

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE  
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du Diplôme de Master en  
**Fabrication Mécanique**

*Thème :*

*Calcul de  $K_{II}$  pour une section carrée fissurée par la méthode de collocation de frontière et stabilisation à l'aide des moindres carrés*

Proposé et encadré par :  
**Pr.FERDJANI Hicheme**

Réalisé par :  
**CHENAoui Maram**  
**ARKAM Maroua**

*Année universitaire 2024/2025*



## **RRMERCIMENT**

*Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de me donner l'occasion de poursuivre mes études à l'université de Blida 1*

*Ce travail a été mené au sein du département de mécanique, faculté des technologies, Université de Blida 1.*

*J'exprime mes sincères remerciements à Mr FERDJANI Hichem d 'etre le promotor de mon mémoire*

*Je remercie tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation depuis mes premiers jours à l'école jusqu'aujourd'hui.*

*Et je remercie toute ma famille*



## **Dédicaces**

*Je dédie ce modeste travail aux deux êtres les plus chers à mon cœur : mon père et ma mère, pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices et leurs prières.*

*Que Dieu les protège et les garde à mes côtés pour toujours,  
inchallah.*

*À mes frères et sœurs, pour leur présence, leur soutien et leurs encouragements constants.*

*À toute la famille du Département de Génie Mécanique, pour leur accompagnement tout au long de ce parcours.*

*Et enfin, à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail ou ont cru en moi.*

**MARAM**



## **Dédicaces**

*Tout d'abord Je tiens à remercier mon dieu de m'avoir donner la force et le courage à mener le bien à ce modeste travail.*

*Je tiens à dédier ce travail à ma tendre mère premièrement et mon chère papa et ma sœur adorée et mon petit frère qui sont toujours là pour moi.*

*Et à monsieur ferdjaniii mon encadreur et mes amis et mes cousins et à toute ma famille et à tout ceux qui m'aime et j'aime*

**MAROUA**

## Résumé

Ce mémoire traite du calcul du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  pour une section carrée fissurée soumise à un cisaillement, en utilisant la méthode de collocation de frontière stabilisée par la méthode des moindres carrés. L'étude met en évidence l'instabilité des résultats lorsque le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues, puis montre l'amélioration obtenue en augmentant les points de collocation. Les résultats sont comparés aux valeurs théoriques pour valider la méthode. Cette recherche contribue à mieux comprendre le comportement des structures fissurées en mode III.

## Abstract

This thesis focuses on calculating the stress intensity factor  $K_{III}$  for a cracked square section under shear loading, using the boundary collocation method stabilized by the least squares approach. The study highlights the instability of results when the number of equations equals the number of unknowns, and shows how increasing the number of collocation points improves stability. The numerical results are compared with theoretical values to validate the approach. This research enhances understanding of cracked structures' behavior under mode III fracture.

## ملخص

تناولت هذه المذكرة حساب معامل شدة الإجهاد  $K_I$  في مقطع مربع يحتوي على شق تحت تأثير إجهاد قصي، باستخدام طريقة التجميع على الحدود (Collocation) المدعومة بطريقة المربعات الصغرى لضمان الاستقرار العددي. أظهرت الدراسة عدم استقرار النتائج عندما يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد جهولات، ثم تحسن الاستقرار عند زيادة عدد نقاط التجميع. كما تم مقارنة هذه الدراسة في فهم أفضل لسلوك الهياكل المتشققة في النمط الثالث من الكسر.

# *Sommaire*

<b>RRMERCIMENT .....</b>	
<i>Dédicaces .....</i>	
<i>Dédicaces .....</i>	5
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	11
<b>I. Chapitre I : Rappels Théoriques .....</b>	14
<b>I.1. Introduction : .....</b>	15
<b>I.2. Définition de la mécanique de la rupture : [1] .....</b>	15
<b>I.2.1. Modes d'ouverture d'une fissure [2] :.....</b>	15
<b>.II Chapitre II : Développement des Contraintes, méthode de collocation de frontière et méthode des moindres carrés .....</b>	18
<b>.I.1 Introduction :.....</b>	19
<b>I.2. Développement des contraintes en série infinie :.....</b>	19
<b>I.3. Méthode de collocation de frontière :.....</b>	21
<b>I.4. Méthode des moindres carrés :.....</b>	22
<b>I.4.1. Forme standard : .....</b>	23
<b>I.4.2. Solution analytique : .....</b>	24
<b>III. Chapitre III Problème Traité.....</b>	28
<b>II.1. Introduction : .....</b>	29
<b>II.2. Structure étudiée : .....</b>	29
<b>II.3. Les Résultats de notre étude : .....</b>	30
<b>II.3.1. Résultats pour C=2p: .....</b>	30
<b>Conclusion : .....</b>	34
<b>II.3.2. Résultats pour C=4p: .....</b>	34
<b>Conclusion : .....</b>	37
<b>II.3.3. Résultats pour C=100p : .....</b>	37
<b>II.3.4. Comparaison entre KIII et KIII théorique : .....</b>	41
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	44
<b>Références .....</b>	46
<b>Annexes .....</b>	48

## **Liste des Tableaux**

<i>Figure I-1 Les trois modes de rupture .....</i>	16
<i>Figure I-2 Champ de contrainte.....</i>	16
<i>Figure II-1 Fissure droite et coordonnées polaire.....</i>	21
<i>Figure II-2 Section fissurée et points de collocation. ....</i>	22
<i>Figure III-1 Structure carrée fissurée avec chargement en cisaillement.....</i>	29
<i>Figure III-2 Points de collocation.....</i>	29
<i>Figure III-3 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=0.7) .....</i>	31
<i>Figure III-4 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1) .....</i>	32
<i>Figure III-5 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1.2) .....</i>	33
<i>Figure III-6 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=0.4) .....</i>	35
<i>Figure III-7 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1.2) .....</i>	36
<i>Figure III-8 Figure III-8 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1.7) .....</i>	37
<i>Figure III-9 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=0.4) .....</i>	38
<i>Figure III-10 Figure III-10 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1)e .....</i>	39
<i>Figure III-11 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1.6) .....</i>	40
<i>Figure III-12 Fissure latérale dans un demi-plan. .....</i>	41
<i>Figure III-13 KI// et KI///t en fonction de la longueur de la fissure. .....</i>	42

## ***Liste des Figures***

<i>Tableau III-1 Les valeurs pour chaque secteur.....</i>	30
<i>Tableau III-2 KIII en fonction N, moindres carrés (a=0.7).....</i>	31
<i>Tableau III-3 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1).....</i>	32
<i>Tableau III-4 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1.2).....</i>	33
<i>Tableau III-5 KIII en fonction N, moindres carrés (a=0.4).....</i>	34
<i>Tableau III-6 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1.2).....</i>	35
<i>Tableau III-7 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1.7).....</i>	36
<i>Tableau III-8 KIII en fonction N, moindres carrés (a=0.4).....</i>	38
<i>Tableau III-9 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1).....</i>	39
<i>Tableau III-10 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1.6).....</i>	40
<i>Tableau III-11 Valeurs de KIII et KIII<sub>t</sub> en fonction de la longueur de la fissure .....</i>	42

## *Nomenclatures*

Symboles	Désignation
$\text{Im}$	partie imaginaire
$\text{Re}$	partie réelle
$\sigma_{ij}$	Champ de contrainte
$Z$	nombre complexe
$C_n$	Coefficient complexe
$I$	nombre imaginaire
$A_n, B_n$	facteurs réels
$\sigma$	la contrainte
$\epsilon$	déformation
$FIC$	facteur d'intensité de contrainte
$K_I, K_{II}, K_{III}$	facteurs d'intensité de contrainte respectivement en mode 1, 2 et 3
$m$	nombre de points de collocation
$n$	vecteur normale
$\mu$	coefficient de cisaillement
$\pi$	le nombre $\approx 3,14$
$t$	composante du vecteur contrainte
$\tau$	contrainte de cisaillement
$X_1, X_2$	composantes du repère cartésien
$f$	longueur de la fissure
$P$	nombre de termes

# **INTRODUCTION GENERALE**

### **Introduction générale**

Dans le domaine de la mécanique des matériaux, la sécurité et la fiabilité des structures mécaniques demeurent des enjeux majeurs, en particulier lorsque celles-ci sont soumises à des conditions de service sévères ou à des environnements agressifs. L'apparition de fissures, qu'elles soient dues à des défauts de fabrication, à la fatigue, à la corrosion ou à des sollicitations excessives, peut compromettre l'intégrité d'une structure et mener à des ruptures soudaines et catastrophiques. C'est dans ce contexte que s'inscrit la mécanique de la rupture, discipline qui permet de comprendre et de prévoir le comportement des structures fissurées.

Parmi les paramètres fondamentaux utilisés pour évaluer la criticité d'une fissure, les facteurs d'intensité de contrainte ( $K$ ) occupent une place centrale. Ils décrivent la concentration des contraintes en bord de fissure et dépendent de la géométrie, des conditions de chargement et du mode de fissuration. Plus particulièrement, le facteur d'intensité  $K_{III}$ , associé au Mode III de fissuration (ou mode de torsion), reste relativement moins étudié que les modes I et II, bien qu'il soit crucial dans certaines configurations mécaniques.

Ce mémoire s'intéresse au calcul du facteur d'intensité  $K_{III}$  dans le cas spécifique d'une section carrée fissurée, en utilisant la méthode de collocation. Cette méthode numérique, qui repose sur l'approximation des fonctions inconnues par des séries ou polynômes, permet de résoudre efficacement des équations intégrales ou différentielles apparaissant dans les formulations de la mécanique de la rupture. Appliquée au problème étudié, elle offre une approche précise et flexible pour évaluer l'intensité de contrainte dans une géométrie non triviale.

La méthode de collocation de frontière présente un problème majeur : l'instabilité des résultats numériques. Un des moyens utilisés pour réduire cette instabilité est la méthode des moindres carrés. L'objectif de ce travail est donc de mettre en évidence la stabilisation des résultats avec cette méthode à travers un exemple en mode III.

Le mémoire se divise en trois parties

- ﴿ Un premier chapitre consiste en un rappel des principales notions de la mécanique de la rupture fragile.
- ﴿ Le deuxième chapitre est consacré à la méthode de collocation de frontière et aux moindres carrés.

## ***Introduction Générale***

---

- ⇒ Le troisième chapitre présente le problème traité, les résultats obtenus ainsi qu'une comparaison avec la théorie.
- ⇒ Nous terminons par une conclusion générale.

## **I. Chapitre I : Rappels Théoriques**

## I.1. Introduction :

Dans ce chapitre, on va présenter les bases théoriques de notre travail en deux parties

- ↳ Dans la première partie, nous présentons quelques notions de la mécanique de la rupture.
- ↳ Dans la seconde partie, nous intéressons au facteur d'intensité de contrainte.

## I.2. Définition de la mécanique de la rupture : [1]

La mécanique de la rupture est une branche de la mécanique des matériaux qui étudie la propagation des fissures dans les matériaux solides. Elle vise à comprendre et à prédire le comportement d'un matériau fissuré soumis à des contraintes, en particulier jusqu'au moment où il se rompt.

La mécanique de la rupture est l'étude de la résistance des matériaux contenant des défauts (fissures, entailles, inclusions) et de l'évolution de ces défauts sous l'effet de contraintes mécaniques.

Elle complète la mécanique des milieux continus en tenant compte du caractère non homogène des matériaux réels, en particulier des discontinuités qui peuvent entraîner la rupture.

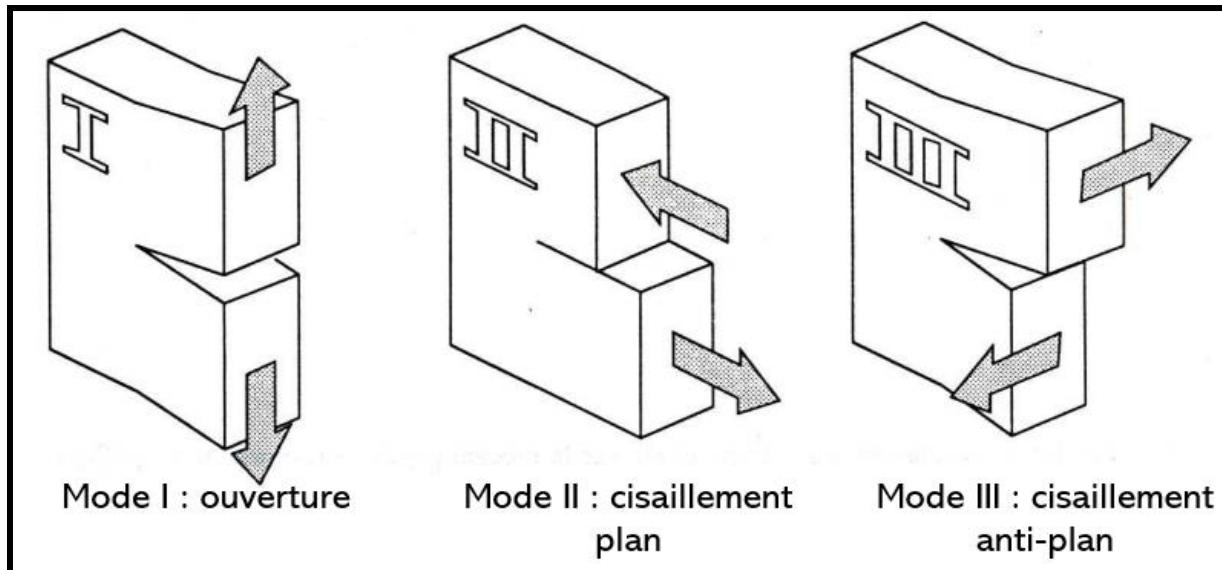
### I.2.1. Modes d'ouverture d'une fissure [2] :

Il en existe trois principaux :

- ↳ **1. Mode I** – Ouverture (mode d'ouverture pur) où la fissure s'ouvre perpendiculairement au plan de la fissure. C'est le mode le plus fréquent et le plus dangereux.
- ↳ **2. Mode II** – Glissement en plan (cisialement dans le plan) où les deux faces de la fissure se déplacent perpendiculairement au front de fissure.
- ↳ **3. Mode III** – Déchirement (cisialement anti-plan) où les faces de la fissure se déplacent parallèlement au front de la fissure.

### Remarque :

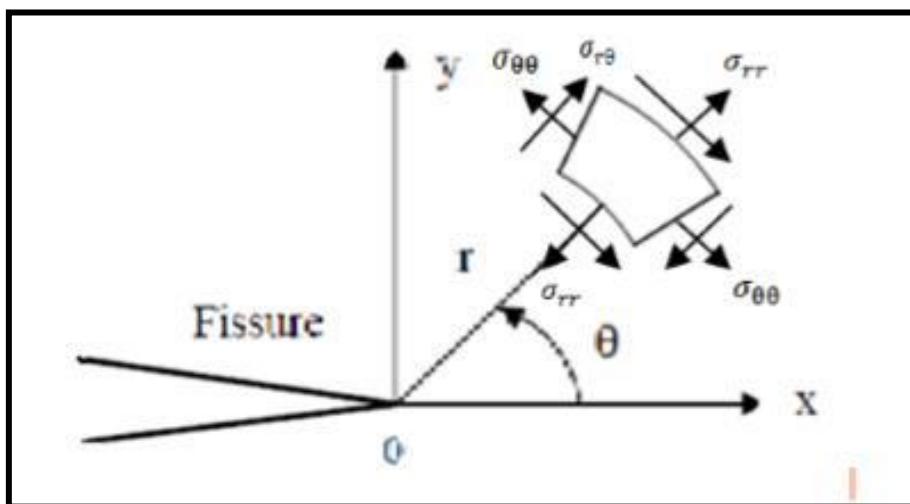
Dans la réalité, les fissures s'ouvrent selon une combinaison de ces modes, mais le mode I reste le plus étudié car il est généralement le plus critique pour la rupture

*Figure I-1 Les trois modes de rupture*

Le facteur d'intensité de contrainte  $K$  [2] :

Le champ de contraintes (Figure 1-2) présente une singularité en  $r^{-1/2}$  en pointe de fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par les paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes (FIC), notés  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  correspondants aux modes d'ouverture élémentaires.

A l'aide de la théorie de l'élasticité, Irwin a montré que les contraintes dans cette zone singulière peuvent être exprimées en fonction des facteurs d'intensité de contraintes de la manière suivante :

*Figure I-2 Champ de contrainte*

**Mode I :**

$$(I-1) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{22} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{12} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

**Mode II :**

$$(I-2) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = -K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{22} = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{12} = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases}$$

**Mode III:**

$$(I-3) \quad \begin{cases} \tau_{13} = -K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ \tau_{13} = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

Où  $r$  et  $\theta$  sont respectivement le rayon et l'angle en coordonnées polaires. Dans les formules précédentes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}, \tau_{13}$  et  $\tau_{23}$  sont les composantes du tenseur des Contraintes.

Les coefficients  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont appelés facteurs d'intensité de contraintes et s'expriment

en MPa $\sqrt{M}$ . Ils sont indépendants de  $r$  et  $\theta$  et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs sur un solide donné, de sa géométrie et de la longueur de la fissure

## **II. Chapitre II : Développement des Contraintes, méthode de collocation de frontière et méthode des moindres carrés**

### I.1. Introduction :

Nous présentons dans ce chapitre, le développement des contraintes en série infinie pour une fissure en mode III. Nous présentons également la méthode de collocation de frontière.

### I.2. Développement des contraintes en série infinie :

En mode III, on est dans le cas de l'élasticité anti-plane. Nous rappelons qu'en élasticité anti-plane, toutes les contraintes sont nulles sauf  $\tau_{13}$  et  $\tau_{23}$ . Nous introduisons la formulation en variables complexes qui s'écrit dans ce cas [4]:

- $\tau = \tau_{23} + i\tau_{13}$
- $n = n_1 + i n_2$  II-1
- $t = t_3 = \text{Im}(\tau n)$

Où  $\tau$  est la contrainte complexe,  $t$  est une abréviation pour  $t_3$  la composante selon  $x_3$  du vecteur contrainte,  $n$  est la normale unitaire extérieure au domaine, et  $n_1$  et  $n_2$  ses composantes selon  $x_1$  et  $x_2$ .

La contrainte complexe  $\tau$  qui est une fonction analytique, peut être exprimée par une série infinie de fonctions puissance :

$$\tau = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} C_N Z^{\lambda_N} II - 2$$

où les  $C_N = A_N + iB_N$  sont des nombres complexes, les  $\lambda_N$  sont des réels  $Z = r e^{i\theta}$  et avec  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires.

En regroupant les parties réelles et imaginaires dans (II-2), il vient :

$$\tau = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} r^{\lambda_N} \{ [A_N \cos(\lambda_N \theta) - B_N \sin(\lambda_N \theta)] + i[A_N \sin(\lambda_N \theta) + B_N \cos(\lambda_N \theta)] \}. II - 3$$

Pour satisfaire les conditions de bord libre sur les lèvres de la fissure (Figure II-1), et en utilisant (II-1) on a  $\text{Re}(\tau) = \tau_{23} = 0$  pour  $\theta = \pm\pi$ . En prenant la partie réelle de II-3 et en remplaçant par  $\theta = \pm\pi$  et  $-\theta$  respectivement, on obtient les équations suivantes (en prenant  $r \neq 0$ ):

$$A_N \cos(\lambda_N \pi) - B_N \sin(\lambda_N \pi) = 0 \quad II - 4$$

$$A_N \cos(\lambda_N \pi) + B_N \sin(\lambda_N \pi) = 0 \quad II - 5$$

Si  $\lambda_N$  n'est ni entier ni demi-entier, (II-4) et (II-5) donnent  $A_N=BN=0$ , solution triviale sans intérêt. Nous devons donc considérer séparément le cas entier et le cas demi-entier :

$$\begin{cases} \lambda_N = N - 1 \Rightarrow A_N = 0 \quad B_N \forall que \\ \lambda_N = N - \frac{3}{2} \Rightarrow B_N = 0 \quad A_N \forall que \end{cases} \text{II-6}$$

avec  $N$  entier.

Pour éviter un déplacement infini en pointe de fissure, on doit avoir  $-1/2$  ( $N \geq 1$ ) [5]. En tenant compte de (II-6), (II-3) devient :

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \cos \left[ \left( -\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] - B_N r^{N-1} \sin \left[ (N-1) \theta \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. i \left[ A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \sin \left[ \left( -\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] + B_N r^{N-1} \cos \left[ (N-1) \theta \right] \right] \right\} \\ \tau &= \sum_{N=1}^p \left\{ \left[ A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \cos \left[ \left( -\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] - B_N r^{N-1} \sin \left[ (N-1) \theta \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. i \left[ A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \sin \left[ \left( -\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] + B_N r^{N-1} \cos \left[ (N-1) \theta \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

où  $p$  est appelé *nombre de termes*. Nous constatons que (II-8) contient  $2p$  constantes inconnues :  $A_N, B_N$ .

Nous avons besoin de l'expression de  $t$  (la composante selon  $x_3$  du vecteur contrainte). En utilisant (II-1) et (II-8), on obtient :

$$\sum_{N=1}^p \left\{ A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \left[ \cos \left[ \left( -\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] n_2 + \sin \left[ \left( -\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] n_1 \right] + B_N r^{N-1} [-\sin[(N-1)\theta]n_2 + \cos[(N-1)\theta]n_1] \right\}. \text{ (II-9)}$$

### Facteur d'intensité de contrainte KIII

En développant (II-8) pour  $N = 1$ , on obtient :

$$\tau = A_1 r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \left( -A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2} + B_1 \right) + \dots = \tau_{23} + i \tau_{13}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, de part et d'autre de l'équation, on obtient :

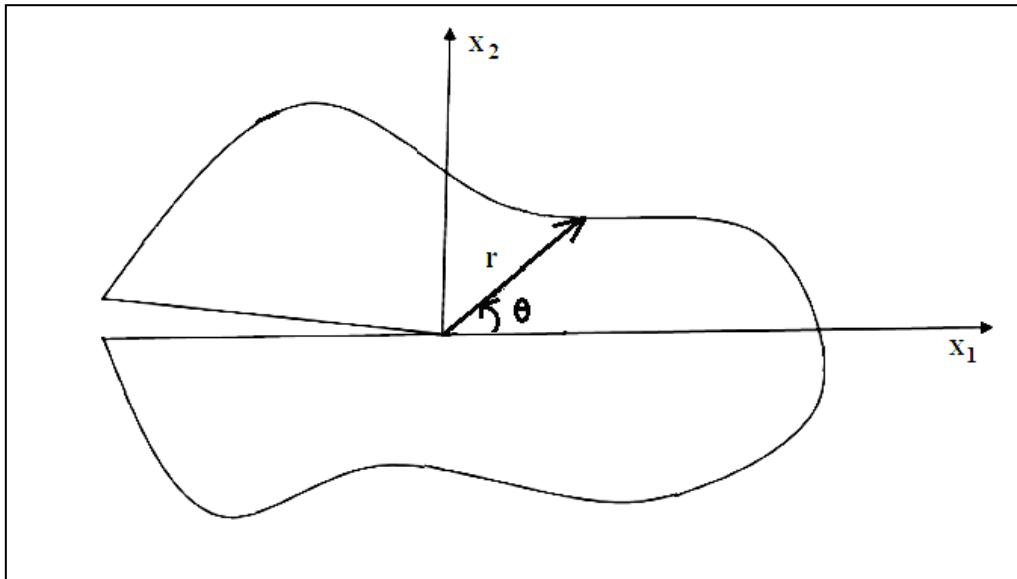
$$\begin{cases} \tau_{23} = A_1 r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots \\ \tau_{13} = -A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + B_1 + \dots \end{cases} \quad \text{II-10}$$

D'autre part, nous savons que le développement asymptotique des contraintes en mode III s'écrit de la manière suivante[5]:

$$\begin{cases} \tau_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \\ \tau_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{II-11}$$

Par identification, on obtient :

$$K_{III} = A_1 \sqrt{2\pi}. \quad \text{II-12}$$



*Figure II-1 Fissure droite et coordonnées polaire.*

### I.3. Méthode de collocation de frontière :

Soit la section fissurée de forme quelconque représentée sur la Figure II-2. On suppose que la composante  $t$  soit connue en tout point de la frontière. Pour déterminer  $K_{III}$ , on choisit d'abord  $C$  points sur la frontière, appelés *points de collocation*. Pour chaque point  $q$ , on utilise (II-9). On obtient le système de  $C$  équations à  $2p$  inconnues suivant :

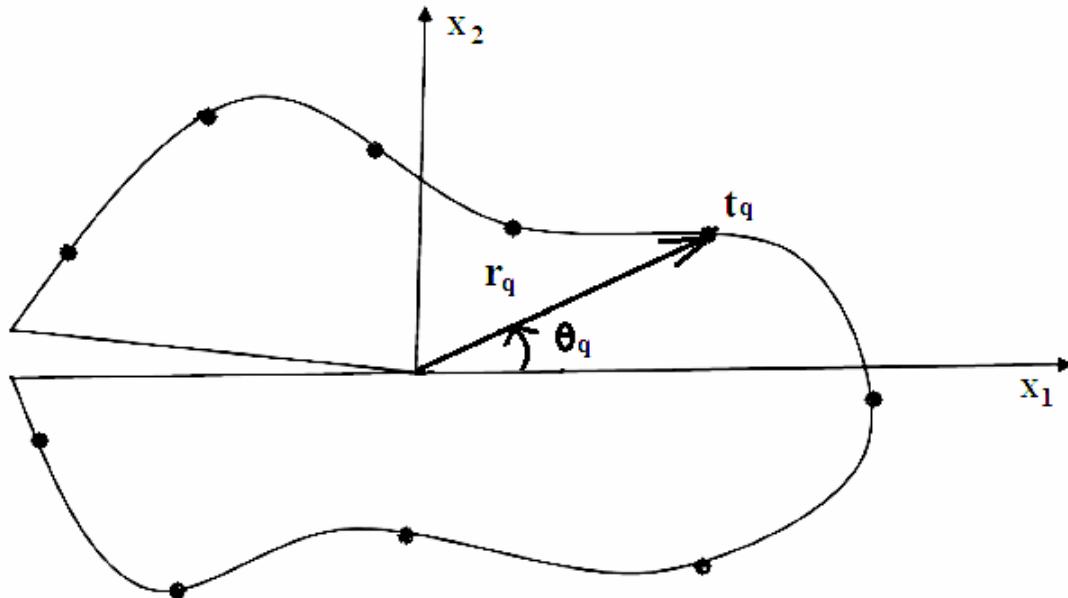
$$t_q = \sum_{N=1}^p \left\{ A_N r_q^{\left(\frac{-3}{2}+N\right)} [\cos [(-\frac{3}{2}+N)\theta_q] n_2^q + \sin [(-\frac{3}{2}+N)\theta_q] n_1^q] \right\} + \quad \text{(II-13)}$$

$$B_N r_q^{N-1} [-\sin[(N-1)\theta_q] n_2^q + \cos[(N-1)\theta_q] n_1^q], q = 1 \text{ à } 2p.$$

La résolution du système (II-13) donnera les inconnues  $A_N$  et  $B_N$  et en utilisant (II-12), on obtient  $K_{III}$ .

