UNIVERSITE DE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES GRAPHES μ-POINT CRITIQUES

Par

TABLENNEHAS Kamel

Devant le jury composé de

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
M. CHELLALI	Maître de conférences, U. de Blida	Promoteur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examinateur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examinateur

Blida, 29 juin 2008

RESUME

Soit $G=(V,E)$ un graphe simple d'ordre n où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.
L'objet principal de ce mémoire est l'étude de l'effet de la contraction d'une arête ou . l'identification d'un couple de sommets sur certains paramètres de graphes, citons le couplage maximum $\beta_1(G)$, le nombre de domination connexe $\gamma c(G)$, le nombre de stabilité $\beta_0(G)$ et le nombre de domination stable $i(G)$

Etant donné un paramètre μ d'un graphe G, nous dirons que G est μ-point critique si $\mu(G_{ab})<\mu(G)$ pour toute arête $ab\in E(G)$ et G est totalement μ-point critique si $\mu(G_{ab})<\mu(G)$ pour tout couple de sommets $(a,b)\in V\times V$, où G_{ab} est le graphe obtenu par la contraction de l'arête ab ou l'identification de a et b

Dans ce mémoire, on commence par caractériser les graphes (totalement) β_1-point critique. Ensuite, on caractérise quelques classes de graphes (totalement) γc-point critiques, en particulier les graphes blocs, les graphes cactus, les graphes scindés et les graphes ayant $\gamma c(G)=2$.
Pour $\mu=\beta_0$, on établit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphes soit β_0-point critiques ainsi qu'une caractérisation de quelques graphes β_0-point critiques, à savoir les arbres et les graphes sans $K_{1,3}$
Concernant le nombre de domination stable, nous conjecturons que la classe des arbres i-point critique est équivalente à la classe des graphes i-excellent.

Enfin, on caractérise par construction les arbres ayant le nombre de domination par contraction $Ct\gamma(T)=3$ et on montre qu'il existe des graphes ayant un nombre de domination stable par contraction très grand.

ملخص

ليكن $G = (V,E)$ بيانا بسيطا برتبة n بحيث V تمثل مجموعة رؤوس و E مجموعة الأضلاع.
الهدف الرئيسي لهذا البحث هو دراسة تأثير طوي ضلع او مطابقة رئسين على بعض وسائط البيان, للذكر الازواج (كوبلاج) الاقصى, وسيط السيطرة المتصلة, وسيط السيطرة المستقلة الاقصى و الادنى التي نرمز لها على الترتيب $\beta_1(G)$, $\gamma_c(G)$, $\beta_0 G)$, $i(G)$.

ليكن μ طيءسو للبيان G, نقول ان G هو بيان μ- نقطة حرج اذا كان $\mu(G) < \mu(G_{ab})$

من اجل كل ضلع ab من اضلاع البيان G وانه μ - نقطة حرج كليا اذا كان $\mu(G) < \mu(G_{ab})$ من أجل كل ثنائية $(a,b) \in V\times V$.

بحيث G_{ab} هو البيان المتحصل عليه من جراء طوي الضلع ab او مطابقة الثنائية a و b.

في البداية نقترح تصنيفا للبيانات β_1- نقطة الحرجة (كليا), ثم نخصص تصنيفا لبعض اقسام البيانات γ_c - نقطة الحرجة (كليا), منها البيانات المتجمعة, البيانات كاكتيس, البيانات ساندي والبيانات التي تحقق $\gamma_c(G) = 2$ من اجل $\mu = \beta_0$ أعطينا شرط اللازم و الكافي حتى يكون بيان β_0 - نقطة حرج وكذالك اقترحنا بعض البيانات β_0 - نقطة الحرجة , للذكر الاشجار و البيلنات التي لا تحتوي على $K_{1,3}$.

فيما يخص وسيط السيطرة المستقلة الادنى فرضنا أن قسم الاشجار i- نقطة الحرجة هي مكافئة لقسم الاشجار i-الممتازة.

في النهاية, نقترح تصنيفا بطريقة بنائية للاشجار التي تحقق $Ct\gamma(G) = 3$ ونبرهن انه يوجد بيانات التي يكون فيها العدد $Cti(G)$ كبير جدا.

ABSTRACT

Let G=(V,E) be a simple graph of order n, with vertex set V and edge set E. In this thesis we consider the effect of edge contraction or identification of two vertices of G on some parameters of graphs, maximum matching β_1 (G), the connected domination number γ_c (G), the independance number β_0(G) and the independent domination number i(G)

For any parameter μ asssociated to a graph G, a graph G is said to be μ-dot critical if $\mu(G_{ab}) < \mu(G)$ for any two adjacents vertices a and b, and is said totally μ-dot critical if $\mu(G_{ab}) < \mu(G)$ for any two vertices a and b, where G_{ab} is the graph resulted by contracting ab or identifying a and b

We first begin by giving a characterization of (totally) β_1-dot critical graphs. Then we characterize some class of (totally) γ_c-dot critical graphs, in particular, block graphs, catus graphs, split graphs and graphs having γ_c (G)=2

For $\mu=\beta_0$, we give a necessary and sufficient condition for a graph to be β_0-dot critical, and we characterize some class of graphs β_0-dot critical, such trees and the claw free graphs

Concerning the independent domination number, we conjecture that i-dot critical trees are i-excellent trees

Finally, we give constructive characterization of trees with Ctγ(G)=3, and we show that there are graphs having large independent domination contraction number Cti(G)

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma reconnaissance à mon promoteur Monsieur Mustapha CHELLALI, Maître de conférences à l'université de Blida, ainsi que Monsieur Frédéric Maffray, directeur de Recherche au CNRS de Grenoble, d'avoir guidé certains de mes travaux

Je remercie Monsieur Mostafa BLIDIA, Professeur à l'université de Blida pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire

Je remercie également les professeurs Abdelhafid BERRACHEDI et Isma BOUCHEMAKH de l'U.S.T.H.B, qui m'ont honoré en acceptant de faire partie du jury

Je voudrais aussi remercier toute personne ayant contribué à la réalisation de ce mémoire

Je remercie enfin tous les membres de ma famille pour leur soutien et leur encouragement

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION

L'histoire de la théorie des graphes débute peut être avec les travaux d'Euler au XVIII^e siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans divers disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX^e siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments: réseau de communication réseaux routiers, cirquits électriques,...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Notre objet principal dans ce mémoire est l'étude de l'effet de la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets sur certains paramètres de graphes.

Le premier chapitre contient les définitions et les notations de base de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. On donne aussi un aperçu sur la domination dans les graphes. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre en question

Dans le deuxieme chapitre, nous donnons un bref état de l'art des graphes critiques et nous rappellons les principaux résultats existants.

Le chapitre trois est consacré à l'étude des graphes μ-point critique introduite récemment par Burton et Sumner pour le nombre de domination. Nous caractérisons les graphes β_1-point critiques. Ensuite, nous donnons une caractérisation de quelques classes de graphes (totalement) γ_c-point critiques en particulier les graphes blocs, les graphes cactus, les graphes scindés et les graphes ayant $\gamma_c(G) = 2$. Nous poursuivons l'étude en donnant une condition nécéssaire et suffisante des graphes β_0-point critiques ainsi qu'une caractérisation des arbres et les graphes sans $K_{1,3}$ β_0-point critiques.

Dans le chapitre 4, nous s'interessons au nombre de domination par contraction $Ct\gamma(G)$

introduit aussi récemment par Huang et Ming. A cet effet, nous présentons une caractérisation constructive des arbres ayant $Ct\gamma(T) = 3$ et nous montrons qu'il existe des graphes où le nombre de domination stable par contraction est trés grand.

Ce mémoire se termine par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé et sur quelques perspectives futures dans ce domaine.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons les définitions des notions utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre en question. Dans la seconde partie, nous faisons une brève présentation de la domination dans les graphes. Dans la dernière partie, nous donnons un aperçu sur l'efficacité des algorithmes et sur la complexité des problèmes.

Pour plus de détails sur les notions de la théorie des graphes et de la domination dans les graphes, nous orientons le lecteur aux références [1] et [2].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes et sous graphes

Un graphe $G = (V, E)$ non orienté est constitué d'un ensemble fini de sommets V et d'un ensemble d'arêtes E. Le nombre de sommets de G est appelé ordre de G noté généralement n. Une arête entre les sommets u et v dans V est une paire de sommets que l'on notera par uv. Si uv est une arête, alors on dit que les sommets u et v sont adjacents et que l'arête uv est incidente à ces deux sommets. Une arête de la forme uu est appelée boucle.

Un graphe G est dit simple s'il ne contient ni boucles, ni arêtes multiples. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Par exemple, la figure 1.1 montre un graphe $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $E(G) = \{ab, ac, bc, cd, de, df\}$

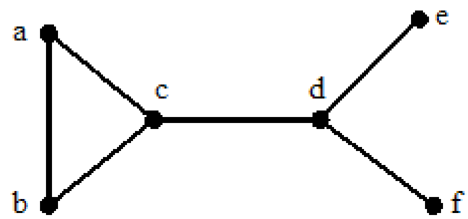

Fig.1.1: Un graphe simple $G = (V, E)$.

