DU LYCÉE
A LA
FACULTÉ

présentation moderne de quelques notions de mathématiques

PAR R. MANZONI

TOME 2

VUIBERT

TABLE DES MATIÈRES

I. — Fonctions puissances définies dans $\mathbf{R}_+^*$ et à exposants rationnels.

I-1. Fonction puissance $x \longmapsto x^m$ dont l'exposant m est un entier naturel donné non nul 1

I-2. Fonction puissance $x \longmapsto x^{\frac{1}{m}}$ dont l'exposant $\frac{1}{m}$ est l'inverse de l'entier naturel donné m non nul 2

I-3. Fonction puissance $x \longmapsto x^r$ dont l'exposant r est un nombre rationnel donné strictement positif 3

I-4. Fonction puissance $x \longmapsto x^r$ dont l'exposant r est un nombre rationnel donné strictement négatif 4

I-5. Formulaire 5

I-6. Dérivée de la fonction puissance $x \longmapsto x^r$ dont l'exposant r est un nombre rationnel donné non nul 5

I-7. Prolongement de la fonction puissance $x \longmapsto x^r$ dont l'exposant r est un nombre rationnel donné non nul 6

I-8. Résolution dans R de l'équation $x^m = \lambda$, à une inconnue x, où l'on donne $m \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ 8

Exercices 8

II. — Fonctions exponentielles définies dans R. Fonctions logarithmiques définies dans $\mathbf{R}_+^*$. Fonctions puissances définies dans $\mathbf{R}_+^*$ et à exposants réels.

II- 1. Introduction 10

II- 2. Croissance stricte de la fonction $r \longmapsto \frac{a^r - 1}{r}$ définie dans $\mathbf{Q}^*$, lorsque a est donné dans $\mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 11

II- 3. Existence dans $\mathbf{R}_+^*$ de $\lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbf{Q}}} a^r$, au point quelconque $x \in \mathbf{R}$, lorsque a est donné dans $\mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 12

II- 4. Fonction exponentielle $\exp_a$ de base $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 13

II- 5. Endomorphismes continus du groupe additif topologique R 15

II- 6. Relation entre les fonctions exponentielles $\exp_a$ et $\exp_b$, de bases respectives $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ et $b \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 16

II- 7. Fonction logarithmique $\log_a$ de base $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 17

II- 8. Relation entre les fonctions logarithmiques $\log_a$ et $\log_b$, de bases respectives $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ et $b \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 18

II- 9. Croissance stricte de la fonction $x \longmapsto \frac{a^x - 1}{x}$ définie dans $\mathbf{R}^*$, lorsque a est donné dans $\mathbf{R}_+^* - \{1\}$ 18

II-10. Le nombre e 20

II-11. Dérivées des fonctions exponentielles et des fonctions logarithmiques 20

II-12. Fonctions puissances définies dans $\mathbf{R}_+^*$ et à exposants réels 21

II-13. Application $(x, y) \longmapsto x^y$ de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ 22

II-14. Formulaire 24

II-15. Comparaison des fonctions exponentielles, des fonctions puissances et des fonctions logarithmiques 24

II-16. Dérivées des fonctions composées e^f, $\ln |f|$, $|f|^m$, où f est une fonction numérique, définie dans une partie de R, et dérivable au point considéré 25

II-17. Développement de la fonction exponentielle $x \longmapsto \exp(x) = e^x$ 27

Exercices 28

III. — Fonctions hyperboliques d'une variable réelle.

III-1. Fonctions ch, sh, th et coth 30

III-2. Formulaire 32

III-3. Fonction Argch 32

III-4. Fonction Argsh 34

III-5. Fonction Argth 34

III-6. Fonction Argcoth 35

III-7. Dérivées des fonctions composées ch f, sh f, th f, coth f, Argch f, Argsh f, Argth f, Argcoth f, *où f est une fonction numérique, définie dans une partie de R,* et dérivable au point considéré 37