**Remarque :**

En prenant un nombre  $C=2p$  c'est à dire un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues. Le système II-13 peut être résolu mais les résultats obtenus sont d'une grande instabilité. Pour remédier à ce problème, on prend un nombre de points de collocation  $C$  supérieur au nombre d'équations  $2p$ . Le système surdéterminé obtenu sera résolu par la méthode des moindres carrés.



**Figure II-2 Section fissurée et points de collocation.**

#### I.4. Méthode des moindres carrés :

La Méthode des moindres carrés est une technique mathématique utilisée pour trouver la meilleure approximation possible d'une relation entre des variables, en minimisant la somme des carrés des écarts (erreurs) entre les valeurs observées et les valeurs estimées par un modèle

Utilisée fréquemment dans de nombreux domaines scientifiques, cette approche consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et celles estimées.

**La théorie de l'erreur s'articule autour de trois défis principaux :**

1. Fusionner les diverses erreurs pour déterminer une valeur optimale représentative du "juste milieu".
2. Établir la distribution probabilistique des erreurs.
3. Adopter une stratégie efficiente pour estimer des quantités à partir d'un ensemble d'équations plus nombreuses que les inconnues (système surdéterminé).

L'évaluation par la méthode du maximum de vraisemblance, quant à elle, est une approche statistique fréquemment exploitée pour déduire les paramètres qui régissent la distribution de probabilité d'un ensemble de données. Cet outil est primordial pour interpréter et inférer des conclusions statistiques à partir d'observations variées.

Ces méthodes sont des piliers dans l'analyse de données et jouent un rôle crucial dans l'avancement des sciences expérimentales. L'intégration de ces techniques permet de maximiser la précision des résultats et de réduire l'ambiguïté dans l'interprétation des mesures.

La valeur la plus probable est telle que la somme des carrés des différences entre les observations et cette valeur est minimale.

La première publication de la méthode des moindres carrés (destinée à déterminer des quantités dans un système d'équations surdéterminées) est de Legendre en 1805 et de Gauss en 1809.

#### **I.4.1. Forme standard :**

**Définition :** on appelle forme standard d'un problème de moindre carrés la donnée de :

. la matrice A=  $\begin{pmatrix} V_{1.1} & V_{1.2} & V_{1.n} \\ V_{2.1} & V_{2.2} & V_{2.n} \\ V_{m.1} & V_{m.2} & V_{m.n} \end{pmatrix} \in M^{mn}$  mn appelée matrice des données

. le vecteur réponse  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^n$

. L'expression du critère : on cherche  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$\text{Réalisant : } \min_{x \in R^n} \|Ax - b\|^2$$

### I.4.2. Solution analytique :

Soit  $E(x) = \|Ax - b\|^2$  la fonction erreur. On sait que  $E(x)$  est minimale  $\Rightarrow E'(x) = 0$ .

Dans le cas où  $E$  est strictement convexe, on renvoie :  $E(x) \Leftrightarrow E'(x) = 0$

On cherche donc  $x \in R^n$

tel  $E'(x) = 0$ . Par conséquent, les dérivées partielles par rapport à tous les paramètres du vecteur  $x$  doivent être nulles :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Ou on peut faire autrement :

Prendre le système surdéterminé  $Ax=b$ , et effectuer le produit à gauche par la matrice transposée de  $A$  :

$$A^t Ax = A^t b \quad (\text{II.5})$$

Le système (II.5) sera résolu par les méthodes classiques.

### Exemple :

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 2 \\ 2x - 3y &= 4 \\ 4x + 2y &= 3 \end{aligned} \quad (\text{II. 6})$$

(II.6) est un système surdéterminé de 3 équations à deux inconnues ( $x, y$ ) qui ne peut être résolu d'une manière exacte. On va le résoudre approximativement par la méthode des moindres carrés.

On cherche une solution approchée ( $x, y$ ) telle que l'erreur :

$$E(x,y) = (3x+2y-2)^2 + (2x-3y-4)^2 + (4x+2y-3)^2,$$

Soit minimale.

On annule les dérivées partielles par rapport à  $x$  et à  $y$  :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (\text{II.7})$$

On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$29x + 8y = 26$$

$$8x + 17y = -2 \quad (\text{II. 8})$$

Une autre manière d'obtenir (II.8) est de réécrire le système (II. 6) sous forme matricielle et on multiplie ensuite le système par la matrice transposée  $A^t$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On abouti au même système que (II.6)

$$\begin{pmatrix} 29 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{II. 9})$$

(II. 9) est résolu par la méthode de Cramer :

$$D = \begin{vmatrix} 29 & 8 \\ 8 & 17 \end{vmatrix} = 429$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 26 & 8 \\ -2 & 17 \end{vmatrix} = 458$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 29 & 26 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 150$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{458}{429}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{150}{429}$$

En remplaçant dans **(II. 6)** on trouve :

$$3x + 2y = 3.902$$

$$2x - 3y = 1.086 \quad (\textbf{II. 10})$$

$$4x + 2y = 4.969$$

Ces observe à partir de **(II. 10)** que **(II. 9)** n'est que approximation **(II.6)**.

Mais c'est la meilleure approximation possible au sens des moindres carrés.



### **III. Chapitre III Problème Traité**

## II.1. Introduction :

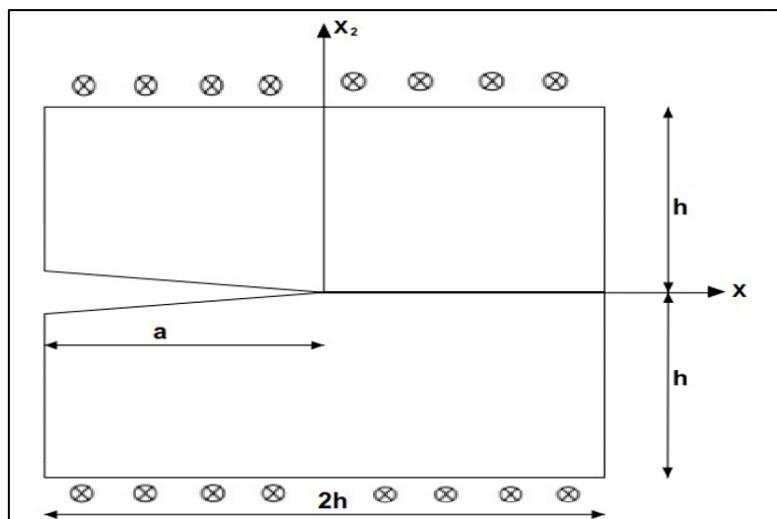
Dans ce chapitre, nous allons calculer le facteur d'intensité de contrainte KIII pour une section carrée fissurée avec la méthode de collocation de frontière. Pour régler le problème de l'instabilité des résultats, nous utilisons la méthode des moindres carrés.

Nous effectuons plusieurs calculs en augmentant le nombre de points de collocation C par rapport au nombre de termes p.

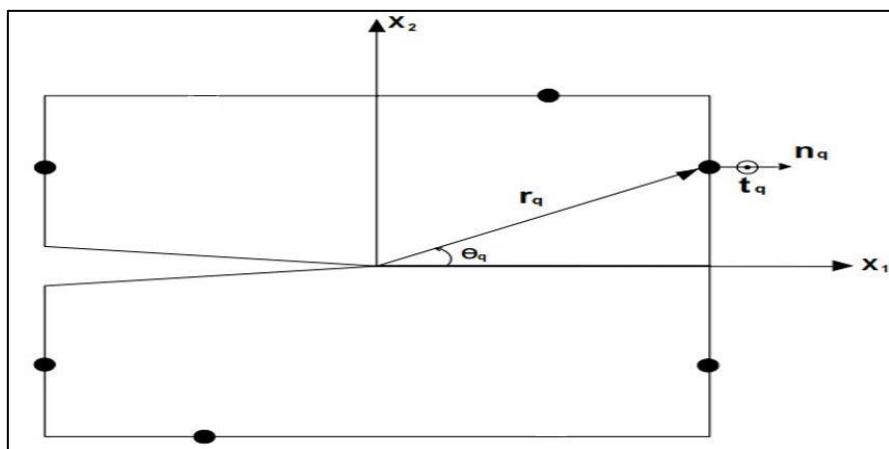
## II.2. Structure étudiée :

On considère une section carrée de côté  $2h$ , contenant une fissure de longueur  $a$ . La section est chargée avec une traction uniforme  $T$  parallèle au plan de la fissure. Dans toute la suite de

ce travail on prend  $T=1$  et  $h=1$ .



*Figure III-1 Structure carrée fissurée avec chargement en cisaillement*



*Figure III-2 Points de collocation*

Nous sélectionnons des points de collocation régulièrement espacés le long du périmètre de la section. L'angle pour chaque point est déterminé à l'aide de la formule ci-dessous.

$$\theta_p = \frac{2\pi p}{2N+1} - \pi \quad (\text{III.3})_{p=1 \text{ à } 2p}$$

### Remarque :

Cette disposition des points sera appliquée à tous les problèmes abordés dans ce travail. La formule (III.3) a été conçue pour éviter les angles de  $-\pi$  et  $+\pi$  car, en ces points, la normale n'est pas définie.

La composante  $t$  suivant  $z$  du vecteur contrainte et les composantes de la normale extérieure  $n$

$(n_x, n_y)$  ainsi que la valeur de  $r_p$  pour chaque point de collocation et pour chaque portion de la frontière sont données dans le Tableau III-10.

On reporte ces valeurs dans le système (II-13).

*Tableau III-1 Les valeurs pour chaque secteur*

Secteur du point de collocation	$r$	$ny$	$ny$	T
$-\tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right) < \theta < \tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right)$	$\frac{2h-a}{\cos\theta}$	1	0	0
$\tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right) < \theta < \pi - \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$	$\frac{h}{\sin\theta}$	0	1	1
$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) < \theta < \pi$	$\frac{-a}{\cos\theta}$	-1	0	0
$-\pi + \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) < \theta < \tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right)$	$\frac{-h}{\sin\theta}$	0	-1	-1
$-\pi < \theta < -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$	$\frac{-a}{\cos\theta}$	-1	0	0

### II.3. Les Résultats de notre étude :

#### II.3.1. Résultats pour C=2p:

Dans ce paragraphe nous allons présenter les résultats obtenus avec  $C=2p$ ,  $p$  représenté nombre de termes et  $C$  représenté le nombre de point de collocation.

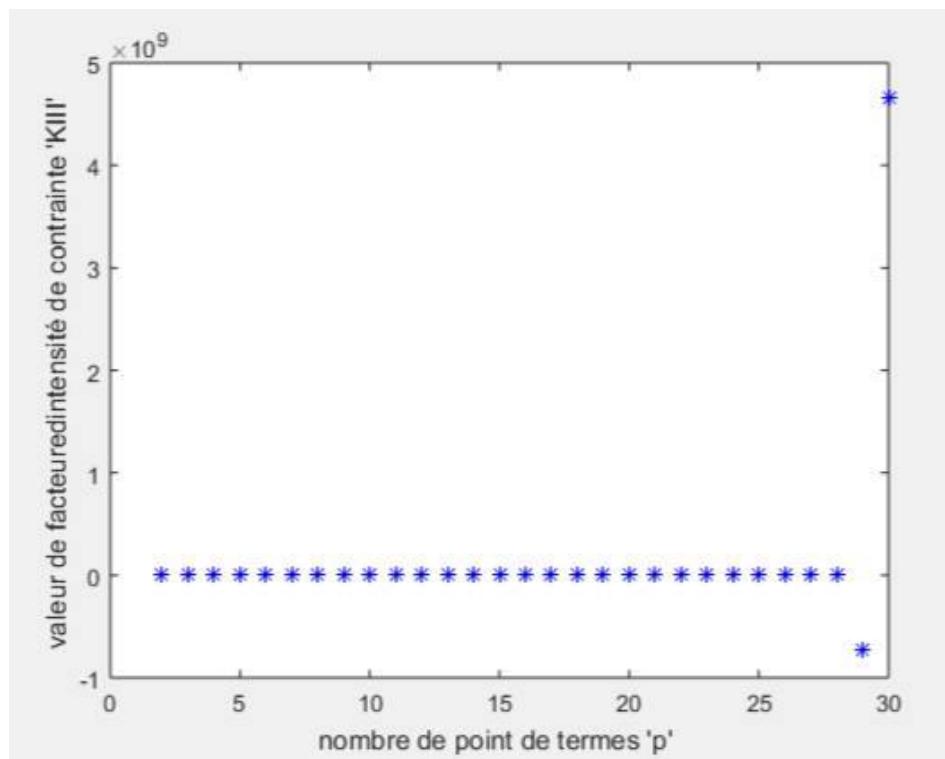
Nous avons effectué plusieurs calculs pour  $a \in [0.1..1.9]$ . Nous avons constaté que les résultats ne sont stables que pour  $a \in [0.8..1.1]$ . Nous présentons ci dessous, à titre d'exemple,

les résultats obtenus pour  $a=0.7$  et  $a=1$  et  $a=1.2$ . Tous les autres résultats sont présentés dans l'annexe 2.

### a) Résultats pour $a=0.7$

*Tableau III-2 KIII en fonction N, moindres carrés ( $a=0.7$ )*

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	0.0000
6	0.0000	16	0.0000	26	-0.0000
7	0.0000	17	0.0000	27	0.0004
8	0.0000	18	0.0000	28	0.0000
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.7230
10	0.0000	20	0.0000	30	4.6626



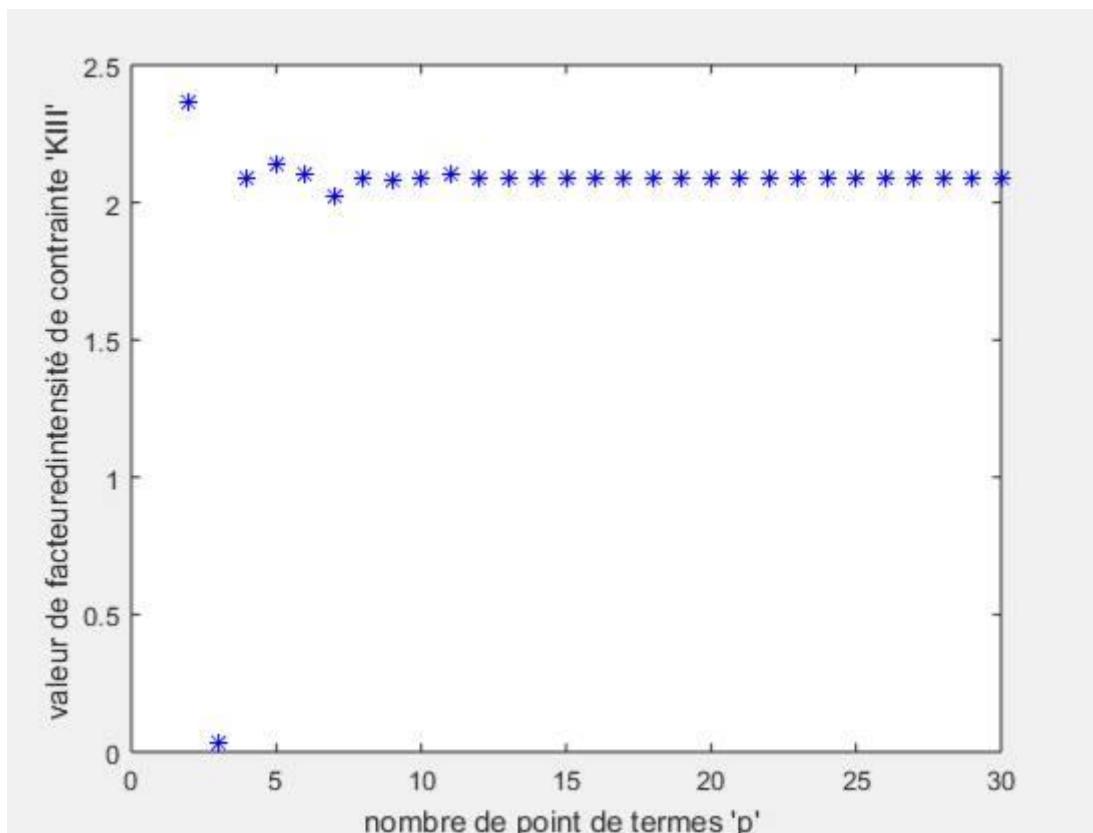
*Figure III-3 Évolution de KIII en fonction de N, MDR ( $a=0.7$ )*

Nous constatons que les résultats ne sont pas stables pour  $a = 0.7$ .

**b) Résultats pour a=1**

*Tableau III-3 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1)*

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	2.1037	21	<b>2.0875</b>
2	2.3629	12	<b>2.0879</b>	22	<b>2.0874</b>
3	0.0296	13	<b>2.0886</b>	23	<b>2.0873</b>
4	2.0874	14	<b>2.0878</b>	24	<b>2.0874</b>
5	2.1368	15	<b>2.0853</b>	25	<b>2.0874</b>
6	2.1006	16	<b>2.0873</b>	26	<b>2.0874</b>
7	2.0222	17	<b>2.0872</b>	27	<b>2.0874</b>
8	2.0874	18	<b>2.0873</b>	28	<b>2.0874</b>
9	2.0799	19	<b>2.0878</b>	29	<b>2.0874</b>
10	2.0848	20	<b>2.0874</b>	30	<b>2.0874</b>



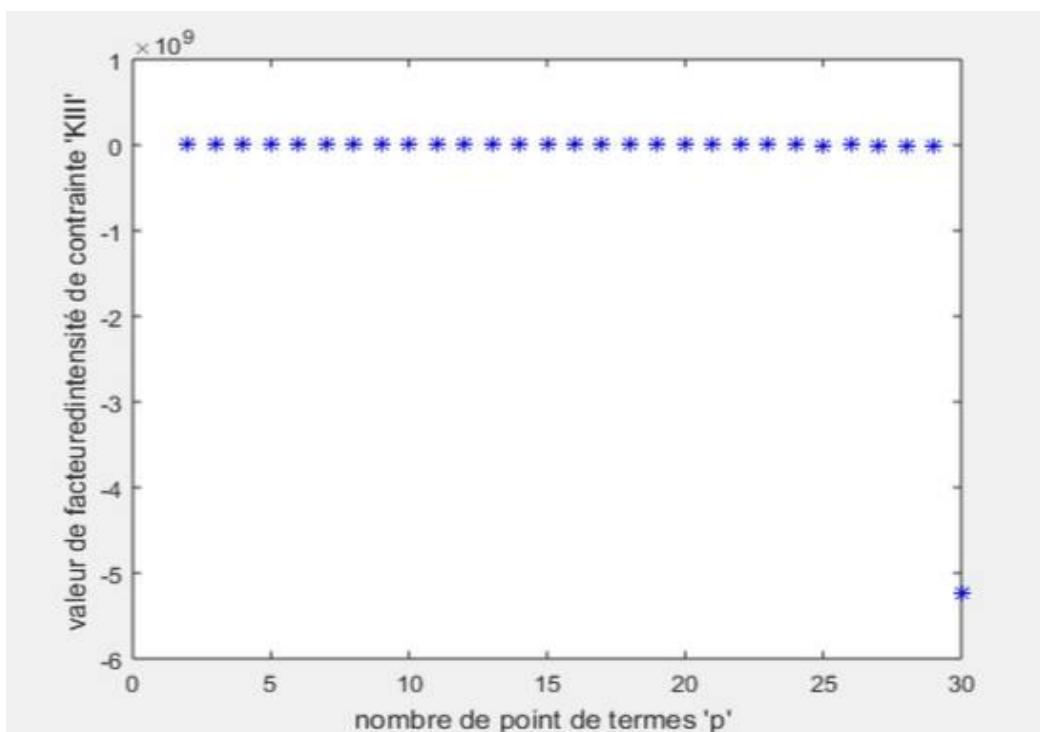
*Figure III-4 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1)*

Nous constatons que les résultats ne sont pas stables pour  $a = 1$ . Le tableau III-2 et la figure III-4 montrent le facteur  $K_{III}$  se stabilise à la valeur de 2.08 à partir de  $p = 12$ .

### c) Résultats pour $a=1.2$

*Tableau III-4 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1.2)*

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	-0.0000
6	0.0000	16	0.0000	26	0.0000
7	0.0000	17	0.0000	27	-0.0004
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.0034
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.0055
10	0.0000	20	0.0000	30	-5.2349



*Figure III-5 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1.2)*

Nous constatons que les résultats ne sont pas stables pour  $a = 1.2$ .

### Conclusion :

Nous constatons, à partir des résultats obtenus, qu'en prenant  $C=2p$ , les calculs ne sont stables que pour les valeurs de  $a$  comprises entre 0.8 et 1.1.

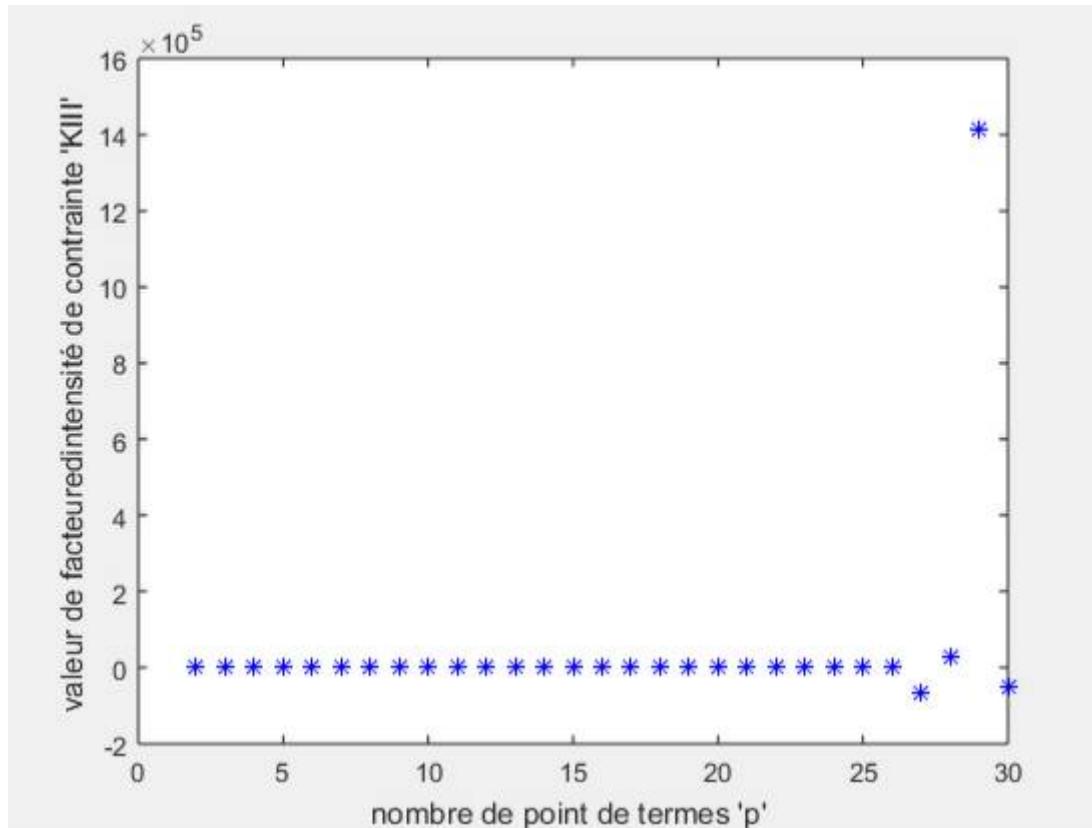
#### II.3.2. Résultats pour $C=4p$ :

Nous avons effectué plusieurs calculs pour  $a \in [0.1..1.9]$ . Nous avons constaté que les résultats sont stables pour  $a \in [0.5..1.6]$ . Nous présentons ci dessous, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour  $a=0.4$  et  $a=1.2$  et  $a=1.7$ . Tous les autres résultats sont présentés dans l'annexe 1.

