre. :

$$\begin{cases} \text{si } z > 2a\phi q N - a\phi N + bq, & g \text{ est une fonction décroissante,} \\ \text{si } z < 2a\phi q N - a\phi N + bq, & g \text{ est une fonction croissante.} \end{cases}$$

Ce système de conditions met en évidence le rôle déterminant de la variable z dans le comportement de la fonction g . Lorsque z dépasse le seuil défini ci-dessus g adopte un caractère décroissant, ce qui suggère que les joueurs peuvent être incités à réduire leur production ou à ajuster leurs stratégies, pouvant ainsi mener à un équilibre instable. En revanche, lorsque z est en dessous de ce seuil, g devient croissante, indiquant que les joueurs sont encouragés à accroître leur production ou à intensifier leurs efforts, favorisant ainsi la convergence vers un équilibre. Cette dualité souligne l'importance des paramètres économiques dans les décisions stratégiques des joueurs et met en lumière la dynamique potentielle du marché en fonction de la position relative de z par rapport à ce seuil critique. De plus :

$$\begin{cases} p < 1 & \text{si } z < a\phi(qN + 1) + bq, \\ p > 0 & \text{si } z > a\phi q^2 N + a\phi(1 - q) + bq. \end{cases}$$

ces conditions soulignent comment la perception des probabilités, en fonction de la variable z , influence les décisions stratégiques des joueurs dans le cadre de l'équilibre de Nash, révélant ainsi la dynamique entre la confiance dans les résultats et le comportement stratégique.

4.4 Prix de l'anarchie et nouveau paradoxe

Le prix de l'anarchie est le rapport entre la valeur de la fonction objectif dans le pire des cas d'un équilibre de Nash et celle d'un résultat optimal. Cet indicateur permet de quantifier la perte d'efficacité d'un système due au comportement égoïste de ses joueurs. En d'autres termes, il mesure dans quelle mesure l'optimisation individuelle peut nuire à l'efficacité collective. Cette mesure a été particulièrement utile pour évaluer l'inefficacité dans des contextes tels que les réseaux de congestion. Dans ce cadre, chaque utilisateur du réseau a une source et une destination, et il doit supporter un coût pour voyager entre ces deux points. En tenant compte de ces éléments, nous formulons le prix de l'anarchie comme suit :

$$P_{oA} = \frac{2Ng_i(\hat{p})}{2Ng_i(p)}.$$

Un paradoxe se produit si le remplacement de liaisons par des liaisons de meilleure qualité entraîne une performance pire. Dans notre cas, une liaison de meilleure qualité pourrait signifier une liaison avec un délai plus court δ ou une probabilité de perte plus faible q . Nous constatons dans notre étude qu'un paradoxe se produit lorsque la dérivée $g'(\delta)$ de la fonction g à l'équilibre, par rapport au délai δ , est négative. Cela indique qu'une amélioration du délai, qui devrait logiquement entraîner une meilleure performance, se traduit en réalité par une dégradation des résultats du système.

Ce phénomène souligne les complexités des interactions entre les joueurs et les effets non anticipés des changements dans la qualité des liaisons, révélant ainsi que des améliorations apparentes peuvent parfois nuire à l'efficacité globale. Nous développons l'expression suivante :

$$g'(\delta) = \frac{a\phi + a\phi N^2(1 + q^2) + 2a\phi Nq(1 - N) + 2bq - 2\delta - 2\gamma q}{aq(qN - N - 1)^2}.$$

Dans un réseau similaire, avec un objectif unique pour chaque joueur, des paradoxes ont été observés [4, 5, 33], dans lesquels, sous certaines conditions, l'amélioration de la qualité des liaisons entre S_r et S_l entraîne une performance dégradée pour tous les joueurs.

Nous pouvons rechercher un paradoxe similaire dans notre problème [15, 16], où la qualité de la liaison est mesurée par son délai (une meilleure qualité signifie un délai plus court) ou par son taux de perte (une meilleure qualité signifie un taux de perte plus faible). La condition pour ce type de paradoxe est que la fonction g à l'équilibre soit décroissante par rapport à un paramètre du réseau, tel que le délai δ . Ainsi, la dérivée g' à l'équilibre devrait être négative, et cette dernière est donnée par :

$$g'(\delta) = \frac{a\phi + a\phi N^2(1 + q^2) + 2a\phi Nq(1 - N) + 2bq - 2\delta}{aq(qN - N - 1)^2}.$$

Si $z > \frac{1}{2}\phi a(1 + N^2) - \frac{1}{2}\phi aqN(2N - qN - 2) + bq$, g est une fonction décroissante. Cette condition indique que, au-delà d'un certain seuil pour z , la fonction g commence à diminuer, ce qui peut avoir des implications significatives pour le comportement des joueurs dans le système. Cela souligne l'importance de comprendre les interactions entre les paramètres et leur influence sur la performance du réseau.

4.5 Résultats numériques

Pour valider nos résultats théoriques, nous entreprenons de les confronter à des simulations numériques, afin d'obtenir une vision plus concrète et approfondie de notre modèle. Dans ce cadre, nous choisissons les paramètres suivants : $a = 1$, $b = 1$, $N = 4$, $\phi = 1$ et $q = 0.5$. Ces valeurs nous permettront d'explorer en détail le comportement du système et de tester la robustesse de nos prédictions théoriques. Ainsi, le domaine d'existence de z dans ce contexte est [2.2, 3]

La Figure 4.2 illustre la solution optimale et le point d'équilibre en fonction de la variable z . \tilde{p} et p sont des fonctions croissantes en z et la solution optimale p est dominée par l'équilibre \tilde{p} , ce qui confirme les tendances théoriques prévues. La Figure 4.3 montre la fonction de coût

de la solution optimale $g(p)$ et l'équilibre $g(\hat{p})$ en fonction de z ; les deux courbes sont des fonctions croissantes. Cela met en lumière l'interaction entre le niveau de z et les coûts de mise en oeuvre des solutions dans le système.

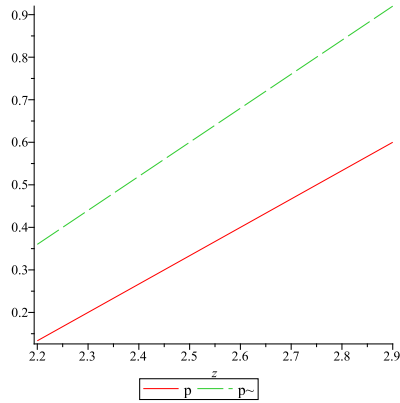


FIGURE 4.2 – Équilibre et solution optimale

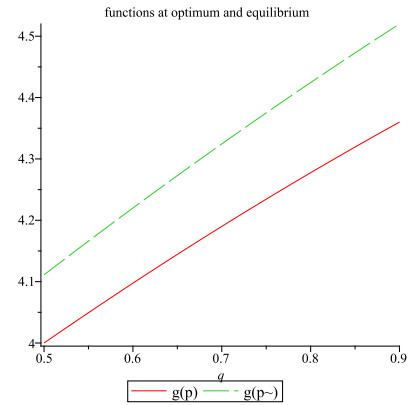


FIGURE 4.3 – Fonctions des coûts

Dans la Figure 4.4, nous présentons la variation de la fonction de coût à la solution optimale et à l'équilibre en fonction de la probabilité de perte q . Cette illustration nous permet d'observer comment les coûts évoluent en réponse aux changements de q , mettant en lumière les interactions entre la qualité des liaisons et les performances du système.

La Figure 4.5 montre la variation de la fonction de coût à l'équilibre en fonction du délai de liaison. Cette analyse met en évidence un paradoxe inattendu : bien qu'une amélioration apparente de la qualité des liaisons (par la réduction du délai) soit observée, les coûts peuvent paradoxalement augmenter, ce qui défie les attentes intuitives. Ces résultats soulignent la complexité des interactions au sein du système et l'importance d'une analyse approfondie pour comprendre pleinement les conséquences des modifications des paramètres.

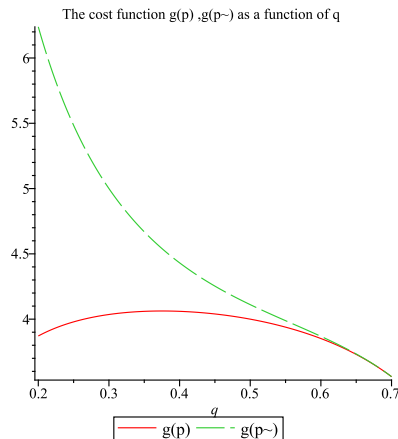


FIGURE 4.4 – Variation de la fonction coût

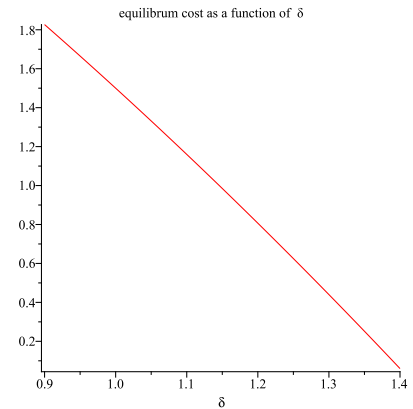


FIGURE 4.5 – Coût d'équilibre en fonction du délai

Le prix de l'anarchie est présenté dans la Figure 4.6. Nous constatons que, pour de faibles valeurs de z , le prix de l'anarchie se rapproche de 1. Cela indique qu'à ce niveau, l'efficacité du système est proche de l'optimum social, suggérant ainsi que le comportement individuel des joueurs n'entraîne pas de pertes significatives en termes de performance globale. En d'autres termes, lorsque z est faible, les joueurs semblent coopérer de manière plus efficace, et les décisions individuelles n'affichent pas un impact négatif important sur les résultats collectifs. Cela indique une situation où l'équilibre de Nash est proche de la solution optimale, ce qui est souhaitable dans un système idéal. Ce constat met en évidence que l'inefficacité associée au comportement égoïste des joueurs ne se manifeste que lorsque les valeurs de z augmentent, entraînant un écart croissant entre le prix de l'anarchie et l'optimum social.

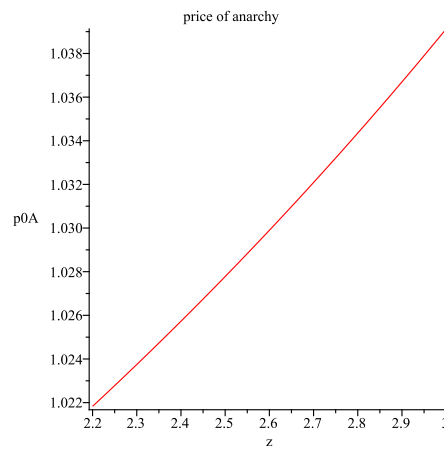


FIGURE 4.6 – Prix de l'anarchie

4.5.1 Discussions

Nouveau paradoxe : Nous identifions un nouveau type de paradoxe : le coût n'est pas monotone par rapport à la qualité de la liaison (la probabilité de perte q). Ce phénomène est dû à la structure multi-objectifs particulière de notre problème. En effet, une probabilité de perte plus élevée augmente le coût lié aux pertes, mais contribue à diminuer le coût global, car davantage de pertes entraînent une réduction de la congestion et donc des délais plus courts.