Pour un sous-ensemble $S \subset V$, le sous-graphe induit par S noté $G[S]$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et ses arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans S. Pour l'exemple précédent, voir le sous-graphe induit par $S = \{a, b, c\}$ dans la figure 1.2.

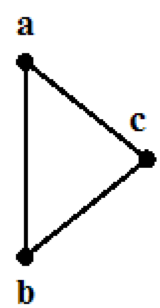

Fig.1.2: $G[S]$ le graphe induit par S.

Pour un-sous ensemble $U \subseteq E$, le graphe partiel de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U. Voir le graphe partiel de G de la figure 1.1 défini par $U = \{ac, bc, cd, de, df\}$.

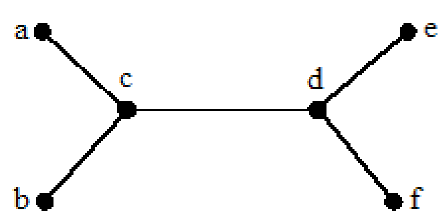

Fig.1.3: G_U Le graphe partiel défini par U

1.1.2 Voisinages

L'ensemble des sommets adjacents à un sommet v de G, qu'on note $N_G(v)$, est appelé l'ensemble des voisins de v, où **voisinage ouvert** de v dans G et $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ est appelé **le voisinage fermé** de v. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ est le voisinage ouvert et $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ est le voisinage fermé.

Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit sommet **isolé** et un sommet de degré égal à un est dit **sommet pendant** et on note par $L(G)$l'ensemble des sommets pendants de $G.$ Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support** et l'ensemble des sommets supports est noté par $S(G)$**.** On appel $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{G})$ et $\Delta(G)$ le **degré minimum** et **maximum** dans G, respectivement.

Le **voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $pn[v, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S, i-e: $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

1.1.3 Chaînes et cycles

Une **chaîne** C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1, e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la **longueur** de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés **extrémités** de la chaîne C. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite **élémentaire**. Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaine. Une chaîne **minimale** induite par n sommets et notée par P_n est une chaîne élementaire sans corde.

On appelle **cycle** dans un graphe G une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

1.1.4 Distance et diamètre

Soient u et v deux sommets d'un graphe G. On appelle **distance** entre u et v, notée $d(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. L'**excentricité** d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$ et le **diamètre** de G, noté $Diam(G)$, est égal à $\max\{exc(v) : v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé **centre**.

1.1.5 Quelques graphes particuliers

• Le **graphe complémentaire** de G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G. Voir la figure 1.4 qui illustre un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

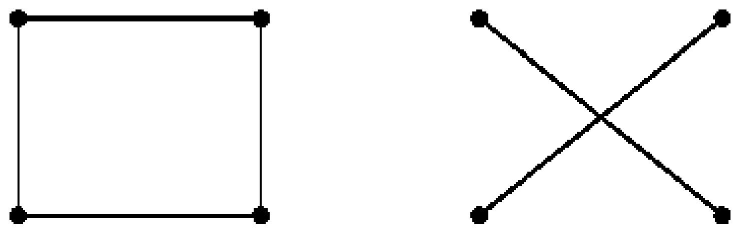

Fig.1.4: Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

• Un graphe G est dit **connexe** si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe. Un sommet x d'un graphe connexe G est appelé **sommet d'articulation** de G si le graphe $G - x$ n'est pas connexe, où $G - x$ désigne le graphe obtenu par la suppression de x de G.

• Le graphe **complet** d'ordre n, noté K_n, est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n - 1$. Ainsi deux sommets quelconques de K_n sont adjacents. Une **clique** est un sous-graphe complet d'un graphe G. Une clique de p sommets est notée $K_{p.}$

• On appelle **bloc** un ensemble de sommets A qui engendrent un sous graphe connexe, sans point d'articulation et maximal avec cette proprieté. Un bloc B est dit bloc **terminal**, si B contient au plus un point d'articulation dans G.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit un **graphe bloc**, si tout bloc de G est une clique.

• Un graphe $G = (V, E)$ est dit **cactus**, si chaque arête de G appartient au plus à un cycle. Un cactus ayant un seule cycle est dit **unicycle**. **Un arbre** est un graphe cactus connexe sans cycles.

• La **couronne** d'un graphe H noté par HoK_1, est obtenu à partir de H en reliant chaque sommet $v \in V(H)$ par un sommet pendant. Par exemple, le graphe C_4oK_1 est illustré dans la figure 1.5.

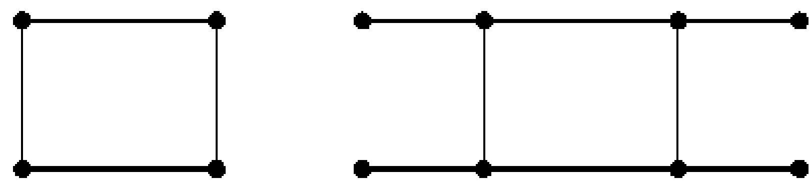

Fig.1.5: Un cycle C_4 et sa couronne C_4oK_1

• Etant donné un graphe B. Un graphe G est dit **sans** B, si le graphe G ne contient pas B comme sous-graphe induit. Par exemple si B est un triangle alors on dit que G est un graphe sans triangles.

• Un graphe $G = (V, E)$ est dit **multi − parti**. s'il existe une partition de V en k sous-ensembles $V_1, V_2, ..., V_k$ tels que chacun des $G[V_i]$ ne contient aucune arête. Si $k = 2$ le graphe G est dit **biparti.** Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impair.

• On appelle graphe **biparti complet,** un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2, uv \in E$. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe **biparti complet** est noté $K_{p,q}$. Un exemple du graphe $K_{2,3}$ est illustré dans la figure 1.6

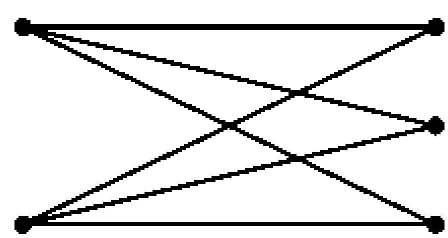

Fig.1.6: Un graphe biparti-complet $K_{2,3}$.

• Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé une **étoile** et noté $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé **centre** de l'étoile. Un exemple d'une étoile est montré dans la figure 1.7.

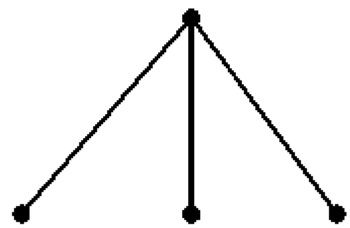

Fig.1.7: L'étoile $K_{1,3}$

• Une **double étoile** notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Voir la figure 1.8

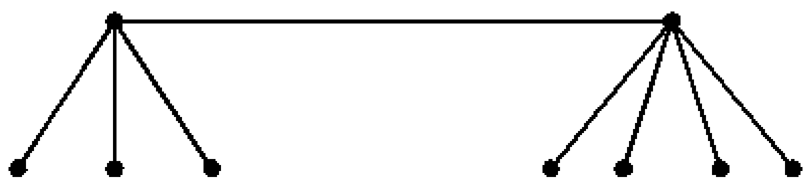

Fig.1.8: Une double étoile $S_{3,4}$.

• Un graphe **scindé** $G = (V, E)$ est un graphe dont les sommets sont partitionnés en un ensemble clique et un ensemble indépendant (stable).

1.2 Apperçu sur La domination dans les graphes

Commonçons par donner la définition des ensembles dominants dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensmble S de V est un dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé nombre de domination et est noté par $\gamma(G)$, et le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G appelé nombre de domination supérieur et est noté par $\Gamma(G)$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

• Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V, |N[v] \cap S| \geq 1$.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V, N[v] \cap S \neq \emptyset$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec, le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{eme} siecle en Inde voir [3]. En 1862 De.jaenish [4] posa le problème suivant: Determiner le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines.
Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indeterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [5].

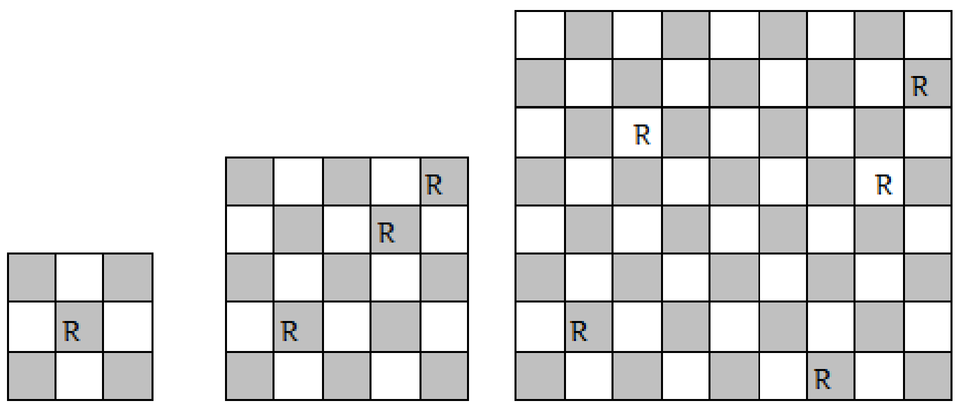

Fig.1.9:.Les reines dans un échiquier

En 1958, Claude Berge [6] donna une formulation de la domination dans les graphes oriéntés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe.
L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [7] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'aprés la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [8] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination.