##### a) Résultats pour $a=0.4$

*Tableau III-5 KIII en fonction N, moindres carrés ( $a=0.4$ )*

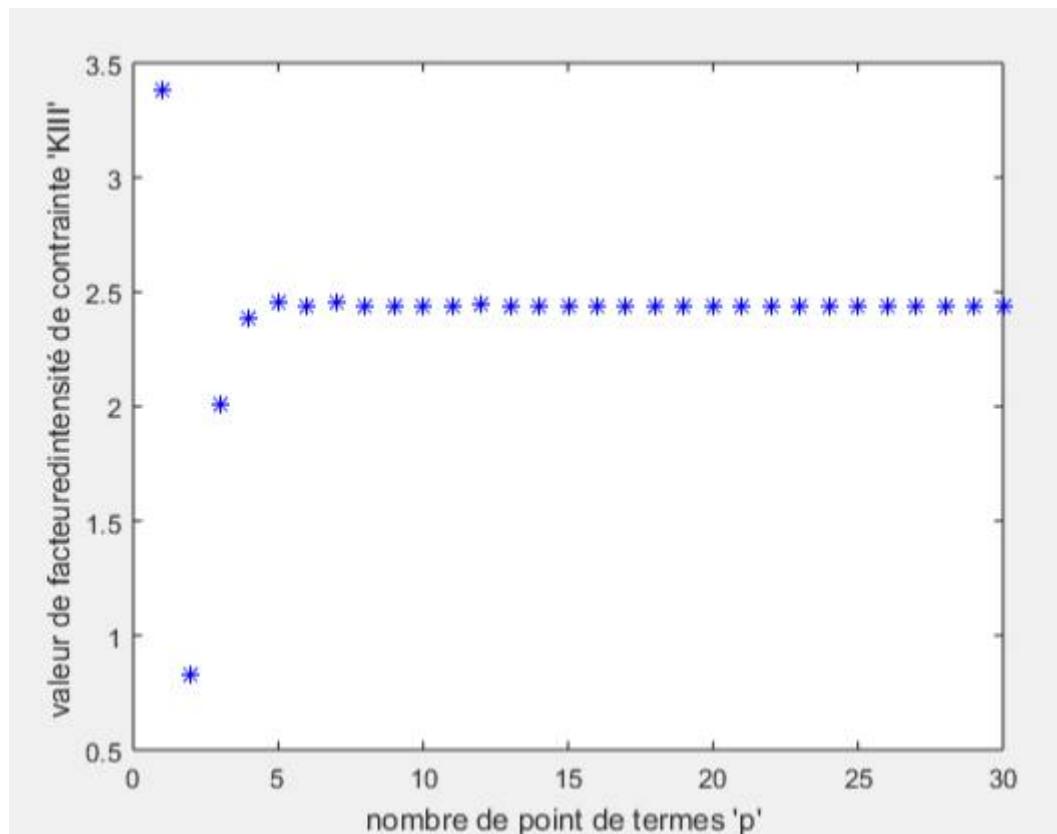
N	KIII	N	KIII	N	KIII
1	0.0000	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	0.0000
6	0.0000	16	0.0000	26	0.0000
7	0.0000	17	0.0000	27	-0.0647
8	0.0000	18	0.0000	28	0.0287
9	0.0000	19	0.0000	29	1.4122
10	0.0000	20	0.0000	30	-0.0489

Figure III-6 Évolution de KIII en fonction de N, MDR ( $a=0.4$ )

### b) Résultats pour $a=1.2$

Tableau III-6 KIII en fonction N, moindres carrés ( $a=1.2$ )

N	K III	N	K III	N	K III
1	3.3796	11	2.4405	21	<b>2.4410</b>
2	0.8244	12	2.4418	22	<b>2.4410</b>
3	2.0067	13	2.4406	23	<b>2.4410</b>
4	2.3878	14	2.4411	24	<b>2.4410</b>
5	2.4573	15	2.4409	25	<b>2.4410</b>
6	2.4341	16	2.4409	26	<b>2.4410</b>
7	2.4560	17	<b>2.4410</b>	27	<b>2.4410</b>
8	2.4374	18	<b>2.4410</b>	28	<b>2.4410</b>
9	2.4377	19	<b>2.4410</b>	29	<b>2.4410</b>
10	2.4409	20	<b>2.4410</b>	30	<b>2.4410</b>

Figure III-7 Évolution de KIII en fonction de N, MDR ( $a=1.2$ )

### c) Résultats pour $a = 1.7$

Tableau III-7 KIII en fonction N, moindres carrés ( $a=1.7$ )

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0000	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	-0.0010
6	0.0000	16	0.0000	26	0.0177
7	0.0000	17	0.0000	27	1.0327
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.0187
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.2132
10	0.0000	20	0.0000	30	0.2269

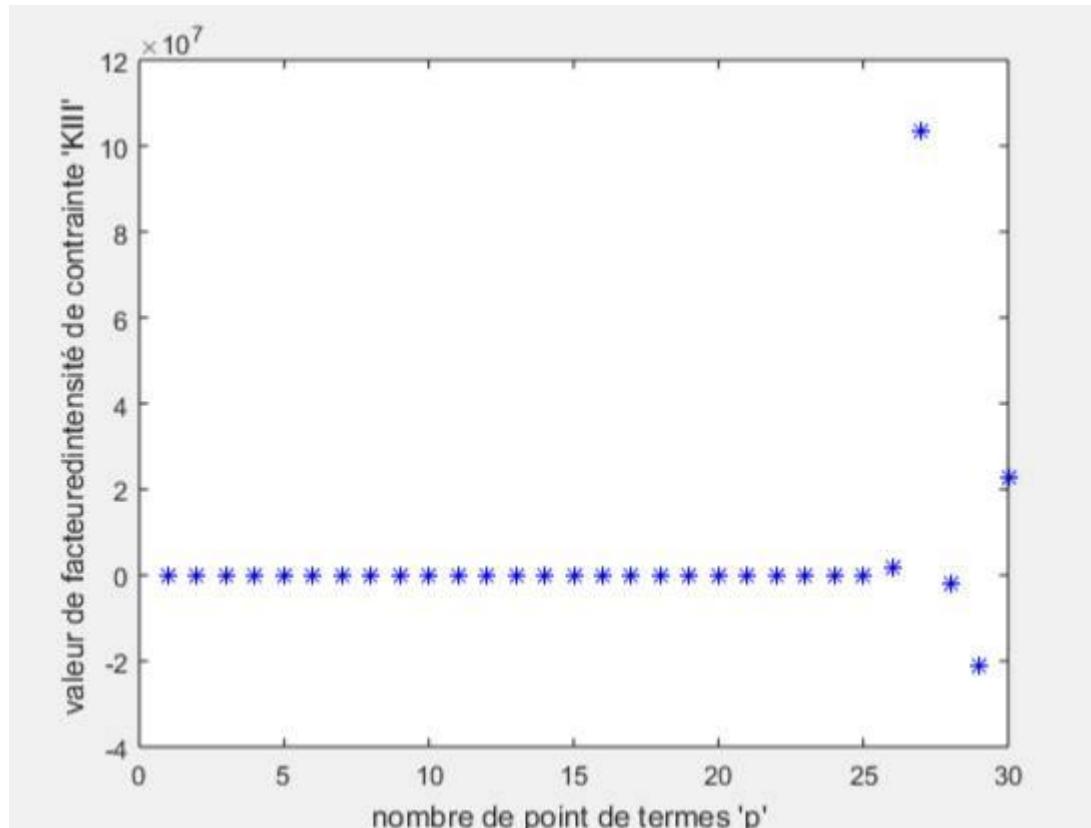


Figure III-8 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1.7)

### Conclusion :

Les résultats ne sont stables que pour  $a \in [0.5 ; 1.6]$ . Nous constatons que le domaine de stabilité est plus grand que celui de  $C=2p$

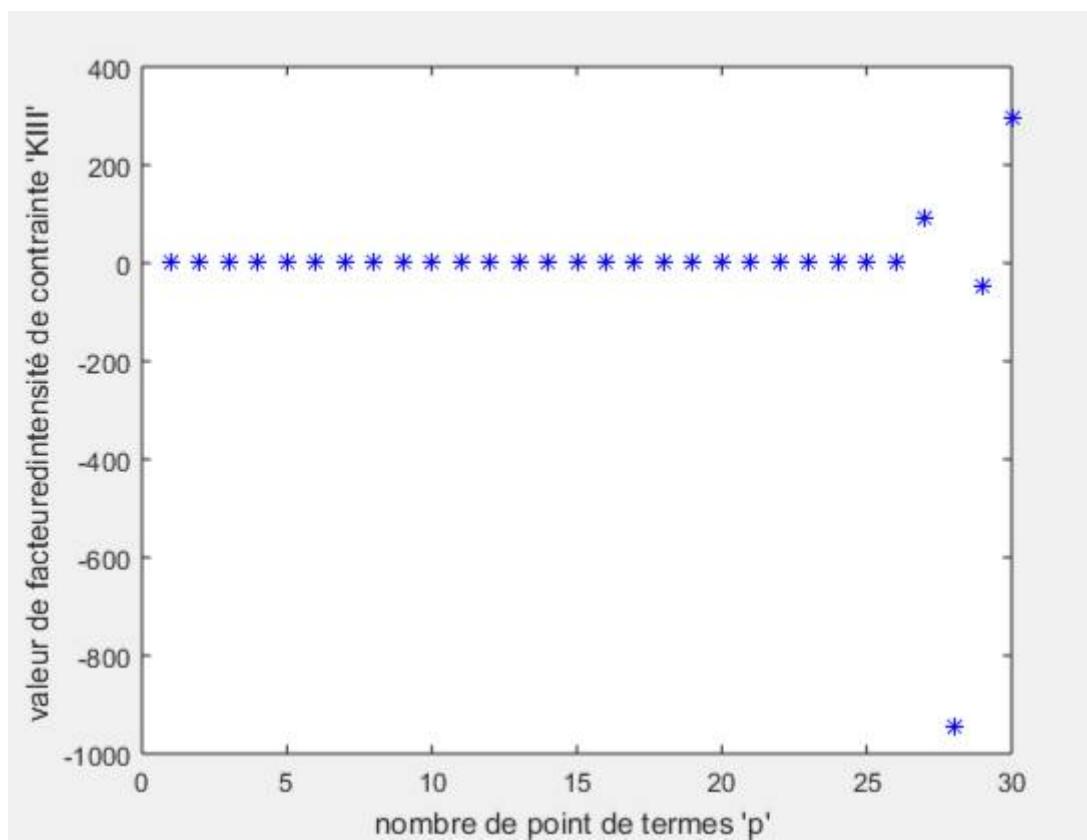
#### II.3.3. Résultats pour C=100p :

Nous avons effectué plusieurs calculs pour  $a \in [0.1..1.9]$ . Nous avons constaté que les résultats sont stables pour  $a \in [0.5..1.5]$ . Nous présentons ci dessous, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour  $a=0.4$  et  $a=1$  et  $a=1.6$ . Tous les autres résultats sont présentés dans l'annexe 2.

**a) Résultats pour  $a=0.4$**

**Tableau III-8 KIII en fonction N, moindres carrés ( $a=0.4$ )**

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.8976	11	1.1570	21	1.1575
2	1.0085	12	1.1570	22	1.1575
3	1.0210	13	1.1572	23	1.1576
4	1.0832	14	1.1574	24	1.1576
5	1.1214	15	1.1575	25	1.1576
6	1.1472	16	1.1575	26	1.1576
7	1.1546	17	1.1576	27	91.3366
8	1.1569	18	1.1576	28	-946.0375
9	1.1572	19	1.1576	29	-45.0118
10	1.1570	20	1.1576	30	297.1526

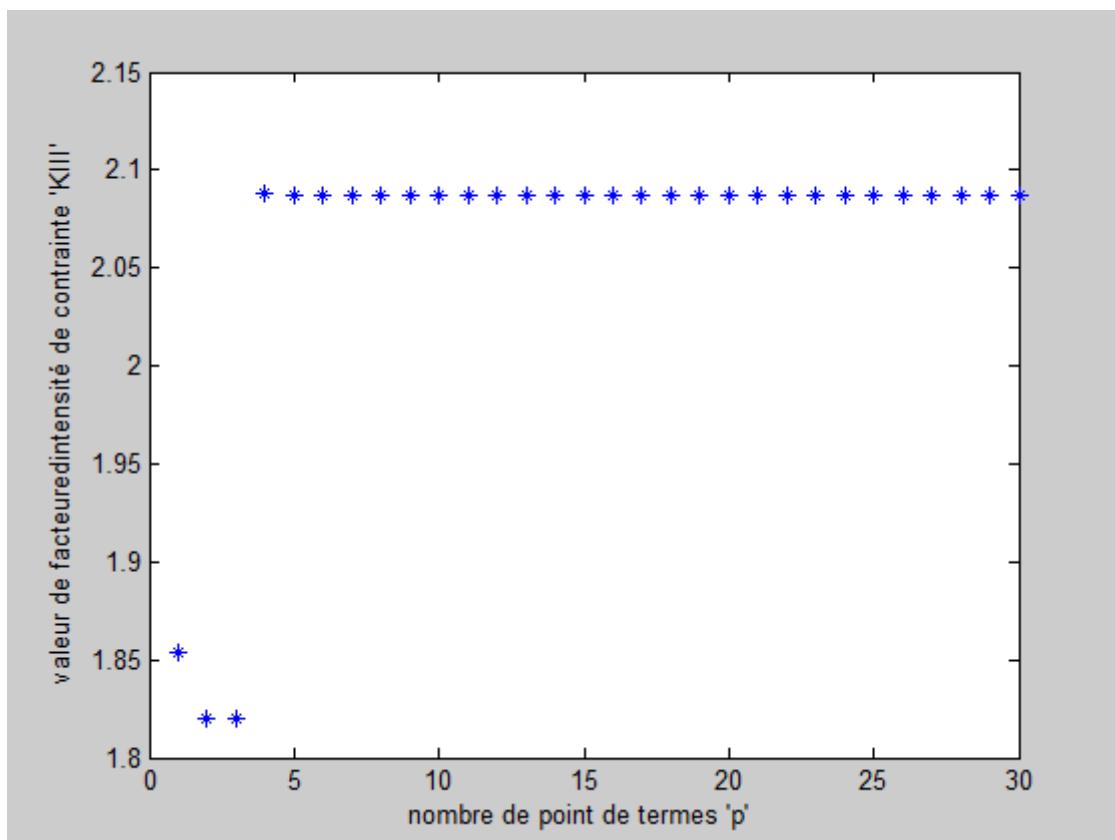


**Figure III-9 Évolution de KIII en fonction de N, MDR ( $a=0.4$ )**

## b) Résultats pour $a=1$

*Tableau III-9 KIII en fonction N, moindres carrés (a=1)*

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.8536	11	<b>2.0874</b>	21	<b>2.0874</b>
2	1.8201	12	<b>2.0874</b>	22	<b>2.0874</b>
3	1.8200	13	<b>2.0874</b>	23	<b>2.0874</b>
4	2.0882	14	<b>2.0874</b>	24	<b>2.0874</b>
5	2.0870	15	<b>2.0874</b>	25	<b>2.0874</b>
6	2.0875	16	<b>2.0874</b>	26	<b>2.0874</b>
7	2.0870	17	<b>2.0874</b>	27	<b>2.0874</b>
8	<b>2.0874</b>	18	<b>2.0874</b>	28	<b>2.0874</b>
9	<b>2.0874</b>	19	<b>2.0874</b>	29	<b>2.0874</b>
10	<b>2.0874</b>	20	<b>2.0874</b>	30	<b>2.0874</b>

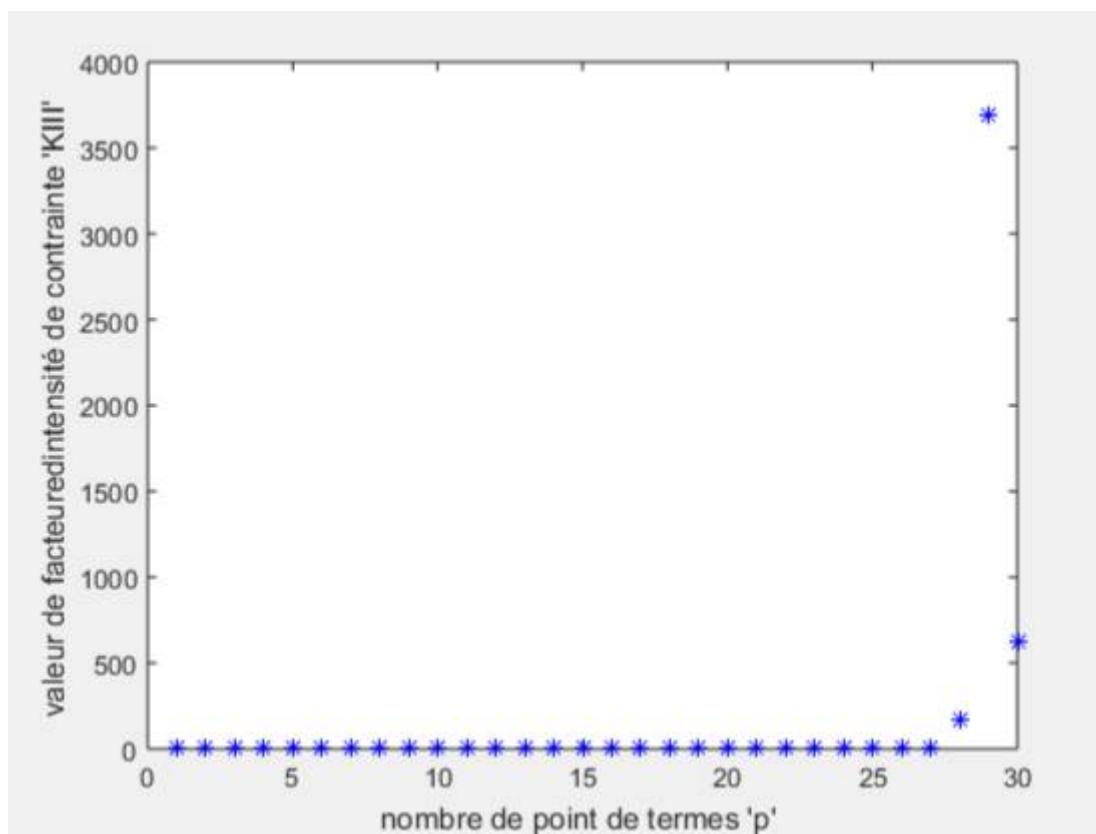


*Figure III-10 Évolution de KIII en fonction de N, MDR (a=1)e*

### c) Résultats pour $a=1.6$

**Tableau III-10 KIII en fonction N, moindres carrés ( $a=1.6$ )**

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0020	11	0.0036	21	0.0036
2	0.0022	12	0.0036	22	0.0036
3	0.0022	13	0.0036	23	0.0036
4	0.0031	14	0.0036	24	0.0036
5	0.0035	15	0.0036	25	0.0036
6	0.0035	16	0.0036	26	0.0036
7	0.0035	17	0.0036	27	0.0084
8	0.0035	18	0.0036	28	0.1737
9	0.0035	19	0.0036	29	3.6913
10	0.0036	20	0.0036	30	0.6206



**Figure III-11 Évolution de KIII en fonction de N, MDR ( $a=1.6$ )**

### Conclusion :

Les résultats ne sont stables que pour  $a \in [0.5 ; 1.5]$ . Nous constatons que le domaine de stabilité est plus grand que celui de  $C=2p$  et qu'il est sensiblement le même que pour  $C=4p$ . Nous en concluons que l'augmentation du nombre de points de collocation stabilise les résultats. Mais que dans ce cas cette stabilisation ne s'améliore pas au-delà de  $C=4p$ .

#### II.3.4. Comparaison entre KIII et KIII théorique :

**Remarque :** Nous avons calculé le coefficient théorique KIII en utilisant la loi que nous avons étudiée, la mécanique de la rupture, qui est :

$$KIII_t = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a}$$

Le KIII théorique correspond au cas d'une fissure latérale dans un demi-plan (Figure III-12). Elle est donnée par :

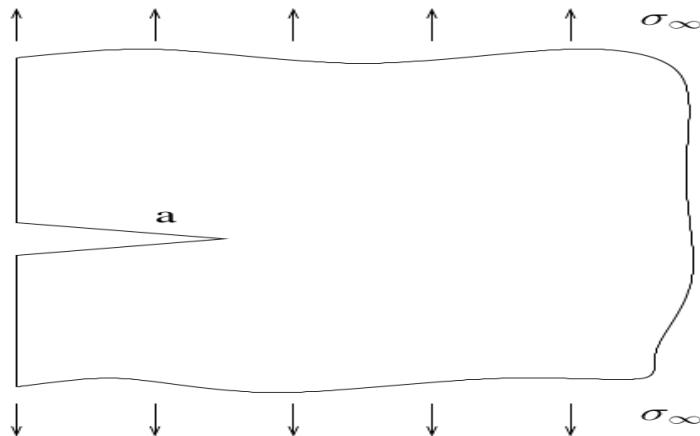
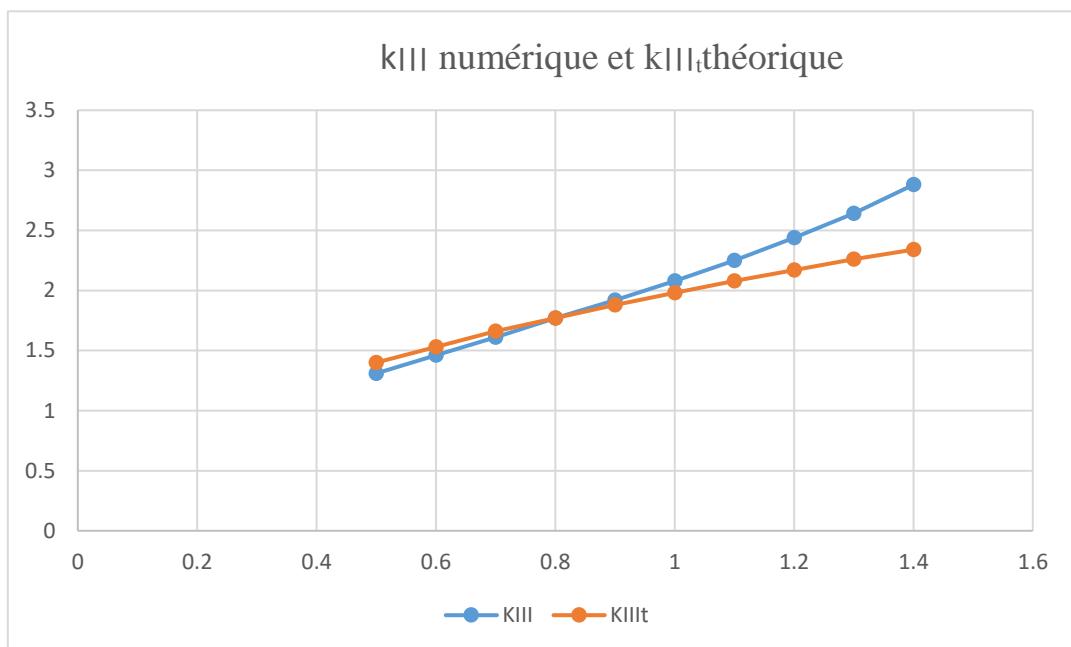


Figure III-12 Fissure latérale dans un demi-plan.

**Tableau III-11 Valeurs de  $K_{III}$  et  $K_{IIIt}$  en fonction de la longueur de la fissure**

a	$K_{III}$	$K_{III}$ théorique	Ecart % $  K_{IIIt} - K_{III}   / K_{III} t^* 100$
0.5	1.31	1.40	0.0006
0,6	1.46	1.53	0.0004
0,7	1.61	1.66	0.0003
0,8	1.77	1.77	0
0,9	1.92	1.88	0.0002
1	2.08	1.98	0.0005
1.1	2.25	2.08	0.0008
1.2	2.44	2.17	0.0011
1,3	2.64	2.26	0.0016
1,4	2.88	2.34	0.0023

**Figure III-13  $K_{III}$  et  $K_{IIIt}$  en fonction de la longueur de la fissure.**

On constate que plus la fissure s'agrandit plus l'écart entre les valeurs numériques et théoriques s'agrandit. Ceci est logique, car la formule théorique est pour une fissure dans un demi-plan, et les valeurs numériques sont pour une structure carrée fissurée. En effet plus la longueur de la fissure est petite dans la structure carrée plus on s'approche asymptotiquement du cas du demi-plan et plus les valeurs sont proches.

Nous constatons également que plus la fissure est grande et donc dangereuse, plus le KIII est important.

## **CONCLUSION GENERALE**

### **Conclusion générale :**

Ce travail est une application de la méthode de collocation de frontière en élasticité antiplane pour le cas d'une section carrée fissurée sous charge en cisaillement. Les principaux Résultats sont les suivants :

Nous constaté qu'en prenant  $C=2p$  c'est à dire un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues. Les résultats ne sont stables pour des longueurs de fissure proches de 1 ( $a \in [0.8..1.1]$ ). Ce qui correspond à une pointe approximativement au milieu du carré. En augmentant le nombre de points de colocations et donc le nombre d'équations on a constaté une amélioration de la stabilité, et des résultats stables pour une gamme plus large de longueurs de fissure ( $a \in [0.5..1.5]$ ). Nous avons également constaté qu'au delà de  $C=4p$  la stabilisation ne s'améliore pas.

Comme perspective, pour élargir encore la gamme de stabilité, nous pouvons utiliser d'autres méthodes telle que la Singular Value Decomposition (SVD).