Paradoxe de Kameda : Nous retrouvons dans notre modèle le paradoxe déjà observé dans [4], [5], [33], selon lequel des délais de liaison plus longs peuvent être bénéfiques pour tous les utilisateurs. En effet, investir dans des liaisons plus rapides entraîne une augmentation des délais et dégrade ainsi les performances globales pour tous les joueurs. **Applications Pratiques de l'approche multi-Objectifs :** Cette approche peut être utilisée pour évaluer les coûts et les

délais dans divers domaines, tels que les études économiques, sociales et médicales, comme celle du Covid-19, où elle permet d'estimer le pic de l'épidémie. Elle offre ainsi la possibilité de déterminer une solution optimale (décision). L'élément clé de cette approche est la fonction de coût, qui doit être minimisée en fonction de la décision prise, tout en permettant à différents utilisateurs d'attribuer des poids distincts. La plupart des courbes actuellement disponibles correspondent à celles illustrées dans la Figure 4.4.

4.6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un jeu de routage caractérisé par des liaisons, des pertes et de la congestion, où les composants de délai et de perte sont directement associés aux coûts. À partir de nos résultats, nous avons calculé la solution optimale ainsi que l'équilibre symétrique. Plus important encore, nous avons identifié un nouveau paradoxe et démontré que le paradoxe de Kameda se manifeste également dans ce contexte. Nous avons également établi l'unicité de l'équilibre de Nash. Cette étude révèle un avantage majeur : même en présence de taux de perte élevés, un paradoxe peut survenir. De plus, nous avons obtenu des résultats théoriques significatifs, indiquant que l'approche proposée peut être appliquée avec succès dans des contextes quadratiques et qu'elle est facilement réalisable en pratique. En effet, cette approche pourrait être directement mise en œuvre dans des domaines tels que la gestion des ressources hospitalières, où l'optimisation des délais et des ressources est cruciale. Ce sujet sera exploré plus en détail dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

INNOVATION DANS L'OPTIMISATION DES PERFORMANCES AMBULATOIRES

Les hôpitaux représentent des systèmes complexes qui, bien qu'ils offrent de nombreux avantages, peuvent être coûteux pour le grand public. La surpopulation dans les zones d'attente, les urgences, les unités de soins intensifs et les départements de consultations externes (OPD) constitue une préoccupation majeure. Cette situation résulte souvent d'une gestion inadéquate des systèmes de files d'attente dans plusieurs départements [49, 37]. En effet, lorsque le nombre de serveurs est inférieur à celui des patients à traiter, des files d'attente se forment. Pour remédier à ces inefficacités, la simulation d'événements discrets (DES) s'avère être un outil précieux, permettant d'analyser et d'optimiser la gestion des flux de patients ainsi que l'utilisation des ressources dans les établissements de santé [13, 23, 29, 56, 34, 32].

La modélisation dynamique est particulièrement adaptée pour comprendre les enjeux complexes en santé publique, en s'appuyant sur des modèles de simulation qui capturent les dynamiques d'accumulation et garantissent des résultats fiables [31, 51, 47, 71]. Lane et al. ont développé un modèle visant à gérer le temps d'attente des patients dans un service d'urgence, en analysant les défis rencontrés par les professionnels de santé lors de la création de modèles simplifiés [38]. En utilisant le modèle DES, Das a montré que les ajustements proposés pour le processus COVID-19 avaient un impact négatif significatif sur les mesures de productivité et les indicateurs opérationnels [20].

Dans ce chapitre, nous commencerons par examiner les fondements théoriques des systèmes dynamiques et de la simulation d'événements discrets, dans le but d'optimiser les performances des systèmes de files d'attente. Nous nous concentrerons ensuite sur l'optimisation de la longueur des files d'attente et du temps d'attente des patients dans l'OPD. À cette fin, nous avons développé à la fois un modèle DES et un modèle de systèmes dynamiques (SD) en utilisant les mêmes données. Étant donné que l'interaction des variables, temps d'attente, nombre de patients, nombre de serveurs et coût d'opportunité est non linéaire, nous avons

choisi l'approche SD pour nos calculs. De plus, nous avons élargi nos résultats pour inclure le calcul du prix de l'anarchie et de l'équilibre de Nash, afin de déterminer la meilleure stratégie à adopter via les approches DES et SD. Cette recherche démontre comment les techniques de modélisation DES et SD peuvent être utilisées pour améliorer les performances des OPD, offrant ainsi aux hôpitaux des solutions efficaces pour optimiser leur fonctionnement.

5.1 Systèmes Dynamiques : Concepts et éléments essentiels

5.1.1 Système

Un système est un ensemble d'éléments interconnectés qui interagissent pour atteindre un objectif commun ou produire un résultat. Ces éléments peuvent être physiques, des processus ou des acteurs, et leurs interactions sont influencées par des facteurs externes. Les systèmes se caractérisent par des **entrées** (E), des **processus internes** (P) et des **sorties** (S). Cette relation peut être exprimée par la formule suivante :

$$S = f(E, P)$$

où f est la fonction qui relie les entrées et les processus aux sorties. Les systèmes peuvent être simples ou complexes selon la nature et le nombre de leurs éléments et interactions.

5.1.2 Système dynamique

Un système dynamique est un modèle mathématique qui décrit le comportement d'un système en fonction du temps, permettant d'analyser comment les variables interagissent les unes avec les autres. Un système dynamique peut être représenté par deux manières :

1. Une équation différentielle ordinaire dans le cas d'une évolution continue dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$$

2. Un système d'équations dans le cas d'une évolution discrète dans le temps :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases}$$

Un regard plus avancé sur le développement des modèles et la théorie des systèmes dynamiques peuvent être trouvés dans [28].

Définition 5.1. *L'état d'un système dynamique est un ensemble de variables dont les valeurs à l'instant t_0 sont nécessaires pour déterminer de manière unique les sorties $y(t)$ pour tout $t \geq t_0$, étant donné les entrées $U(t)$ pour tous $t \geq t_0$.*

5.1.3 Classification des systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques se classifient en quatre catégories : systèmes groupés, systèmes à temps continu ou discret, systèmes à variation ou invariants dans le temps, et systèmes linéaires et non linéaires.

Définition 5.2. *Un système est dit linéaire s'il peut être décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini à coefficients constants, plusieurs limitations sont considérées pour la modélisation d'un système par une représentation linéaire.*

Définition 5.3. *Un système qui n'est pas linéaire est un système qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

Il existe plusieurs points d'équilibre isolés dans un système non linéaire (le point d'équilibre est unique dans un système linéaire).

5.1.3.1 Systèmes linéaires vs non linéaires

Principe de superposition

La superposition, dans le cadre des systèmes linéaires, est un principe clé qui stipule que la réponse globale d'un système linéaire à une combinaison d'entrées est égale à la somme des réponses du système à chaque entrée prise individuellement. Autrement dit, si l'on considère deux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, la réponse du système à la somme de ces entrées, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, correspondra à :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

où $y_1(t)$ est la réponse à $x_1(t)$ et $y_2(t)$ est la réponse à $x_2(t)$.

Point d'équilibre

Le point d'équilibre, dans le contexte des systèmes dynamiques, est un état où le système reste stable et ne subit pas de changement sans intervention extérieure. Plus précisément, c'est un point où les forces ou les influences qui agissent sur le système se compensent, de sorte que la dynamique du système ne varie pas.

- Un point d'équilibre est considéré comme stable si, lorsqu'il est légèrement perturbé, le système revient vers ce point.
- Un point d'équilibre est instable si une petite perturbation peut provoquer l'éloignement du système de ce point.

- Dans un système dynamique décrit par des équations différentielles, un point d'équilibre (x^*, y^*) est généralement trouvé en résolvant les équations lorsque les dérivées sont égales à zéro :

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

Les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition, ce qui facilite leur analyse et leur résolution. Ils permettent de déterminer l'existence et l'unicité des solutions, ainsi que d'étudier les points d'équilibre à l'aide des valeurs propres. En revanche, les systèmes non linéaires présentent un comportement plus complexe et ne respectent pas le principe de superposition. Leur analyse requiert une compréhension approfondie des systèmes linéaires, car, près des points d'équilibre, les systèmes non linéaires peuvent se comporter de manière similaire à leurs homologues linéaires. Ainsi, bien que les systèmes linéaires soient plus simples à traiter et largement utilisés dans divers domaines [7, 12, 21, 30], les systèmes non linéaires jouent un rôle clé dans la modélisation de phénomènes naturels et techniques de manière plus authentique [58].

5.1.4 Système dynamique à l'hôpital

Les systèmes dynamiques peuvent être employés dans les hôpitaux pour augmenter l'efficacité, optimiser la prise en charge des patients et diminuer les coûts [65]. Quelques méthodes et exemples d'application de ces systèmes dans un environnement hospitalier incluent :

1. Système de gestion des lits

$$\frac{dL}{dt} = A - D \quad (5.1)$$

où :

- L = nombre de lits occupés
- A = taux d'admission de nouveaux patients
- D = taux de sortie de patients (guérison, transfert, décès)

2. Système de file d'attente aux urgences

$$W = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (5.2)$$

où :

- W = temps moyen d'attente
- λ = taux d'arrivée des patients
- μ = taux de service des médecins

3. Modèle de propagation des infections

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (5.3)$$

où :

- S = nombre de personnes susceptibles
- I = nombre de personnes infectées
- R = nombre de personnes rétablies
- β = taux de transmission
- γ = taux de récupération

4. Système de gestion des stocks de médicaments

$$\frac{dM}{dt} = R - U \quad (5.4)$$

où :

- M = quantité de médicaments en stock
- R = taux de réception de nouveaux médicaments
- U = taux d'utilisation des médicaments

5. Modèle de planification des ressources humaines

$$N(t) = N_0 + \int_0^t (A(s) - D(s))ds \quad (5.5)$$

où :

- $N(t)$ = nombre de personnel disponible à un moment t
- N_0 = personnel initial
- $A(s)$ = taux d'embauche
- $D(s)$ = taux de départ

5.1.5 Modélisation et simulation des systèmes dynamiques avec Anylogic

AnyLogic est un logiciel de simulation de systèmes dynamiques qui permet aux utilisateurs de modéliser, d'analyser et de visualiser des systèmes complexes dans divers domaines, tels que l'ingénierie, la logistique [62], la santé, et l'économie. Il combine plusieurs approches de modélisation, notamment les événements discrets, les systèmes dynamiques et les modèles basés sur les agents (ABM). Parmi ses propriétés, on note :

- **Multimodélisation** : AnyLogic supporte plusieurs paradigmes de modélisation (DES, SD, ABM), ce qui permet une flexibilité dans la représentation des systèmes.

- **Interface Graphique** : L'interface utilisateur est intuitive, permettant une modélisation visuelle avec des éléments graphiques que l'on peut glisser-déposer.
- **Intégration de Données** : Capacité d'intégrer des données provenant de sources externes, telles que des bases de données, pour des simulations basées sur des données réelles.
- **Analyse et Visualisation** : Outils robustes pour l'analyse des résultats de simulation, y compris des graphiques, des tableaux et des visualisations 2D et 3D.
- **Optimisation** : Fonctionnalités pour exécuter des scénarios multiples et optimiser les paramètres pour améliorer les performances des systèmes modélisés.
- **Support pour les Langages de Programmation** : Utilisation de Java pour l'extension des modèles, permettant d'ajouter des scripts personnalisés et des fonctions avancées.
- **Interopérabilité** : Capacité d'interagir avec d'autres systèmes et logiciels, ce qui facilite l'intégration dans des environnements de travail existants.