Exercices 37

IV. — Fonction exponentielle complexe définie dans C. Fonctions circulaires d'une variable réelle.

IV- 1. Fonction exponentielle complexe $z \longmapsto e^z$ définie dans C 39

IV- 2. Fonction complexe $z \longmapsto e^{(\alpha + i\beta)z}$ définie dans C 42

IV- 3. Définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel 42
IV- 4. Définition du nombre réel π 43
IV- 5. Fonction cos + i sin : $x \longmapsto \cos x + i \sin x$, définie dans R 45
IV- 6. Prétendue mesure des angles 46
IV- 7. Fonction cos, sin, tg et cotg 47
IV- 8. Fonction Arcsin 49
IV- 9. Fonction Arccos 50
IV-10. Fonction Arctg 50
IV-11. Fonction Arccotg 51
Exercices 52

V. — Etude locale des fonctions vectorielles (et, en particulier, des fonctions numériques finies).

V- 1. Présentation des notations 55
V- 2. Relations faibles de comparaison des fonctions 57
V- 3. Relations fortes de comparaison des fonctions 59
V- 4. Relations de comparaison entre fonctions numériques finies 63
V- 5. Échelles de comparaison, relatives à la base $\mathscr{B}$ de filtre sur E 64
V- 6. Partie principale d'une fonction $f \in \mathscr{H}$ ($\mathscr{B}$, F), relativement à l'échelle $\mathscr{E}$ de comparaison 68
V- 7. Développement asymptotique d'une fonction $f \in \mathscr{H}$ ($\mathscr{B}$, F), relativement à l'échelle $\mathscr{E}$ de comparaison 69
V- 8. Obtention d'un développement asymptotique à partir de la formule de Taylor-Young 70
V- 9. Développement asymptotique de la somme $f + g$ des fonctions f et g, et du produit $\gamma \cdot f$ de la fonction f par le scalaire γ 76
V-10. Développement asymptotique du « produit » $[f \cdot g]$ des fonctions f et g 77
V-11. Développement asymptotique du quotient $\frac{f}{g}$ des fonctions numériques finies f et g de la variable réelle x 78
V-12. Développement asymptotique de la composée $h = g \circ f$ de la fonction numérique finie f et de la fonction vectorielle g 78
V-13. Développements asymptotiques de quelques fonctions usuelles appartenant à l'ensemble $\mathscr{H}$ ($\mathscr{B}$, R) 81
Exercices 83

VI. — Courbes planes définies paramétriquement en coordonnées cartésiennes.

VI-1. Plan vectoriel réel normé R^2 86
VI-2. Courbe plane définie paramétriquement 88
VI-3. Choix de l'ensemble D de définition et recherche de l'ensemble D_0 d'étude 88
VI-4. Étude de la fonction vectorielle $f = (f_1, f_2)$ 89
VI-5. Branches infinies 90
VI-6. Étude locale au point $M_0 = f(t_0) = f_1(t_0) \cdot E_1 + f_2(t_0) \cdot E_2$, où t_0 est une valeur donnée du paramètre t 93
VI-7. Points doubles 96
VI-8. « Sous-tangente cartésienne » en un point donné M 97
VI-9. « Sous-normale cartésienne » en un point donné M, dans le cas où R^2 est un plan euclidien muni de la base orthonormale $\{ E_1, E_2 \}$ 97
Exercices 98

VII. — Abaques à points alignés pour les relations entre trois nombres réels.

VII-1. Échelles fonctionnelles 99
VII-2. Abaque à points alignés 100
Exercices 104

VIII. — Courbes planes définies paramétriquement en coordonnées polaires.

VIII-1. Plan euclidien orienté R^2 105
VIII-2. Coordonnées polaires d'un point M du plan euclidien orienté R^2 106
VIII-3. Courbe plane, définie paramétriquement en coordonnées polaires 107
VIII-4. Choix de l'ensemble D de définition et recherche de l'ensemble D_0 d'étude 107
VIII-5. Étude de la fonction vectorielle $\theta \longmapsto f(\theta) = \varphi(\theta) \cdot A_1$, avec $A_1 = \cos\theta \cdot E_1 + \sin\theta \cdot E_2$ 108
VIII-6. Branches infinies 109
VIII-7. Étude locale au point $M = f(\theta)$ 110
VIII-8. Points doubles 111
VIII-9. Sous-tangente polaire et sous-normale polaire en un point donné $M \neq 0$ 112
Exercices 113