## Références

**Références**

- [1] Bouza Mohamed, Bouras Zekri « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte mode I » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2016/2017).
- [2] MEZOUANI Yassine « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2013/2014).
- [3] Mekkaoui ahmed ,Belhadj Mokrane «calcul de KI pour une section elliptique fissurée par la méthode de collocation de frontière» » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2018/2019).
- [4] Alan T.Zehnde,PH.D “Lecture Notes on Fracture Mechanics” Departement of Theoretical and Applied Mechanics Cornell univesity, Ithaca, NY 14853, (2007)
- [5] cours Mr H.Ferdjani-mécanique de la rupture- USDB (2018)

## **Annexes**

# **Annexe1**

## **Programme Matlab**

## Annexes

---

```
clc
clear
%pmax=input('nombre des termes maximaux =');
% programme avec 2p EQUATIONS À 2p INCONNUES RÉSOLUTION AVEC RÉSOLUTION PAR
INVERSION MATRICIELLE
% p nbre de termes, m nbre de points de collocation
pmax=30;
h=1;
a=0.9;
for p=1:pmax;
    m=100*p;
    for q=1:m;
        teta(q)=q*2*pi/(m+1)-pi;
        if(teta(q)>-atan(h/(2*h-a)) &&teta(q)<atan(h/(2*h-a)))
            r(q)=abs((2*h-a)/cos(teta(q)));
            nx=1;
            ny=0;
            T(q)=0;
            for N=1:p;
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx);
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx);
            end
            end
            if (teta(q)>atan(h/(2*h-a)) &&teta(q)<pi-atan(h/a))
                r(q)=abs(h/sin(teta(q)));
                nx=0;
                ny=1;
                T(q)=1;
                for N=1:p;
                    u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx);
                    e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx);
                end
                end
                if (teta(q)>pi-atan(h/a)&&teta(q)<pi)
                    r(q)=abs(a/cos(teta(q)));
                    nx=-1;
                    ny=0;
                    T(q)=0;
                    for N=1:p;
                        u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx);
                        e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx);
                    end
                    end
                    if (teta(q)>-pi+atan(h/a) &&teta(q)<-atan(h/(2*h-a)))
                        r(q)=abs(h/sin(teta(q)));
                        nx=0;
                        ny=-1;
                        T(q)=-1;
                        for N=1:p;
                            u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx);
                            e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx);
                        end
                        end
                        if (teta(q)>-pi &&teta(q)<-pi+atan(h/a))
                            r(q)=abs(a/cos(teta(q)));
                            nx=-1;
                            ny=0;
                            T(q)=0;
                            for N=1:p;
```

## Annexes

---

```
u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx);
e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx);
end
end
end
H=[u,e];
%moindre carre
L=H'*H;
G=H'*T';
%inversion matricielle
C=inv(L)*G;
fic(p)=C(1)*sqrt(2*pi);
end
fic
p=1:pmax;
figure
plot(p,fic(p), 'b*')
xlabel('nombre de point de termes ''p'' ')
ylabel('valeur de facture d'intensité de contrainte ''KIII'' ')
```

## **Annexe2**

### **Résultats pour C=100p**

Résultats pour  $a=0.1$

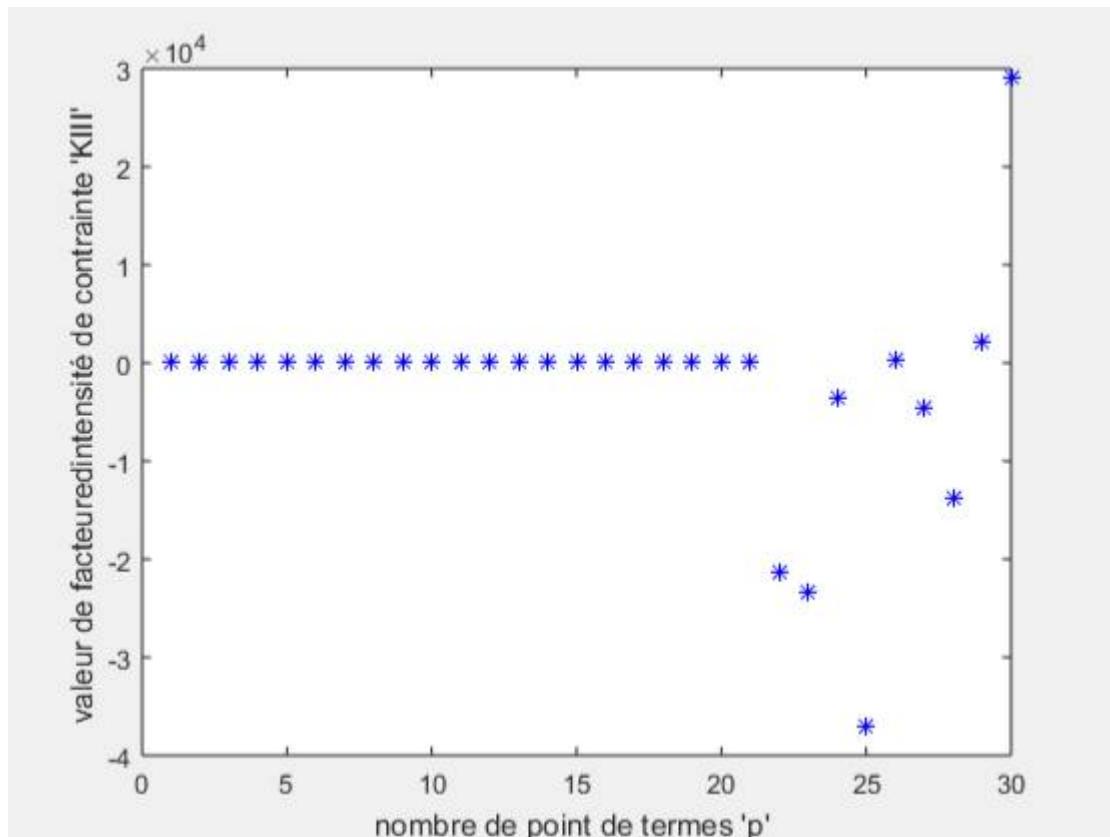


Figure A1-1 facteur K III en fct de

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0000	11	0.0001	21	0.0001
2	0.0000	12	0.0001	22	-2.1265
3	0.0000	13	0.0001	23	-2.3448
4	0.0000	14	0.0001	24	-0.3472
5	0.0000	15	0.0001	25	-3.7021
6	0.0000	16	0.0001	26	0.0216
7	0.0000	17	0.0001	27	-0.4607
8	0.0000	18	0.0001	28	-1.3779
9	0.0000	19	0.0001	29	0.2148
10	0.0001	20	0.0001	30	2.9061

Tableau A1-1en fonction de N

Résultats pour  $a=0.2$

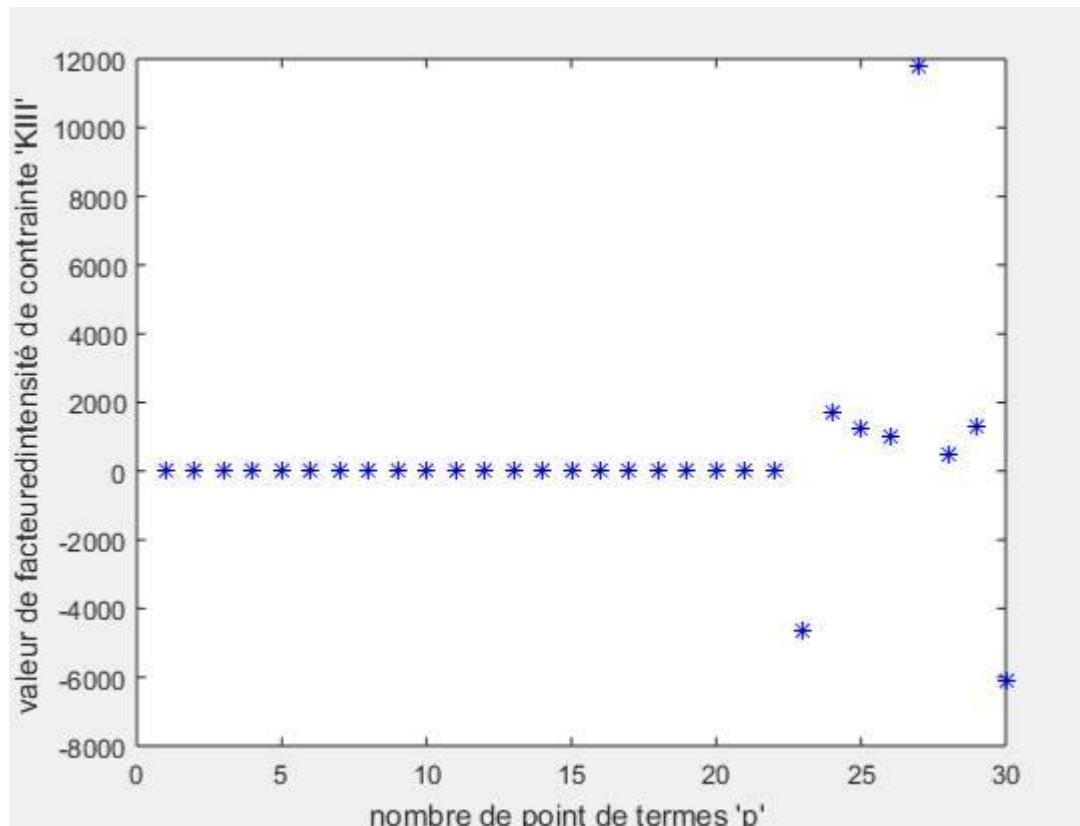


Figure A1-2 facteur K III en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0000	11	0.0001	21	0.0001
2	0.0001	12	0.0001	22	0.0001
3	0.0001	13	0.0001	23	-0.4640
4	0.0001	14	0.0001	24	0.1736
5	0.0001	15	0.0001	25	0.1261
6	0.0001	16	0.0001	26	0.1003
7	0.0001	17	0.0001	27	1.1772
8	0.0001	18	0.0001	28	0.0466
9	0.0001	19	0.0001	29	0.1280
10	0.0001	20	0.0001	30	-0.6076

Tableau A1-2en fonction de N

## Résultats pour $a=0.3$

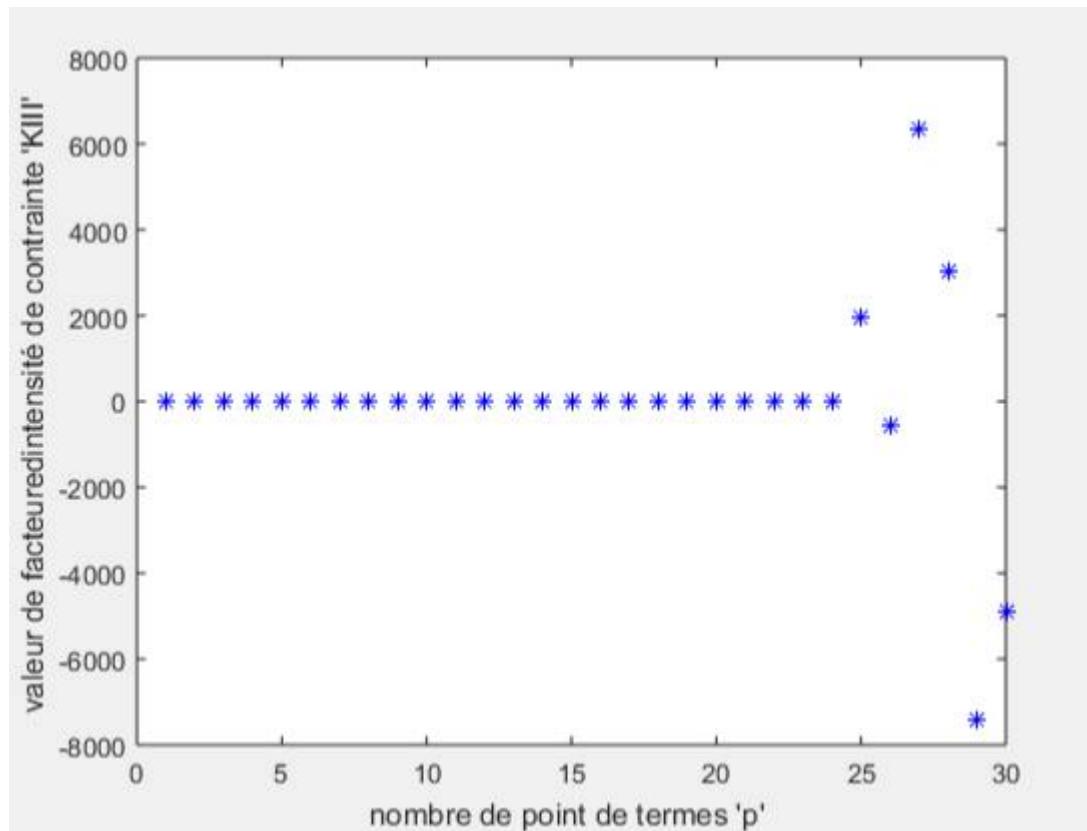


Figure A1-3 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0007	11	0.0010	21	0.0010
2	0.0008	12	0.0010	22	0.0010
3	0.0008	13	0.0010	23	0.0010
4	0.0009	14	0.0010	24	0.0010
5	0.0009	15	0.0010	25	1.9505
6	0.0010	16	0.0010	26	-0.5604
7	0.0010	17	0.0010	27	6.3618
8	0.0010	18	0.0010	28	3.0136
9	0.0010	19	0.0010	29	-7.4271
10	0.0010	20	0.0010	30	-4.9195

Tableau A1-3 en fonction de N

## Résultats pour $a=0.4$

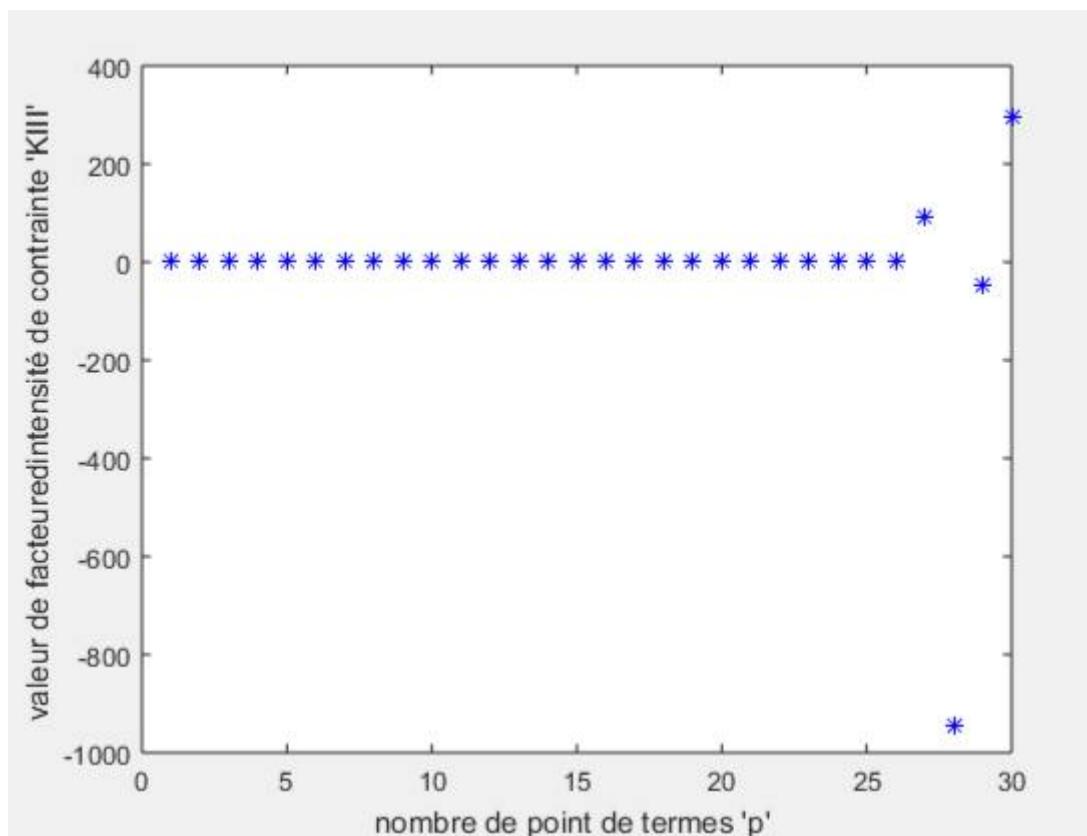


Figure A1-4 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.8976	11	1.1570	21	1.1575
2	1.0085	12	1.1570	22	1.1575
3	1.0210	13	1.1572	23	1.1576
4	1.0832	14	1.1574	24	1.1576
5	1.1214	15	1.1575	25	1.1576
6	1.1472	16	1.1575	26	1.1576
7	1.1546	17	1.1576	27	91.3366
8	1.1569	18	1.1576	28	-946.0375
9	1.1572	19	1.1576	29	-45.0118
10	1.1570	20	1.1576	30	297.1526

Tableau A1-4 en fonction de N

Résultats pour a=0.5

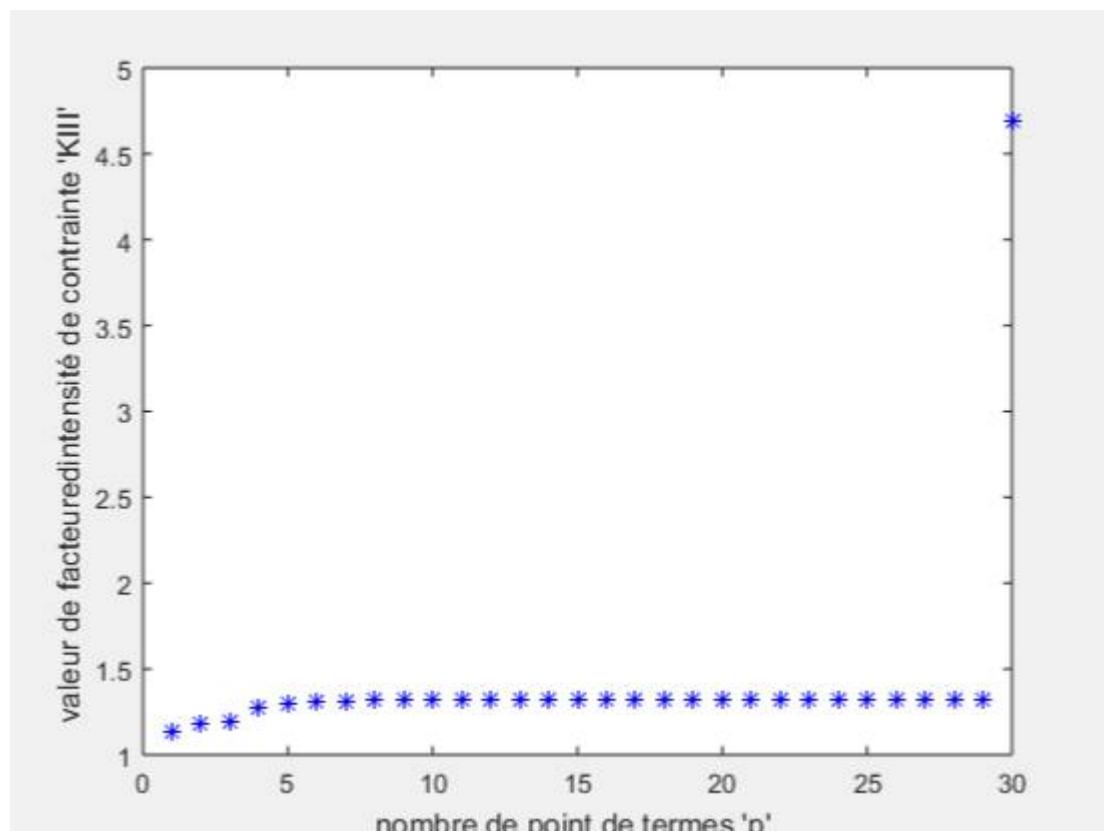


Figure A1-5 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.1356	11	1.3155	21	<b>1.3156</b>
2	1.1787	12	1.3154	22	<b>1.3156</b>
3	1.1896	13	1.3155	23	<b>1.3156</b>
4	1.2696	14	<b>1.3156</b>	24	<b>1.3156</b>
5	1.2977	15	<b>1.3156</b>	25	<b>1.3156</b>
6	1.3108	16	<b>1.3156</b>	26	<b>1.3156</b>
7	1.3140	17	<b>1.3156</b>	27	<b>1.3156</b>
8	1.3151	18	<b>1.3156</b>	28	<b>1.3156</b>
9	1.3157	19	<b>1.3156</b>	29	<b>1.3156</b>
10	1.3155	20	<b>1.3156</b>	30	<b>1.3156</b>

Tableau A1-5 en fonction de N

## Résultats pour a=0.6

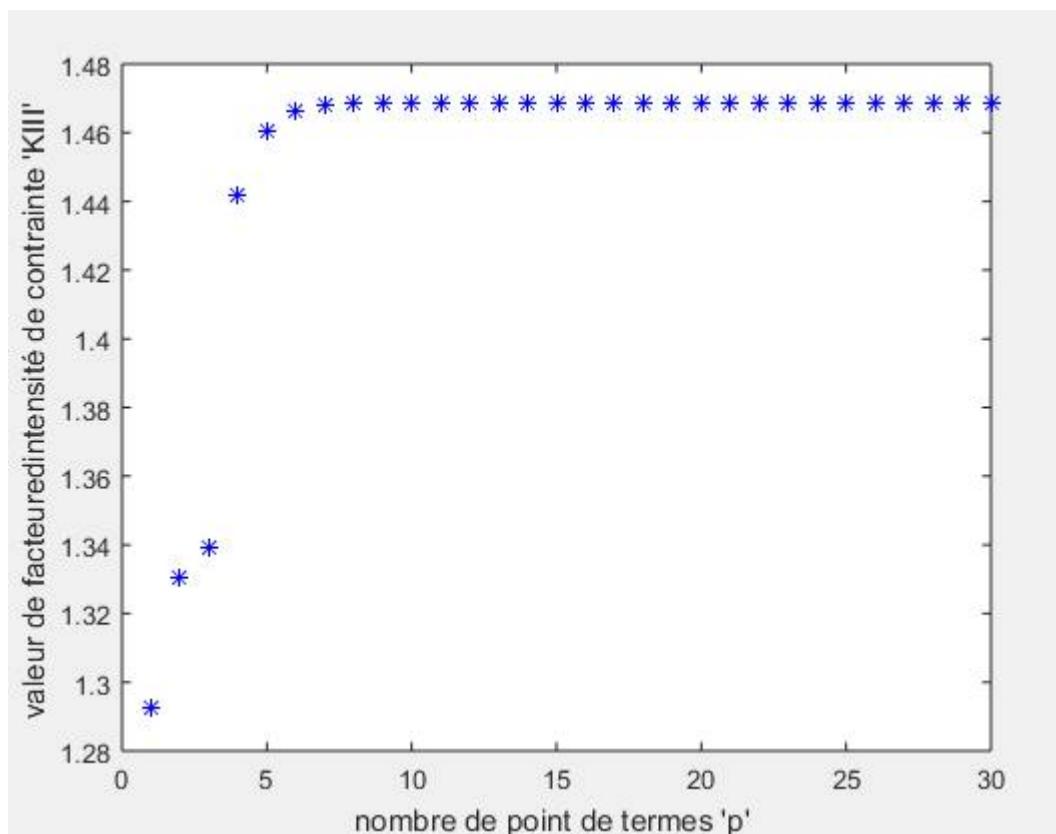


Figure A1-6 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.2923	11	1.4685	21	<b>1.4685</b>
2	1.3305	12	1.4684	22	<b>1.4685</b>
3	1.3389	13	<b>1.4685</b>	23	<b>1.4685</b>
4	1.4416	14	<b>1.4685</b>	24	<b>1.4685</b>
5	1.4602	15	<b>1.4685</b>	25	<b>1.4685</b>
6	1.4662	16	<b>1.4685</b>	26	<b>1.4685</b>
7	1.4681	17	<b>1.4685</b>	27	<b>1.4685</b>
8	1.4684	18	<b>1.4685</b>	28	<b>1.4685</b>
9	1.4687	19	<b>1.4685</b>	29	<b>1.4685</b>
10	1.4686	20	<b>1.4685</b>	30	<b>1.4685</b>

Tableau A1-6 en fonction de N

Résultats pour  $a=0.7$

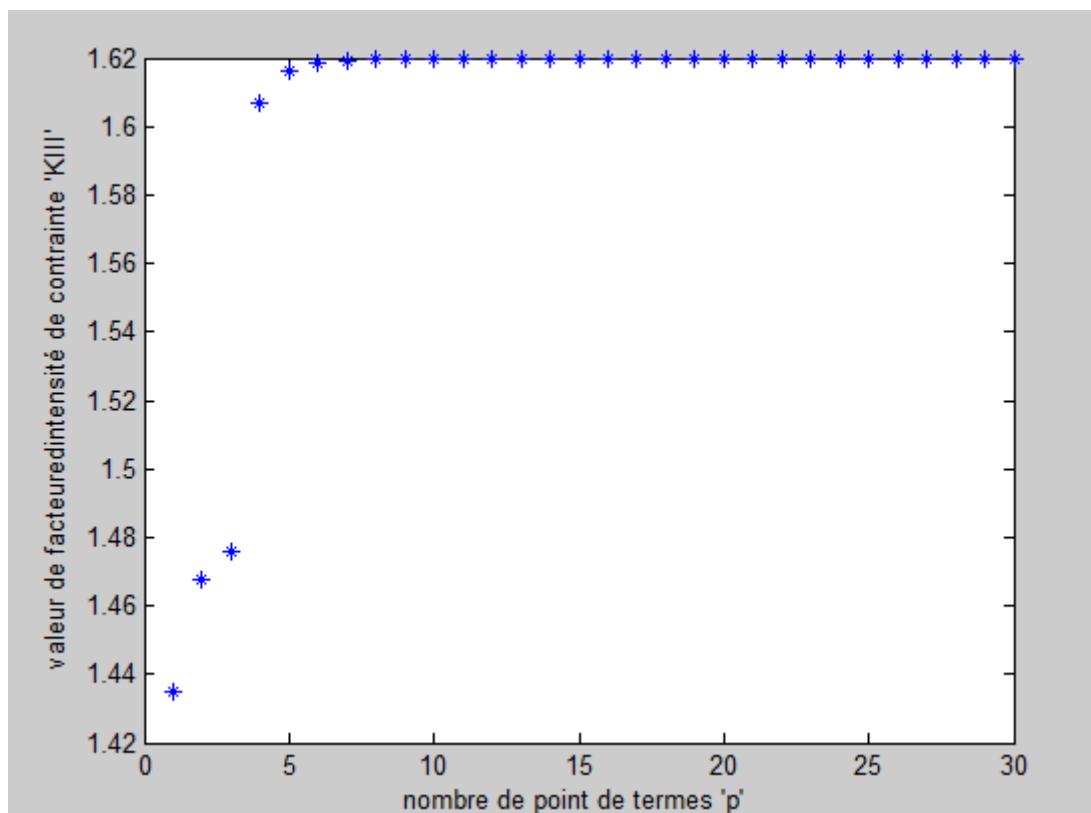


Figure A1-7 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.4350	11	<b>1.6198</b>	21	<b>1.6198</b>
2	1.4676	12	<b>1.6198</b>	22	<b>1.6198</b>
3	1.4758	13	<b>1.6198</b>	23	<b>1.6198</b>
4	1.6071	14	<b>1.6198</b>	24	<b>1.6198</b>
5	1.6163	15	<b>1.6198</b>	25	<b>1.6198</b>
6	1.6186	16	<b>1.6198</b>	26	<b>1.6198</b>
7	1.6191	17	<b>1.6198</b>	27	<b>1.6198</b>
8	1.6198	18	<b>1.6198</b>	28	<b>1.6198</b>
9	1.6199	19	<b>1.6198</b>	29	<b>1.6198</b>
10	<b>1.6198</b>	20	<b>1.6198</b>	30	<b>1.6198</b>

Tableau A1-7 en fonction de N

Résultats pour  $a=0.8$

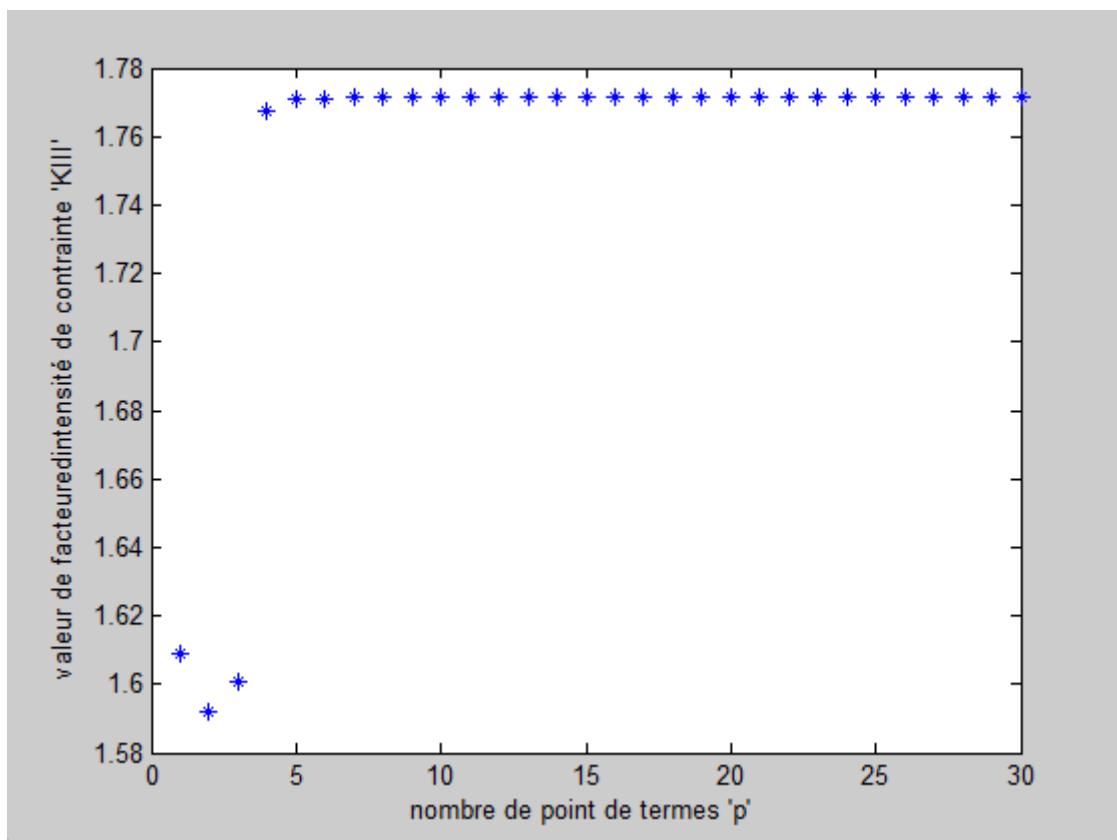


Figure A1-8 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.6091	11	<b>1.7718</b>	21	<b>1.7718</b>
2	1.5920	12	<b>1.7718</b>	22	<b>1.7718</b>
3	1.6009	13	<b>1.7718</b>	23	<b>1.7718</b>
4	1.7677	14	<b>1.7718</b>	24	<b>1.7718</b>
5	1.7708	15	<b>1.7718</b>	25	<b>1.7718</b>
6	1.7711	16	<b>1.7718</b>	26	<b>1.7718</b>
7	1.7713	17	<b>1.7718</b>	27	<b>1.7718</b>
8	1.7717	18	<b>1.7718</b>	28	<b>1.7718</b>
9	<b>1.7718</b>	19	<b>1.7718</b>	29	<b>1.7718</b>
10	<b>1.7718</b>	20	<b>1.7718</b>	30	<b>1.7718</b>