Quelques formules utiles dans AnyLogic :

a. **Équations de Stock et de Flux**

La dynamique d'un stock peut être décrite par l'équation :

$$\frac{dS}{dt} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}}$$

où S est le stock, F_{in} est le flux entrant et F_{out} est le flux sortant.

b. **Règles de Comportement des agents**

Définir le comportement d'un agent peut impliquer des formules telles que :

$$v = k \cdot \frac{d}{d_0}$$

où v est la vitesse de l'agent, k est un coefficient et d_0 est une distance de référence.

c. **Fonctions de coût**

Pour modéliser le coût d'un système :

$$C = c_1 \cdot x + c_2 \cdot y$$

où C est le coût total, c_1 et c_2 sont des coefficients, et x et y sont des variables de décision.

5.2 Modèle DES et SD

Lorsqu'il s'agit de déterminer quelle approche est la mieux adaptée pour modéliser un problème particulier, les questions clés sont : quel type de modèle représente le mieux le système étudié, quelles questions le décideur souhaite-t-il aborder, et dans quel but le modèle sera-t-il utilisé ?

La méthodologie SD est mieux adaptée aux problèmes liés aux processus continus, où les rétroactions affectent de manière significative le comportement du système, produisant des changements dynamiques. Les modèles DES, en revanche, sont plus adaptés pour modéliser des changements discrets dans le comportement du système [59, 61, 41]. Ces modèles sont utilisés lorsque l'objectif est d'obtenir une estimation statistiquement valide de la performance du système. Le SD est plus souvent choisi comme outil pour des véhicules de formation. Il existe certainement un large domaine de chevauchement entre les deux approches. De nombreux problèmes pourraient être modélisés avec l'une ou l'autre de ces approches et produire des résultats très similaires. Les deux méthodes, lorsqu'elles sont utilisées de manière appropriée, peuvent aider à mieux comprendre et à soutenir la prise de décision [63].

5.2.0.1 Comparaison des modèles SD et DES

Le modèle SD est un modèle de boucles causales, tandis que le modèle DES est un modèle de flux de processus du même système. Les modèles diffèrent car les deux méthodologies sont, en pratique, utilisées à des fins différentes.

Une représentation DES du système se concentrerait généralement sur les aspects observables et mesurables de la production. Le processus a un début et une fin clairement définis, et les entités se déplacent dans le système de manière linéaire. Il n'y a pas de boucles de rétroaction. Bien que les mêmes facteurs qui affectent la productivité puissent être intégrés dans le modèle DES, ces facteurs sont généralement omis. À la place, le modèle DES reflète une analyse détaillée des données historiques sur le comportement du système.

En l'absence de données historiques, des données provenant de la performance de systèmes similaires peuvent être utilisées. L'effet des facteurs présents dans le modèle SD, mais omis dans le modèle DES, est capturé dans les distributions statistiques associées à chaque processus inclus dans la représentation DES.

Les deux diagrammes reflètent l'approche profondément différente de chaque méthodologie. Dans la mesure où les facteurs présents dans le modèle SD génèrent des changements dynamiques au fil du temps, l'approche DES pourrait induire en erreur un décideur. Cependant, le modèle DES produira une représentation statistiquement valide du comportement historique du système étudié. En utilisant cela comme point de départ, le modèle DES pourrait ensuite être mis à jour avec de nouvelles informations, à mesure que des changements

dans le système se produisent ou sont anticipés.

5.3 Simulation par le modèle DES dans l’OPD

La simulation dans l’OPD permet d’analyser et d’optimiser les processus en tenant compte des événements discrets qui modifient l’état du système. Le modèle DES, particulièrement adapté à ces situations, offre une représentation précise des flux et des dynamiques dans les systèmes complexes.

5.3.1 Système à événements discrets

Un système à événements discrets est un système dynamique, à état discret, il est caractérisé par :

1. **Ensemble d’événements discret**

Un ensemble d’événements discrets est une collection d’événements E , tel que : $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$, où chaque e_i représente un événement distinct dans le système.

2. **Espace d’états discret**

Un espace d’états discret X est tel que : $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$, où chaque x_j représente un état possible du système.

3. **Dynamique événementielle**

La dynamique événementielle décrit le processus de transition d’un état à un autre en fonction des événements qui se produisent dans un système. Cette dynamique peut être modélisée par des fonctions de transition d’état.

Soit T la fonction de transition qui spécifie l’évolution d’un état x_i en réponse à un événement e_k tel que : $T : X \times E \rightarrow X$. Cela implique que, pour chaque état x_i et chaque événement e_k , il existe un nouvel état x_j tel que : $x_j = T(x_i, e_k)$.

5.3.2 Service de consultation externe

L’OPD est un service ambulatoire permettant aux patients de consulter un médecin sans hospitalisation, avec la possibilité de se rendre dans d’autres établissements médicaux. L’augmentation de la demande a amélioré l’expérience patient et la qualité des soins. Les systèmes de santé visent à réduire les coûts et à optimiser les ressources à travers différentes stratégies [54, 53]. Dans ce contexte, le modèle DES s’avère être un outil efficace pour évaluer les performances et les choix stratégiques, en tenant compte des flux de patients, des taux d’arrivée et des ressources disponibles [19].

Exemple 5.4. Un exemple de modèle développé par Hafzoh et al. [10] vise à fournir une vue d'ensemble du système réel de la Polyclinique de Médecine Interne (voir Table 5.1). Ce modèle permet de mesurer les performances réelles du système et d'identifier des alternatives optimales basées sur les résultats de l'analyse. Les données d'entrée comprennent les éléments suivants :

- Nombre d'arrivées de patients chaque jour.
- Probabilité de choisir un médecin.
- Temps entre les arrivées du patient.
- Temps de service administratif.
- Temps de service de triage.
- Temps de service du médecin.

Les principaux paramètres utilisés dans cette recherche pour prise de décision sont le temps d'attente du patient et la durée file d'attente.

Nom	T-système	T-opération	T-logiciel
Patients sortants	5,17	0,07	4,82

TABLE 5.1 – Modèle d'analyse des performances

Diverses alternatives ont été proposées pour réduire le temps d'attente dans le système, notamment l'installation d'un modèle d'appel des patients, la création de postes spécifiques pour les infirmières et l'ajout d'installations informatiques au service. Les résultats de simulation sont basés sur les paramètres relatifs au temps d'attente. Chaque alternative peut être mise en œuvre dans la section de triage, où les conditions de soumission et de traitement à la Polyclinique de Médecine Interne sont réévaluées. Dans ce processus, l'infirmière prend en charge le dossier administratif et le distribue à chaque service de tri, tout en récupérant et redistribuant les fichiers entre la section administrative et les bureaux des médecins.

5.3.3 Structure d'un modèle DES

La modélisation d'un système à événements discrets est essentielle dans le contexte de la simulation [69, 36], car elle permet de représenter de manière précise le comportement des systèmes complexes.

Soit Z l'ensemble des types d'événements d'entrée externes au système d'événements discrets. Notons ζ l'ensemble des types d'événements de sortie externes. Soit S l'ensemble des états du système, où un sous-ensemble de variables d'état comprend la liste des événements futurs à l'instant donné.

L'abstraction DES est alors donnée par le 7-uplet :

$$(Z, \zeta, S, \sigma_{\text{int}}, \sigma_{\text{ext}}, \lambda, \tau)$$

où

- $\sigma_{\text{int}} : S \rightarrow S$ est la fonction de transition interne qui dicte les transitions d'état dues aux événements internes.
- $\sigma_{\text{ext}} : \omega \rightarrow S$ est la fonction de transition externe dictant les transitions d'état dues à des événements d'entrée externes.

De plus,

- $\omega = \{(s, e) \mid s \in S, 0 \leq e \leq \tau(s)\}$ est l'ensemble total des états du modèle.
- (s, e) représente l'état d'avoir été dans l'état s pendant le temps écoulé e .
- $\lambda : S \rightarrow \zeta$ est la fonction de sortie générant des événements externes, et $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+^0$ est le temps minimum des événements futurs. Si le système est dans l'état s à l'instant t , alors il restera dans cet état jusqu'à ce que $t + \tau(s) \geq 0$.

En utilisant cette abstraction, les simulateurs peuvent créer des représentations numériques des systèmes, où chaque événement, qu'il soit d'entrée ou de sortie, peut être traité individuellement. Cette approche permet non seulement d'analyser les performances du système en temps réel, mais aussi de prévoir son comportement futur en fonction des événements internes et externes. Ainsi, la simulation d'événements discrets devient un outil puissant pour évaluer les scénarios, optimiser les processus et prendre des décisions éclairées dans divers domaines d'application, tels que la logistique, la production ou les services.

5.3.4 Modèles de simulation

Une simulation informatique est un calcul qui émule le comportement d'un systèmes conceptuels au fil du temps. Il existe trois principales techniques de simulation [26] :

1. Simulation discrète : Modélisation de systèmes où les changements d'état se produisent à des instants discrets dans le temps. Cette approche permet de suivre l'évolution du système à chaque événement, facilitant ainsi l'analyse des performances.
2. Simulation continue : la simulation continue modélise des systèmes où les variables d'état varient de manière fluide et continue dans le temps. Les équations différentielles sont souvent employées pour représenter le comportement du système.
3. Simulation d'événements discrets [9] : Cette méthode modélise des systèmes en se concentrant sur les événements qui entraînent des changements d'état à des moments spécifiques. Chaque événement, qu'il s'agisse d'une arrivée, d'un départ ou d'un changement de condition, est enregistré et traité individuellement. Cela permet de suivre

l'évolution du système au fil du temps, en fournissant des informations détaillées sur les performances, les délais d'attente et d'autres métriques clés. Cette approche est particulièrement utile dans des domaines tels que la logistique [52], la gestion des files d'attente et les systèmes de production, où il est essentiel de comprendre comment les événements influencent le comportement global du système.

5.3.5 Planification dans le service ambulatoire

La planification est un facteur clé influençant l'efficacité des hôpitaux. Elle permet une utilisation optimale des ressources disponibles et contribue à offrir un service de qualité, ce qui améliore la satisfaction des patients en réduisant les temps d'attente [1]. Le temps d'attente est un élément crucial à considérer dans la gestion du système de santé. Bien qu'il ne soit pas le seul déterminant de la satisfaction des patients, il constitue un indicateur important de la qualité des services ambulatoires [57]. Par ailleurs, l'accès aux médecins joue également un rôle essentiel dans la performance des hôpitaux.

Pour optimiser la gestion des rendez-vous dans un service ambulatoire, il est possible de modéliser le nombre de rendez-vous nécessaires en fonction de la durée des consultations et du taux d'absence.