IX. — Courbes planes ou gauches de R^3 définies paramétriquement.

IX-1. Espace vectoriel réel normé R^3 115
IX-2. Courbe définie paramétriquement dans R^3 115
IX-3. Étude locale au point $M_0 = f(t_0)$, où t_0 est une valeur donnée du paramètre t 116
IX-4. Courbe de l'espace euclidien R^3 définie paramétriquement en coordonnées semi-polaires (ou cylindriques) 118
IX-5. Courbe de l'espace euclidien R^3 définie paramétriquement en coordonnées polaires (ou sphériques) 119
Exercices 121

X. — Primitives et intégrales pour les fonctions vectorielles d'une variable réelle.

X- 1. Partition d'un intervalle I de R en un nombre fini de sous-intervalles 122
X- 2. Fonction en escalier 123
X- 3. Fonction réglée 125
X- 4. Primitives d'une fonction donnée f, définie dans l'intervalle $I \subset R$ et à valeurs dans l'espace de Banach réel F (avec souvent $F = R$) 126
X- 5. Théorème d'existence des primitives d'une fonction donnée f, définie dans l'intervalle $I \subset R$ et à valeurs dans l'espace de Banach réel F (avec souvent $F = R$) 127
X- 6. Primitives d'une fonction en escalier f, définie dans l'intervalle $I \subset R$ et à valeurs dans l'espace de Banach réel F (avec souvent $F = R$) 129
X- 7. Primitives d'une fonction réglée f définie dans l'intervalle $I \subset R$ et à valeurs dans l'espace de Banach réel F (avec souvent $F = R$) 131
X- 8. Moyenne de la fonction réglée f dans l'intervalle $[a, b]$ 135
X- 9. Intégrale dans l'intervalle compact $[a, b] \subset R$, d'une fonction réglée f, ... 136
X-10. Propriétés des intégrales 138
X-11. Théorème de la moyenne 139
X-12. Espace vectoriel réel normé $\mathscr{C}([\alpha, \beta], R)$ des applications continues de l'intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset R$ dans R 140
X-13. Espace vectoriel complexe normé $\mathscr{C}([\alpha, \beta], C)$ des applications continues de l'intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset R$ dans C 142
X-14. Construction de la fonction $x \longmapsto \ln x$, à partir de la notion de primitive ... 144
X-15. Primitives à connaître par cœur 144
X-16. Intégrale impropre d'une fonction réglée dans un intervalle non compact de R 148
X-17. Changement de variable, pour les intégrales et pour les primitives 152
X-18. Intégration par parties et primitivation par parties 156
X-19. Formule d'intégration par parties d'ordre $n \in N^*$ 159
X-20. Formule de Taylor d'ordre $n \in N$, relative au point a de l'intervalle $I \subset R$, et dont le reste est une intégrale 160
X-21. Principe de comparaison pour les intégrales (propres ou impropres) de deux fonctions numériques, réglées dans l'intervalle $I \subset R$, et à valeurs positives partout ou presque partout 161
X-22. Intégrale absolument convergente 162
X-23. Primitivation de la relation faible $\preccurlyeq$ de comparaison des fonctions 163
X-24. Intégrales eulériennes 166
X-25. Primitivation des relations fortes $\ll$ et $\sim$ de comparaison des fonctions 167
X-26. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre réel z 169
Exercices 170

XI. — Recherche des primitives de quelques fonctions simples.

XI-1. Primitivation des fonctions numériques rationnelles 176
XI-2. Fonctions numériques algébriques et fonctions numériques transcendantes d'une seule variable réelle 185
XI-3. Primitivation de certaines fonctions numériques algébriques non rationnelles 185
XI-4. Primitivation de certaines fonctions numériques transcendantes 188
Exercices 193