Tableau A1-8en fonction de N

Résultats pour  $a=0.9$

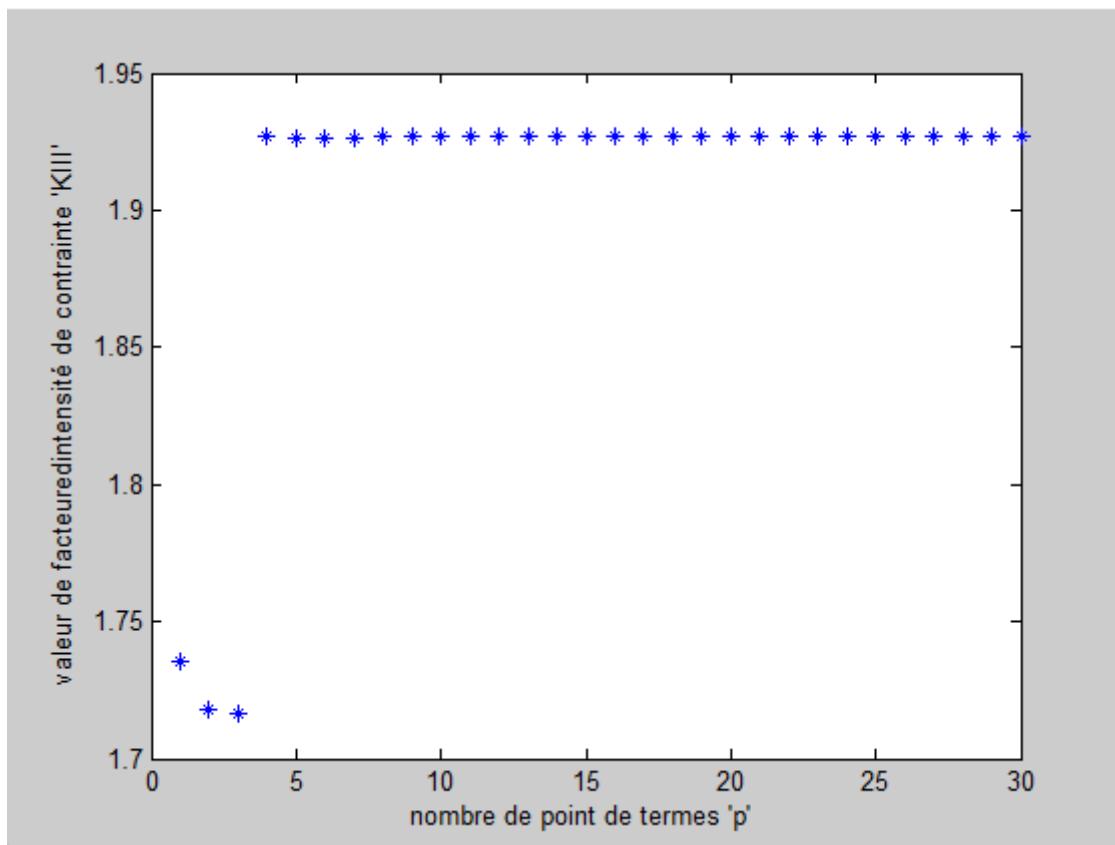


Figure A1-9 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.7353	11	1.9268	21	1.9268
2	1.7176	12	1.9268	22	1.9268
3	1.7166	13	1.9268	23	1.9268
4	1.9269	14	1.9268	24	1.9268
5	1.9263	15	1.9268	25	1.9268
6	1.9264	16	1.9268	26	1.9268
7	1.9264	17	1.9268	27	1.9268
8	1.9265	18	1.9268	28	1.9268
9	1.9268	19	1.9268	29	1.9268
10	1.9268	20	1.9268	30	1.9268

Tableau A1-8 en fonction de N

## Résultats pour a=1

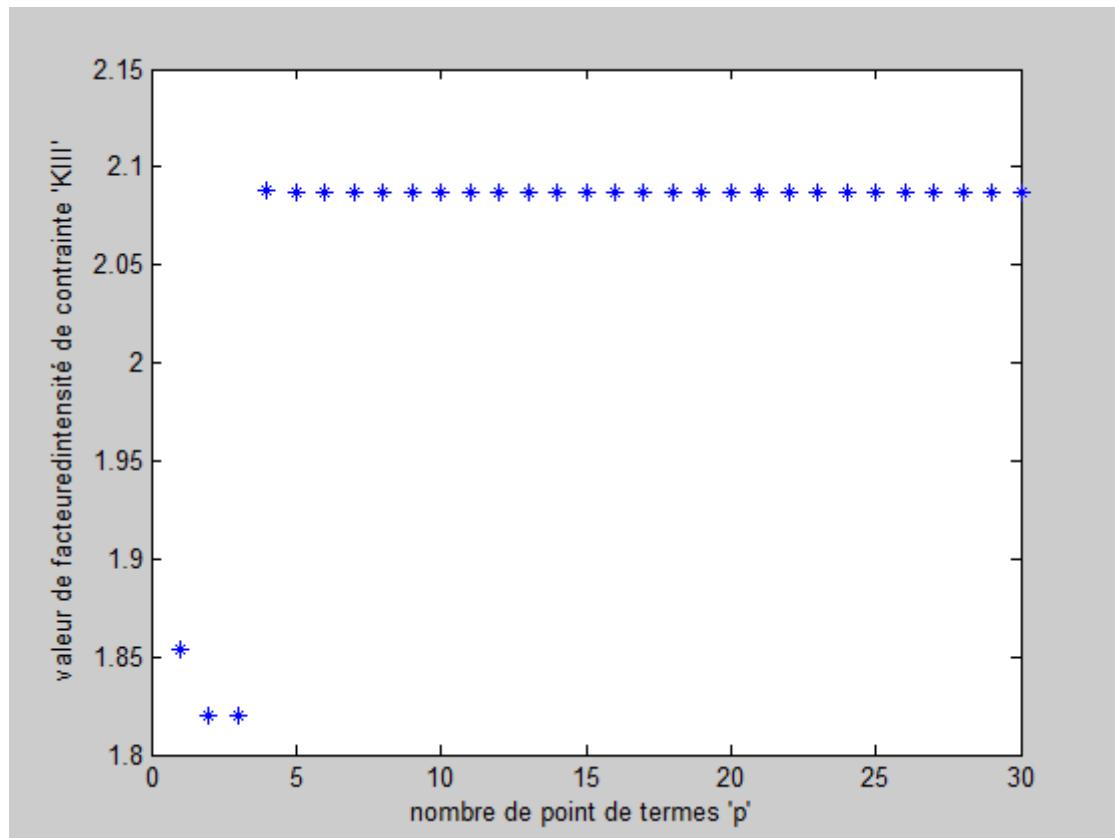


Figure A1-9 facteur KIII en fonction de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	1.8536	11	2.0874	21	2.0874
2	1.8201	12	2.0874	22	2.0874
3	1.8200	13	2.0874	23	2.0874
4	2.0882	14	2.0874	24	2.0874
5	2.0870	15	2.0874	25	2.0874
6	2.0875	16	2.0874	26	2.0874
7	2.0870	17	2.0874	27	2.0874
8	2.0874	18	2.0874	28	2.0874
9	2.0874	19	2.0874	29	2.0874
10	2.0874	20	2.0874	30	2.0874

Tableau A1-9 en fonction de N

## Résultats pour a=1.1

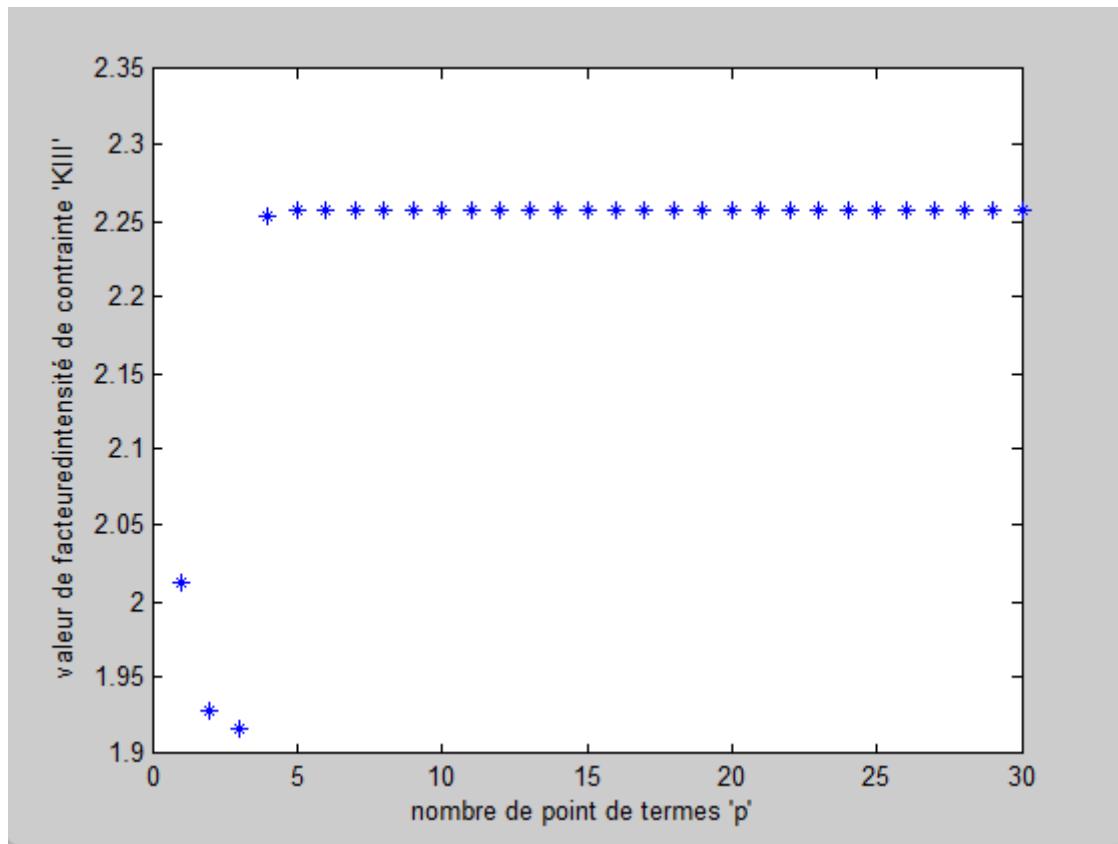


Figure A1-10 facteur KIII en fct deN

N	K III	N	K III	N	K III
1	2.0124	11	<b>2.2571</b>	21	<b>2.2571</b>
2	1.9281	12	<b>2.2571</b>	22	<b>2.2571</b>
3	1.9160	13	<b>2.2571</b>	23	<b>2.2571</b>
4	2.2533	14	<b>2.2571</b>	24	<b>2.2571</b>
5	2.2567	15	<b>2.2571</b>	25	<b>2.2571</b>
6	2.2571	16	<b>2.2571</b>	26	<b>2.2571</b>
7	2.2574	17	<b>2.2571</b>	27	<b>2.2571</b>
8	2.2571	18	<b>2.2571</b>	28	<b>2.2571</b>
9	2.2574	19	<b>2.2571</b>	29	<b>2.2571</b>
10	<b>2.2571</b>	20	<b>2.2571</b>	30	<b>2.2571</b>

Tableau A1-10 en fonction de N

Résultats pour  $a=1.2$

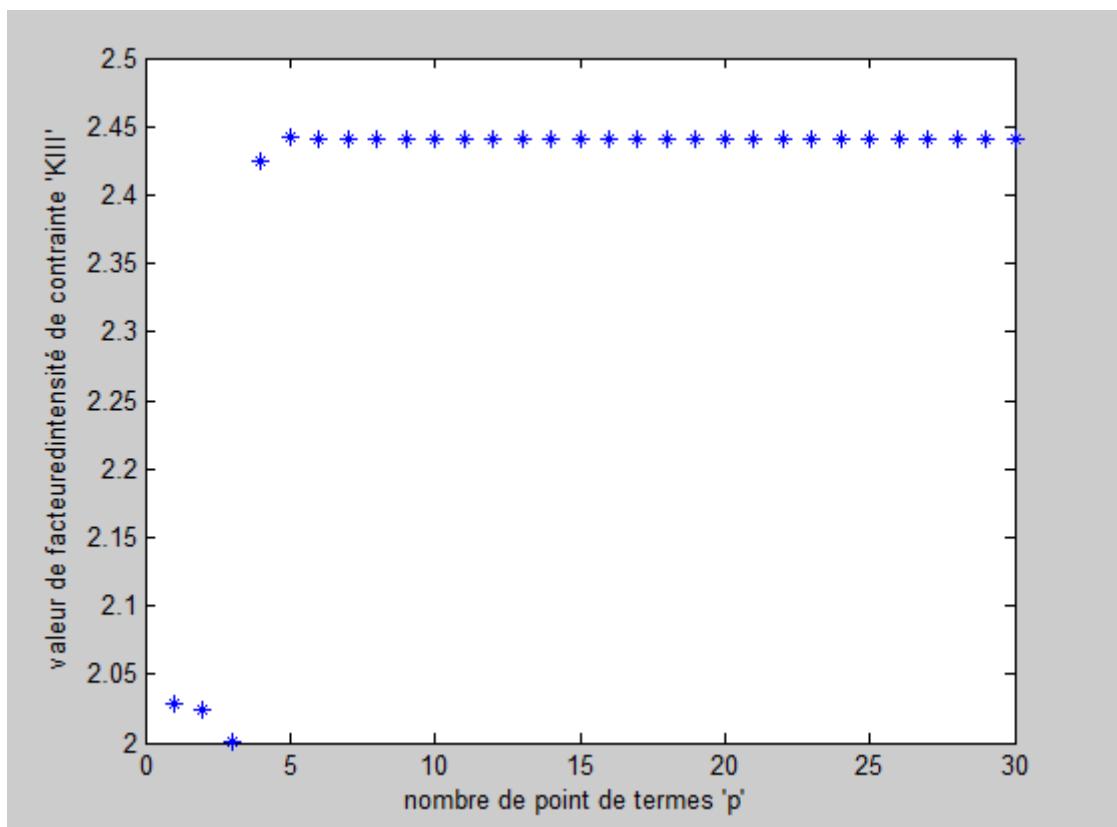


Figure A1-11 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	2.0282	11	2.4409	21	<b>2.4410</b>
2	2.0245	12	<b>2.4410</b>	22	<b>2.4410</b>
3	2.0010	13	<b>2.4410</b>	23	<b>2.4410</b>
4	2.4254	14	<b>2.4410</b>	24	<b>2.4410</b>
5	2.4418	15	<b>2.4410</b>	25	<b>2.4410</b>
6	2.4409	16	<b>2.4410</b>	26	<b>2.4410</b>
7	2.4410	17	<b>2.4410</b>	27	<b>2.4410</b>
8	2.4410	18	<b>2.4410</b>	28	<b>2.4410</b>
9	2.4409	19	<b>2.4410</b>	29	<b>2.4410</b>
10	2.4410	20	<b>2.4410</b>	30	<b>2.4410</b>

Tableau A1-11 en fonction de N

## Résultats pour $a = 1.3$

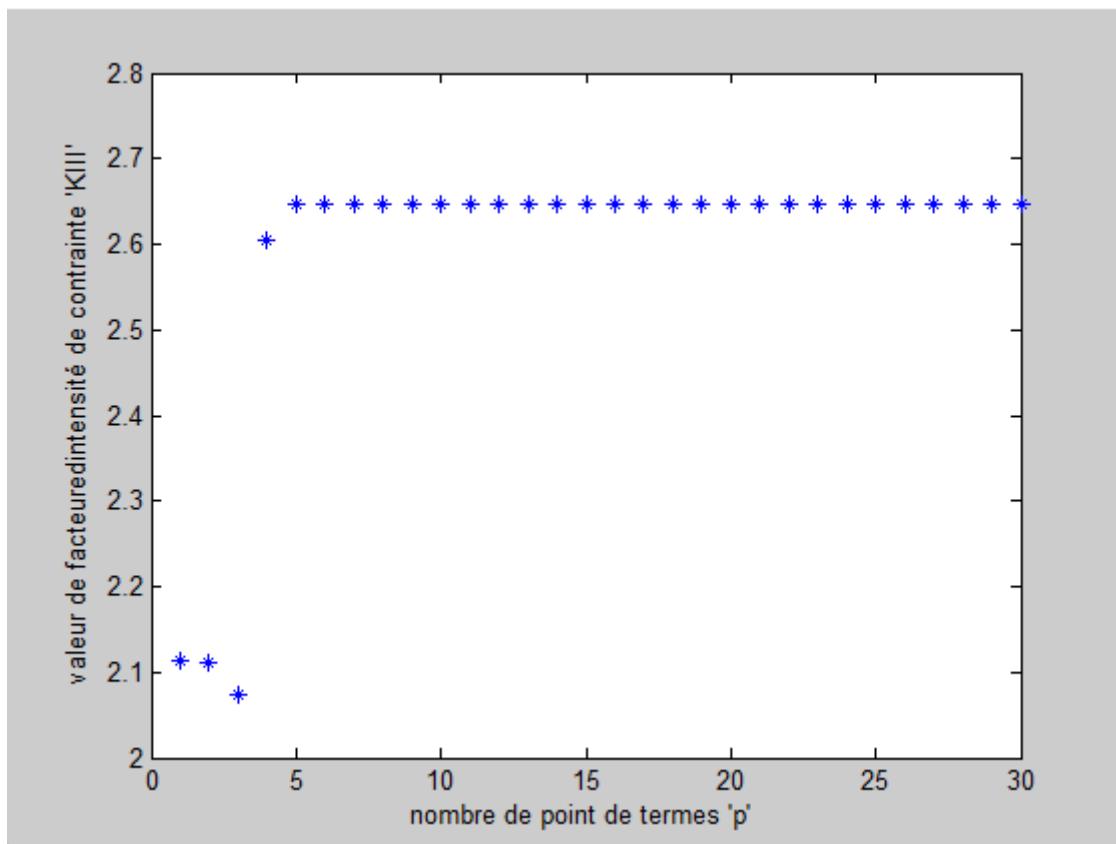


Figure A1-12 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	2.1145	11	2.6465	21	<b>2.6466</b>
2	2.1111	12	<b>2.6466</b>	22	<b>2.6466</b>
3	2.0745	13	<b>2.6466</b>	23	<b>2.6466</b>
4	2.6047	14	<b>2.6466</b>	24	<b>2.6466</b>
5	2.6473	15	<b>2.6466</b>	25	<b>2.6466</b>
6	2.6461	16	<b>2.6466</b>	26	<b>2.6466</b>
7	2.6470	17	<b>2.6466</b>	27	<b>2.6466</b>
8	2.6464	18	<b>2.6466</b>	28	<b>2.6466</b>
9	2.6462	19	<b>2.6466</b>	29	<b>2.6466</b>
10	2.6464	20	<b>2.6466</b>	30	<b>2.6466</b>

Tableau A1-12 en fonction de N

Résultats pour  $a = 1.4$

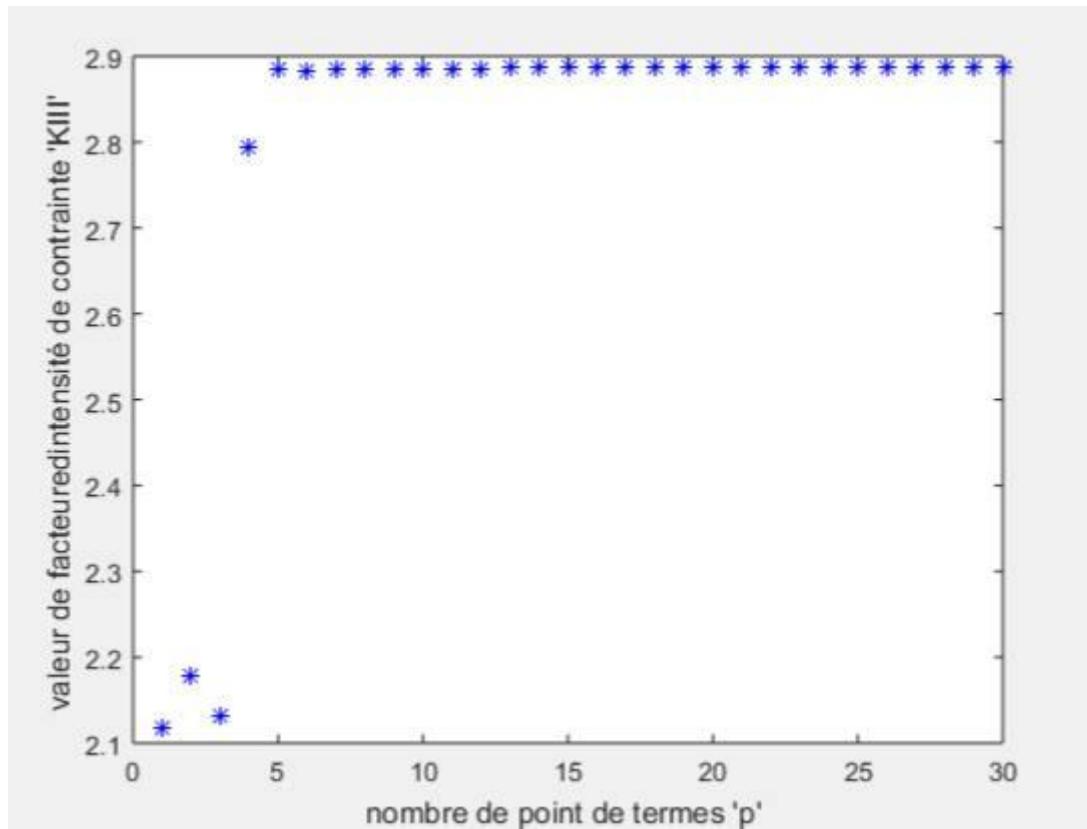


Figure A1-13 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	2.1181	11	2.8858	21	<b>2.8861</b>
2	2.1776	12	2.8859	22	<b>2.8861</b>
3	2.1318	13	2.8861	23	<b>2.8861</b>
4	2.7943	14	2.8860	24	<b>2.8861</b>
5	2.8857	15	<b>2.8861</b>	25	<b>2.8861</b>
6	2.8835	16	<b>2.8861</b>	26	<b>2.8861</b>
7	2.8855	17	<b>2.8861</b>	27	<b>2.8861</b>
8	2.8846	18	<b>2.8861</b>	28	<b>2.8861</b>
9	2.8854	19	<b>2.8861</b>	29	<b>2.8861</b>
10	2.8855	20	<b>2.8861</b>	30	<b>2.8861</b>

Tableau A1-13 en fonction de N

## Résultats pour $a = 1.5$

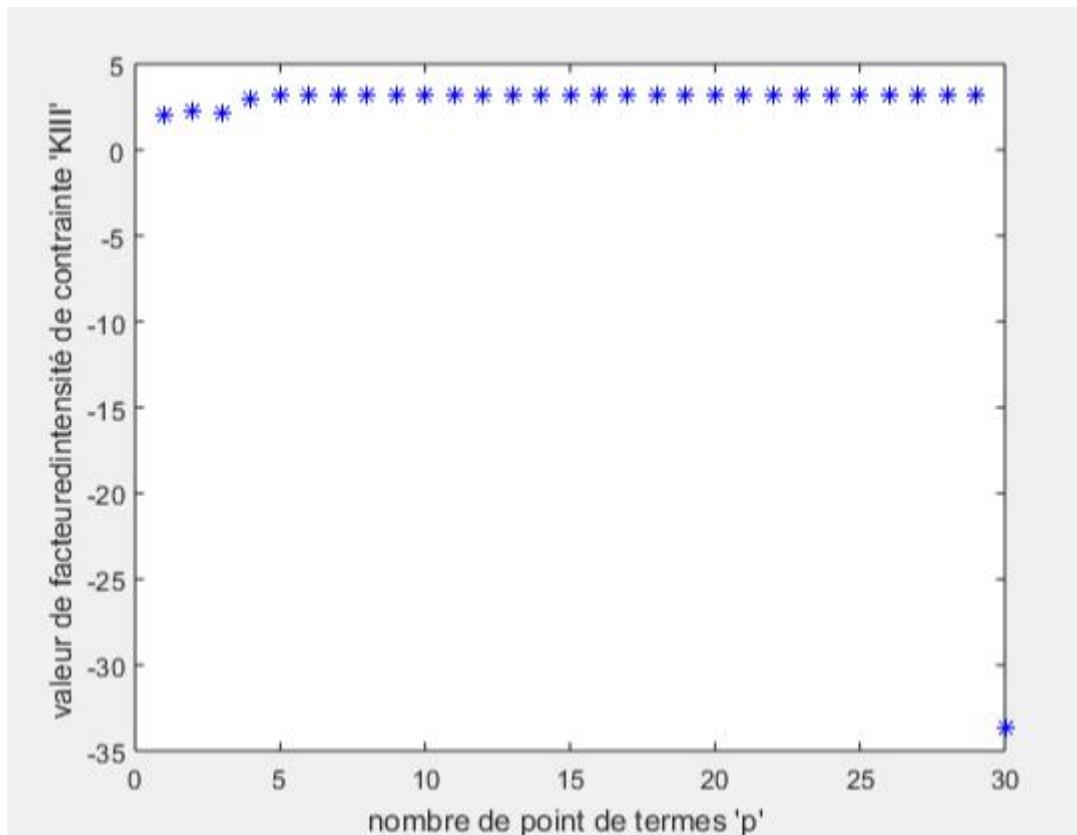


Figure A1-14 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	2.0509	11	3.1782	21	3.1801
2	2.2160	12	3.1794	22	3.1801
3	2.1754	13	3.1799	23	3.1801
4	2.9821	14	3.1799	24	3.1801
5	3.1643	15	3.1801	25	3.1801
6	3.1685	16	3.1801	26	3.1801
7	3.1721	17	3.1801	27	3.1801
8	3.1744	18	3.1801	28	3.1801
9	3.1758	19	3.1801	29	3.1801
10	3.1772	20	3.1801	30	-33.6305