1. Modèle de rendez-vous

Le nombre de rendez-vous N_r est donné par :

$$N_r = \frac{\lambda \cdot T}{1 - p} \quad (5.6)$$

où :

- T = durée totale de disponibilité des médecins
- p = probabilité d'absence d'un patient

2. Modèle de capacité de traitement

Pour déterminer la capacité nécessaire pour traiter un certain nombre de patients par jour, on définit la capacité nécessaire C comme suit :

$$C = \frac{D}{\mu} \quad (5.7)$$

où :

- D = demande totale de patients par jour
- μ = nombre moyen de patients traités par médecin par jour

3. Modèle de temps de cycle

Le temps de cycle total pour un patient dans le service ambulatoire peut être modélisé en tenant compte de divers processus.

Temps de cycle T_{cycle} :

$$T_{cycle} = T_{attente} + T_{consultation} + T_{traitement} \quad (5.8)$$

où :

- $T_{attente}$ = temps d'attente avant la consultation
- $T_{consultation}$ = temps de consultation avec le médecin
- $T_{traitement}$ = temps nécessaire pour tout traitement ou suivi

5.4 Approche dynamique de la modélisation des performances ambulatoires

Dans notre travail, nous introduisons une innovation dans le domaine des méthodes de recherche appliquée. De nombreuses études ont utilisé des modèles DES pour optimiser les performances des établissements de santé. Bien qu'une de ces études ait intégré à la fois la modélisation basée sur les agents (ABS) et la modélisation DES, nous avons constaté qu'aucune recherche n'avait combiné les approches de modélisation DES et de SD. C'est précisément ce que nous avons accompli dans notre étude, en intégrant ces deux approches, nous avons créé un cadre hybride qui permet une meilleure représentation des interactions complexes au sein des systèmes de santé. Cette synergie nous a permis de capturer à la fois les dynamiques temporelles des événements discrets et les rétroactions continues propres à la modélisation dynamique, offrant ainsi une analyse plus complète et des recommandations plus précises pour l'optimisation des performances des établissements. De plus, notre travail se distingue par l'utilisation de l'équilibre de Nash pour sélectionner la meilleure stratégie. Enfin, nous examinons également le prix de l'anarchie, qui met en lumière l'impact des décisions individuelles sur l'efficacité globale du système, renforçant ainsi l'importance de notre approche.

5.5 Méthodologie de recherche

Dans cette section, nous avons d'abord collecté des données sur le taux d'arrivée des patients au service ambulatoire, ainsi que sur leur prise en charge à l'accueil (taux de service), lors du triage et par différents médecins. Ensuite, nous avons développé un modèle à l'aide du logiciel Anylogic, en utilisant des techniques de modélisation DES et SD (voir la Figure 5.4).

Nous avons mesuré le taux d'arrivée des patients au service ambulatoire en fonction du nombre de patients arrivant par heure. Ce taux a été intégré dans la fonction de distribution personnalisée du logiciel Anylogic, ce qui a permis d'optimiser notre modélisation. Pour le

taux de service à l’accueil, nous avons collecté les temps nécessaires pour traiter chaque patient, que nous avons également intégrés dans la fonction de distribution personnalisée pour les différentes étapes du service. Certaines de ces fonctions de distribution sont présentées ci-dessous.

Nous avons également utilisé des pools de ressources pour représenter l’ensemble des ressources disponibles, y compris les réceptionnistes, les infirmières et divers types de médecins. Des paramètres ont été établis pour initier le nombre de ces ressources (voir 5.3). Grâce à la fonction de distribution, nous avons pu calculer la répartition des données réelles concernant le taux d’arrivée, comme illustré dans la figure 5.1.

Parallèlement, nous avons enregistré le taux de service à la réception, qui correspond au temps nécessaire pour servir un patient. Les données ont été collectées sur une journée au niveau de l’accueil. De manière similaire au taux d’arrivée, ce taux de service a été intégré dans une fonction de distribution personnalisée dans Anylogic, dont les résultats sont présentés dans la figure 5.2. Notre approche systématique et nos outils ont permis d’affiner notre analyse et d’améliorer la compréhension des flux de patients dans le service ambulatoire.

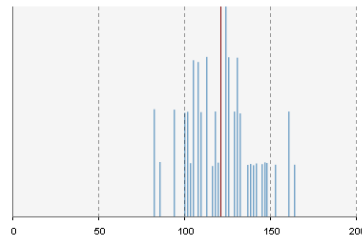


FIGURE 5.1 – Taux d’arrivée des patients à la clinique.

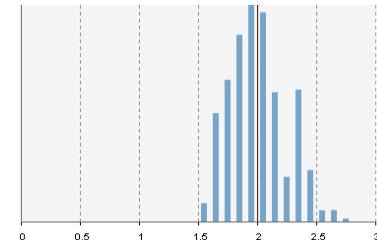


FIGURE 5.2 – Taux de service des patients à l’accueil.

Nous avons également utilisé des fonctions de distribution pour le taux de service des patients à différents stades de l’OPD [17].

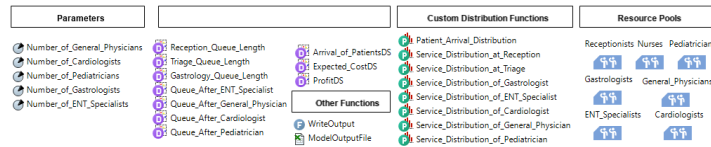


FIGURE 5.3 – Paramètres, fonctions de distribution personnalisées du modèle.

5.5.1 Développement du modèle

5.5.1.1 Développement d’un modèle DES

Dans le cadre de notre discussion sur le flux de travail du service ambulatoire et le flux des patients, nous avons développé un modèle par événements discrets, illustré dans la figure

5.4. Nous avons intégré plusieurs éléments issus de notre collection de modélisation pour représenter ce processus de manière précise.

La source a été utilisée pour modéliser l'arrivée des patients, en intégrant le nombre de patients arrivant au service ambulatoire par heure dans la fonction de distribution personnalisée. Ainsi, l'entrée de la source dans le modèle a été définie comme la « Distribution d'Arrivée des Patients ». Une fois que les patients sont entrés dans l'OPD, nous avons enregistré leur temps d'entrée à l'aide du bloc « mesure du temps de début » de la collection de modélisation de processus d'Anylogic. Grâce à ces outils et techniques, notre travail permet de mieux comprendre et optimiser le flux de patients dans le service ambulatoire. La réceptionniste de

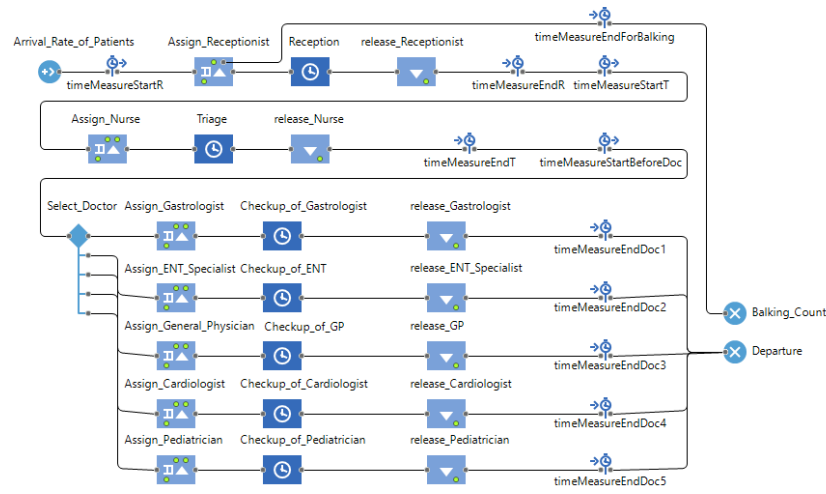


FIGURE 5.4 – Modèle de simulation à événements discrets conçu dans Anylogic.

notre pool de ressources a été affectée à l'accueil, ce qui a entraîné la formation d'une file d'attente. Nous avons mis en place une condition stipulant que si le temps d'attente d'un patient à l'accueil dépasse 60 minutes, celui-ci choisit de partir. Pour gérer le service des patients à l'accueil, nous avons utilisé une fonction « Délai », et nous avons défini la distribution de service comme « distribution de service à l'accueil ». Grâce à ces mesures, nous avons pu modéliser de manière précise les interactions à l'accueil et évaluer les impacts sur le flux de patients, renforçant ainsi la pertinence de notre travail pour optimiser l'efficacité du service ambulatoire.

Nous avons calculé le temps total passé par les patients à l'accueil : $T_{\text{total}} = T_{\text{attente}} + T_{\text{service}}$. Cette mesure a été effectuée à l'aide de la fonction « mesure du temps de fin » de la collection de modélisation de processus. De la même manière, nous avons mesuré le temps passé par les patients dans les différents canaux de service (triage, gastro-entérologie, ORL, cardiologie, pédiatrie et médecine générale). Ces calculs nous ont permis d'obtenir une vue d'ensemble précise du parcours des patients au sein du service ambulatoire.

Après avoir été servis à l'accueil, nous avons observé que les patients étaient pris en charge

par les infirmières au triage. Une fois le triage effectué, les patients étaient orientés vers un type de médecin spécifique en fonction de la nature de leur problème de santé, conformément aux pourcentages mentionnés (voir tableau 5.2)

Domaine	Pourcentage%
Gastro-entérologie	36,68
ORL	12,47
Cardiologie	27,68
Problèmes pédiatriques	13,95
Médecine générale	9,23

TABLE 5.2 – Pourcentage de patients selon le domaine rencontré.

Une fois le triage effectué, les patients étaient orientés vers un type de médecin spécifique en fonction de la nature de leur problème de santé, conformément aux pourcentages mentionnés.

À la fin du système de file d'attente, nous avons enregistré le temps passé par les patients en attente de consulter le médecin ainsi que le temps de consultation. Lorsqu'un patient avait été servi par tous les canaux de service, il quittait l'OPD. Grâce à cette approche, nous avons pu analyser efficacement le parcours des patients et optimiser leur expérience au sein du service ambulatoire.

5.5.1.2 Développement du modèle de système dynamique

Dans cette partie, nous avons développé le modèle de systèmes dynamiques (voir Figure 5.5). Nous avons créé un diagramme de stocks et de flux en utilisant le flux de patients à travers divers canaux de service, tout en intégrant les différentes distributions utilisées dans le modèle DES aux flux du modèle de dynamique des systèmes.

Nous avons également défini l'entrée dans le flux de taux d'arrivée comme la distribution d'arrivée des patients, tandis que le flux, c'est-à-dire le taux de service à l'accueil, a été initialisé avec la fonction de distribution correspondante. De même, nous avons initialisé le taux de service au triage avec la distribution de service appropriée. Les distributions de service des patients par les différents types de médecins ont également été intégrées de la même manière.

Nous avons représenté l'ensemble des équations créées pour modéliser les différents stocks utilisés dans la Figure 5.5.