XII. — Longueur d'un arc de courbe de R^2 ou de R^3. Abscisse curviligne.

XII-1. Courbes et arcs paramétrés dans l'espace vectoriel réel normé R^2 (ou R^3) .. 196
XII-2. Chemins et lacets, routes et circuits, dans l'espace vectoriel réel normé R^2 (ou R^3) 197
XII-3. Arc géométrique défini par des arcs paramétrés équivalents 199
XII-4. Longueur d'un arc géométrique défini par le chemin f (ou par un chemin équivalent à f) 199
XII-5. Abscisse curviligne $s = \lambda(t)$ du point $M = f(t)$, de paramètre t, sur l'arc géométrique défini par le chemin f 201
XII-6. Calcul de la longueur d'un arc géométrique défini par la route f (ou par une route équivalente à f) 202
XII-7. Calcul de l'abscisse curviligne $s = \lambda(t)$ du point $M = f(t)$ de paramètre t, sur l'arc géométrique défini par la route f 204
Exercices 210

XIII. — Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace euclidien réel orienté R^3.

XIII-1. Formes trilinéaires alternées sur $R^3 \times R^3 \times R^3$, où R^3 est considéré comme espace vectoriel réel 211
XIII-2. Orientations de l'espace vectoriel réel R^3 212
XIII-3. Espace euclidien réel orienté R^3 213
XIII-4. Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace euclidien réel orienté R^3. 213
XIII-5. Formule du « double produit vectoriel » 215
XIII-6. Théorème 215
XIII-7. Moment d'un « vecteur glissant » en un point I 215
XIII-8. Torseurs 216
Exercices 218

XIV. — Courbure en un point d'un arc géométrique dans l'espace euclidien R^3.

XIV-1. « Invariants » dans un changement de paramétrage admissible 220
XIV-2. Courbure en un point d'un arc géométrique de classe C^2 221
XIV-3. Trièdre de Serret-Frenet 223
Exercices 225

XV. — Courbure en un point d'un arc géométrique dans le plan euclidien R^2.

XV-1. 1re méthode qui consiste à identifier les espaces euclidiens isomorphes $R \times R$ et $R \times R \times \{0\}$, et à utiliser les résultats établis dans R^3 226
XV-2. 2e méthode, en utilisant, dans le plan euclidien orienté R^2, l'« angle » polaire α du vecteur unitaire tangent T 227
XV-3. Exemples 230
Exercices 232

XVI. — Enveloppe d'une famille continue de droites de R^2 dépendant d'un seul paramètre réel.

XVI-1. Recherche de l'enveloppe dans le cas où chaque droite de la famille est définie paramétriquement 233
XVI-2. Recherche de l'enveloppe dans le cas où chaque droite de la famille est définie par son équation cartésienne 234
XVI-3. Développée d'une courbe paramétrée dans le plan euclidien R^2 236
XVI-4. Développantes d'une courbe paramétrée dans le plan euclidien R^2 236
XVI-5. Podaire et antipodaire, par rapport à un point donné, d'une courbe paramétrée dans le plan euclidien R^2 237
XVI-6. Généralisation de la notion d'enveloppe 239
XVI-7. Équation cartésienne d'une « courbe » 241
XVI-8. Abaques cartésiens pour les relations entre trois nombres réels 242
Exercices 243

XVII. — Calculs d'aires, de masses, de moments d'inertie, de coordonnées de centres de gravité, pour les systèmes matériels plans.

XVII-1. La variable d'intégration est x 247
XVII-2. La variable d'intégration est y 253
XVII-3. La variable d'intégration est le rayon-vecteur ρ 254
XVII-4. La variable d'intégration est l'« angle » polaire θ 257
Exercices 259

XVIII. — Calculs d'aires, de volumes, de masses, de moments d'inertie, de coordonnées de centres de gravité, pour les systèmes matériels de l'espace physique isomorphe à R^3.

