2-510-31-3/1

A. 51- 228
T.3 EX.6

ELIE AZOULAY

Ingénieur des Télécommunications
Professeur à l'Ecole Supérieure
d'Ingénieurs en Electrotechnique
et Electronique

JEAN AVIGNANT

Agrégé de l'Université
Professeur à l'I.U.T.
de Ville-d'Avray

e-510-31-3/1

جامعة البليدة 1
مكتبة المعهد

MATHEMATIQUES
3. ANALYSE

COURS ET EXERCICES

البحث العلمي
المكتبة المركزية

McGRAW-HILL

Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto

1984

TABLE DES MATIÈRES

1. Fonctions définies par des intégrales. Fonctions eulériennes 1

A. Fonctions définies par des intégrales 1

1. Fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 1

2. Fonction $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt$ 2

3. Fonction $\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\,dt$ 4

4. Fonction définie par une intégrale généralisée. Convergence uniforme 4

5. Propriétés des fonctions définies par des intégrales uniformément convergentes 5

6. Second théorème de la moyenne 7

B. Fonctions eulériennes 8

1. Définitions 8

2. Relation de récurrence de la fonction Γ 9

3. Etude de la fonction $y = \Gamma(x)$ 10

4. Prolongement de $\Gamma(x)$ aux valeurs négatives de x 12

5. Relation entre les fonctions Γ et B 12

6. Formule des compléments 13

7. Intégrales de Wallis. Formule de duplication pour la fonction Γ 15

8. Formule de Stirling 16

Résumé du chapitre 1 18

Exercices 21

2. Fonctions d'une variable complexe 37

A. Généralités. Fonctions holomorphes 37

1. Définitions 37

2. Limites. Continuité 38

3. Dérivée d'une fonction en un point. Dérivées successives. Fonction holomorphe 39

4. Transformation conforme définie par une fonction holomorphe 40

5. Conditions de Cauchy 42

6. Fonctions harmoniques conjuguées 45

7. Différentielle d'une fonction 46

B. Fonctions holomorphes élémentaires. Fonctions analytiques . . . 47
1. Fonctions rationnelles . . . 47
2. Fonction $f(z) = \frac{1}{z}$. Abaque de Smith . . . 47
3. Fonction homographique . . . 49
4. Transformation de Joukovski . . . 51
5. Fonction définie par une série entière. Fonction analytique . . 53
6. Fonctions usuelles définies par des séries entières . . . 55
7. Fonction logarithmique. Notion de coupure . . . 56
8. Autres fonctions classiques . . . 60
C. Intégration dans le champ complexe. Théorème de Cauchy . . . 61
1. Définition de l'intégration sur un arc . . . 61
2. Propriétés de l'intégration . . . 63
3. Intégration d'une fonction holomorphe. Théorème de Cauchy 64
4. Primitives d'une fonction holomorphe . . . 66
5. Formule intégrale de Cauchy . . . 67
6. Série de Taylor d'une fonction holomorphe . . . 68
D. Théorie des résidus . . . 70
1. Pôles d'une fonction. Fonction méromorphe . . . 70
2. Partie principale et résidu d'une fonction méromorphe en un pôle . . . 71
3. Forme intégrale du résidu d'une fonction méromorphe . . . 73
4. Théorème des résidus pour une fonction méromorphe . . . 73
5. Point singulier essentiel. Série de Laurent . . . 75
6. Généralisation du théorème des résidus . . . 78
E. Application de l'intégration dans le champ complexe au calcul de certaines intégrales réelles . . . 79
1. Calcul de $\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$, φ étant rationnelle . . . 79
2. Lemmes de Jordan . . . 80
3. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$, $\alpha > 1$ . . . 80
4. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, P et Q étant des polynômes . . . 83
5. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{ix}\, dx$ . . . 84
6. Autres intégrales classiques . . . 86
Résumé du chapitre 2 . . . 88
Exercices . . . 92