Le taux de patients arrivés à l'instant t est donnée par :

$$P_a(t) = \int_{t_0}^t \varphi_{ar} ds + P_a(t_0) \quad (5.9)$$

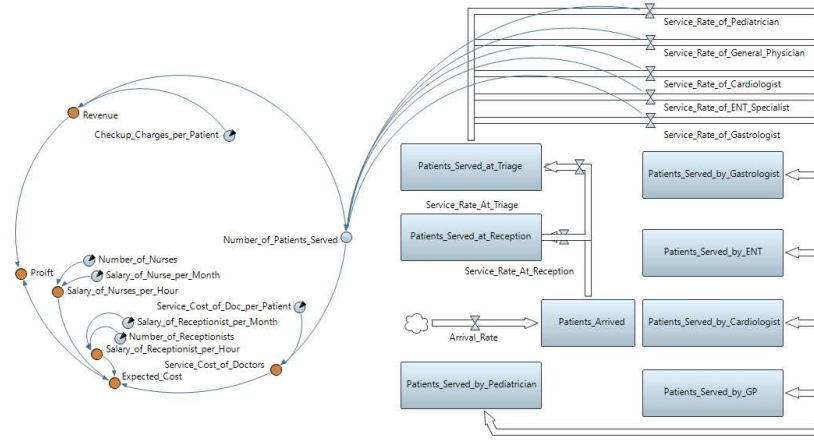


FIGURE 5.5 – Modèle du système dynamique synchronisé avec le modèle DES.

Cela permet de modéliser l'accumulation des arrivées de patients au fil du temps.

Les taux des patients servis à la réception, au triage et par les gastro-entérologues sont respectivement données par :

$$P_{sr}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{ar} - \varphi_{srr}] ds + P_{sr}(t_0) \quad (5.10)$$

$$P_{st}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{srr} - \varphi_{srt}] ds + P_{st}(t_0) \quad (5.11)$$

$$P_{sg}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{srt} - \varphi_{srg}] ds + P_{sg}(t_0) \quad (5.12)$$

Dans les services ORL, cardiologie, médecine générale et pédiatrie, les équations correspondantes sont présentées comme suit :

$$P_{sent}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{srt} - \varphi_{srent}] ds + P_{sent}(t_0) \quad (5.13)$$

$$P_{sc}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{srt} - \varphi_{src}] ds + P_{sc}(t_0) \quad (5.14)$$

$$P_{sgp}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{srt} - \varphi_{srgp}] ds + P_{sgp}(t_0) \quad (5.15)$$

$$P_{sp}(t) = \int_{t_0}^t [\varphi_{srt} - \varphi_{srp}] ds + P_{sp}(t_0) \quad (5.16)$$

Le nombre total de patients servis à l'OPD est donné par :

$$N_{ps} = \varphi_{srg} + \varphi_{srent} + \varphi_{src} + \varphi_{srgp} + \varphi_{srp} \quad (5.17)$$

Où : φ_i représente le taux d'arrivée pour chaque catégorie définit ci-dessous.

Le coût des réceptionnistes par heure est représenté dans l'équation :

$$C_{rph} = \frac{C_{rpm}}{D_w T_h} N_{recep} \quad (5.18)$$

Le coût des infirmières par heure est exprimé par :

$$C_{nph} = \frac{C_{nurpm}}{D_w T_h} N_{nur} \quad (5.19)$$

où

- D_w : nombre de jours de travail .
- T_h : nombre d'heures de travail.

Le coût des services des médecins est fourni par :

$$C_{sd} = N_{ps} C_{sdocpp} \quad (5.20)$$

On donne

- Le coût total attendu :

$$C_{ex} = C_{rph} + C_{nph} + C_{sd} \quad (5.21)$$

- Les revenus :

$$R = N_{ps} C_{check} \quad (5.22)$$

En se basant sur un revenue R Les bénéfices sont exprimés par :

$$P = (R - C_{ex}) \quad (5.23)$$

Où C_i est le coût associé, C_{ex} représente le Coût prévu et N_i le nomre associé pour chaque type de médecins.

5.5.2 Initialisation du modèle

Nous avons analysé le modèle DES, qui a été initialisé dans deux scénarios, comme indiqué dans la Figure 5.6. Le scénario 1 représente la situation actuelle de l'OPD, tandis que le scénario 2 illustre la situation que nous avons suggéré pour l'OPD. Étant donné que la performance de l'OPD dépend du nombre de ressources et de la longueur de la file d'attente

après chaque ressource humaine (réceptionniste, infirmière, gastro-entérologue, spécialiste ORL, cardiologue, pédiatre et médecin généraliste), elle est tributaire de la disponibilité de ces ressources. Nous avons également étudié l'initialisation du modèle de discussion, qui a été appliquée aux deux modèles, car ils sont intégrés.

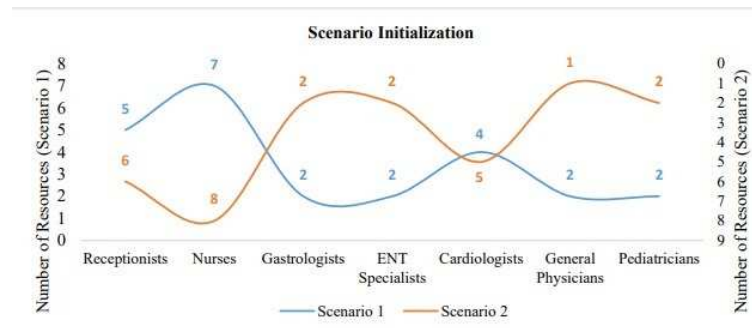


FIGURE 5.6 – Initialisation du modèle DES.

Puisque la performance de l'OPD est basée sur le nombre de ressources, nous avons constaté que la longueur de la file d'attente après chaque ressource humaine dépend de la disponibilité de ces ressources. Nous avons également appliqué l'initialisation du modèle de discussion aux deux modèles, car ils sont intégrés.

5.6 Analyse des résultats et interprétations

Dans cette section, nous avons examiné les résultats de la situation actuelle de l'OPD. Après avoir accru le nombre de certaines ressources, nous avons analysé en profondeur la longueur de la file d'attente et divers autres paramètres.

5.6.1 Taux d'arrivée des patients

Le taux d'arrivée des patients, présenté dans la Figure 5.7, a été dérivé de la sortie du flux, correspondant au « Taux d'arrivée » du modèle du système dynamique. Nous avons observé que le taux d'arrivée des patients à l'OPD se situe entre 80 et 165 patients par heure, ce qui signifie que ce nombre de patients arrive à la réception et utilise tous les canaux de service.

Note : L'axe des x de la figure indique la durée du modèle en heures et l'axe des y indique le nombre de patients arrivant à l'OPD.

5.6.2 Résultats du scénario 1

Le principal problème à l'OPD réside dans la congestion des patients à chaque canal de service. À la réception, malgré la présence de 5 réceptionnistes, la longueur de la file d'at-

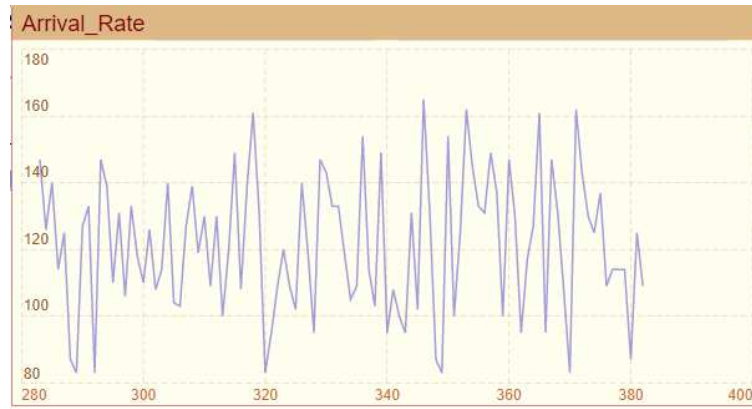


FIGURE 5.7 – Taux d'arrivée des patients par simulation du modèle SD.

tente des patients varie généralement entre 5 et 10 personnes. À un moment donné, cette file d'attente a même atteint 18 patients, comme le montre la Figure 5.8.

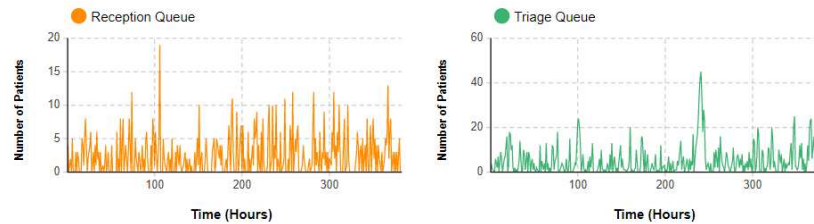


FIGURE 5.8 – Longueur de la file d'attente à la réception et au triage.

Selon les résultats de simulation obtenus avec le logiciel Anylogic, nous obtenons :

- Le temps moyen passé à la réception : $T_m = 0,053$ heures
- Le temps minimum passé à la réception est : $T_{\min} = 0,026$ heures.
- Le temps maximum passé à la réception est : $T_{\max} = 0,196$ heures.

Dans le scénario actuel (Scénario 1) : Avec un nombre d'infirmières fixé à 7, les résultats sont les suivants :

- $L_F \in [10, 20]$, où L_F est La longueur de la file d'attente au triage.
- $T_s = 382$ heures Où T_s est le temps simulé à l'OPD.

Selon les résultats de la simulation (voir Figure 5.8), les patients ont passé un temps moyen de 0,089 heures au triage, ce qui inclut le temps d'attente dans la file et le temps de service de l'infirmière. Le temps minimum et maximum des patients au triage est donné par :

$$\begin{cases} T_{\min} = 0,035 \text{ heures,} \\ T_{\max} = 0,402 \text{ heures} \end{cases}$$

La longueur de la file d'attente pour les médecins mentionnés était significativement courte, comme indiqué dans la Figure 5.9.

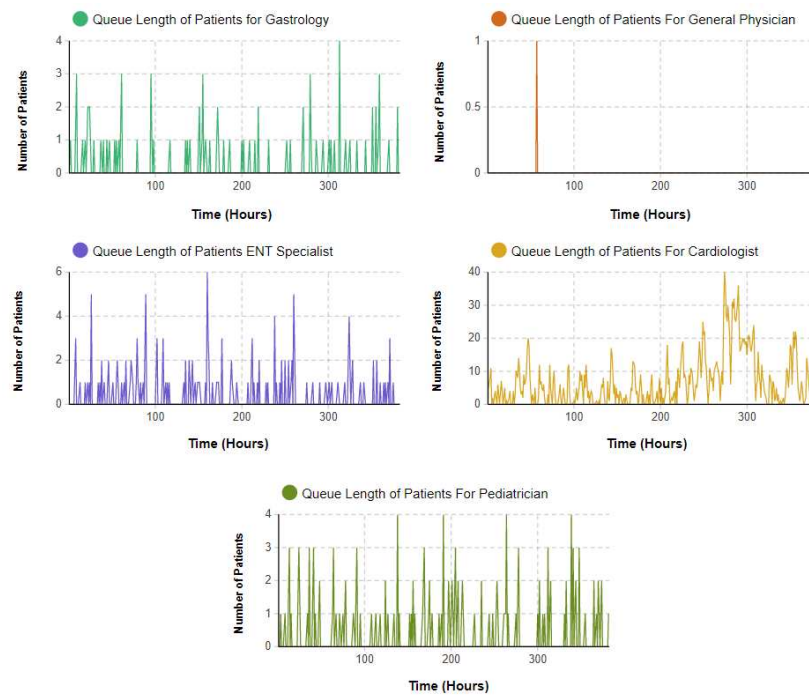


FIGURE 5.9 – Longueur de la file d'attente pour différents types de médecins.