Tableau A1-14 en fonction de N

## Résultats pour $a = 1.6$

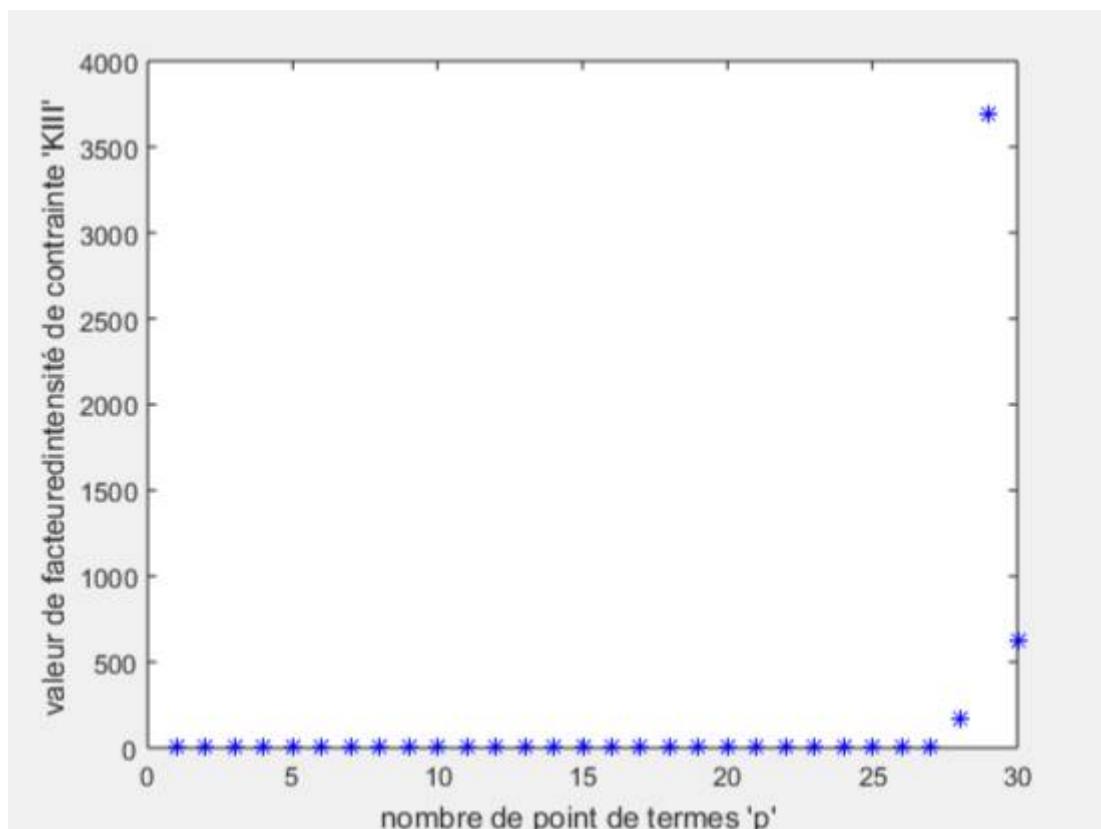


Figure A1-15 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0020	11	0.0036	21	0.0036
2	0.0022	12	0.0036	22	0.0036
3	0.0022	13	0.0036	23	0.0036
4	0.0031	14	0.0036	24	0.0036
5	0.0035	15	0.0036	25	0.0036
6	0.0035	16	0.0036	26	0.0036
7	0.0035	17	0.0036	27	0.0084
8	0.0035	18	0.0036	28	0.1737
9	0.0035	19	0.0036	29	3.6913
10	0.0036	20	0.0036	30	0.6206

Tableau A1-15en fonction de N

Résultats pour  $a = 1.7$

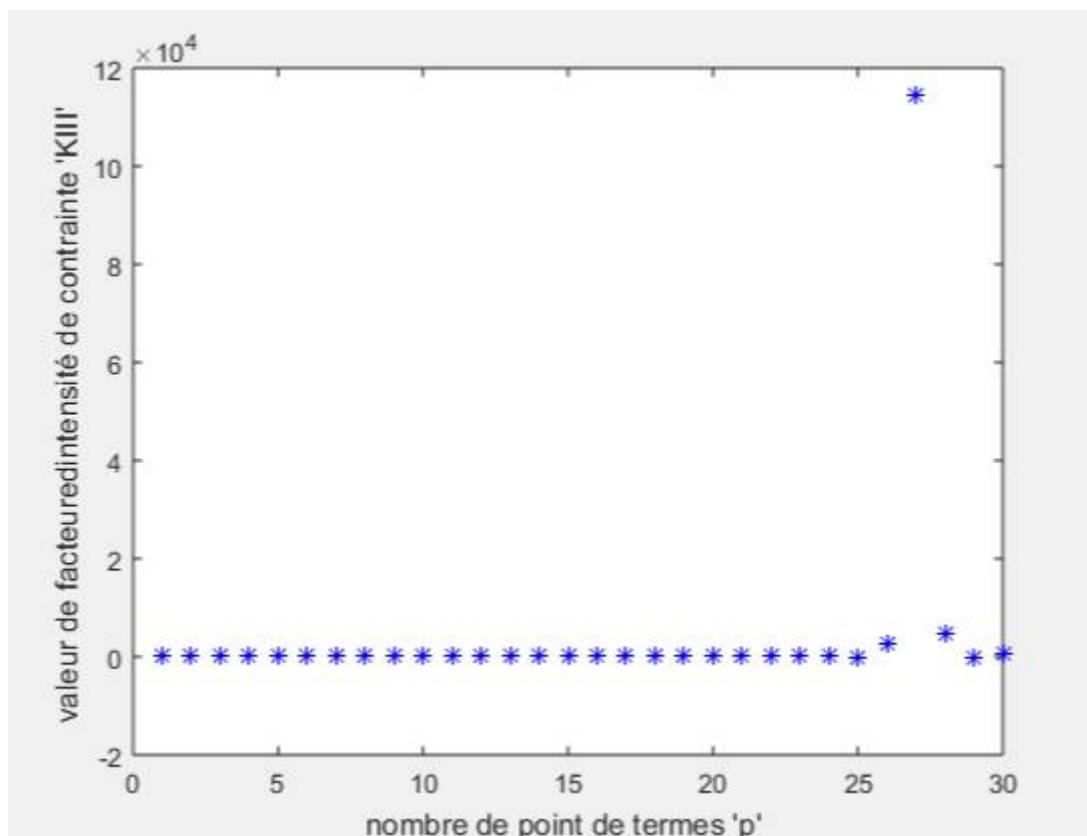


Figure A1-16 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0000	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	-0.0015
6	0.0000	16	0.0000	26	0.0262
7	0.0000	17	0.0000	27	1.1454
8	0.0000	18	0.0000	28	0.0463
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.0016
10	0.0000	20	0.0000	30	0.0057

Tableau A1-16 en fonction de N

Résultats pour  $a= 1.8$

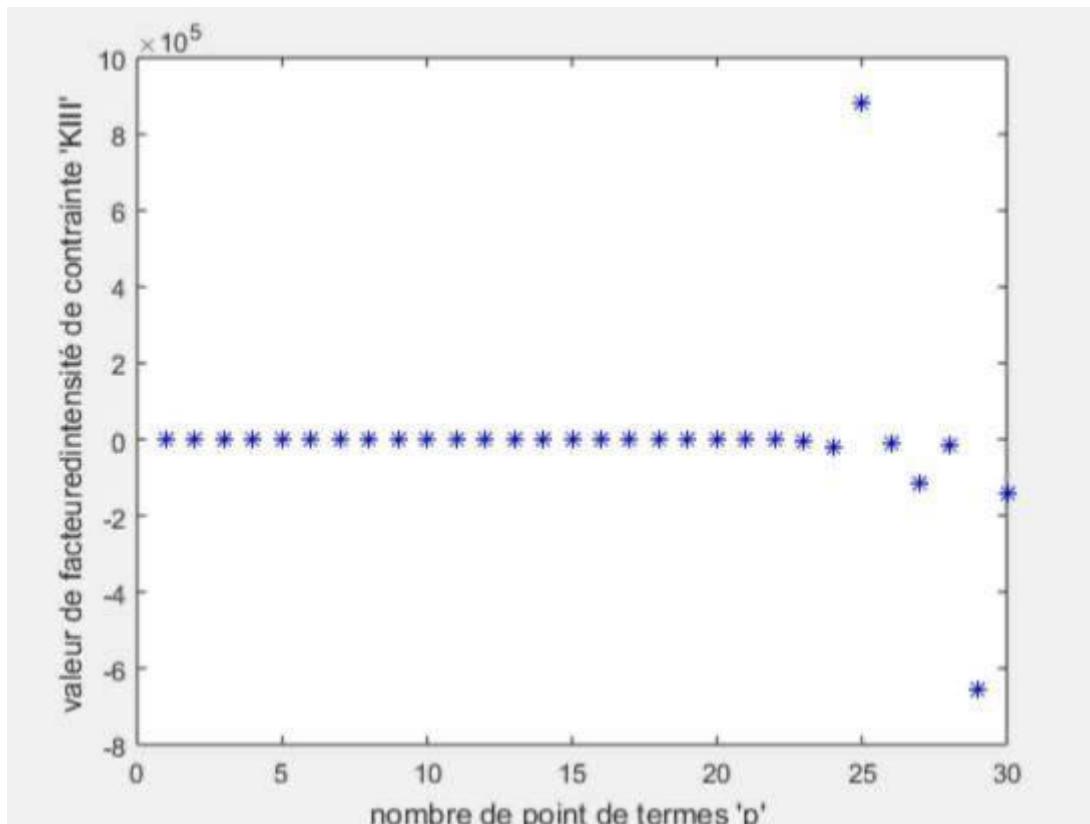


Figure A1-17 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0000	11	0.0000	21	0.0001
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0001
3	0.0000	13	0.0000	23	-0.0485
4	0.0000	14	0.0000	24	-0.2046
5	0.0000	15	0.0000	25	8.8245
6	0.0000	16	0.0000	26	-0.1048
7	0.0000	17	0.0000	27	-1.1276
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.1386
9	0.0000	19	0.0000	29	-6.5480
10	0.0000	20	0.0000	30	-1.3917

Tableau A1-17en fonction de N

Résultats pour  $a= 1.9$

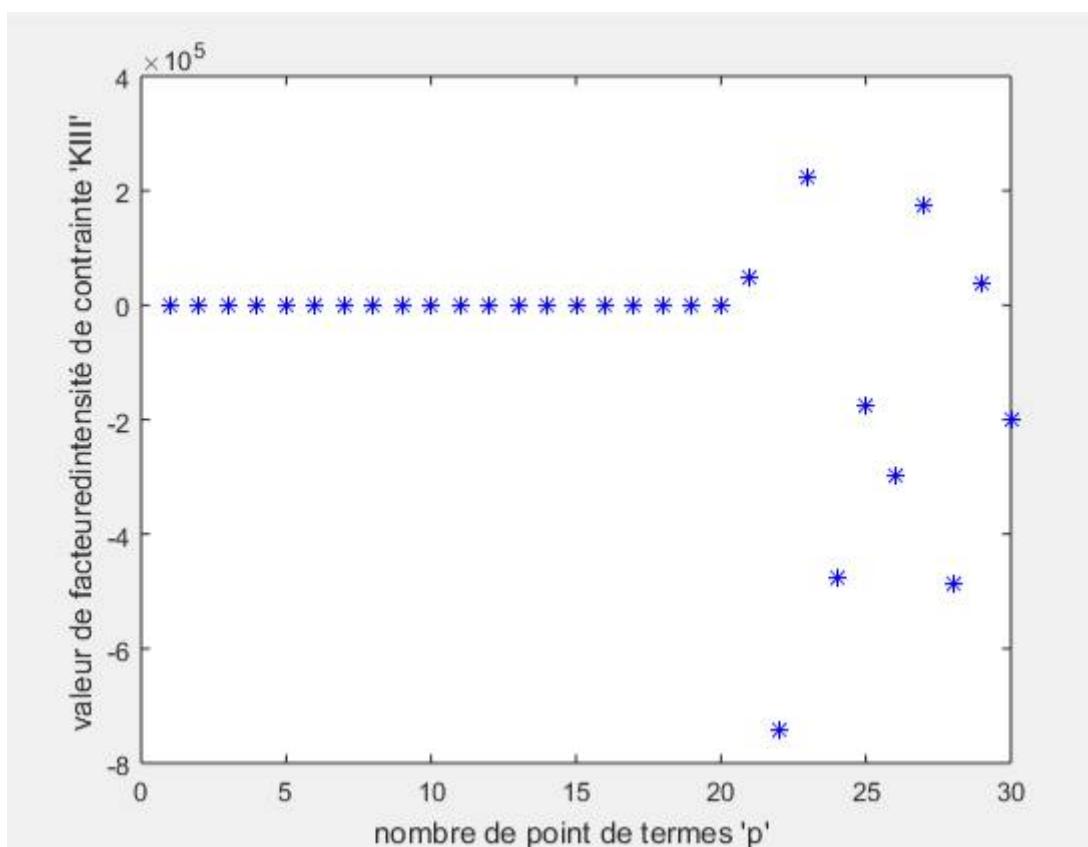


Figure A1-18 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0.0000	11	0.0000	21	0.4887
2	0.0000	12	0.0000	22	-7.4336
3	0.0000	13	0.0000	23	2.2410
4	0.0000	14	0.0000	24	-4.7722
5	0.0000	15	0.0000	25	-1.7696
6	0.0000	16	0.0000	26	-2.9837
7	0.0000	17	0.0000	27	1.7269
8	0.0000	18	0.0000	28	-4.8629
9	0.0000	19	0.0000	29	0.3879
10	0.0000	20	0.0000	30	-1.9948

Tableau A1-18 en fonction de N

## **Annexe 3**

### **Les résultats avec C=2p**

Résultats pour  $a= 0.1$

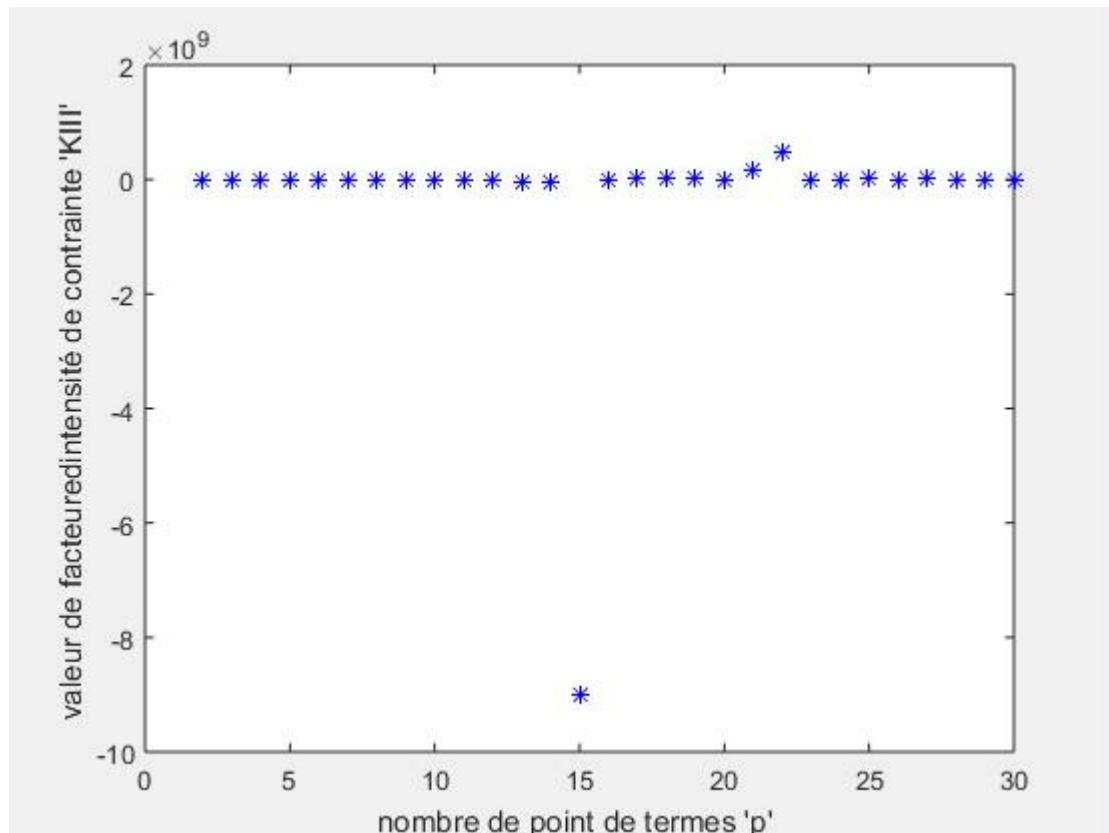


Figure A1-19 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.1551
2	0.0000	12	0.0000	22	0.4891
3	0.0000	13	-0.0559	23	-0.0029
4	0.0000	14	-0.0309	24	0.0038
5	-0.0000	15	-9.0053	25	0.0303
6	0.0000	16	-0.0272	26	-0.0015
7	0.0000	17	0.0163	27	0.0299
8	0.0000	18	0.0282	28	-0.0017
9	0.0000	19	0.0251	29	-0.0014
10	0.0000	20	0.0014	30	0.0018

Tableau A1-19 en fonction de N

Résultats pour  $a= 0.2$

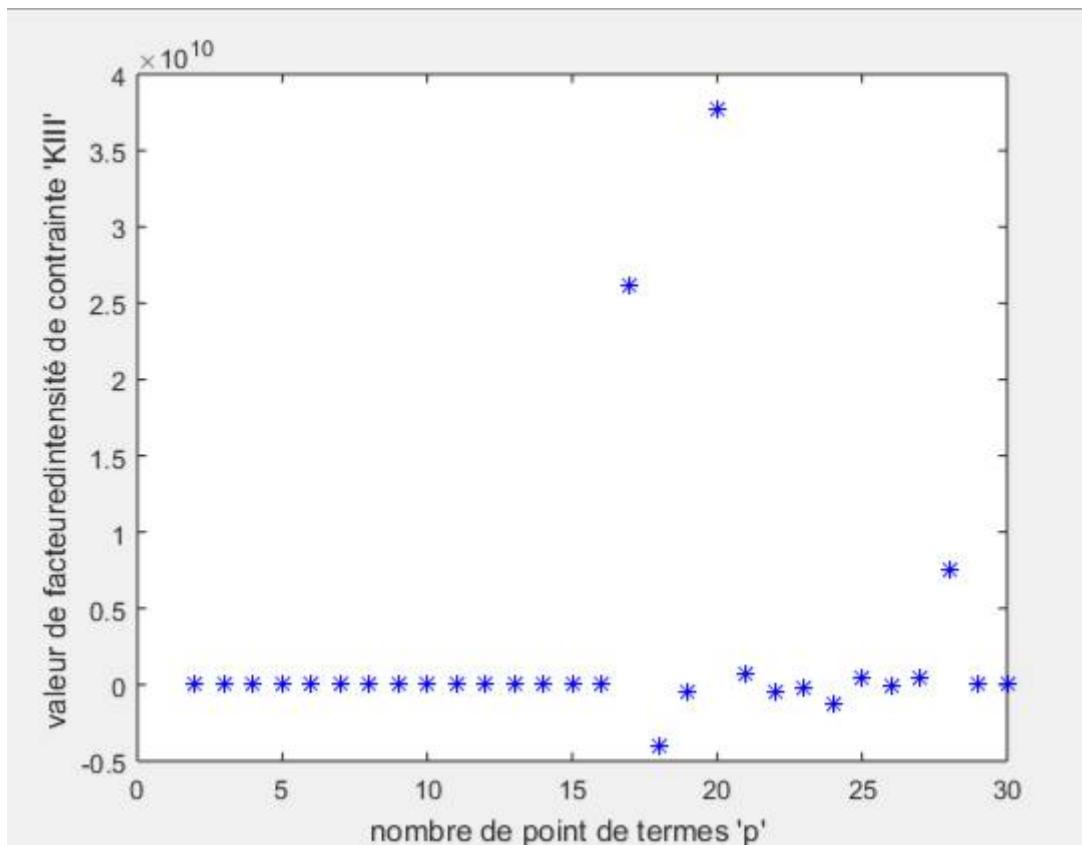


Figure A1-20 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0694
2	0.0000	12	0.0000	22	-0.0463
3	0.0000	13	0.0000	23	-0.0255
4	0.0000	14	0.0001	24	-0.1238
5	0.0000	15	0.0002	25	0.0479
6	0.0000	16	0.0017	26	-0.0061
7	0.0000	17	2.6124	27	0.0495
8	0.0000	18	-0.3978	28	0.7546
9	0.0000	19	-0.0484	29	-0.0006
10	0.0000	20	3.7718	30	0.0030

Tableau A1-20 en fonction de N

Résultats pour  $a=0.3$

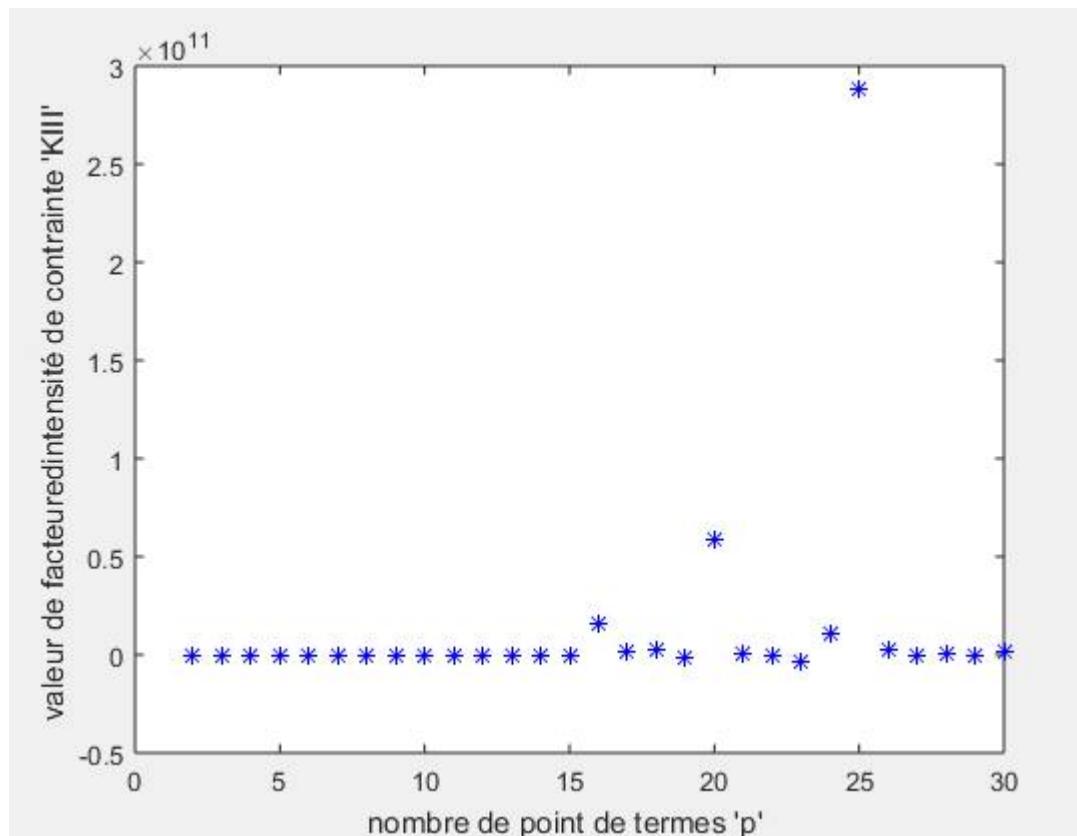


Figure A1-21 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0057
2	0.0000	12	0.0000	22	-0.0089
3	0.0000	13	0.0000	23	-0.0321
4	0.0000	14	0.0000	24	0.1051
5	0.0000	15	0.0000	25	2.8781
6	0.0000	16	0.1578	26	0.0280
7	0.0000	17	0.0171	27	-0.0009
8	0.0000	18	0.0221	28	0.0002
9	0.0000	19	-0.0116	29	-0.0018
10	-0.0000	20	0.5872	30	0.0105

