A. 51- 228
T.4 EX.6

ELIE AZOULAY
- Ingénieur des Télécommunications
- Professeur à l'Ecole Supérieure
- d'Ingénieurs en Electrotechnique
- et Electronique

JEAN AVIGNANT
- Agrégé de l'Université
- Professeur à l'I.U.T.
- de Ville-d'Avray

2-500-32-41s

MATHEMATIQUES
4. ALGEBRE

Merde

COURS ET EXERCICES





McGRAW-HILL
Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto
1984

TABLE DES MATIÈRES

1. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles **1**
1. Ensemble 1
2. Appartenance 1
3. Détermination d'un ensemble 1
4. Egalité de deux ensembles 2
5. Inclusion 2
6. Visualisation des ensembles. Diagrammes 3
7. Opérations sur les ensembles 4
8. Propriétés des opérations sur les ensembles 6
9. Lois de Morgan 6
10. Différence de deux ensembles 7
11. Notion de recouvrement et de partition 7
12. Ensembles usuels en mathématiques 8
13. Produit d'ensembles 8
14. Relation. Graphe d'une relation 9
Résumé du chapitre 1 9
Exercices 11

2. Applications. Relations d'ordre et d'équivalence. Analyse combinatoire **19**
1. Lois de composition d'un ensemble 19
2. Notion d'application 19
3. Notion de relation binaire 23
4. Relation d'équivalence 24
5. Relation d'ordre 25
6. Dénombrement des différentes applications d'un ensemble E dans un ensemble F 26
7. Applications : binôme de Newton 28
Résumé du chapitre 2 32
Exercices 34

3. Structures algébriques **41**
1. Groupe 41
2. Anneau 42
3. Corps 43
Résumé du chapitre 3 43
Exercices 44

4. Nombres complexes 51
1. Définition 51
2. Opérations sur les nombres complexes 52
3. Quotient sur deux nombres complexes 55
4. Nombres réels. Nombres imaginaires purs. Notation algébrique et trigonométrique des nombres complexes 55
5. Formule de Moivre 57
6. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe 58
7. Résolution de l'équation du second degré 59
8. Transformations géométriques simples 59
9. e^z pour z complexe. Formules d'Euler 63
Résumé du chapitre 4 64
Exercices 64

5. Polynômes. Fractions rationnelles 77
1. Définition 77
2. Addition des polynômes 78
3. Multiplication des polynômes 78
4. Multiplication par un scalaire 79
5. Polynôme dérivé 79
6. Formules de Mac Laurin et de Taylor 80
7. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes ou division euclidienne 82
8. Recherche du quotient et du reste 83
9. Division suivant les puissances croissantes 84
10. PGCD de polynômes 86
11. Division par $x - a$ 89
12. Polynômes et équations sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . 90
13. Théorème de D'Alembert 90
14. Factorisation d'un polynôme 91
15. Relations entre coefficients et racines 92
16. Fractions rationnelles 92
Résumé du chapitre 5 96
Exercices 99

6. Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices 113
A. Espaces vectoriels 113
1. Introduction 113
2. Définition d'un espace vectoriel 113
3. Exemples 114
4. Propriétés immédiates des opérations dans un espace vectoriel 115
5. Familles de vecteurs d'un espace vectoriel. Dépendance, indépendance 115
6. Sous-espaces vectoriels 116
7. Intersection de deux sous-espaces 116
8. Sommes de sous-espaces. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires 117