Illustration :

- 1 La longueur de la file d'attente pour les médecins généralistes indique qu'en fonction du flux de patients arrivant à l'OPD pour consulter ces médecins, la disponibilité des médecins était supérieure à la demande. Les patients ont passé en moyenne 0,036 heures.
- 2 Le temps total des patients montre que les patients se libéraient rapidement des cabines des médecins généralistes. À cet égard, nous avons suggéré de diminuer le nombre de médecins généralistes en fonction de la charge de travail actuelle.

Le tableau suivant (5.3) présente les coûts, revenus et profits attendus pour un système de santé comprenant 5 réceptionnistes, 7 infirmières et 12 médecins. Les valeurs ont été calculées à partir des données disponibles et fournissent un aperçu des performances financières attendues.

Description	Valeur (U.M)
Coût moyen attendu	61,067.71
Revenus attendus	7,479.68
Profit attendu	1,362.86
Coût d'attente des patients	77.96

TABLE 5.3 – Coûts, Revenus et Profits Attendus

L'ensemble de ces résultats peuvent être illustrés comme indiqué dans la Figure 5.10.

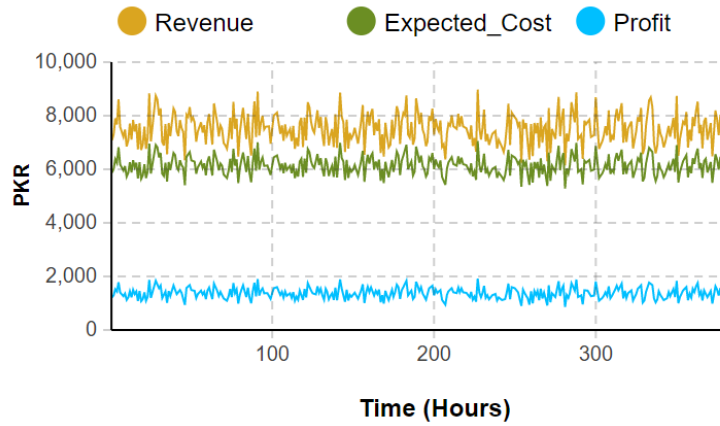


FIGURE 5.10 – Coûts, revenus et bénéfices attendus de l'OPD dans le scénario 1.

5.6.3 Résultats du scénario 2

La longueur de la file d'attente à la réception et au triage est significativement plus élevée dans le scénario 1. Pour remédier à cette situation, nous avons recommandé d'augmenter le personnel, en ajoutant un réceptionniste et une infirmière supplémentaires dans le scénario 2. Pour quantifier la longueur de la file d'attente, utilisons la formule suivante :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Pour évaluer l'impact de ces changements, nous avons utilisé un modèle de simulation par événements discrets. Les résultats obtenus, présentés dans la figure 5.11, mettent en évidence les variations de la longueur de la file d'attente.

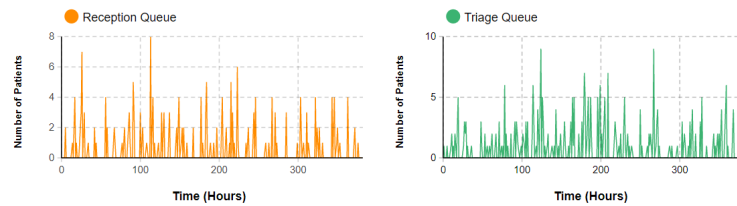


FIGURE 5.11 – Longueur de la file d'attente à la réception et au triage.

Remarque 5.5. *La longueur de la file d'attente à la réception a diminué de 10 à 15 patients à 4 à 6 patients. De plus, les patients ont passé en moyenne 0,038 heures, leur temps minimum était de 0,026 heures et leur temps maximum était de 0,105 heures.*

On obtient ainsi les résultats suivants :

1. Temps moyen passé à la réception : $T_{m_1} > T_{m_2}$.

2. **Longueur de la file d'attente au triage** : $L_{t_1} > L_{t_2}$.

3. **Temps moyen passé par les patients** : $T_{mp} = 0.057$ heures, $T_{\min} < T_{\text{moyen, patients}} < T_{\max}$.

Le temps passé par les patients au triage a diminué de 0,089 heures dans le scénario 1 à 0,057 heures dans le scénario 2. De plus, le temps maximum passé par les patients au triage a connu une réduction significative, passant de 0,402 heures (scénario 1) à 0,162 heures (scénario 2). Ces résultats confirment l'efficacité de notre approche.

Illustration : La longueur de la file d'attente pour les médecins généralistes était très courte. En conséquence, le nombre de médecins généralistes a été réduit, tandis que celui des cardiologues a été augmenté en raison de la file d'attente plus longue pour ces derniers. Dans le scénario 2, des patients figurent dans la file d'attente (voir la figure 5.12), tandis que dans le scénario 1, la longueur de la file d'attente était de 0 ou 1, ce qui indique une sous-utilisation des médecins généralistes. Le temps que les patients ont passé dans la file d'attente pour les médecins généralistes, ainsi que le temps passé en consultation, ont augmenté (moyenne = 0,047 heures, minimum = 0,026 heures, et maximum = 0,214 heures) par rapport au scénario 1.

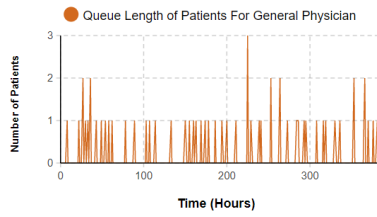


FIGURE 5.12 – Longueur de la file d'attente après diminution d'un médecin.

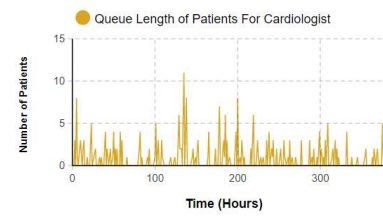


FIGURE 5.13 – Longueur de la file d'attente après l'augmentation d'un médecin.

La longueur de la file d'attente pour les cardiologues a diminué, passant de 10 à 20 patients à 4 à 10 patients (voir la figure 5.13). Avec l'augmentation du nombre de médecins, le temps passé par les patients dans le canal de service a considérablement diminué. En moyenne, les patients ont passé 0,123 heures (contre 0,29 heures auparavant), leur temps minimum était de 0,083 heures et leur temps maximum de 0,365 heures (contre 1,197 heures dans le scénario précédent).

Le pourcentage de réduction du temps moyen passé avec un cardiologue est donné par :

$$\frac{T_{m_1} - T_{m_2}}{T_{m_1}}.$$

Le tableau ci-dessous présente un résumé des coûts, revenus et profits attendus, ainsi que du coût d'opportunité moyen par patient dans le Scénario 2 (voir table 5.4).

Description	Valeur (U.M)
Coût moyen attendu	6,350.60
Revenus attendus	7,454.67
Profit attendu	1,123.88
Coût d'opportunité moyen par patient (Scénario 2)	39.90

TABLE 5.4 – Résumé des Coûts, Revenus et Profits Attendus

La variation des coûts, des revenus et des profits attendus a été observée, comme le montre la figure 5.14.

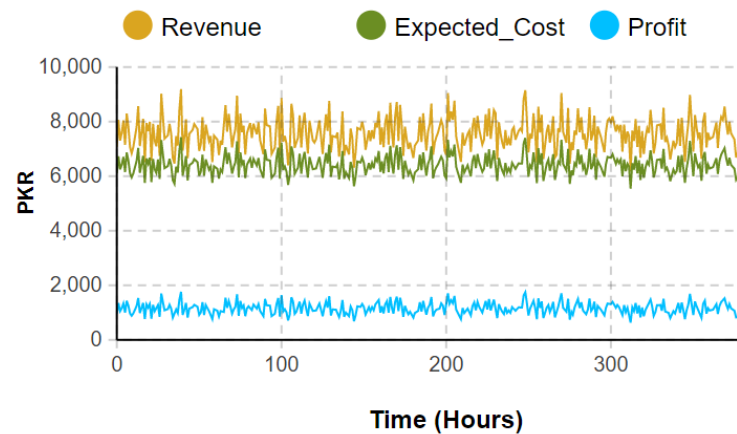


FIGURE 5.14 – Coûts, revenus et bénéfices attendus de l'OPD dans le scénario 2.

5.7 L'équilibre de Nash dans le modèle OPD

Nous synthétisons les transpositions métaphoriques ou analogiques de la théorie des jeux appliquées au modèle stratégique de la consultation externe (OPD), en nous appuyant sur les cinq concepts fondamentaux de cette théorie (voir Table 3). Les stratégies des joueurs sont établies en fonction des fonctions de paiement, en tenant compte des gains attendus, ainsi que des gains prévisibles des autres joueurs. Ainsi, chaque joueur analyse les résultats liés au système des choix, lesquels dépendent non seulement de ses propres décisions, mais également des actions des autres. Analysons l'équilibre de Nash pour deux patients, que nous élargirons ensuite à un nombre n de patients. Cette analyse prendra en compte les coûts et le temps d'attente, avec pour objectif de les minimiser, en se basant sur les scénarios 1 et 2 exposés dans notre étude.

Selon le coût :

$$C_2 > C_1$$

Concepts de théorie des jeux	Transposition utile vers le modèle stratégique OPD
Stratégies	Scénarios 1 et 2
Arbre de décision	Concept de bifurcation
Joueurs	Patients
Fonctions de paiement	Avantages des autres patientes
Équilibre	Indétermination à l'origine de l'instabilité. Résultat aléatoire de la stratégie

TABLE 3 – Concepts de théorie des jeux

où C_i est le coût de service pour le patient selon le scénario i ; avec $i = 1, 2$.

Les différentes situations sont présentées dans le Tableau 4. L'équilibre de Nash est (C_1, C_1) .

		patient2	patient2
		S_1	S_2
Patient 1	S_1	(C_1, C_1)	(C_1, C_2)
Patient 1	S_2	(C_2, C_1)	(C_2, C_2)

TABLE 4 – Matrice de coûts des deux scénarios

Si le patient 1 suit le scénario S_2 et que le patient 2 suit S_1 , le patient 1 peut opter pour S_1 afin de minimiser le coût de service. Ainsi, (C_2, C_1) n'est pas un équilibre de Nash.

Selon le temps : Considérons le temps d'attente des patients T_i , avec $i = 1, 2$ et $T_2 < T_1$. En utilisant la même méthodologie, l'équilibre de Nash est (T_2, T_2) (voir Table 5)

		patient2	patient2
		S_1	S_2
patient 1	S_1	(T_1, T_1)	(T_1, T_2)
patient 1	S_2	(T_2, T_1)	(T_2, T_2)

TABLE 5 – Matrice des temps d'attente des deux scénarios

L'équilibre de Nash valide les résultats obtenus dans les deux scénarios, et il est possible de l'étendre à un nombre n de patients. Cette généralisation permet de mieux comprendre les interactions entre les patients et d'optimiser simultanément leurs coûts et temps d'attente. En effet, en prenant en compte les stratégies de chaque patient, nous pouvons identifier des solutions qui profitent à tous. Ainsi, notre analyse contribue à éclairer les décisions dans des contextes où la coopération et la concurrence se rencontrent, ouvrant la voie à des approches plus efficaces dans la gestion des ressources.