On dénombre actuellement quelques 80 types de domination et plus de 2000 références dans le domaine. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([9],[3]).

1.2.1 Quelques types de domination

La notion de stabilité dans les graphes à été liée en premier aux ensembles dominants. En effet, il est facile de voir que tout ensemble stable est maximal si et seulement si c'est un dominant. Par conséquent la stabilité maximal peu être vue comme un cas particulier des ensembles dominants.
Dans ce cas, on a pour tout graphe G, $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_o(G) \leq \Gamma(G)$.

En 1978, Cockayne, Hedetniemi et Miller [10] ont donné une extension à cette chaîne d'inégalité en introduisant une nouvelle notion liée à la domination à savoir l'irrédondance défini comme suit:
Un sous ensemble $S \subseteq V$ est dit irrédondant si pour tout sommet $x \in S$ on a, $N[x] - N[S - \{x\}] \neq \emptyset$. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble irrédondant maximal noté $ir(G)$ (resp. $IR(G)$) est appelé le nombre d'irrédondance (resp. le nombre d'irrédondance supèrieure). Aussi, il est facile de voir que tout ensemble dominant minimal est un ensemble irrédondant. En conséquence, on a la célèbre chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [10] qui relie les six paramètres de domination pour tout graphe G.

$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_o(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G)$.

Les paramètres $ir(G), \gamma(G)$ et $i(G)$ (resp. $\beta_o(G), \Gamma(G)$ et $IR(G)$) sont appelés les paramètres de domination infèrieurs (resp. supèrieurs).

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On définit le nombre de domination inférieur $\gamma(G : P)$ conditionné comme étant la taille minimum d'un ensemble dominant $S \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par S satisfait la propriété P.

Remarque: $\gamma(G) \leq \gamma(G : P)$ *pour toute propriété* P *définie précédemment.*

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous resteindre dans cette partie uniquement aux types de domination qui seront étudiés, ou ayant un lien avec les types étudiés. Pour en savoir plus sur les types de domination, voir [2].

• **La domination connexe:** Un sous ensemble S de V est dit dominant connexe de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S est connexe. Le nombre de domination connexe noté par $\gamma_c(G)$ est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G.

• **La domination stable:** Un sous ensemble S de V est dit dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête. Le cardinal minimum (resp.maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp.$\beta_0(G)$) est appelé le nombre de domination stable (resp.le nombre de stabilité) de G.

• **La domination multiple:** Un sous ensemble S de V est dit dominant multiple de G si S est un dominant et pour tout sommet $v \in V - S$, v est adjacent à k sommets de S. Le nombre de domination multiple noté par $\gamma_k(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant multiple de G.

• **Le couplage:** Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. On note $\beta_1(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G.

1.2.2 Les graphes μ-excellents

Pour tout paramètre $\mu(G)$, un ensemble S de cardinal $\mu(G)$ vérifiant la propriété désirée est appelé $\mu(G)$-ensemble ou simplement μ-ensemble. On dit qu'un sommet est μ-**bon** s'il appatient à au moins un $\mu(G)$-ensemble et μ-**mauvais** sinon. Soit μg (respectivement, μb) le nombre de sommets bons (respectivement, mauvais) de G. Un graphe G est dit:

• $\mu-$ **excellent** si tout sommet de G est μ-bon (c'est à dire que $\mu g = n$ et $\mu b = 0$),

• $\mu-$ **recommandable** si $\mu g > \mu b \geq 1$,

• $\mu-$ **indésirable** (ou μ-pauvre) si $\mu g < \mu b$, et

• $\mu-$ **acceptable** (ou μ-juste) si $\mu g = \mu b$.

Ce concept a été introduit par FRICKE et al. dans [11] où ils ont posé le problème de la caractérisation des graphes $\mu-$excellent, $\mu-$recommandables, $\mu-$indésirable et μ-justes pour le paramètre $\mu(G) \in \{ir(G), \gamma(G), i(G), \beta_o(G), \Gamma(G), IR(G)\}$.

CHAPITRE 2

La notion des graphes critiques

Dans ce chapitre on examine l'effet sur le nombre de domination lorsque le graphe G est modifie en supprimant un sommet, une arête, ou en ajoutant une arête et lors de la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets.

2.1 Les graphes critiques

Dans [12] Carrington, Harary et Haynes présentent le problème en classant les graphes G en six classes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

On note par $G - v$ (respectivement $G - e$) le graphe obtenu à partir de G en suprimant le sommet v (resp, l'arête e). On utilise la terminologie suivante:

C : changement du cardinal, U : inchangement du cardinal.

V : sommet, E : arête.

R : suppression, A : ajout.

CVR : La classe des graphes G, tel que $\gamma(G - v) \neq \gamma(G)$, pour tout sommet $v \in V(G)$.

CER : La classe des graphes G, tel que $\gamma(G - e) \neq \gamma(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$.

CEA : La classe des graphes G, tel que $\gamma(G + e) \neq \gamma(G)$, pour toute arête $e \in E(\overline{G})$.

UVR : La classe des graphes G, tel que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$, pour tout sommet $v \in V(G)$.

UER : La classe des graphes G, tel que $\gamma(G - e) = \gamma(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$.

UEA : La classe des graphes G, tel que $\gamma(G + e) = \gamma(G)$, pour toute arête $e \in E(\overline{G})$.

Dans la littérature ces classes ont été étudiées chacune à part.

Il est utile de considérer une partition des sommets de G en trois classes disjointes, selon l'effet de la supression d'un sommet v sur le nombre de domination $\gamma(G)$.

Soit $V = V^o \cup V^- \cup V^+$, tels que $V^o = \{v \in V(G) : \gamma(G - v) = \gamma(G)\}$.

$V^- = \{v \in V(G) : \gamma(G - v) < \gamma(G)\}, V^+ = \{v \in V(G) : \gamma(G - v) > \gamma(G)\}$.

Les ensembles E^o, E^+ sont définis d'une manière similaire.

$E^o = \{uv \in E : \gamma(G-e) = \gamma(G)\}, E^+ = \{uv \in E : \gamma(G-e) > \gamma(G)\}$.

Exemple: *Soit $G=(V,E)$ un graphe défini dans la figure 2.1. Il admet.*

$V^o = \{a,b,c,e\}, V^- = \{f\}, V^+ = \{d\}, E^o = \{de, ef\}, E^+ = \{ad, bd, cd\}$.

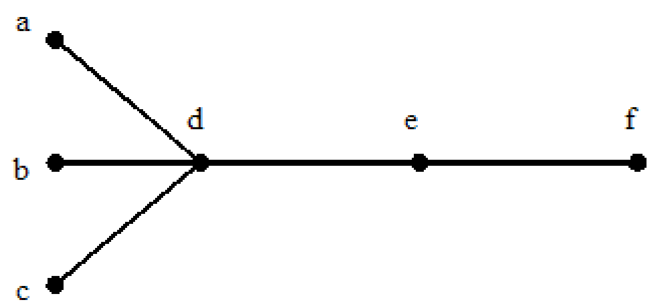

Fig.2.1: $V = V^o \cup V^- \cup V^+$ et $E = E^o U E^+$.

2.1.1 La classe des graphes CVR.

Commencons par donner les deux définitions suivantes:

Définition 2.1. *Soit $G=(V,E)$ un graphe. Un sommet $v \in V^-$ est dit sommet critique.*

Définition 2.2. *Si $V=V^-$, alors le graphe $G=(V,E)$ est dit graphe sommet-critique.*

Les graphes sommet-critiques sont inclus dans la classe CVR. Il est clair que si $G \in CVR$, alors $V = V^- \cup V^+$.

Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [13] ont montré que $V^o \neq \emptyset$ pour les arbres, on a donc le resultat suivant:.

Théorème 2.3 (Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [13])**.** *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, il existe un sommet $v \in V$ tel que $\gamma(T-v) = \gamma(T)$.*

Il est à signaler que la suppression d'un sommet peut faire augmenter $\gamma(G)$ par au moins un. Par exemple, la suppression d'un sommet centre de l'étoile $K_{1,n-1}$ augmente le nombre de domination par $n-2$, et la suppression d'un sommet pendant d'une couronne

$G = HoK_1$ pour tout graphe H non trivial fait diminuer le nombre de domination par un, mais la suppression d'un sommet de H ne fait pas changer le nombre de domination $\gamma(G)$. Pour un $\gamma(G)$-ensemble S, la suppression d'un sommet $v \in V - S$ ne fait pas augmenter le nombre de domination, par conséquent $|V^+| \leq \gamma(G)$. Il est clair que tout sommet isolé est dans V^-.