XVIII-1. Masse et centre de gravité d'un fil matériel 262
XVIII-2. Surface obtenue par révolution autour de Ox d'une courbe du plan Oxy. 264
XVIII-3. Solide matériel S pour lequel on prend x comme variable d'intégration ... 267
XVIII-4. Boule S, creuse ou pleine, de centre O 270
XVIII-5. Tuyau cylindrique de révolution, d'axe Oz 272
XVIII-6. Solide matériel S homogène, de révolution autour de Ox, pour lequel on prend x comme variable d'intégration 274
XVIII-7. Solide matériel S homogène, de révolution autour de Ox, pourle quel on prend y comme variable d'intégration 278
XVIII-8. Solide matériel S homogène, de révolution autour de Ox, pour lequel on prend θ comme variable d'intégration 282
Exercices 283

XIX. — Equations différentielles linéaires pour les fonctions d'une variable réelle.

XIX- 1. Opérateurs différentiels linéaires 285
XIX- 2. Équations différentielles linéaires « sans second membre » 286
XIX- 3. Équations différentielles linéaires « avec second membre », dites complètes 288
XIX- 4. Résolution des équations différentielles linéaires du 1er ordre 290
XIX- 5. Propriété des graphes des solutions de l'équation différentielle linéaire $a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = u(x)$ 295
XIX- 6. Résolution des équations différentielles linéaires du 2e ordre 296

XIX- 7. Résolution des équations différentielles linéaires du 2e ordre, dont le premier membre est à coefficients réels constants 298
XIX- 8. Changement de fonction inconnue 306
XIX- 9. Quelques exemples d'équations différentielles non linéaires du 1er ordre .. 307
XIX-10. Systèmes différentiels linéaires du 1er ordre 309
Exercices 313

XX. — Familles sommables et séries.

XX- 1. Filtre naturel 315
XX- 2. Filtre des sections 315
XX- 3. Groupe topologique 315
XX- 4. Familles sommables dans un groupe additif topologique, commutatif et séparé 316
XX- 5. Familles sommables dans R de nombres réels positifs 317
XX- 6. Principe de comparaison pour les familles de nombres réels positifs 318
XX- 7. Inégalité de Hölder 321
XX- 8. Séries dans un groupe additif topologique, commutatif et séparé 322
XX- 9. Reste d'indice $p \in \mathbf{N}$ d'une série définie par la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ 323
XX-10. Série définie par une suite indexée par une partie infinie I de N 324
XX-11. Critère de Cauchy 324
XX-12. Conséquence du critère de Cauchy 326
XX-13. Sous-familles d'une famille sommable 327
XX-14. Familles multipliables et produits infinis dans un groupe multiplicatif topologique, commutatif et séparé 327
XX-15. Image par un morphisme continu d'une famille sommable ou d'une série convergente (resp. d'une famille multipliable ou d'un produit infini convergent) 330
XX-16. Familles sommables et séries convergentes dans un groupe produit cartésien de deux groupes additifs topologiques 331
XX-17. Familles sommables et séries convergentes dans le groupe additif topologique $\mathscr{A}$ des angles 332
XX-18. Opérations sur les familles sommables 333
XX-19. Opérations sur les séries convergentes 334
XX-20. Associativité 335
XX-21. Commutativité 338
XX-22. Sommabilité absolue des familles dans un espace vectoriel normé 340
XX-23. Convergence absolue des séries dans un espace vectoriel normé 343
XX-24. Règle d'Abel 344
XX-25. « Fonction en escalier » associée à une série donnée dans un espace de Banach réel E 344
XX-26. Principe de comparaison pour les séries de nombres réels positifs, ou positifs à partir d'un certain rang 345
XX-27. Critères logarithmiques de convergence pour les séries de nombres réels positifs, ou positifs à partir d'un certain rang 347
XX-28. Règle de Cauchy 348
XX-29. Développement asymptotique de la fonction

$$n \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini 348
XX-30. Développement asymptotique de la fonction $n \longmapsto n!$, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini 349
XX-31. Critères de convergence de seconde espèce pour les séries de nombres réels positifs, ou positifs à partir d'un certain rang 352
XX-32. Règle de d'Alembert 353
Exercices 354