5.8 Prix de l'anarchie

Le prix de l'anarchie est un concept de la théorie des jeux algorithmique qui mesure à quel point un système où tous les agents agissent pour optimiser leurs intérêts peut s'éloigner

d'une situation optimale du point de vue global.

Dans notre modèle, nous définissons un ensemble de n patients, deux stratégies (2 scénarios) et des utilités associées : $U_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, où $S = S_1 \times S_2$.

Nous pouvons définir une mesure de l'efficacité de chaque résultat, que nous appelons une fonction de bien-être $W : S \rightarrow \mathbb{R}$, avec :

$$W(s) = \sum_{i \in N} U_i(s).$$

Nous pouvons définir un sous-ensemble $Equils \subset S$ comme l'ensemble des stratégies en équilibre. Si, au lieu d'une fonction de bien-être que nous voulons maximiser, la mesure de l'efficacité est une fonction de coût $Cost : S \rightarrow \mathbb{R}$ que nous voulons minimiser, alors :

$$P_0A = \frac{\max_{s \in S} W(s)}{\min_{s \in Equil} W(s)} \quad (5.24)$$

Si, au lieu d'un bien-être que l'on veut maximiser, la fonction mesure l'efficacité est une fonction de coût $Cost : S \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on souhaite minimiser :

$$P_0A = \frac{\max_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S} Cost(s)} \quad (5.25)$$

Selon le tableau des coûts défini ci-dessus, la fonction de coût est :

$$C(S_1, S_2) = u_1(S_1, S_2) + u_2(S_1, S_2). \quad (17)$$

Le pire (et le seul) équilibre de Nash se produit lorsque les deux patients choisissent S_2 , et le coût résultant est :

$$C_{equil} = 2C_2, \quad (18)$$

Cependant, le bien-être social maximal se produit lorsque les deux patients choisissent S_1 ; dans ce cas, le coût est :

$$C_{min} = 2C_1.$$

Le prix de l'anarchie P_0A dans cette situation est :

$$\frac{C_{Equil}}{C_{min}} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (18)$$

Si, au lieu d'une fonction de bien-être que nous voulons maximiser, la mesure de l'efficacité est une fonction de temps d'attente $T : S \rightarrow \mathbb{R}$ que nous voulons minimiser, le pire équilibre

de Nash se produira lorsque les deux patients choisissent S_1 , et le résultat sera :

$$T_{equil} = 2C_1.$$

Le prix de l’anarchie est donné par :

$$P_0A = \frac{C_1}{C_2}.$$

5.9 Conclusion

Lors de notre étude à la consultation externe sélectionnée, nous avons observé que les files d’attente étaient plus longues à l’accueil, au triage et chez les cardiologues, tandis que les temps d’attente étaient significativement plus courts pour les médecins généralistes. Ces longues files d’attente ont entraîné un temps système accru pour les patients, provoquant ainsi une congestion au sein de la consultation externe.

Pour remédier à cette situation, nous avons recommandé d’augmenter le nombre de réceptionnistes, d’infirmières et de cardiologues. En revanche, compte tenu de la faible affluence chez les médecins généralistes, nous avons également décidé de réduire leur effectif d’un médecin. Les résultats de notre simulation ont révélé une diminution notable des temps d’attente pour les patients et une optimisation des files d’attente aux différents points de service de la consultation externe, grâce à l’application de la simulation d’événements discrets. Les méthodes de simulation stochastique et de simulation d’événements discrets nous ont permis de mener une analyse approfondie de la situation actuelle et d’identifier des pistes d’optimisation à coût maîtrisé. Notre recherche apporte ainsi des recommandations précieuses à la direction de l’hôpital pour améliorer les performances de la consultation externe.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le cadre de notre travail, nous avons abordé des problématiques complexes liées à l'optimisation des systèmes de routage, à la gestion des files d'attente et à la réduction de la congestion dans des contextes variés, notamment dans des environnements hospitaliers. Nous avons d'abord étudié un modèle de jeu de routage marqué par des liaisons, des pertes et de la congestion, où les coûts sont directement associés aux composants de délai et de perte. À travers cette analyse, nous avons pu déterminer la solution optimale ainsi que l'équilibre symétrique, tout en mettant en évidence l'émergence d'un paradoxe, similaire au paradoxe de Kameda, dans ce cadre spécifique. Nous avons démontré l'unicité de l'équilibre de Nash, tout en prouvant que notre approche est non seulement théoriquement solide, mais également applicable en pratique, notamment dans des secteurs tels que les hôpitaux, où la gestion des ressources et l'optimisation des délais sont essentielles.

Dans une deuxième phase de notre étude, nous avons analysé les files d'attente au sein d'une consultation externe d'un hôpital, où des délais de traitement inégaux étaient observés selon les spécialités. Nos observations ont révélé des files d'attente particulièrement longues à l'accueil, au triage et chez les cardiologues, engendrant ainsi des délais d'attente prolongés pour les patients. En réponse à cette problématique, nous avons formulé des recommandations pratiques, telles que l'augmentation du nombre de réceptionnistes et de cardiologues, et la réduction du personnel chez les médecins généralistes. Grâce à l'application de la simulation d'événements discrets et à la modélisation des systèmes dynamiques, nous avons pu modéliser et analyser les flux de patients, ce qui a permis de réduire les temps d'attente de manière significative. Ainsi, nos travaux montrent que l'intégration de modèles théoriques solides et de simulations pratiques permet non seulement de comprendre les dynamiques complexes de congestion, mais aussi de proposer des solutions concrètes et efficaces. Nous avons démontré la pertinence de nos approches dans l'optimisation des performances des systèmes de service, avec des applications concrètes dans des contextes sensibles comme les hôpitaux, où la gestion du temps et des ressources est un enjeu majeur.

Suite à notre étude, plusieurs pistes intéressantes de recherche peuvent être explorées pour approfondir les résultats obtenus et étendre leur application à d'autres domaines. Ces perspectives incluent, mais ne se limitent pas à :

1. Exploration du jeu de routage d'ordre supérieur :

Une piste intéressante pour approfondir l'analyse serait d'explorer un jeu de routage d'ordre supérieur, où les coûts de congestion augmentent de manière exponentielle en fonction de la demande ou de la charge du réseau. Ce modèle permet de capturer les effets de surcharge, où une légère augmentation de la demande peut entraîner des hausses significatives de coûts ou de délais. L'intégration de fonctions de coût d'ordre supérieur permettrait de saisir les dynamiques complexes de congestion et d'élaborer des stratégies d'optimisation adaptées aux effets de seuil générés par l'intensification de la demande.

2. Analyse des impacts des paradoxes identifiés :

Une étude des paradoxes identifiés, comme le paradoxe de Pigou (l'ajout d'une nouvelle route ou d'une capacité supplémentaire pour désengorger le trafic), pourrait fournir une amélioration de l'infrastructure ou des ressources, loin de réduire la congestion, peut au contraire l'augmenter, en raison de comportements adaptatifs des agents. Par exemple, dans un environnement hospitalier, l'ajout de nouvelles capacités peut paradoxalement entraîner une augmentation de la demande, exacerbant ainsi les délais et la congestion. Comprendre ce paradoxe permettrait d'ajuster les stratégies de gestion des ressources pour éviter des effets contre-productifs et d'identifier des solutions d'optimisation plus efficaces, qui tiennent compte des réactions des agents et de la dynamique globale du système.

3. Extension des modèles de jeu : Poursuivre l'élaboration de modèles de jeux plus complexes qui intègrent d'autres facteurs, tels que la variabilité des arrivées des patients, les différentes priorités des patients et les services complémentaires, pour mieux refléter la réalité des systèmes de soins de santé.

4. Étude de la dynamique de congestion dans des environnements multi-serveurs :

Notre travail s'est concentré sur un modèle $M/M/1$, mais dans d'autres systèmes, il est fréquent de rencontrer plusieurs serveurs. Une extension vers des modèles $M/M/c$ ou $M/G/1$ pourrait permettre d'examiner des environnements plus complexes. Cela offrirait une vision plus fine des interactions entre les différentes stations de service et la congestion qui en résulte.

5. Optimisation coopérative dans les systèmes de files d'attente à l'aide de la théorie des jeux :

La modélisation de cette approche à l'aide de la théorie des jeux coopératifs permettrait d'identifier des négociations efficaces entre agents (par exemple, entre patients et hôpitaux) et des mécanismes de partage des gains liés à la réduction des délais d'attente, de la congestion et des erreurs de service. L'objectif serait de parvenir à un équilibre coopératif qui bénéficie à l'ensemble des participants, ce qui pourrait être particulièrement pertinent dans des contextes où la gestion des files d'attente implique plusieurs parties prenantes aux intérêts parfois divergents.

6. Analyse des coûts dans les systèmes de files d'attente avec des taux de perte variables

Un autre axe de recherche serait d'explorer les effets des taux de perte variables dans des systèmes de files d'attente, notamment en tenant compte de la variabilité des coûts associés aux délais de traitement, à la congestion et aux erreurs de service. Ce type d'analyse pourrait aboutir à des stratégies d'allocation de ressources plus fines, en fonction des coûts et des bénéfices d'optimisation des temps d'attente.

7. Optimisation en temps réel : Développer des algorithmes d'optimisation en temps réel pour ajuster les ressources en fonction des flux de patients, en utilisant des techniques d'apprentissage automatique pour prédire les variations de la demande.

Bibliographie

- [1] Aliyu, A. I., Sulaiman, T. A., Yusuf, A., "Modeling and simulation analysis of health care appointment system using ARENA", International Journal of Science and Applied Information Technology, V. 4, n°1, (2015).
- [2] Altman, E., "Applications of dynamic games in queues", Advances in dynamic games : Applications to economics, finance, optimization, and stochastic control, Springer (2005), 309-342.
- [3] Altman, E., Boulogne, T., El-Azouzi, R., Jiménez, T., Wynter, L., "A survey on networking games in telecommunications", Computers and Operations Research, V. 33, n°2, Elsevier, (2006), 286-311.
- [4] Altman, E., El Azouzi, R., Abramov, V., "Non-cooperative routing in loss networks", Performance Evaluation, V. 49, n°4, Elsevier, (2002), 257-272.
- [5] Altman, E., Kuri, J., El-Azouzi, R., "A routing game in networks with lossy links", 2014 7th International Conference on NETwork Games, COnTrol and OPTimization (NetGCoop), IEEE, (2014), 91-94.
- [6] Altman, E., Wynter, L., "Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks", Networks and Spatial Economics, Springer, V. 4, (2004), 7-21.
- [7] Armbruster, D., Kostelich, E. J., "Introductory differential equations : From linearity to chaos", (1996).
- [8] Artalejo, J. R., Gómez-Corral, A., "Retrial queueing systems", Mathematical and Computer Modelling, V. 30, n°4, (1999), 13-15.
- [9] Banks, J., "Discrete event system simulation", Pearson Education India,(2005).
- [10] Batubara, H., Lesmana, R. G., Dharmastiti, R., Herliansyah, M. K., "A Proposed Model for Outpatient Care Service Improvement Using the Healthcare Lean Approach and Simulation", Tarumanagara International Conference on the Applications of Social Sciences and Humanities (TICASH 2019), Atlantis Press, (2020), 239-244.
- [11] Baynat, B., "La théorie des files d'attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit", Hermès, (2000).