Bauer et Nieminen [13] ont caractérisé les sommets appartenant à V^+.

Théorème 2.4 (Bauer et Nieminen [13]). *Un sommet $v \in V^+$ si et seulement si :*
a) v n'est pas isolé et il est dans tout $\gamma(G)$-ensemble.
b) Il n'existe aucun sous-ensemble $S \subseteq V - N[v]$ de cardinalité $\gamma(G)$ dominant le graphe $G - v$.

Later, Sampathkuman et Neeralagi [14] ont caractérisé les sommets de l'ensemble V^- comme suit:

Théorème 2.5 (Later, Sampathkuman et Neeralagi [14]). *Un sommet $v \in V^-$ si et seulement s'il existe un $\gamma(G)$-ensemble contenant le sommet v tel que $pn[v, S] = \{v\}$.*

Par le théorème suivant Carrington, Harary et Haynes [12] ont determiné les propriétés des ensembles V^+ et V^-.

Théorème 2.6 (Carrington, Harary et Haynes [12]). *Pour tout graphe G :*
a)– Si $v \in V^+$, alors pour tout $\gamma(G)$-ensemble S, $v \in S$ et $pn[v, S]$ contient au moins deux sommets non adjacents.
b)– Si $x \in V^+$ et $y \in V^-$, alors x et y ne sont pas adjacents.
c)– $|V^o| \geq 2\,|V^+|$.
d)– $\gamma(G) < \gamma(G - v)$ pour tout sommet $v \in V$ si et seulement si $V = V^-$.
e)– Si $v \in V^-$ et v n'est pas isolé dans G, alors il existe un $\gamma(G)$-ensemble S tel que $v \notin S$.

Burton et Sumner [15] donnent une propriété des sommets pendants dans un arbre γ-excellent d'ordre $n \geq 4$.

Théorème 2.7 (Burton et Sumner [15]). *Tout sommet pendant d'un arbre γ-excellent d'ordre $n \geq 4$ est un sommet critique.*

Puisque, pour tout graphe $G \in CVR$ ayant $V = V^-$, on a $\gamma(G - v) = \gamma(G) - 1$ pour tout sommet $v \in V$. Par conséquent on déduit le corollaire suivant:

Corollaire 2.8. *Un graphe $G \in CVR$ si et seulement si pour tout sommet $v \in V$, il existe un $\gamma(G)$-ensemble S tel que $pn[v, S] = \{v\}$.*

Les graphes sommet-critiques de la classe CVR sont étudiés par Brigham, Chin et Dutton dans [16] . Ils ont établie une condition nécessaire pour qu'un graphe G ne soit pas un graphe à sommet-critique.

Théorème 2.9 (Brigham, Chin et Dutton [16]). *Si un graphe G admet un sommet critique non isolé v tel que le sous-graphe induit par $N(v)$ est complet, alors $G \notin CVR$.*

Pour les graphes ayant $\gamma(G) = 2$, Sumner et Burton [15] ont caractérisé les graphes sommets-critiques en utilisant le graphe complémentaire $\overline{G}$.

Théorème 2.10 (Sumner et Burton [15]). *Un graphe G ayant $\gamma(G) = 2$ est un graphe sommet-critique si et seulement si chaque composante de $\overline{G}$ est un K_2.*

2.1.2 La classe des graphes CER.

Il est evident que, la suppression d'une arête de G ne fait pas diminuer le nombre de domination $\gamma(G)$ et elle le fait augmenter par au plus un. Donc dans un graphe où le nombre de domination change lors de la suppression d'une arête satisfait la propriété suivante: $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$.

Les graphes de la classe CER sont appelés graphes γ^+-critiques, qui sont caractérisés par Bauer et Nieminen [13] et par Walikar et Acharya [17]. Rappellons qu'une galaxie est une forêt où chaque composante connexe est une étoile.

Théorème 2.11 ([13] [17]). *Un graphe $G \in CER$ si et seulement si G est une galaxie.*

2.1.3 La classe des graphes CEA

L'ajout d'une arête fait diminuer le nombre de domination par au moins un. Cela implique que les graphes de la classe CEA verifient la propriété suivante: $\gamma(G+e) = \gamma(G) - 1$ pour tout arête $e \in E(\overline{G})$.

Les graphes de la classe CEA sont appelés graphes arête-critiques introduits par Sumner et Blitch [18]. Voici quelques resultats concernant la classe CEA.

Théorème 2.12 (Sumner et Blitch [18]). *a)- Un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$ est dans la classe CEA si et seulement si $\overline{G}$ est une galaxie.*

Remarque: *Les graphes de la classe CEA ayant $\gamma(G) = 2$ sont les complémentaires des graphes de la classe CER.*

Par le théorème suivant Sumner a caractérisé les graphes non connexes de la classe CEA ayant $\gamma(G) = 3$ comme suit:

Théorème 2.13 (Sumner [19]). *Un graphe G non connexe ayant $\gamma(G) = 3$ est dans la classe CEA si et seulement si $G = A \cup B$, avec A est un graphe non triviale et $B \in CEA$ tel que $\gamma(B) = 2$ ou A est un graphe complet et B est un graphe complet diminuer d'une arête.*

La difficulté de la caractérisation des graphes CEA tel que $\gamma(G) \geq 3$, a pausé Sumner et Blitch à étudier les propriétés des graphes CEA. Ils ont montré que $V^+ = \emptyset$ pour tout graphe $G \in CEA$.

Théorème 2.14 (Sumner et Blitch [18]). *Si $G \in CEA$, alors $V = V^- \cup V^o$.*

Favaron et al [20] ont donné quelques propriétés des sommets d'un graphe de la classe CEA.

Théorème 2.15 (Favaron [20]). *Si un graphe $G \in CEA$, alors le sous-graphe induit par l'ensemble V^o est complet.*

Haynes dans [2] donne une borne inférieure au cardinal de l'ensemble V^-.

Théorème 2.16 (Haynes [2]). *Si un graphe connexe $G \in CEA$ n'est pas complet, alors $|V^-| \geq \gamma(G)$.*

2.1.4 La classe des graphes UVR.

Il est clair que si le nombre de domination ne change pas quand un sommet quelconque est supprimé, alors $V = V^o$. Par le théorème suivant Carrington [12] donne une caractérisation des graphes de la classe UVR.

Théorème 2.17 (Carrington [12])**.** *Un graphe $G \in UVR$ si et seulement si G n'admet pas de sommet isolé et pour chaque sommet $v \in V$, on a:*
a)- Il existe un $\gamma(G)$-ensemble S tel que $v \notin S$ et pour chaque $\gamma(G)$-ensemble S' contenant v, l'ensemble $pn[v, S']$ contient au moins un sommet de $V - S'$ ou bien.
b)- v est dans toute $\gamma(G)$-ensemble et il existe un sous-ensemble de $\gamma(G)$ sommets dans $G - N[v]$ qui domine le graphe $G - v$.

2.1.5 La classe des graphes UER

Waliker et Acharya [17] ont donné le résultat suivant pour les graphes de la classe UER:

Théorème 2.18 (Waliker et Acharya [17])**.** *Un graphe $G \in UER$ si et seulement si pour chaque arête $e = uv \in E$, il existe un $\gamma(G)$-ensemble S tel que une de ces conditions est vérifiée.*
a)- $u, v \in S$.
b)- $u, v \in V - S$.
c)- $u \in S$ et $v \in V - S$ implique $|N(v) \cap S| \geq 2$.

2.1.6 La classe des graphes UEA

La classe UEA est la classe des graphes dont le nombre de domination ne change pas lors de l'ajout d'une arête arbitraire. Carrington a donné la caractérisation suivante:

Théorème 2.19 (Carrington [12])**.** *Un graphe $G \in UEA$ si et seulement si $V^- = \emptyset$.*

Exemple: *Les cycles C_n tel que $n = 3k$ sont dans la classe UEA.*

2.1.7. La relation entre les différentes classes

Dans [2] et [12] T.W.Haynes et Henning donnent les remarques suivantes:

Observation 2.20. *Preuve.*

Proposition 2.21. *a)- $G \in UVR$ si et seulement si $V = V^o$.*

b)- Si $G \in UER$, alors $V = V^o \cup V^- \cup V^+$.

c)- $G \in UEA$ si et seulement si $V = V^o \cup V^+$.

d)- $G \in CVR$ si et seulement si $V = V^-$.

e)- Si $G \in CER$, alors $V = V^o \cup V^- \cup V^+$ avec $V^- = \{v : v$ est un sommet isolé$\}$.

f)- Si $G \in CEA$, alors $V = V^o \cup V^-$.

