ELIE AZOULAY
Ingénieur des Télécommunications
Professeur à l'Ecole Supérieure
d'Ingénieurs en Electrotechnique
et Electronique

JEAN AVIGNANT
Agrégé de l'Université
Professeur à l'I.U.T.
de Ville-d'Avray

2-500-40-5/2

MATHEMATIQUES
5. GEOMETRIE

COURS ET EXERCICES





McGRAW-HILL
Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto
1984

TABLE DES MATIÈRES

1. Calcul et opérateurs vectoriels **1**
A. Définitions 1
B. Somme vectorielle 5
C. Composantes d'un vecteur dans un trièdre orthonormé 6
D. Produit scalaire de deux vecteurs 8
E. Produit vectoriel de deux vecteurs 10
F. Moment d'un vecteur en un point 12
G. Applications 13
H. Double produit vectoriel 16
I. Produit mixte de trois vecteurs 17
J. Dérivée d'un vecteur 19
K. Dérivée du produit scalaire de deux vecteurs 19
L. Dérivée du produit vectoriel de deux vecteurs 20
M. Champ de scalaires 20
N. Gradient d'une fonction de plusieurs variables 20
O. Champ de vecteurs 21
P. Divergence d'un vecteurs 21
Q. Rotationnel d'un vecteur $\vec{V}$ 21
R. Opérateur $\vec{\nabla}$ 22
S. Relations liant les opérateurs vectoriels 23
Résumé du chapitre 1 24
Exercices 26

2. Eléments de géométrie analytique **31**
A. Géométrie plane 31
1. Repère cartésien. Changement de repère 31
2. Représentation d'une droite 34
3. Droites parallèles. Droites orthogonales. Angle de deux droites 36
4. Intersection de deux droites. Faisceau de droites. Notion sur les éléments imaginaires 37
5. Problèmes de distance (repère orthonormé) 39
6. Représentation d'un cercle 41
7. Puissance d'un point par rapport à un cercle 42
8. Représentation analytique d'un courbe plane 44
9. Les coniques 45

B. Géométrie dans l'espace 51
1. Repère cartésien. Changement de repère 51
2. Représentation d'un plan 52
3. Représentation d'une droite 53
4. Orthogonalité. Problèmes d'angles 54
5. Problèmes de distances 55
6. La sphère. Coordonnées sphériques 56
7. Généralités sur les surfaces et les courbes 58
8. Surface réglée. Cylindres, cônes, conoïdes 59
9. Surfaces de révolution 62
10. Surfaces algébriques. Classification des quadriques 64
11. Etude descriptive sommaire des quadriques 66
Résumé du chapitre 71
Exercices 75

3. Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Courbes planes paramétrées **89**
A. Fonctions vectorielles 89
1. Définitions 89
2. Continuité. Dérivation 89
3. Calcul des dérivées 90
4. Formule de Taylor-Young 91
B. Courbes planes paramétrées 91
1. Etude locale théorique 91
2. Etude des branches infinies 95
3. Points doubles. Points multiples 97
4. Plan d'étude pratique d'une courbe plane paramétrée 97
5. Exemples d'études de courbes planes paramétrées 99
Résumé du chapitre 3 104
Exercices 106

4. Courbes planes en coordonnées polaires **133**
A. Définitions et généralités 133
B. Changement de coordonnées. Repère cartésien associé 134
C. Equations de quelques courbes simples 135
D. Tangente en un point à une courbe définie par $\rho = f(\theta)$ 138
E. Points d'inflexion 140
F. Branches infinies 141
G. Points doubles. Points multiples 143
H. Plan d'étude d'une courbe définie par $\rho = f(\theta)$ 143
I. Exemple : courbe d'équation $\rho = \dfrac{\cos\theta \cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{3\theta}{2}}$ 144
Résumé du chapitre 4 149
Exercices 150

5. Courbure et torsion **179**
A. Courbes planes 179
1. Définitions 179
2. Rayon et centre de courbure. Formules de Frenet 180
3. Calcul pratique du rayon de courbure 181
4. Interprétation cinématique de la courbure 183
5. Cercle de courbure ou cercle osculateur 183
6. Développée d'une courbe plane 185
7. Développantes d'une courbe plane Γ 188
B. Courbes gauches 189
1. Généralités 189
2. Trièdre de Frenet. Courbure et torsion 190
3. Etude du plan osculateur 191
4. Interprétation et calcul de R et τ 192
Résumé du chapitre 5 193
Exercices 194

6. Enveloppes **219**
A. Géométrie plane 219
1. Définitions 219
2. Enveloppe d'une famille de courbes d'équation $f(x, y, \lambda) = 0$ 219
3. Interprétation géométrique des points caractéristiques 221
4. Exemples 221
5. Enveloppe d'une famille de courbes paramétrées, dépendant d'un paramètre 225
6. Enveloppe d'une famille de courbes d'équation polaire $f(\theta, \rho, \lambda) = 0$ 226
7, Equation d'Euler d'une courbe plane 226
B. Géométrie dans l'espace 227
1. Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre 227
2. Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant de deux paramètres 228
3. Enveloppe d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre 229
4. Surface développable 229
Résumé du chapitre 6 231
Exercices 232