XXI. — Séries de fonctions.

XXI- 1. Séries de fonctions 359
XXI- 2. Primitivation terme à terme et dérivation terme à terme d'une série de fonctions définies dans un intervalle I de R et à valeurs dans un espace de Banach réel Y 361
XXI- 3. Séries entières 362
XXI- 4. Série de Taylor d'une application f d'un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ dans R, ou de I dans C 367
XXI- 5. Développement de la fonction exponentielle réelle 368
XXI- 6. Développement des fonctions cosinus et sinus 369
XXI- 7. Développement du binôme 371

XXI- 8. Développement de la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x)$ 374
XXI- 9. Développement de la fonction $x \longmapsto \text{Arctg } x$ 375
XXI-10. Développement de la fonction $x \longmapsto \text{Arcsin } x$ 376
Exercices 377

XXII. — Quelques exemples d'espaces de fonctions.

XXII-1. Espaces de Banach $(l^p_{\mathbf{R}})$ et $(l^p_{\mathbf{C}})$ 380
XXII-2. Propriétés (admises sans démonstration) d'un espace préhilbertien réel ou complexe 383
XXII-3. Espaces de Hilbert $(l^2_{\mathbf{R}})$ et $(l^2_{\mathbf{C}})$ 386
XXII-4. Théorème de Stone-Weierstrass 387
XXII-5. Espace préhilbertien réel $\mathscr{C}([\alpha, \beta], \mathbf{R})$ des applications continues de l'intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ dans R 391
XXII-6. Espace préhilbertien complexe $\mathscr{C}([\alpha, \beta], \mathbf{C})$ des applications continues de l'intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ dans C 394
Exercices 396

XXIII. — Séries de Fourier.

XXIII-1. Représentation de Fourier d'une fonction f donnée dans l'espace préhilbertien complexe $\mathscr{C}([\alpha, \alpha + 2\pi], \mathbf{C})$ (resp. dans l'espace préhilbertien réel $\mathscr{C}([\alpha, \alpha + 2\pi], \mathbf{R})$) 397
XXIII-2. Série de Fourier d'une application donnée f de l'intervalle compact $[\alpha, \alpha + 2\pi] \subset \mathbf{R}$ dans C (resp. dans R), dans le cas où la fonction f est continue par morceaux et continûment dérivable par morceaux 399
XXIII-3. Série de Fourier d'une application périodique, $\tilde{f}$, de R dans C (resp. dans R) qui admet 2π pour période et qui est un prolongement de la fonction f donnée précédemment 402
XXIII-4. Quelques exemples 404
XXIII- 5. Séries trigonométriques 407
Exercices 410

XXIV. — Probabilités.

XXIV- 1. Tribus 413
XXIV- 2. Événements 415
XXIV- 3. Probabilités 419
XXIV- 4. Réalisation de ρ exactement des α événements $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ 424
XXIV- 5. Réalisation de ρ au moins des α événements $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ 427
XXIV- 6. Probabilités conditionnelles 429
XXIV- 7. Événements indépendants 432
XXIV- 8. Produit d'espaces probabilisés 433
XXIV- 9. Répétitions indépendantes de l'exécution d'une même expérience 435
XXIV-10. Aléas numériques 436
XXIV-11. Fonction-répartition et espérance mathématique d'un aléa numérique 437
XXIV-12. Aléas vectoriels 441
XXIV-13. Indépendance stochastique des aléas numériques 443
XXIV-14. Médiane d'un aléa numérique 444
XXIV-15. Moments d'un aléa numérique 446
XXIV-16. Variance et écart-type d'un aléa numérique 447
XXIV-17. Covariance et coefficient de corrélation linéaire de deux aléas numériques simultanés 449
XXIV-18. Ajustement linéaire, par la méthode des « moindres carrés » 451
XXIV-19. Principales lois de probabilité 453
Exercices 462