□

Proposition 2.22. *a)- Si $G \in UVR$, alors $G \in UEA$.*

b)- Un graphe $G \in CER \cap UVR$ si et seulement si G est un mK_2, $m \geq 2$.

c)- $G \in (CER \cap UEA) - UVR$ si et seulement si G est une galaxie sans sommet isolé et au moins une étoile ayant plus de deux sommets.

d)- Un graphe $G \in CER - (UEA \cup CEA)$ si et seulement si G est une galaxie ayant au moins un sommet isolé et au moins deux arêtes.

e)- Si $G \in CER \cap CEA$ si et seulement si G est d'ordre $n \geq 3$ ayant une arête.

Proposition 2.23. *Si $G \in CVR$, alors $G \in UER$.*

Le diagramme de la Fig.2.2, illustre la relation entre les six classes de graphes.

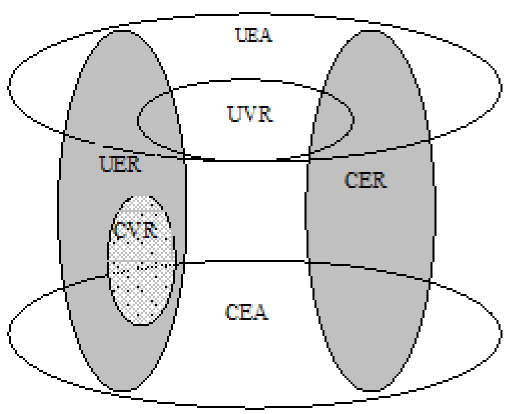

Fig.2.2

2.2 Les graphes γ-point critiques

Dans [15] Burton et Sumner ont introduit une nouvelle notion des graphes critiques sur le nombre de domination.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, pour un couple de sommets (u, v) de G, on note par G_{uv} le graphe obtenu à partir de G en identifiant les deux sommets u et v. On note aussi par $\overline{uv}$ le nouveau sommet obtenu. Donc le graphe G_{uv} est obtenu à partir de G en supprimant les sommets u et v et en ajoutant le sommet $\overline{uv}$ qui est adjacent à tous les sommets adjacents à u ou v.

Définition 2.24. *Un graphe $G = (V, E)$ est γ-point critique si $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$ pour toute arête $uv \in E$.*

Définition 2.25. *Un graphe $G = (V, E)$ est totalement γ-point critique si $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$ pour tout couple de sommets $(u, v) \in V \times V$.*

Il est clair que l'identification de deux sommets (adjacents ou non adjacents) fait diminuer $\gamma(G)$ par au plus un, par conséquent si G est (totalement) γ-point critique, alors $\gamma(G_{uv}) = \gamma(G) - 1$.

Sumner et Burton [15] commencent par donner les lemmes fondamentaux suivants:.

Lemme 2.26. *Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et $a, b \in V(G)$, alors $\gamma(G_{ab}) < \gamma(G)$ si et seulement si il existe un $\gamma(G)$-ensemble S tel que $a, b \in S$ ou bien a ou b est critique.*

Lemme 2.27. *Si G est un graphe ayant $\gamma(G) = k \geq 2$, alors G est γ-point critique (resp. totalement γ-point critique) si et seulement si tout couple de sommets adjacent non critique appartient à un même $\gamma(G)$-ensemble.*

Lemme 2.28. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $v \in V^-$. Alors tout sommet appartient à $N[v]$ est un sommet γ-bon.*

Définition 2.29. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit critiquement dominé si l'ensemble V^- est un dominant de G.*

Théorème 2.30 (Sumner et Burton [15])**.** *Pour tout graphe G,*

1. *Si G est γ-point critique, alors G est un graphe γ-excellent.*
2. *Si G est critiquement dominé, alors G est γ-excellent.*

Comme conséquence des résultats précédents on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.31. *G est un graphe (resp. totalement) γ-point critique si et seulement si chaque composante de G est (resp. totalement) γ-point critique.*

Définition 2.32. *Un graphe G est dit point-distingué si chaque deux sommets distincts ont des voisinages fermés différents.*

Théorème 2.33 (Sumner et Burton [15])**.** *Pour un graphe $G = (V, E)$, si $u, v \in V(G)$ tel que $N[u] = N[v]$, alors $\gamma(G_{uv}) = \gamma(G)$.*

Il en résulte que tout graphe γ-point critique est un graphe à point distingué.

Définition 2.34. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit à arête-critique si $\gamma(G - e) < \gamma(G)$ pour toute arête $e \in E$.*

Il est clair que d'aprés le lemme 2.27 on déduit que tout graphe sommet-critique est un graphe (totalement) γ-point critique et par le théorème suivant, Burton et Sumner montrent que les graphes à arête-critique point distingués sont totalement γ-point critiques.

Théorème 2.35 (Burton et Sumner [15])**.** *Tout graphe point-distingué à arête-critique est totalement γ-point critique.*

Soient A et B deux graphes disjoints et a et b deux sommets de A et B respectivement. Brigham et al [16] ont défini le graphe coalition de A et B par rapport aux sommets a et b, comme étant le graphe obtenu par l'identification des sommets a et b. Pour un exemple de coalition voir figure 2.3.

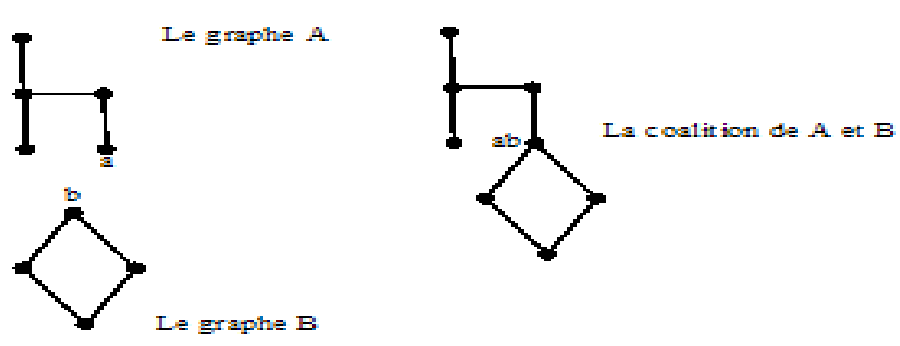

Fig.2.3: La coalition des graphes A et B par rapport aux sommets a et b

Les même auteurs ont montré dans [16] qu'un graphe est à sommets critiques si et seulement si A et B sont des graphes à sommets critiques.

Le théorème suivant généralise ce résultat.

Théorème 2.36 (Brigham [16]). *Soient A et B deux graphes disjoints avec $\gamma(A) = n, \gamma(B) = m$, et a et b deux sommets critiques de A et B respectivement. Soit G le graphe coalition obtenu par l'identification de a et b, alors.*

1. $\gamma(G) = n + m - 1$.

2. $V^-(G) = (V^-(A) \cup V^-(B) - \{a, b\}) \cup \{\overline{ab}\}$.

3. G est γ-point critique si et seulement si A et B sont γ-point critiques.

4. G est un graphe sommet critique si et seulement si A et B sont des graphes sommets-critiques.

5. G est un graphe critiquement dominé si et seulement si A et B sont des graphes critiquement dominés.

6. G est un graphe γ-excellent si et seulement si A et B sont des graphes γ-excellents.

Observation 2.37.

Proposition 2.38. *Si S est un $\gamma(G)$-ensemble, alors $S \cap A$ ou bien $(S \cap A) \cup \{a\}$ est un $\gamma(A)$-ensemble.*

2.2.1 Les graphes γ-point critiques ayant $\gamma(G) = 2$

La structure des graphes γ-point critiques ayant $\gamma(G) = 2$ est caractérisée par Burton et Sumner [15] comme suit:

Lemme 2.39. *Soit G un graphe tel que $\gamma(G) = 2$, alors les sommets critiques de G sont exactement ceux qui sont adjacents aux sommets pendants dans $\overline{G}$.*

Théorème 2.40 (Burton et Sumner [15]). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$ avec $\gamma(G) = 2$. Alors G est γ-point critique si et seulement si $\overline{G}$ n'est pas complet, et chaque composante de $\overline{G}$ est soit une couronne soit une clique K_p, $p \geq 2$.*

Le théorème suivant caractérise les graphes totalement γ-point critiques ayant $\gamma(G) = 2$.

Théorème 2.41 (Burton et Sumner [15]). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma(G) = 2$. Alors G est totalement γ-point critique si et seulement si chaque composante de $\overline{G}$ est une couronne*

.

2.2.2 Les sommets critiques dans un graphe γ-point critique

Burton et Sumner ont donné les propriétés des sommets critiques dans un graphe γ-point critique.