Tableau A1-21 en fonction de N

Résultats pour a= 0.4

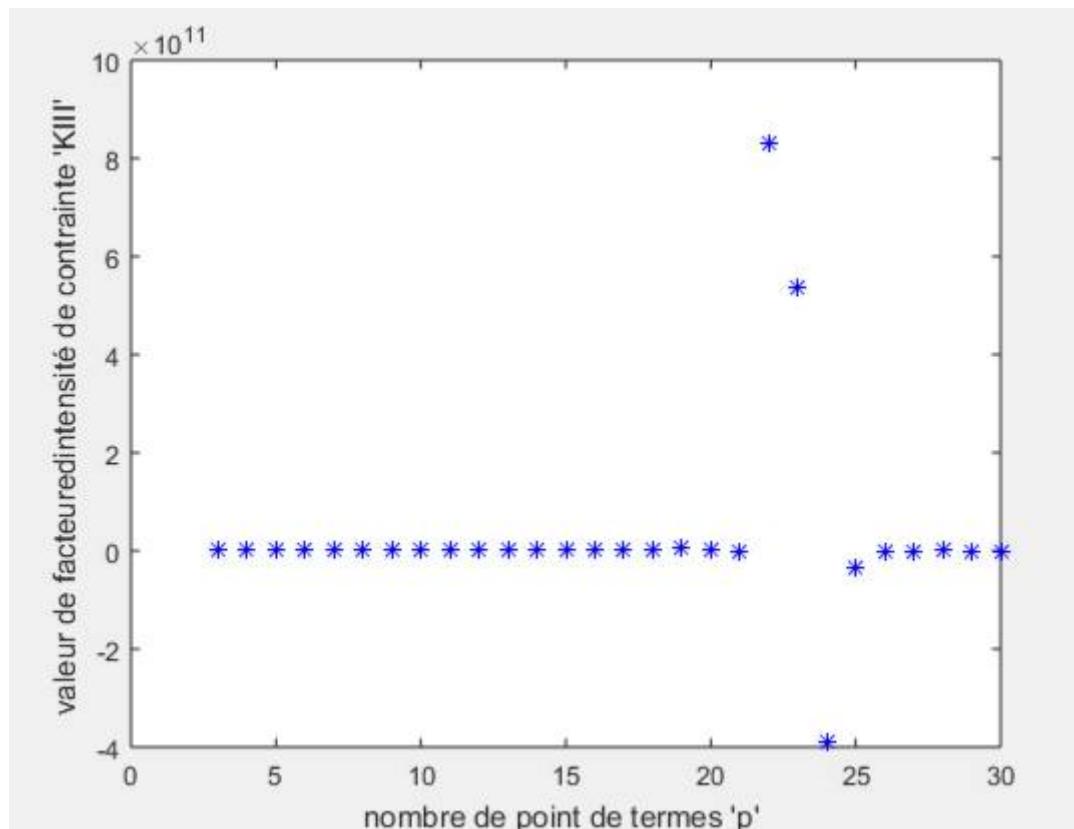


Figure A1-22 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	-0.0278
2	NaN	12	0.0000	22	8.3151
3	0.0000	13	0.0000	23	5.3521
4	0.0000	14	0.0000	24	-3.8820
5	0.0000	15	-0.0000	25	-0.3298
6	0.0000	16	0.0000	26	-0.0027
7	0.0000	17	0.0000	27	-0.0013
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.0403
9	0.0000	19	0.0537	29	-0.0343
10	0.0000	20	-0.0000	30	-0.0178

Tableau A1-22 en fonction de N

Résultats pour  $a=0.5$

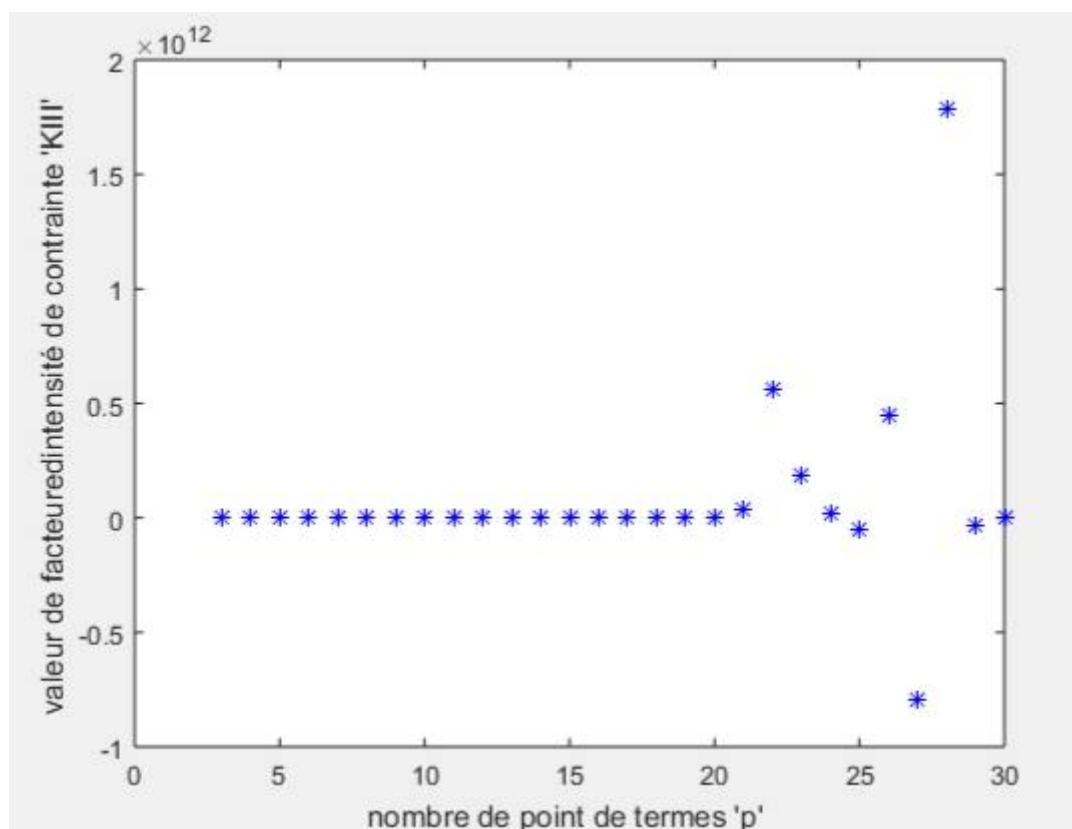


Figure A1-23 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0327
2	NaN	12	0.0000	22	0.5575
3	0.0000	13	0.0000	23	0.1891
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0203
5	0.0000	15	0.0000	25	-0.0514
6	0.0000	16	0.0000	26	0.4487
7	0.0000	17	0.0000	27	-0.7921
8	0.0000	18	0.0000	28	1.7821
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.0311
10	0.0000	20	-0.0000	30	0.0010

Tableau A1-23 en fonction de N

Résultats pour  $a = 0.6$

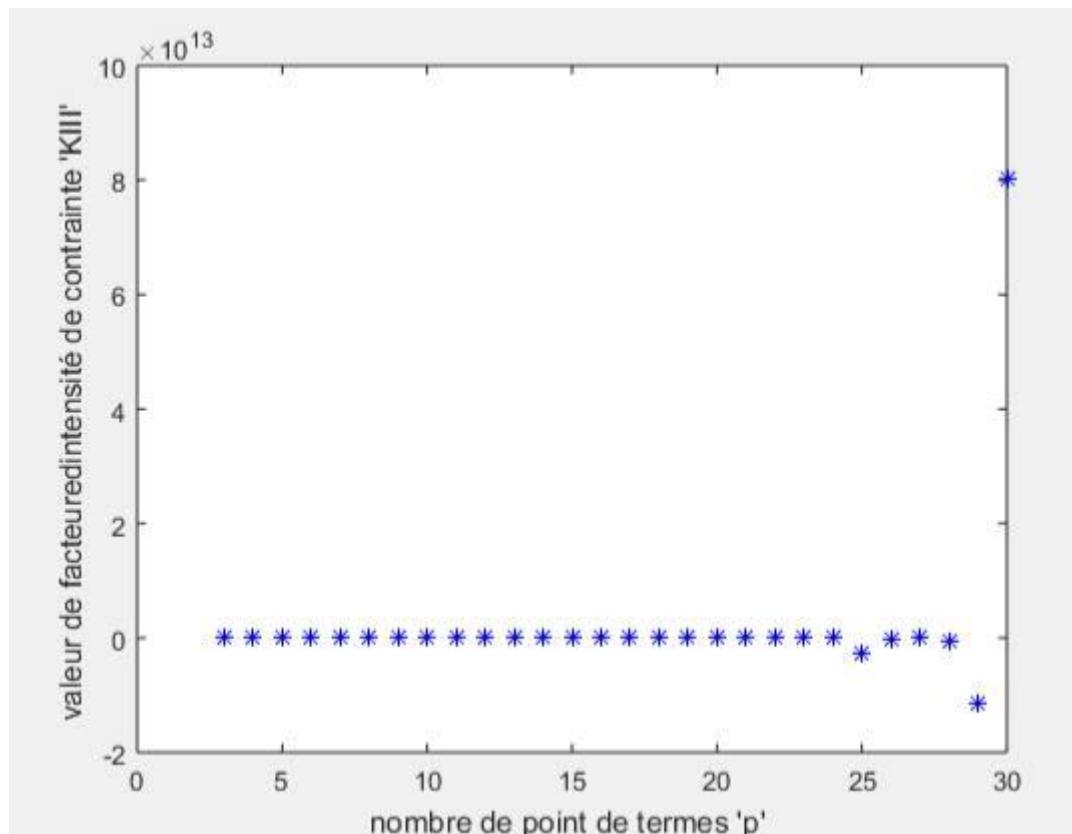


Figure A1-24 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0000
2	NaN	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	-0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	-0.2841
6	0.0000	16	0.0000	26	-0.0096
7	0.0000	17	0.0000	27	0.0136
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.0573
9	0.0000	19	0.0000	29	-1.1456
10	0.0000	20	0.0000	30	8.0254

Tableau A1-24 en fonction de N

Résultats pour a= 0.7

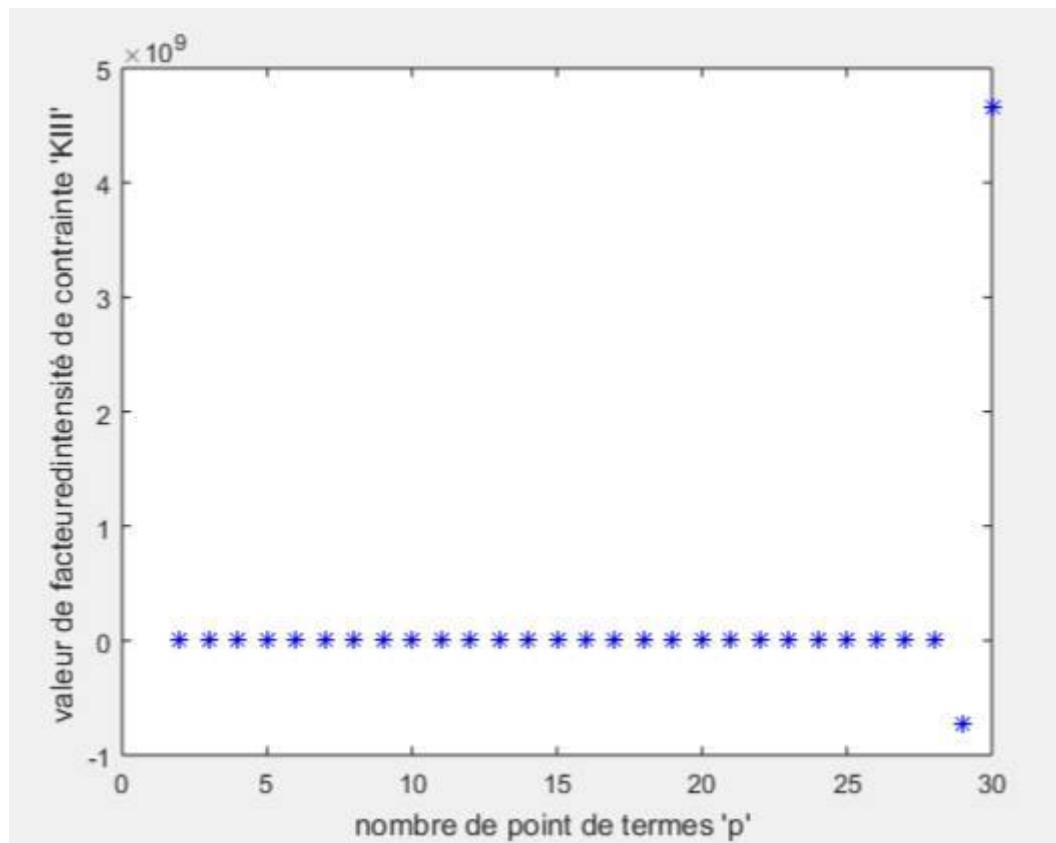


Figure A1-25 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	0.0000
6	0.0000	16	0.0000	26	-0.0000
7	0.0000	17	0.0000	27	0.0004
8	0.0000	18	0.0000	28	0.0000
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.7230
	0.0000	20	0.0000	30	4.6626

Tableau A1-25 en fonction de N

Résultats pour  $a=0.8$

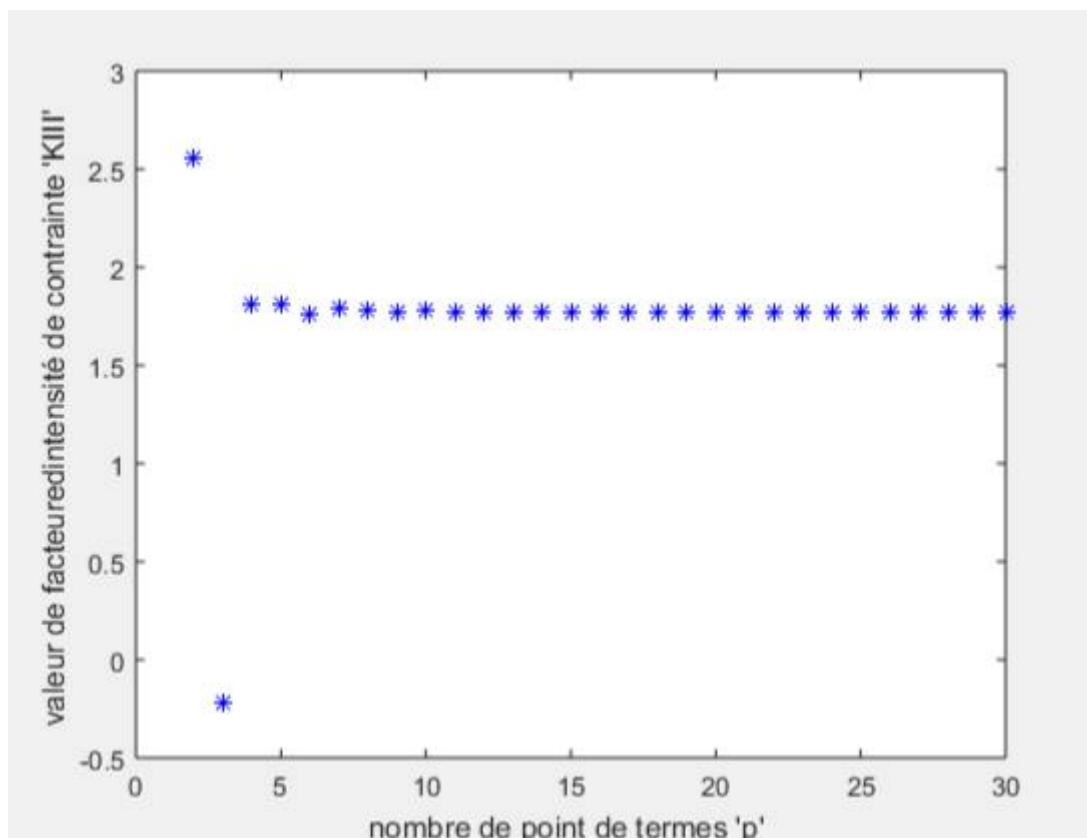


Figure A1-26 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	1.7703	21	1.7719
2	2.5589	12	1.7698	22	1.7718
3	-0.2203	13	1.7711	23	1.7719
4	1.8118	14	1.7728	24	1.7718
5	1.8108	15	1.7724	25	1.7717
6	1.7599	16	1.7725	26	1.7718
7	1.7908	17	1.7720	27	1.7717
8	1.7815	18	1.7717	28	1.7718
9	1.7729	19	1.7715	29	1.7718
10	1.7774	20	1.7715	30	1.7717

Tableau A1-26 en fonction de N

Résultats pour  $a = 0.9$

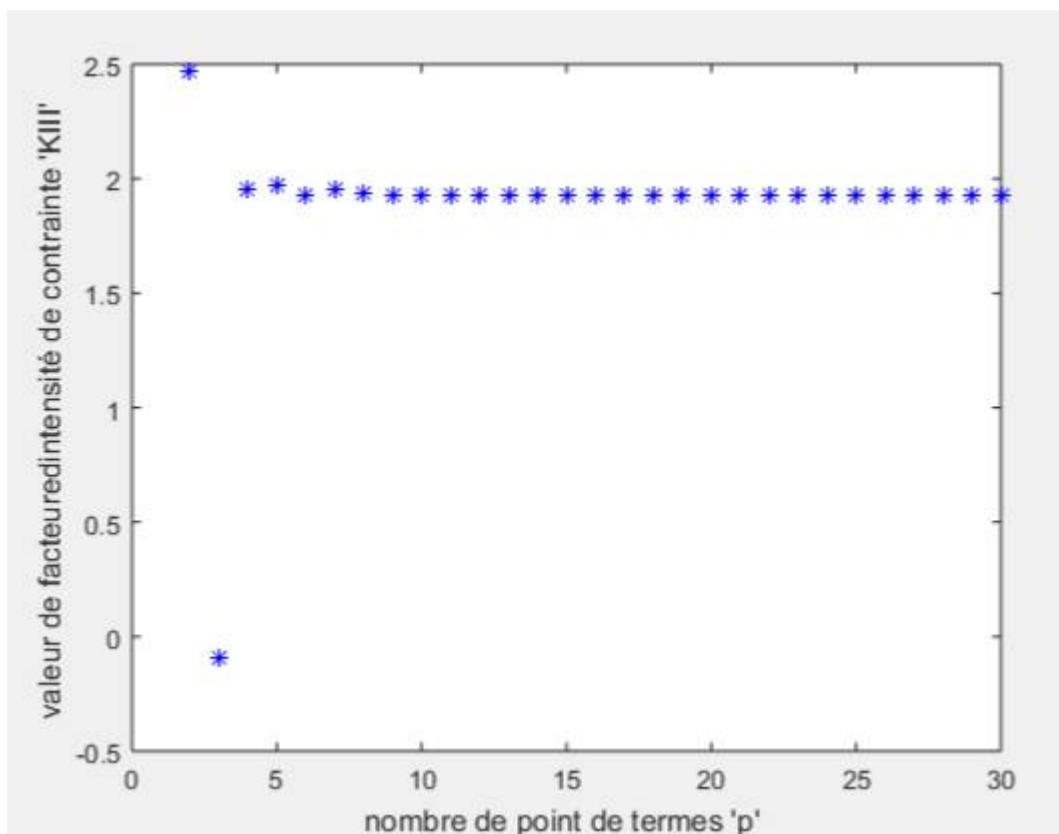


Figure A1-27 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	1.9250	21	1.9268
2	2.4659	12	1.9262	22	1.9268
3	-0.0928	13	1.9273	23	1.9268
4	1.9546	14	1.9264	24	1.9268
5	1.9741	15	1.9272	25	1.9268
6	1.9267	16	1.9270	26	1.9268
7	1.9531	17	1.9267	27	1.9268
8	1.9325	18	1.9269	28	1.9268
9	1.9232	19	1.9267	29	1.9268
10	1.9291	20	1.9267	30	1.9268

Tableau A1-27 en fonction de N

Résultats pour  $a= 1$

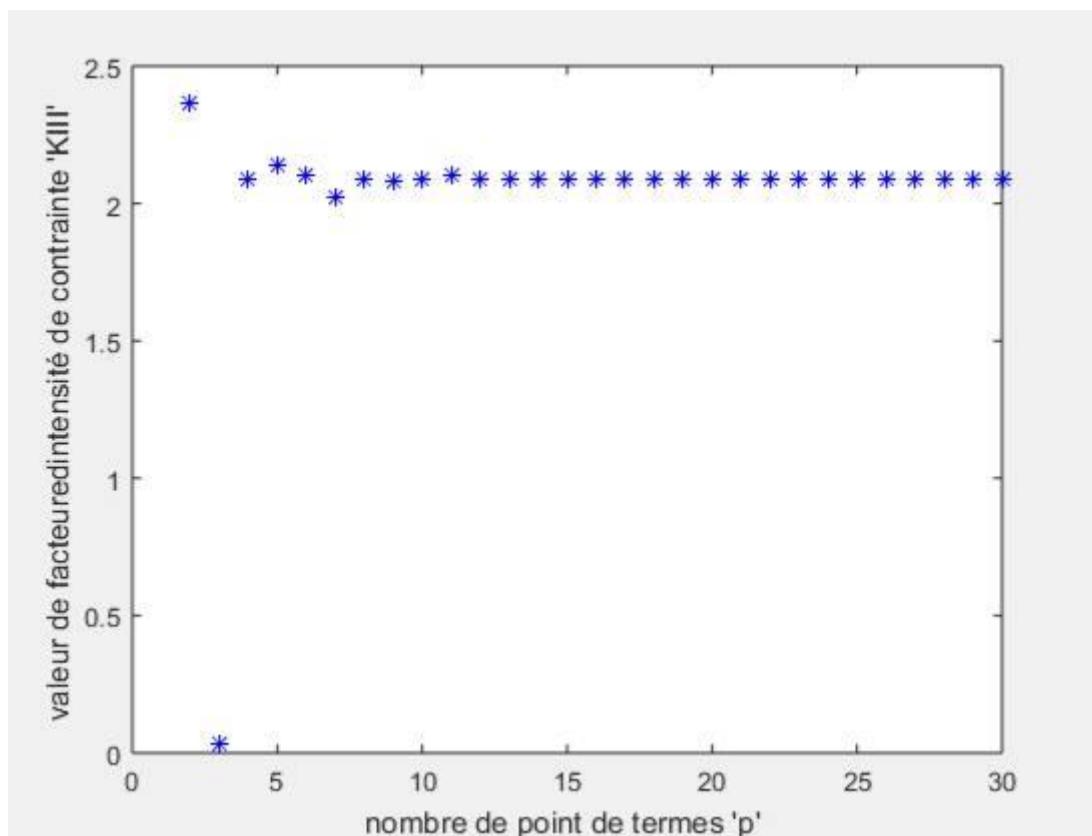


Figure A1-28 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	2.1037	21	2.0875
2	2.3629	12	2.0879	22	2.0874
3	0.0296	13	2.0886	23	2.0873
4	2.0874	14	2.0878	24	<b>2.0874</b>
5	2.1368	15	2.0853	25	<b>2.0874</b>
6	2.1006	16	2.0873	26	<b>2.0874</b>
7	2.0222	17	2.0872	27	<b>2.0874</b>
8	2.0874	18	2.0873	28	<b>2.0874</b>
9	2.0799	19	2.0878	29	<b>2.0874</b>
10	2.0848	20	2.0874	30	<b>2.0874</b>

Tableau A1-28 en fonction de N

## Resultats pour a= 1.1

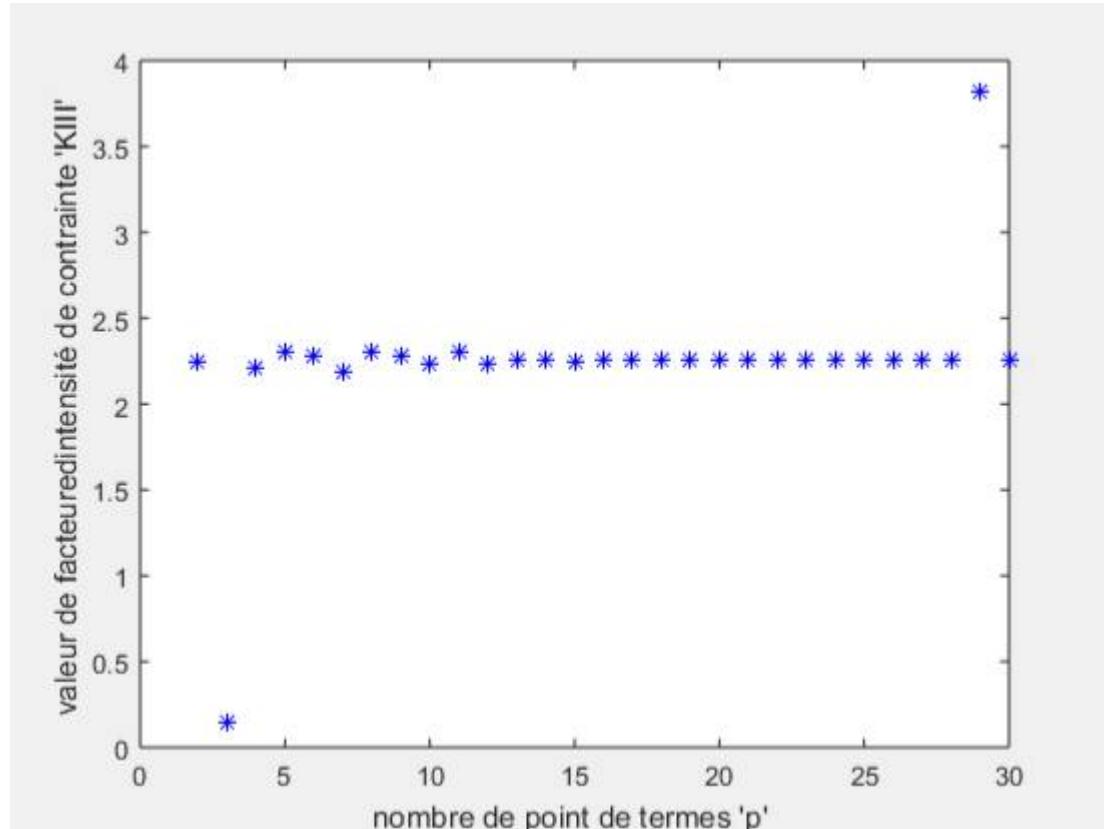


Figure A1-29 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	2.2976	21	2.2565
2	2.2481	12	2.2386	22	2.2578
3	0.1447	13	2.2532	23	2.2564
4	2.2098	14	2.2619	24	2.2579
5	2.3082	15	2.2500	25	2.2565
6	2.2752	16	2.2613	26	2.2569
7	2.1846	17	2.2590	27	2.2574
8	2.3037	18	2.2553	28	2.2569
9	2.2777	19	2.2594	29	3.8172
10	2.2347	20	2.2557	30	2.2572