9. Générateurs d'un espace vectoriel. Base. Coordonnées 118
10. Dimension finie 119
11. Sous-espaces vectoriels en dimenension finie. Rang d'un système de vecteurs 121
12. Espaces de dimension finie 123
B. Applications linéaires. Matrices 123
1. Définition 123
2. Noyau. Image 124
3. Application linéaire injective 125
4. Image d'une famille génératrice. Cas où E est de dimension finie 125
5. Cas où E et F sont de dimensions finies. Matrices associées à une application linéaire. 127
6. Matrice nulle. Egalité. Transposition 130
7. Opérations linéaires sur les applications linéaires et les matrices 131
8. Composition des applications linéaires. Multiplication des matrices 132
C. Endomorphismes. Algèbre des matrices carrées d'ordre n 135
1. Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Matrices carrées d'ordre n 135
2. Anneau des matrices carrées d'ordre n 136
3. Endomorphisme bijectif. Inverse d'une matrice carrée 137
4. Inversion progressive d'une matrice par prémultiplications successives 140
5. Changement de base. Matrices semblables 143
6. Projecteurs 145
D. Notions sur la dualité 147
1. Forme linéaire 147
2. Espace dual d'un espace vectoriel. Base duale d'une base de E 147
Résumé du chapitre 6 148
Exercices 152

7. Déterminants. Systèmes d'équations linéaires 173
A. Permutations d'un ensemble fini 173
1. Rappel 173
2. Transpositions 173
3. Inversions d'une permutation. Parité. Signature 174
B. Déterminants 175
1. Forme multilinéaire alternée 175
2. Expression d'une forme multilinéaire alternée dans une base de E. 176
3. Définition d'un déterminant 177
4. Exemples. Déterminants d'ordres 2 et 3. Règle de Sarrus 178
5. Propriétés des déterminants 179
6. Développement d'un déterminant suivant une rangée 182
7. Calcul pratique d'un déterminant 183
8. Déterminant de Van der Monde 185

C. Inversion d'une matrice. Systèmes d'équations linéaires 187
1. Inversion d'une matrice 187
2. Systèmes d'équations linéaires. Généralités 188
3. Système de Cramer 188
4. Rang d'un système linéaire 190
5. Cas général du système de n équations à p inconnues. Théorème de Fontené-Rouché 192
6. Système homogène 194
D. Notions sur l'élimination 194
1. Résultant de deux polynômes à une variable 194
2. Discriminant d'un polynôme à une variable 196
Résumé du chapitre 7 197
Exercices 200

8. Valeurs propres. Réduction d'un endomorphisme 215
1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres 215
2. Recherche des valeurs propres en dimension finie. Polynôme caractéristique 216
3. Réduction d'un endomorphisme possédant n valeurs propres distinctes 218
4. Etude générale de la diagonalisation 219
5. Trigonalisation 222
6. Matrices de Jordan. Réduction de Jordan 225
7. Applications de la réduction au calcul des puissances d'une matrice et aux suites récurrentes 227
8. Application de la réduction aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants du premier ordre 228
9. Polynômes d'endomorphismes. Théorème de Cayley-Hamilton . . . 231
Résumé du chapitre 8 234
Exercices 236

9. Formes quadratiques. Espaces euclidiens. Isométries 259
A. Formes bilinéaires. Formes quadratiques 259
1. Forme bilinéaire. Définition et représentation matricielle 259
2. Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique associée 260
3. Orthogonalité par rapport à une forme quadratique 262
4. Base orthogonale. Diagonalisation. Décomposition en carrés . . 262
B. Espace euclidien 266
1. Définition d'un espace euclidien. Produit scalaire 266
2. Norme associée à un produit scalaire. Espace normé 266
3. Base orthonormée d'un espace euclidien. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt 267
4. Changement de base orthonormée. Matrice orthogonale, endomorphisme orthogonal 269
5. Notions sur les isométries d'un espace vectoriel réel de dimension finie 270

6. Isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ 273
7. Réduction d'une matrice symétrique réelle. Application aux formes quadratiques 274
8. Réduction des coniques et quadratiques à centres 275
9. Produit mixte et produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension n 276
Résumé du chapitre 9 276
Exercices 279

10. Formes hermitiennes. Matrices hermitiennes **289**
1. Formes sesquilinéaires. Formes hermitiennes 289
2. Matrice d'une forme hermitienne en dimension finie 290
3. Produit scalaire hermitien. Orthogonalité 291
4. Matrice unitaire, endomorphisme unitaire 292
5. Réduction d'une matrice hermitienne 292
Exercices 293