Théorème 2.42 (Burton et Sumner [15]). *Un graphe 2-γ-point critique G est sans sommets critiques si et seulement si G est un graphe multi-partis complet tel que chaque partie contient au moins trois sommets.*

Lemme 2.43. *Si $G = (V, E)$ est un graphe γ-point critique et $N[v] \subset N[u]$, alors $v \in V^-$.*

Corollaire 2.44. *Tout sommet pendant d'un graphe γ-point critique est un sommet critique.*

Le résultat suivant montre que tout graphe γ-point critique ayant $\gamma(G) = 3$ et $diam(G) \geq 4$ contient un sommet critique.

Théorème 2.45 (Burton et Sumner [15]). *Un graphe $G = (V, E)$ γ-point critique ayant $\gamma(G) = 3$ et $V^- = \emptyset$ admet $diam(G) \leq 3$.*

Le théorème qui suit montre que les graphes G totalement 3-γ-point critique ayant $diam(G) \geq 3$ contient un sommet critique.

Théorème 2.46 (Burton et Sumner [15]). *Si un graphe connexe G totalement γ-point critique est sans sommets critiques, alors $diam(G) \leq 2$.*

2.2.3 Les arbres γ-point critiques

Dans [21] Burton et Sumner ont montré que les arbres γ-excellent, critiquement dominés, à dominant pendant, crucialement dominés et γ-point critiques sont équivalents.

Théorème 2.47 (Burton et Sumner [21]). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 4$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. T est un arbre γ-point critique.

2. T est critiquement dominé.

3. T est γ-excellent.

Le théorème suivant caractérise les arbres totalement γ-point critiques.

Théorème 2.48 (Burton et Sumner [21]). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 4$, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. T est totalement γ-point critique.

2. Les sommets pendants d'un arbre forment un $\gamma(T)$-ensemble.

3. T est une couronne d'un arbre.

Définition 2.49. *Un ensemble S est dit dominant restreint de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à un sommet de S et à un sommet de $V - S$, le cardinal minimum d'un dominant restreint est noté par $\gamma_r(G)$.*

Définition 2.50. *Un dominant de G contenant tous les sommets pendants est dit dominant pendant, le cardinal minimum d'un dominant pendant est noté par $\gamma_e(G)$.*

Dans [22] Hattingh et Henning donnent le résultat suivant:

Théorème 2.51 (Hattingh et Henning [22]). *Pour un arbre T, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\gamma(T) = \gamma_r(T)$.

2. $i(T) = \gamma_e(T)$.

3. $i(T) = \gamma_r(T)$.

Définition 2.52. *Un ensemble S est dit 2-**packing** dans G si chaque deux sommets $x, y \in S, d(x, y) \geq 3$.*

Définition 2.53. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit crucialement dominé si l'ensemble V^- est un $\gamma(G)$-ensemble.*

Les résultats obtenus sont regroupés dans le théorème suivant:

Théorème 2.54 (Burton et Sumner [21]). *Soit T un arbre, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\gamma(T) = \gamma_r(T)$.

2. $i(T) = \gamma_e(T)$.

3. $i(T) = \gamma_r(T)$.

*4. Tout $\gamma_e(G)$-ensemble S est un 2-**Packing**.*

*5. Certain $\gamma_e(G)$-ensemble S est un 2-**Packing**.*

6. T est critiquement dominé.

7. T est crucialement dominé.

8. T est γ-excellent.

9. T est γ-point critique.

CHAPITRE 3

LES GRAPHES μ-POINT CRITIQUES

3.1. Introduction

Etant donné un paramètre μ d'un graphe G, nous disons que G est μ-point critique si la contraction de deux sommets adjacents quelconque fait diminuer $\mu(G)$, et G est totalement μ-point critique si l'identification d'un couple de sommets quelconque fait diminuer $\mu(G)$. Si u et v sont deux sommets de G (u et v peuvent être adjacents où non), alors on note par G_{uv} le graphe obtenu par la contraction de l'arête uv ou l'identification de u et v. Le nouveau sommet obtenu dans G_{uv} est noté par $\overline{uv}$. Rappelons que la notion des graphes μ-point critiques a été introduite par Burton et Sumner [15] pour $\mu = \gamma$.

Dans ce chapitre, on va traiter les graphes (totalement) μ-point critiques pour d'autres paramètres.

3.2 Les graphes β_1-point critiques

Avant de présenter les résultats principaux, nous donnons la définition suivante.

Définition 3.1. *Un couplage M est dit parfait dans $G = (V, E)$ si tout sommet de V est incident à une arête de M, c'est-à-dire si $\beta_1(G) = \frac{|V|}{2}$.*

Définition 3.2. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit β_1-point critique si $\beta_1(G_{uv}) < \beta_1(G)$ pour toute arête $uv \in E$.*

Définition 3.3. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit totalement β_1-point critique si $\beta_1(G_{uv}) < \beta_1(G)$ pour toute paire de sommets $u, v \in V$.*

Nous commençons par donner deux propositions.

Proposition 3.4. *Si $G = (V, E)$ est un graphe alors pour toute arête $uv \in E$,*
$\beta_1(G) - 1 \leq \beta_1(G_{uv}) \leq \beta_1(G)$

Preuve. Soit u, v deux sommets adjacents de G. Il est clair que tout couplage maximum du graphe G_{uv} est un couplage de G et par conséquent $\beta_1(G) \geq \beta_1(G_{uv})$. Soit M un couplage maximum de G.

Cas.1 Au plus l'un de u et v est saturé par le couplage M, alors M reste un couplage dans G_{uv}. D'ou $\beta_1(G_{uv}) \geq \beta_1(G) \geq \beta_1(G) - 1$.

Cas.2 u et v sont saturés par le couplage M. Si $uv \in M$, implique $M - \{uv\}$ est un couplage de G_{uv}. Maintenant si $uv \notin M$ alors il existe deux arêtes $uu', vv' \in M$ dans ce cas $(M - \{uu', vv'\}) \cup \{\overline{uv}u'\}$ est un couplage de G_{uv}. Dans les deux cas $\beta_1(G_{uv}) \geq \beta_1(G) - 1$. □

Proposition 3.5. *Si $G = (V, E)$ est un graphe β_1-point critique alors*
$\beta_1(G_{uv}) = \beta_1(G) - 1$ *pour toute arête $uv \in E$.*

Preuve. conséquence de la proposition 3.4. □

Nous présentons ci-dessous une caractérisation des graphes (totalement) β_1-point critiques.

Théorème 3.6. *Soit un graphe sans sommets isolés, les proprietés suivantes sont équivalentes:*

$i)$- G est totalement β_1-point critique.

$ii)$- G est β_1-point critique.

$iii)$- G possède un couplage parfait.

Preuve. (i) implique (ii) : découle de la définition 3.3.

(ii) implique (iii) : On suppose que G n'admet pas un couplage parfait. Alors il existe un sommet x non saturé par le couplage M. Puisque G est sans sommets isolés, alors x est adjacent à un sommet y saturé par le couplage M. Par conséquent M est un couplage maximum du graphe G_{xy}, contradiction.

(iii) implique (i) : Puisque le graphe G admet un couplage parfait. Il est clair alors que pour chaque couple de sommets u et v le graphe obtenu G_{uv} est d'ordre $n - 1$.

Donc $\beta_1(G_{uv}) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2} = \beta_1(G)$ et par conséquent $\beta_1(G_{uv}) < \beta_1(G)$. D'ou G est totalement β_1-point critique. □

3.3 Les graphes γ_c-point critique

Nous rappelons la définition d'un ensemble dominant connexe.

Définition 3.7. *Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble dominant connexe (***edc***) si S est ensemble dominant et le sous graphe induit par les sommets de S est connexe. Le nombre de domination connexe $\gamma_c(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G.*

Définition 3.8. *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est γ_c-point critique (**dcp-critique**) si $\gamma_c(G_{ab}) < \gamma_c(G)$ pour toute arête $ab \in E$.*

Définition 3.9. *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est totalement γ_c-point critique (**tdcp-critique**) si $\gamma_c(G_{ab}) < \gamma_c(G)$ pour tout couple de sommets $(a, b) \in V \times V$.*

3.3.1 Quelques résultats préliminaires

Proposition 3.10. *Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $a \in V$. Si a est un sommet d'articulation de G alors a appartient à tout γ_c- ensemble de G.*

Proposition 3.11. *Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $a, b \in V$.*
i)− Si $ab \in E$ alors $\gamma_c(G) - 1 \leq \gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$.
ii)− Si $ab \notin E$ alors $\gamma_c(G) - 3 \leq \gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$.