Tableau A1-29 en fonction de N

Résultats pour  $a=1.2$

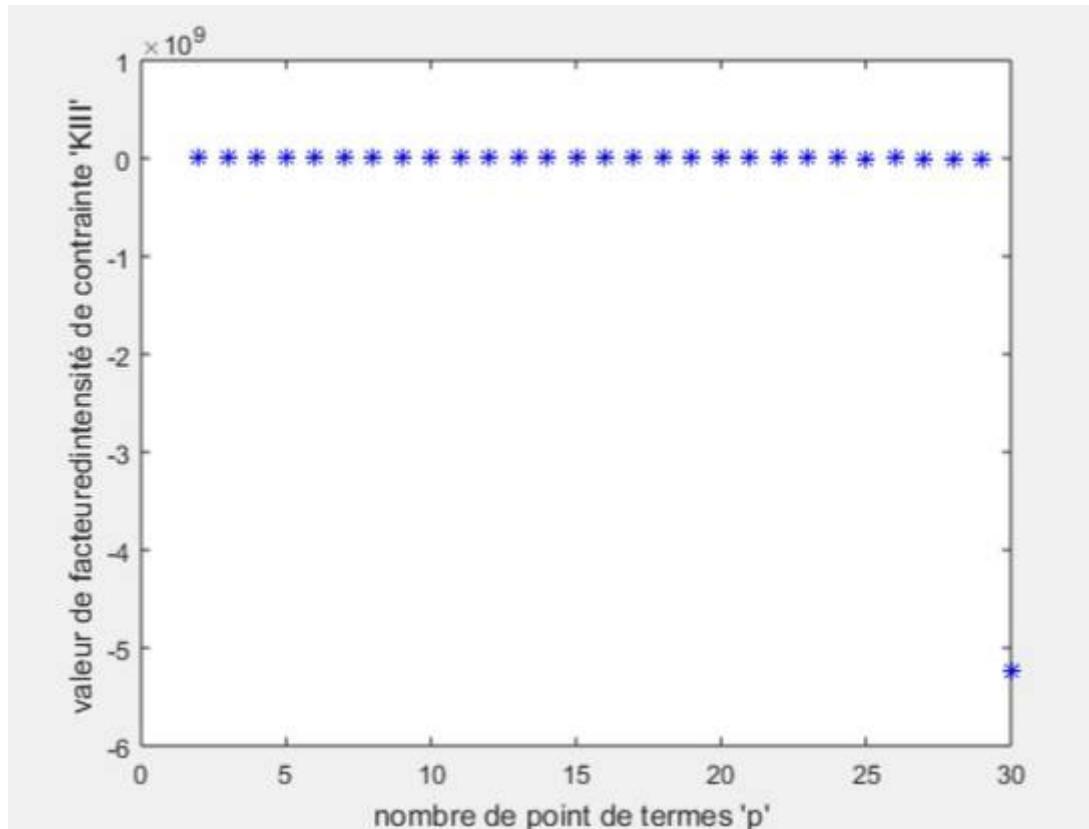


Figure A1-30 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	. NaN	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	-0.0000
6	0.0000	16	0.0000	26	0.0000
7	0.0000	17	0.0000	27	-0.0004
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.0034
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.0055
10	0.0000	20	0.0000	30	-5.2349

Tableau A1-30 en fonction de N

Résultats pour  $a=1.3$

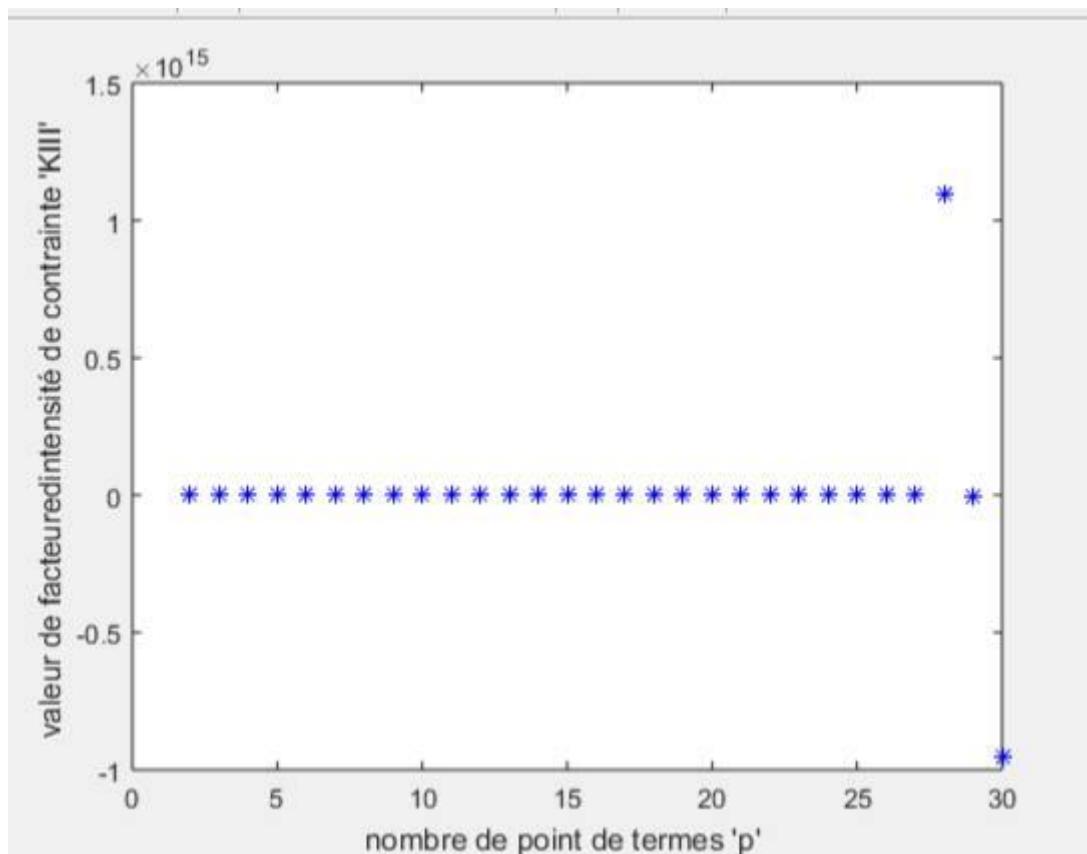


Figure A1-31 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	0.0000	21	0.0000
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0000
3	0.0000	13	0.0000	23	-0.0000
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0000
5	0.0000	15	0.0000	25	0.0000
6	0.0000	16	0.0000	26	-0.0001
7	0.0000	17	0.0000	27	-0.0011
8	0.0000	18	-0.0000	28	1.0930
9	0.0000	19	0.0000	29	-0.0024
10	0.0000	20	0.0000	30	-0.9558

Tableau A1-31 en fonction de N

Résultats pour=1.4

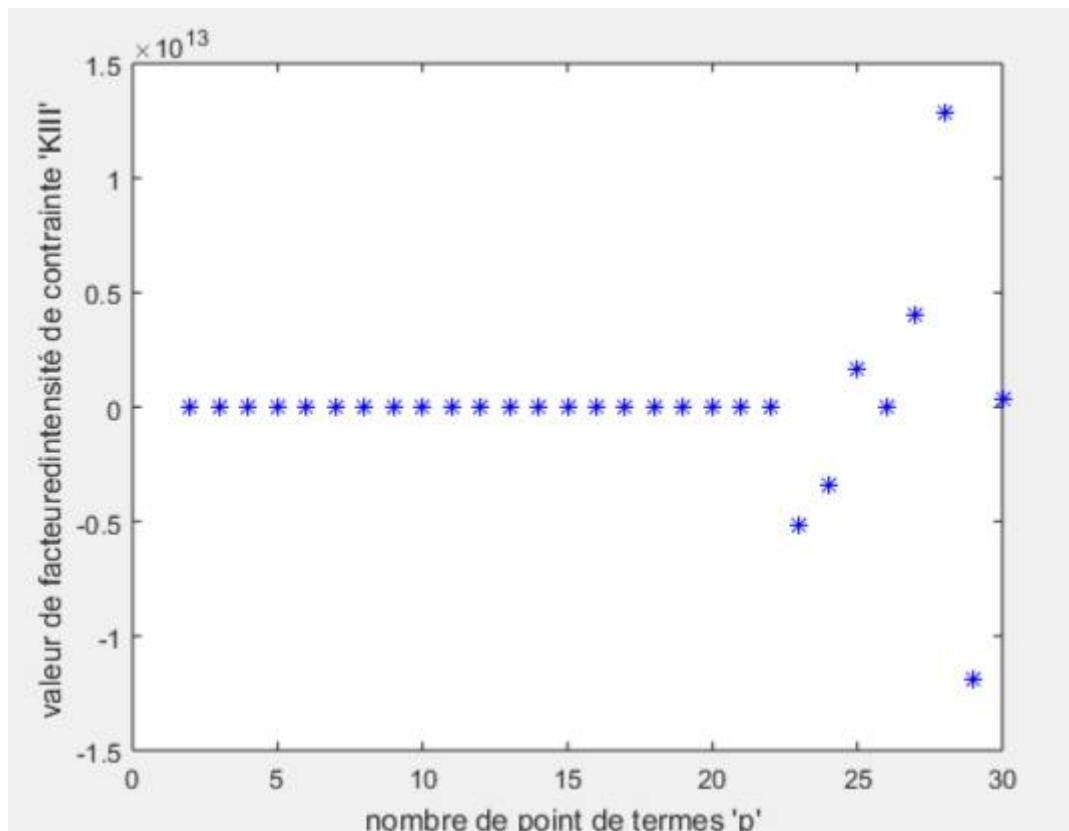


Figure A1-32 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	NaN	11	-0.0000	21	-0.0004
2	0.0000	12	0.0000	22	-0.0025
3	0.0000	13	-0.0000	23	-0.5137
4	0.0000	14	0.0000	24	-0.3431
5	0.0000	15	0.0000	25	0.1644
6	0.0000	16	-0.0000	26	0.0005
7	0.0000	17	0.0000	27	0.4019
8	0.0000	18	-0.0000	28	1.2894
9	0.0000	19	0.0000	29	-1.1869
10	0.0000	20	-0.0000	30	0.0309

Tableau A1-32 en fonction de N

Résultats pour a=1.5

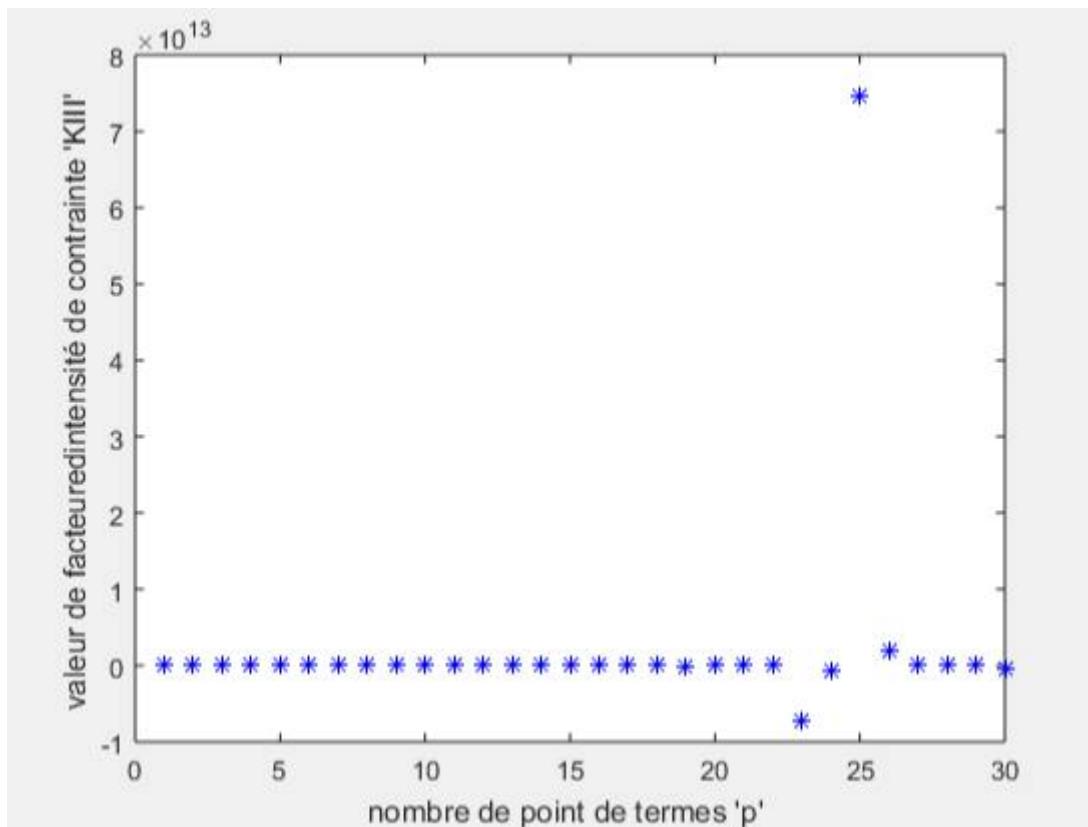


Figure A1-33 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0	11	0.0000	21	0.0169
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0001
3	0.0000	13	0.0000	23	-0.7267
4	0.0000	14	0.0000	24	-0.0696
5	-0.0000	15	0.0000	25	7.4535
6	0.0000	16	0.0000	26	0.1960
7	-0.0000	17	0.0000	27	-0.0008
8	0.0000	18	0.0000	28	-0.0015
9	0.0000	19	-0.0235	29	0.0001
10	0.0000	20	-0.0020	30	-0.0508

Tableau A1-33 en fonction de N

## Résultats pour a=1.6

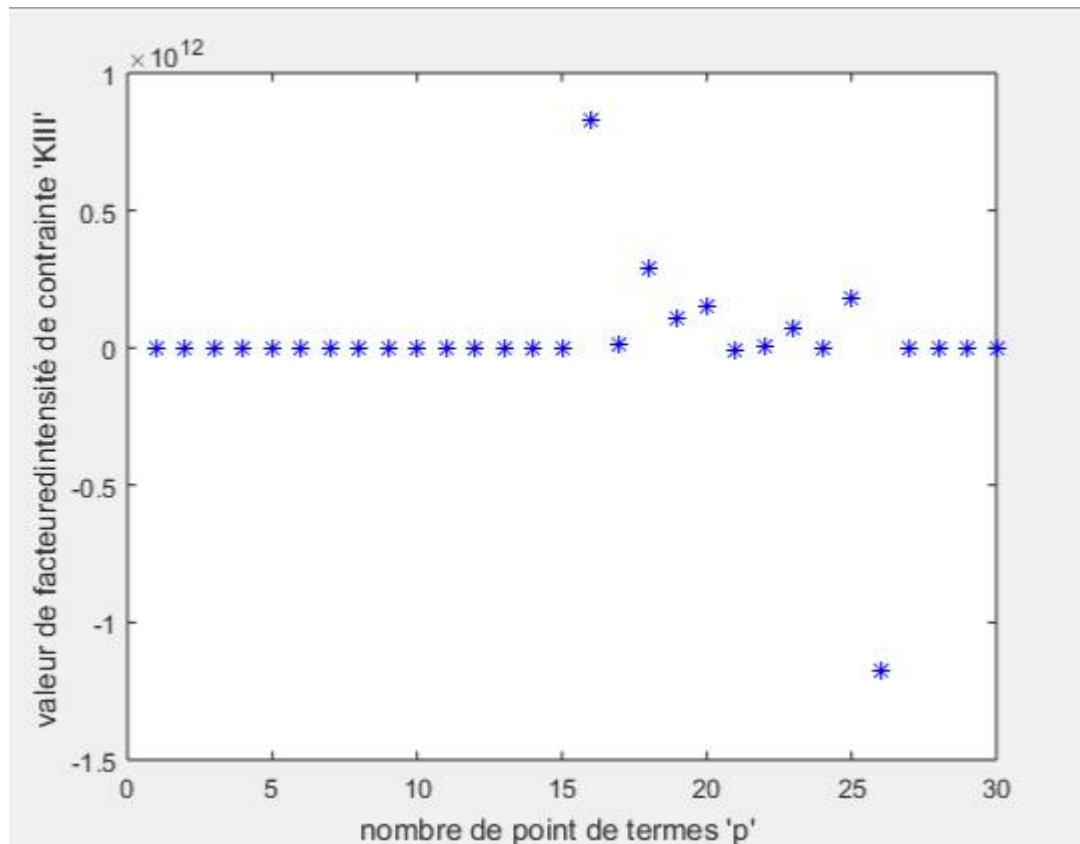


Figure A1-34 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0	11	0.0000	21	0.0120
2	0.0000	12	0.0000	22	0.0030
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0719
4	0.0000	14	0.0000	24	0.0005
5	0.0000	15	0.0000	25	0.1794
6	0.0000	16	0.8294	26	-1.1727
7	0.0000	17	0.0115	27	0.0010
8	0.0000	18	0.2916	28	0.0001
9	0.0000	19	0.1052	29	-0.0001
10	0.0000	20	0.1536	30	-0.0057

Tableau A1-34 en fonction de N

## Résultats pour a=1.7

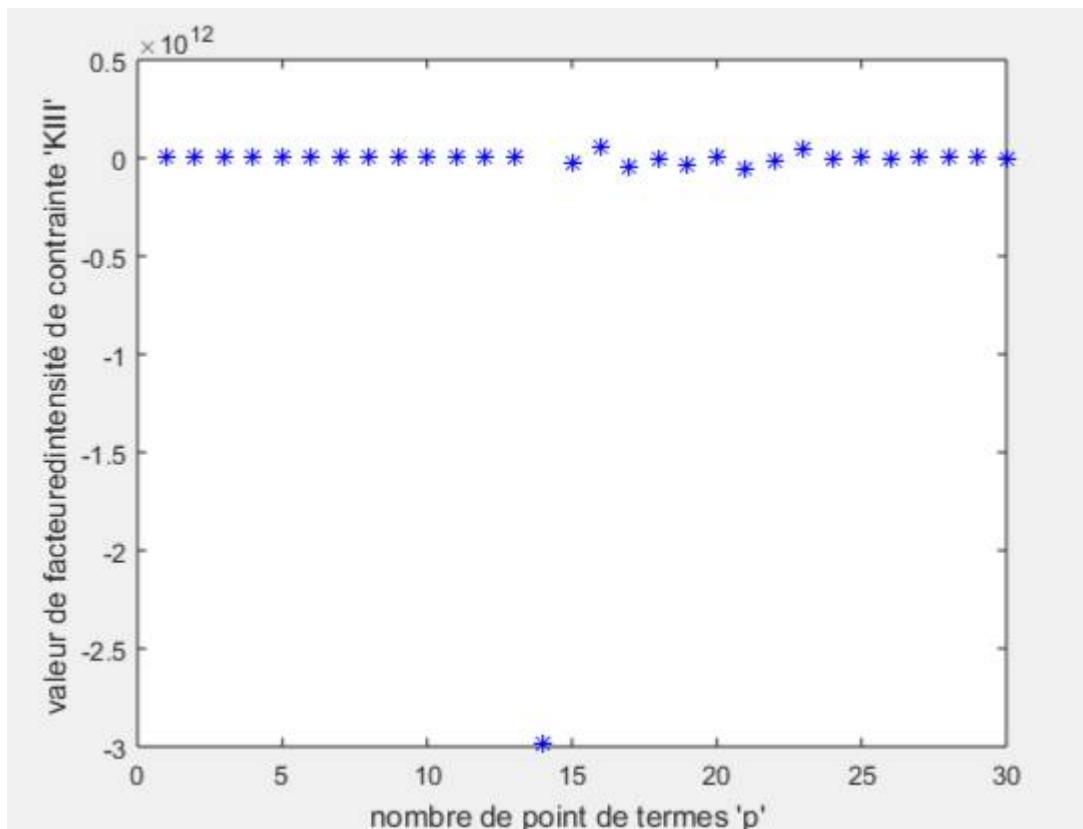


Figure A1-35 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0	11	0.0000	21	-0.0543
2	0.0000	12	0.0000	22	-0.0106
3	0.0000	13	0.0000	23	0.0482
4	0.0000	14	-2.9875	24	-0.0001
5	0.0000	15	-0.0228	25	0.0059
6	0.0000	16	0.0557	26	-0.0078
7	0.0000	17	-0.0419	27	0.0013
8	0.0000	18	-0.0005	28	0.0006
9	0.0000	19	-0.0406	29	0.0003
10	0.0000	20	0.0025	30	-0.0001

Tableau A1-35 en fonction de N

Résultats pour a=1.8

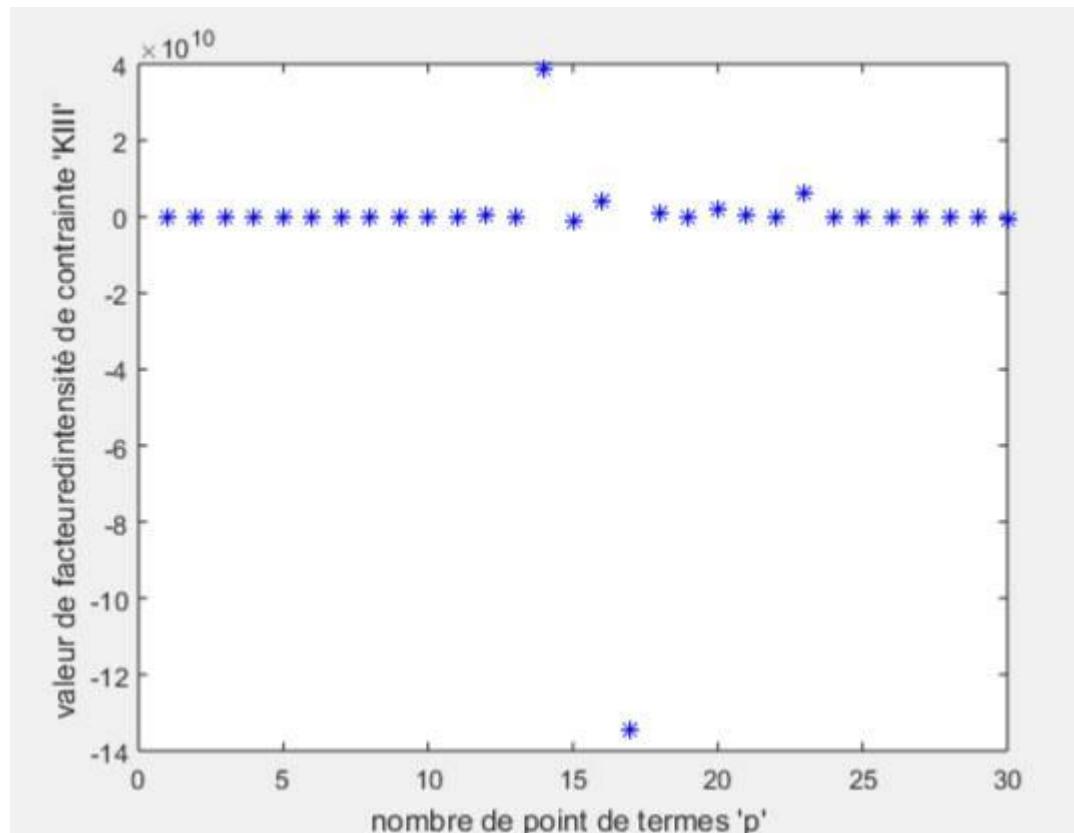


Figure A1-36 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0	11	0.0000	21	0.0033
2	0.0000	12	0.0021	22	-0.0004
3	0.0000	13	-0.0040	23	0.0632
4	0.0000	14	0.3861	24	-0.0035
5	0.0000	15	-0.0100	25	-0.0028
6	0.0000	16	0.0396	26	0.0006
7	0.0000	17	-1.3440	27	0.0001
8	0.0000	18	0.0111	28	-0.0002
9	0.0000	19	0.0007	29	-0.0011
10	0.0000	20	0.0177	30	-0.0044

Tableau A1-36 en fonction de N

Résultats pour a=1.9

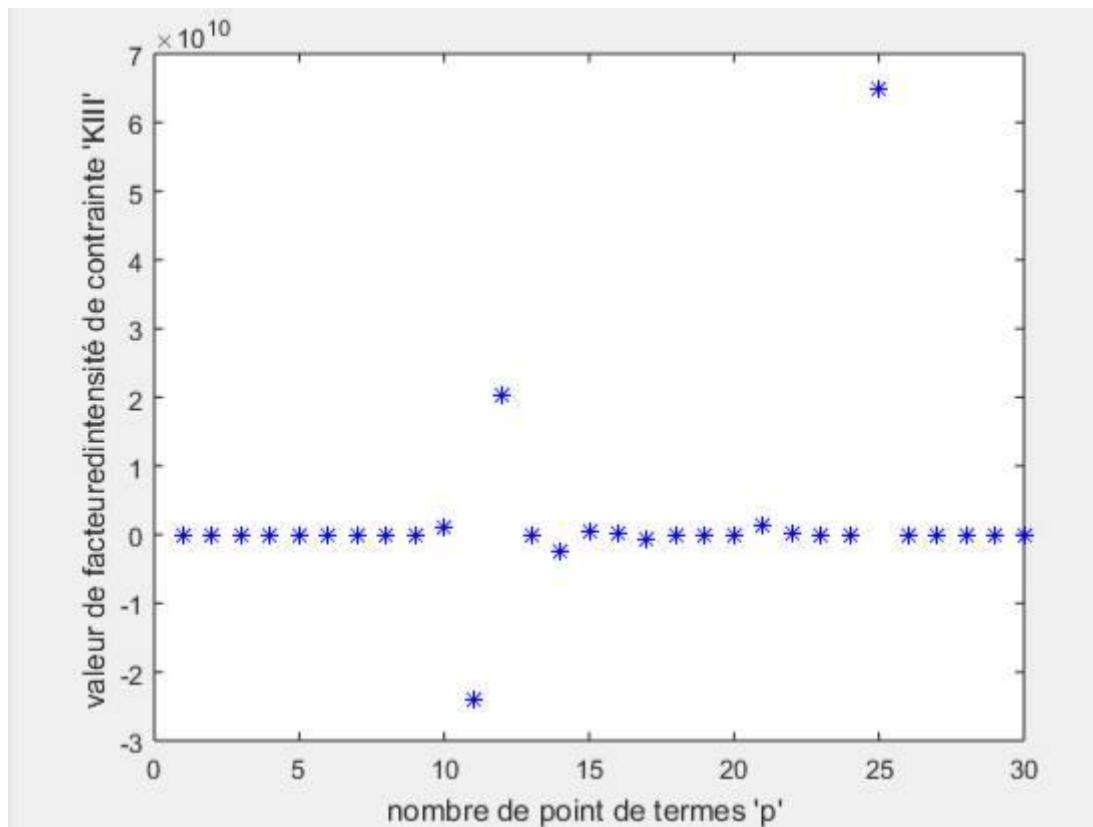


Figure A1-37 facteur KIII en fct de N

N	K III	N	K III	N	K III
1	0	11	-2.3977	21	0.1334
2	0.0000	12	2.0360	22	0.0193
3	0.0000	13	-0.0000	23	-0.0018
4	0.0000	14	-0.2469	24	-0.0002
5	0.0000	15	0.0399	25	6.5006
6	-0.0000	16	0.0139	26	-0.0000
7	0.0000	17	-0.0832	27	0.0002
8	-0.0000	18	-0.0086	28	-0.0007
9	0.0000	19	-0.0005	29	-0.0002
10	0.1134	20	-0.0176	30	0.0003

Tableau A1-37 en fonction de N