3. Transformation de Fourier . . . **105**
1. Introduction . . . 105
2. Définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ . . 105
3. Formules de réciprocité de Fourier . . . 106

4. Propriétés de la transformation de Fourier 109
5. Produit de convolution 110
6. Transformées de quelques fonctions simples 111
7. Applications de la transformation de Fourier 112
8. Formules de Parseval et de Plancherel 112
Résumé du chapitre 3 113
Exercices 114

4. Transformation de Laplace. Calcul symbolique **125**
A. Définitions et généralités 125
1. Introduction 125
2. Définitions et notations 125
3. Etude de la convergence 126
4. Transformation inverse. Formule de Bromwich 128
5. Premiers exemples. Fonction échelon-unité 129
6. Linéarité. Applications 130
7. Translation sur t (formule du retard). Fonction périodique . 130
8. Translation sur p 133
9. Homothétie sur t ou sur p 133
10. Dérivation et intégration de l'original 133
11. Dérivation et intégration de l'image 134
B. Transformées usuelles. Recherche d'un original 136
1. Fonctions se ramenant aux exponentielles ou aux polynômes 136
2. Transformée de t^α 136
3. Produit de convolution. Original d'un produit 137
4. Distribution ou « fonction » de Dirac 138
5. Transformée d'une série entière 140
6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale 140
7. Recherche d'un original 141
C. Applications du calcul symbolique 143
1. Résolution d'équations fonctionnelles 143
2. Equations et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants 143
3. Equations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes 145
Résumé du chapitre 4 146
Exercices 148

5. Fonctions de Bessel **163**
1. Introduction. Equation de Bessel 163
2. Fonction $J_0(t)$ 165
3. Etude de l'équation de Bessel dans le cas général 167
4. Equation de Bessel d'ordre entier 170
5. Relations « de récurrence » sur les fonctions de Bessel 171

6. Forme intégrale d'une fonction de Bessel d'ordre entier 172
7. Interprétation de $J_k(t)$ par une série de Fourier. Fonction génératrice 173
8. Transformée de Laplace d'une fonction de Bessel 174
9. Orthogonalité. Relations concernant les zéros des fonctions de Bessel 176
Résumé du chapitre 5 179
Exercices 181

6. Notions sur quelques autres fonctions spéciales de l'analyse 185
1. Introduction 185
2. Compléments sur les équations différentielles linéaires. Théorème de Fuchs 185
3. Fonctions orthogonales. Polynômes orthogonaux 186
4. Equation et fonctions hypergéométriques 188
5. Equation de Legendre. Fonctions et polynômes de Legendre 189
6. Polynômes d'Hermite 193
7. Polynômes de Laguerre 194
8. Polynômes de Tchebychev 195
9. Polynômes et nombres de Bernoulli 198
10. Autres fonctions classiques 200
11. Intégrales et fonctions elliptiques 201
Résumé du chapitre 6 204
Exercices 207

7. Equations aux dérivées partielles 217
A. Introduction et généralités 217
B. Equations aux dérivées partielles du premier ordre 218
1. Généralités 218
2. Systèmes différentiels. Intégrales premières 219
3. Equation aux dérivées partielles associée à un système différentiel linéaire 220
4. Equation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre . . . 220
5. Cas de la dimension 2. Problème de Cauchy 223
6. Equations aux différentielles totales 224
7. Notions sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, à deux variables 225
C. Equations aux dérivées partielles linéaires du second ordre 228
1. Généralités. Problème de Cauchy 228
2. Equation linéaire où les coefficients A, B, C ne dépendent que de x et y 229
3. Etude de l'équation $Ar + Bs + Ct = 0$ à coefficients constants 230
D. Etude de quelques équations aux dérivées partielles de la physique 232
1. Introduction et généralités 232

2. Equation des cordes vibrantes 233
3. Equation de Laplace 236
4. Equation des ondes 242
5. Equations de Maxwell. Equation des télégraphistes 244
6. Equation de la chaleur 247
7. Conclusion 248
Résumé du chapitre 7 248
Exercices 249