Preuve. Il est clair que tout $\gamma_c(G)$-ensemble est un $\gamma_c(G_{ab})$-ensemble, par conséquent $\gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$. Soit D un $\gamma_c(G_{ab})$-ensemble. On suppose que $ab \in E$. Si $\overline{ab} \notin D$, alors D, ou $D \cup \{b\}$ est un dominant connexe de G et par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. Si $\overline{ab} \in D$, alors $\{a, b\} \cup D - \left\{\overline{ab}\right\}$ est un dominant connexe de G, et par conséquant $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. Dans les deux cas on a $\gamma_c(G) - 1 \leq \gamma_c(G_{ab}) \leq \gamma_c(G)$. On suppose maintenant que $ab \notin E$. Si $\overline{ab} \notin D$, alors au moins un sommet de a ou b, disons b est adjacent à D. Puisque G est un graphe connexe, alors le sommet a admet soit un voisin dans D soit il est adjacent à un sommet $w \in V - D$ qui est adjacent à D. Alors D ou $D \cup \{w\}$ est un dominant connexe de G, respectivement. D'ou $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. Finalement on suppose que $\overline{ab} \in D$. Si le sous-graphe induit par $\{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ est connexe, alors $\{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ est un dominant connexe de G et par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 1$. On suppose maintenant que $D' = \{a, b\} \cup D - \{\overline{ab}\}$ n'est pas connexe. Alors il existe deux composantes connexes H_a et H_b telles que $a \in H_a$ et $b \in H_b$. Comme G est un graphe connexe, alors soit il existe un sommet $z \in V - D$ adjacent à H_a et H_b ou bien ils existe deux sommets adjacents $x, y \in V - D$ tel que x est adjacent à H_a et y est adjacent à H_b, dans ce cas $D' \cup \{z\}$ ou $D' \cup \{x, y\}$ est un dominant connexe de G. D'ou $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab}) + 3$. □

Remarque: *L'inégalite gauche de la proposition 3.11 (ii) est atteinte pour la chaine P_8 en identifiant les deux sommets supports, voir figure 3.1.*

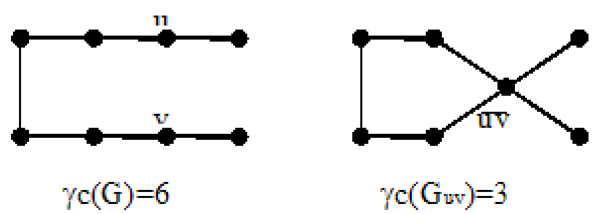

Fig 3.1

Proposition 3.12. *Soient C un cycle sans corde du graphe G et D un $\gamma_c(G)$-ensemble. Si C est un bloc alors D contient au moins $|V(C)| - 2$ sommets de C, plus précisément:*

- D contient $|V(C)|$ sommets de C si et seulement si tout sommet de C est d'articulation dans G.

- D contient $|V(C)| - 1$ sommets de C si et seulement si le cycle C contient au moins un sommet de degré deux dans G et l'ensemble de ses sommets de degré deux est un ensemble indépendant.

- D contient $|V(C)| - 2$ sommets de C si et seulement si le cycle C contient deux sommets adjacents de degré deux dans G.

- Si un sommet x de C n'appartient à aucune $\gamma_c(G)$-ensemble alors soit x est l'unique sommet de degré deux dans C, soit C contient éxactement deux sommets adjacents de degré deux, soit il existe trois sommets consécutifs de degré deux dans C tel que x soit le milieu et le reste des sommets de degré deux sont indépendants.

La proposition suivante est une condition nécéssaire pour les graphes γ_c-point critiques contenant des blocs.

Proposition 3.13. *Soit H un bloc d'un graphe* ***dcp-critique.*** *Alors:*

1) *Si H est un cycle, alors*

- Tout sommet support de H est de degré trois.

- Si H contient un support, alors $A_H = \{x \in H : d_G(x) = 2\}$ est un ensemble indépendant de cardinal différent de un. De plus, si $|A_H| \geq 2$, alors tout sommet support est adjacent à un sommet de A_H.

- Si H ne contient aucun support, alors le sous graphe induit par A_H ou bien ne contient aucune arête ou bien il contient au moins deux arêtes. De plus si A_H est un ensemble indépendant alors $|A_H| \neq 1$.

2) *Si H est une clique, alors*

- Si H est un bloc terminale, alors $H = K_2$.

- Les blocs terminaux n'ont pas de sommets en communs.

- Si H n'est pas un bloc terminal, alors tout sommet de H est un sommet d'articulation dans G.

Preuve. (1) Supposons que H est un cycle. Soit x un sommet support et x' un sommet pendent adjacent à x. Si $d_G(x) \geq 4$, alors le sommet $\overline{xx'}$ est un sommet d'articulation dans le graphe $G_{xx'}$ et tout $\gamma_c(G_{xx'})$ -ensemble est un dominant connexe de G. Par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, contradiction.
Supposons que A_H n'est pas un ensemble indépendant et soient a et b deux sommets adjacents de A_H. Il est clair que tout $\gamma_c(G_{xx'})$-ensemble D contient éxactement $|V(H)|-2$ sommets de H tel que $\overline{xx'} \in D$ et $(D \cup \{x\}) - \{\overline{xx'}\}$ est un dominant connexe de G, par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, d'où contradiction.
Supposons maintenant que $|A_H| = 1$. Alors le reste des sommets de H sont d'articulations.

Donc par la contraction de l'unique sommet de A_H avec un des deux voisins, on peut voir clairement que tout dominant connexe du graphe obtenu est un dominant connexe du graphe G, par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, d'ou la contradiction. On suppose que $|A_H| \geq 2$ et que x n'est adjacent à aucun sommet de A_H. Alors les deux voisins de x dans H sont des sommets d'articulations et donc $A_H \cup \{\overline{xx'}\}$ est un ensemble indépendant, par conséquent tout $\gamma_c(G_{xx'})$-ensemble D contient éxactement $|V(H)| - 1$ sommets de H avec $\overline{xx'} \in D$ mais $(D \cup \{x\}) - \{\overline{xx'}\}$ est un dominant connexe de G, par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{xx'})$, contradiction.

On suppose maintenant que H ne contient aucun sommet support et le sous graphe induit par A_H contient éxactement une arête, disant ab. Alors tout $\gamma_c(G_{ab})$-ensemble D contient tous les sommets du cycle résultant sauf un sommet disant $\overline{ab}$ dans ce cas D est un dominant connexe de G, par conséquent $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G_{ab})$, d'ou la contradiction. Enfin on suppose que $A_H = \{a\}$. Alors le reste des sommets de H sont des sommets d'articulation, par conséquent le dominant connexe minimum du graphe obtenu à partir de la contraction du sommet a et un des deux sommet voisins est un dominant connexe de G, contradiction.

(2) Soit H une clique. Supposons que H est un bloc terminal d'ordre au moins trois, alors en contractant une arête de H, le dominant connexe minimum du graphe résultant est un dominant connexe de G, contradiction. Supposons maintenant que H_1 et H_2 sont deux blocs terminaux ayant des sommets en communs, alors la contraction d'une arête de H_1 ne diminuéra pas $\gamma_c(G)$. On suppose que H est un bloc non terminal et y est un sommet qui n'est pas d'articulation. Alors contracter l'arête reliant y et un sommet de ces voisins dans H ne fait pas diminuer $\gamma_c(G)$. □

3.3.2 Les graphes (t)dcp-critiques

♦ **Les graphes 2-connexes.**

Comme $\gamma_c(G) \geq 1$ pour tout graphe G connexe, il est clair qu'il n'existe aucun graphe 1- γ_c-point critique. A partir de là on considère seulement les graphes tels que $\gamma_c(G) \geq 2$.

Définition 3.14. *Un graphe G d'ordre $n \geq 3$ est 2-**connexe** si et seulement si G est* *connexe et il n'admet pas de sommet d'articulation.*

La proposition suivante est une condition suffisante pour les graphes 2-connexes **tdcp-point critiques**.

Proposition 3.15. *Soit G un graphe 2-connexe tel que $\gamma_c(G-v) < \gamma_c(G)$ pour tout sommet v. Alors G est **tdcp-critiques.***

Preuve. Soient u et v deux sommets quelconques de G et soit S un $\gamma_c(G-v)$-ensemble.
Si $u \notin S$, alors u admet un voisins dans S et dans ce cas S est un ensemble dominant connexe de G_{uv}, par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.
Si $u \in S$, alors u et v ne sont pas adjacents car sinon S est un dominant de G de taille inférieur à $\gamma_c(G)$, et par conséquent $\{\overline{uv}\} \cup S - \{u\}$ est un dominant connexe de G_{uv}, d'ou $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$. □

Remarque: *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie pour tout graphe 2-connexe. Puisque si on considére le graphe G **tdcp-point critique** obtenu à partir des deux triangles abc et def en ajoutant deux sommets g, h et les arêtes ag, gf, cd, he et bh. On a $\gamma_c(G-v) = \gamma_c(G)$ pour $v = d$, voir figure 3.2.*

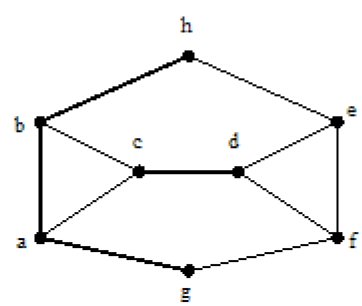

Fig 3.2

♦ Les graphes blocs

Théorème 3.16 ([23])**.** *Soit G un graphe bloc connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*a) G est un graphe **tdcp-critique**.*

*b) G est un graphe **dcp-critique**.*

c) Pour tout bloc H :

- Si H est un bloc terminal, alors $H = K_2$.