- [12] Blanchard, P., Devaney, R. L., Hall, G. R., "Differential Equations Thomson", (2006).
- [13] Bokrantz, J., Skoogh, A., Lämkkull, D., Hanna, A., Perera, T., "Data quality problems in discrete event simulation of manufacturing operations", *Simulation, V. 94, n°11, (2018), 1009-1025.
- [14] Borel, E., "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique", Comptes rendus de l'Académie des Sciences, V. 173, n°1304-1308, (1921), p 58 .
- [15] Boukoftane, A., Altman, E., Haddad, M., Oukid, N. "Paradoxes in a multi-criteria routing game", Game Theory for Networks : 7th International EAI Conference, GameNets 2017, Knoxville, TN, USA, Proceedings, (2017), 165-172.
- [16] Boukoftane, A., Altman, E., Haddad, M., Oukid, N. "Paradoxes in a multi-criteria routing game"., Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering, (2017), 165- 172.
- [17] Boukoftane, A., Kalwar, M. A., Oukid, N., Zennir, K., Memon, M. S., Khan, M. A., "Application of Discrete Event Simulation and System Dynamics Modeling in Optimizing the Performance of OutPatient Department", Nonlinear Dynamics and Systems Theory, V. 24, n°4, Informath Publishing Group, (2024), 354-365.
- [18] Braess, D., "Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung", *Unternehmensforschung*, Springer, V. 12, (1968), 258–268.
- [19] Cai, H., Jia, J., "Using discrete event simulation to support performance driven healthcare design", HERD : Health Environments Research and Design Journal, V. 13, n°3, SAGE Publications Sage CA : Los Angeles, CA. 89-106, (2019).
- [20] Das, A., "Impact of the COVID-19 pandemic on the workflow of an ambulatory endoscopy center : an assessment by discrete event simulation", Gastrointestinal endoscopy, V. 92, n°4, (2020), 914-924.
- [21] Diprima, R. C., others., "Elementary differential equations and boundary value problems", John Wiley, (1969).
- [22] Dresher, M., Flood, M. M., "Methods of solution in game theory", Econometrica, V. 18, n°4, (1950), 179-181.
- [23] Eldabi, T., Irani, Z., Paul, R. J., "A proposed approach for modelling health-care systems for understanding", Journal of Management in Medicine, V. 16, n° 2/3, (2002), 170-187.
- [24] Filipowicz, B., Kwiecień, J., "Queueing systems and networks. Models and applications", Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, (2008), 379-390.

- [25] Garg, R., Kamra, A., Khurana, V., "A game-theoretic approach towards congestion control in communication networks", *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, V. 32, n°3, (2002), 47-61.
- [26] Ghosh, S., Lee, T., "Modeling and asynchronous distributed simulation analyzing complex systems", *Wiley-IEEE Press*, (2000).
- [27] Gibbens, R. J., Kelly, F. P., "Resource pricing and the evolution of congestion control", *Automatica*, V. 35, n°12, Elsevier, (1999), 1969-1985.
- [28] Golubitsky, M., Stewart, I., Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory : Volume II*, Springer Science & Business Media, (2012).
- [29] Gunal, M. M., "A guide for building hospital simulation models", *Health Systems*, V. 1, n°1, (2012), 17-25.
- [30] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L., "Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos", *Academic Press*, (2013).
- [31] Homer, J. B., Hirsch, G. B., "System dynamics modeling for public health : background and opportunities", *American journal of public health*, V. 96, n°3, (2006), 452-458.
- [32] Kalwar, M. A., Kalwar, Mari, S. I.H. A., Memon, M. S., Tanwari, A., Siddiqui, A. A., "Simulation-based approach for improving outpatient clinic operations", *Mehran University Research Journal of Engineering & Technology*, V. 39, n°1, (2020), 153-70.
- [33] Kameda, H., Altman, E., Kozawa, T., Hosokawa, Y., "Braess-like paradoxes in distributed computer systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, V. 45, n°9, IEEE, (2000), 1687-1691.
- [34] Khan, M. A., Khaskheli, S. A., Kalwar, H. A., Kalwar, M. A., , Marri, H. B., Nebhwani, M., "Improving the performance of reception and OPD by using multi-server queuing model in COVID-19 Pandemic", *International Journal of Science and Engineering Investigations*, V. 10, n°113, (2021), 20-29.
- [35] Koutsoupias, E., Papadimitriou, C., "Worst-case equilibria", *Annual symposium on theoretical aspects of computer science*, Springer, (1999), 404-413.
- [36] Lade, I. P., Chowriwar, S. A., Sawaitul, P. B., "Simulation of queuing analysis in hospital", *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, V. 2, n°3, (2013), 122-128.
- [37] Lamé, G., Jouini, O., Stal-Le Cardinal, J., *Combining Soft Systems Methodology, ethnographic observation, and discrete-event simulation : A case study in cancer care*, *Journal of the Operational Research Society*, V. 71, n°10, (2020), 1545-1562.

- [38] Lane, D. C., Monefeldt, C., Husemann, E., "Client involvement in simulation model building : hints and insights from a case study in a London hospital", *Health care management science*, Springer, V. 6, (2003), 105-116.
- [39] Laraki, R., Renault, J., & Sorin, S., "Bases Mathématiques de la théorie des jeux". Éditions de l'École polytechnique,(2013).
- [40] MacLeod, S. P., Wong, F. W., "Modeling and Analysis of Computer Networks", Google Patents, (2009), 11/771 ,056.
- [41] Melman, G. J., Parlikad, A. K., Cameron, E. A. B., "Balancing scarce hospital resources during the COVID-19 pandemic using discrete-event simulation", *Health Care Management Science*, V. 24, n°2, (2021), 356-374.
- [42] Morgenstern, O., "The collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the theory of games", *Journal of Economic Literature*, American Economic Association. V. 14, n° 3, (1976), 805-816.
- [43] Najeeb, A., Dshalalow, J. H., "Maintenance in single-server queues : a game-theoretic approach", *Mathematical Problems in Engineering*, (2009).
- [44] Nash, J., "Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*", V. 52, n°4, (1951).
- [45] Nash, J. F., "Non-cooperative games", Princeton University Press, (1950).
- [46] Naor, P., "The regulation of queue size by levying tolls", *Econometrica : journal of the Econometric Society*, (1969), 15-24.
- [47] Ordu, M., Demir, E., Tofallis, C., Gunal, M. M., "A novel healthcare resource allocation decision support tool : A forecasting-simulation-optimization approach", *Journal of the operational research society*, V. 72, n°32, (2021), 485-500.
- [48] Osborne, M. J., "A course in game theory", MIT Press (1994).
- [49] Philip, A. M., Prasannavenkatesan, S., Nustafee, N., "Simulation modelling of hospital outpatient department : a bibliometric analysis and a literature classification", (2022).
- [50] Postelwaire, A., Wilson, R., "Introduction to the special issue in memory of Robert W. Rosenthal", *Games and Economic Behavior*, V. 45, n°2, (2003), 271-277.
- [51] Rickert, M., Nagel, K., Schreckenberg, M., Latour, A., "Two lane traffic simulations using cellular automata", *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, V. 231, n°4, Elsevier(1996), 534-550.
- [52] Robinson, S., "Distributed simulation and simulation practice", *Simulation*, V. 81 n°1, (2005), 5-13.
- [53] Roy, S. N., Shah, B. J., Gajjar, H., "Application of simulation in healthcare service operations : A review and research agenda", *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, V. 31 n°1 31(1), (2020), 1-23.

- [54] Sasanfar, S., Bagherpour, M., Moatari-Kazerouni, A., "Improving emergency departments : Simulation-based optimization of patients waiting time and staff allocation in an Iranian hospital", *International Journal of Healthcare Management*, V. 14, n°4,(2021), 1449-1456.
- [55] Senington, R., Baumeister, F., Ng, A., Oscarsson, J., "A linked data approach for the connection of manufacturing processes with production simulation models", *Procedia CIRP*, Elsevier, V. 70, (2018), 440-445.
- [56] Shakoor, M., Al-Nasra, M., , Abu Jadayil, W., Jaber, N., Abu Jadayil, S., "Evaluation of provided services at MRI department in a public hospital using discrete event simulation technique : A case study", *Cogent Engineering*, V. 4, n°1, (2017).
- [57] Sibbel, R., Urban, C., "Agent-based modeling and simulation for hospital management", In : *Cooperative agents : applications in the social sciences*,(2001), 183-202.
- [58] Smale, S., Hirsch, M. W., *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Elsevier, V. 60, (1974).
- [59] Snell, T., Persson, P., "Application of discrete event simulation for assembly process optimization : Buffer and takt time management", (2020).
- [60] Sorin, S., "Von Neumann-Morgenstern, Nash et Arrow-Debreu : théorie des jeux et équilibre général", *Cahiers d'Économie Politique Papers in Political Economy*, (1999), 7-17.
- [61] Steins, K., "Towards increased use of discrete-event simulation for hospital resource planning", PhD Thesis, Linköping University Electronic Press, (2017).
- [62] Straka, M., Trebuna, P., M., Malindzakova., Rosova, A. M., Pekarcikova, M., "Application of EXTENDSIM for improvement of production logistics' efficiency", *International Journal of Simulation Modelling*, V. 16, n°3, (2017), 422-434.
- [63] Sweetser, A., "A comparison of system dynamics (SD) and discrete event simulation", In : *17th International Conference of the System Dynamics Society*, (1999), 20-23.
- [64] Tin, P., Zin, T. T., "A Markovian Game Theoretic Framework for Analysing a Queueing System with Multiple Servers", *2024 IEEE Gaming, Entertainment, and Media Conference, IEEE, (2024), 1-4.
- [65] Uriarte, A, Zuniga, E. R., Moris, M., Urenda, "System design and improvement of an emergency department using simulation-based multi-objective optimization", *Journal of physics : conference series*, V. 616, n°1, (2015).
- [66] Van Woensel, T., Vandaele, N., "Modeling traffic flows with queueing models : a review", *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, V. 24, n°4, (2007), 435-461.
- [67] Von Neumann, J., Morgenstern, O., "Théorie des jeux et comportement économique", J. Bronowski, A escola do homen, (1977), P-432.

- [68] Woensel, T. V., Kerbache, L., Peremans, H., Vandaele, N., "A queueing framework for routing problems with time-dependent travel times", *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, SpringerV. 6, (2007), 151-173.
- [69] Zeigler, B. P., "Theory of Modeling and Simulation : Discrete Event & Iterative System Computational Foundations", Academic Press, (2018).
- [70] Zhang, L., Huberman, F., Bernardo, A., "Games and queues", (2008).
- [71] Zingraff, M. T., Behrendt, F., Brix, L., "Optimizing patient scheduling in hospitals using discrete event simulation and genetic algorithms", *Computers and Operations Research*, V. 33, n°7, (2006), 1925-1935.