- Si H n'est pas un bloc terminal, alors tout sommet de H est d'articulation dans G.

- Tout sommet support appartient éxactement à deux blocs.

Preuve. (a) implique (b) : découle de la définition d'un graphe **tdcp-critique**.
(b) implique (c) : d'aprés la proposition 3.13, on a les deux points de (c). Pour le troisième point on suppose que u est un support appartenant à trois blocs et v est un sommet pendant adjacent à u. Alors le sommet $\overline{uv}$ est dans tout $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble D, d'où $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{u\}$ est un $\gamma_c(G)$ -ensemble, contradiction.
(c) implique (a) : Il est clair que le nombre dominant connexe d'un graphe bloc qui satisfait le point (c) est $\gamma_c(G) = n - |L(G)|$. Soient u et v deux sommets du graphe G.

Cas.1. $uv \in E(G)$.

On suppose que u et v sont de degré au moins deux, alors $L(G) = L(G_{uv})$, et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) \leq (n-1) - L(G_{uv}) < n - |L(G)| = \gamma_c(G)$. Supposons maintenant que v est le sommet pendant adjacent à u. Comme u est un support appartient à deux blocs, alors le sommet $\overline{uv}$ appartient à un seul bloc dans le graphe G_{uv}. Soit D un $\gamma_c(G)$ -ensemble, alors $u \in D$ et $D - \{u\}$ est un $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble.

Cas.2. $uv \notin E(G)$.

Supposons que u et v ne sont pas des sommets pendants. Alors $V(G_{uv}) - L(G_{uv})$ est un ensemble dominant connexe de G_{uv} de taille $(n-1) - |L(G_{uv})| < \gamma_c(G)$. Maintenant on suppose qu'un sommet de u où v est un sommet pendant, disons le sommet v et soit w son sommet support. Alors pour tout $\gamma_c(G)$ -ensemble D, $D - \{u\}$ est un $\gamma_c(G_{uv})$-ensemble. Dans les deux cas $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$, d'ou G est **tdcp**-critique. □

♦ Les arbres.

Il s'en déduit du théorème 3.16 le corollaire suivant:

Corollaire 3.17. *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 4$. Les assertions suivantes sont équiva-*

lentes:

a) T *est un arbre* ***tdcp-critique.***

b) T *est un arbre* ***dcp-critique.***

c) *Tout sommet support de* T *est de degré deux.*

♦ Les graphes scindés.

Une caractérisation des graphes scindés **(t)dcp-critiques** est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.18 ([23])**.** *Soit* G *un graphe scindé connexe.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) G *est un graphe* ***tdcp-critique.***

ii) G *est un graphe* ***dcp-critique.***

iii) G *est une couronne d'un graphe complet non trivial.*

Preuve. (i) implique (ii) et (iii) implique (i) sont évidents.
(ii) implique (iii): Soit G un graphe scindé connexe, partionné en une clique C et un stable I. Soit D un $\gamma_c(G)$ -ensemble quelconque. Il est clair que $D \subseteq C \neq \emptyset$ et donc $|C| \geq 2$. Puisque le sous graphe induit par D est une clique, chaque sommet $v \in D$ admet au moins un sommet privé dans $V - D$, et donc dans I. On suppose qu'un sommet $v \in D$ admet deux sommets privés dans $V - D$, alors en contractant l'arête reliant un sommet privé et le sommet v ne diminuera pas $\gamma_c(G)$, par conséquent chaque sommet $v \in D$ admet un unique sommet privé dans $V - D$. On suppose maintenant qu'il existe un sommet $y \in I$ adjacent à au moins deux sommets de D, alors en contractant une arête quelconque reliant le sommet y et un sommet de $N(y) \cap D$ ne diminuera pas $\gamma_c(G)$, par conséquent I constitue l'ensemble des sommets privés de D. De plus la contraction d'une arête qui existe dans $C - D$, ne changera pas $\gamma_c(G)$ en cardinal, d'ou $|C - D| \leq 1$. On suppose que $C - D = \{z\}$ et que le sommet z est adjacent à deux sommets x' et y' de I, alors l'ensemble $D' = \{z\} \cup D - \{x, y\}$ tel que x et y sont deux sommets de D

adjacents à x' et y' respectivement est un dominant connexe de G de cardinal $|D|-1$, donc le sommet z a un voisin unique dans I. Mais dans ce cas en contractant l'arête joignant le sommet z à un sommet quelconque de D ne diminue pas $\gamma_c(G)$, contradiction. Par conséquent $C - D = \emptyset$. Alors tout sommet de I est un sommet pendant et par conséquent G est une couronne de C. □

♦ **Les graphes cactus.**

Les graphes cactus **dcp-critiques** sont caractérisés par le théorème suivant.

Théorème 3.19 ([23]). *Soit G un graphe cactus connexe. Alors G est* ***dcp-critique*** *si et seulement si G vérifie les conditions suivantes:*

i) Pour tout cycle C de G, tout sommet support appartenant à C est de degré trois et tout support n'appartenant à aucun cycle est de degré deux.

ii) Pour tout cycle C. Si C contient un sommet support, alors

- $A_C = \{x \in C : d_G(x) = 2\}$ est un ensemble indépendant de cardinal différent de un.

- Si $|A_C| \geq 2$, alors tout sommet support de C est adjacent à un sommet de A_C.

iii) Pour tout cycle C de G. Si C ne contient pas de sommet support,. alors le sous-graphe induit par A_C soit ne contient aucune arête soit il contient au moins deux arêtes. De plus si A_C est un ensemble indépendant, alors $|A_C| \neq 1$.

Preuve. On suppose que G est un graphe **dcp-critique**. Par la proposition 3.13 les trois points sont vérifiés sauf la deuxième partie du point (i). Soit u un sommet support de degré au moins trois et v un sommet pendant adjacent à u. Alors le sommet $\overline{uv}$ est un sommet d'articulation dans le graphe G_{uv} et par conséquent tout $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble est un dominant connexe de G. D'ou $\gamma_c(G_{uv}) \leq \gamma_c(G)$, contradiction.

On suppose maintenant que G satisfait les points $(i), (ii)$ et (iii) et soient x, y deux sommets adjacents dans G et D un $\gamma_c(G)$ -ensemble.

Cas 1. Il n'existe aucun cycle C contenant x et y à la fois. Il est clair qu' un sommet de x ou y est un sommet d'articulation. On suppose que x et y sont des sommets d'articulations, alors par l'observation 3.10, ils appartiennent à D et $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy}. Par conséquent $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$.

On suppose maintenant que le sommet x n'est pas d'articulation, cela implique que x est un sommet pendant. Par conséquent y est un sommet support. Dans ce cas si y n'appartient à aucun cycle, alors y est un support de degré deux. D'ou $y \in D$ et $D - \{y\}$ est un dominant connexe de G_{xy}, et donc $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$.

Cas 2. Il existe un cycle C contenant x et y. Supposons que les deux sommets sont d'articulations. Alors $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy}, par conséquent $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$. Supposons maintenant que x et y ne sont pas des sommets d'articulations, alors $x, y \in A_C$, et par conséquent A_C n'est pas un ensemble indépendant. D'où le cycle C ne contient aucun sommet support. Donc par (iii) il existe une autre arête $x'y'$ dans C telle que les sommets $x', y' \in A_C$. Alors D contient tous les sommets de C sauf deux sommets, disons x' et y'. On suppose que les arêtes xy et $x'y'$ ne sont pas adjacentes, alors $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy}. On suppose maintenant que xy et $x'y'$ sont adjacentes $(x = x')$, alors $D - \{y\}$ est un dominant connexe de G_{xy}. Dans les deux cas on a $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$. Supposons dans ce cas que x n'est pas un sommet d'articulation et y est un sommet d'articulation. On suppose que le cycle C contient un support t. Alors puisque le sommet x est de degré deux, par (ii) l'ensemble A_C est un ensemble indépendant et il contient un autre sommet de degré deux, disons le sommet a. D'où D contient tous les sommets de C sauf un sommet disons a et donc $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy}. On suppose maintenant que C ne contient aucun support. Si A_C est un ensemble indépendant, par (iii) le cycle C contient un autre sommet $a \neq x$ et donc D contient tous les sommets de C sauf le sommet a, d'où $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy}. Si A_C n'est pas un ensemble indépendant, alors par (iii) il contient au moins deux arêtes. On peut choisir un $\gamma_c(G)$-ensemble D tel que $x \in D$. Comme D contient tous les sommets de C sauf deux sommets adjacents de A_C, alors $(D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ est un dominant connexe de G_{xy}. Dans tous les cas on a $\gamma_c(G_{xy}) < \gamma_c(G)$, par conséquent G est **dcp-critique**. $\square$

♦ **Les graphes unicycle.**

Nous donnons ci-dessous une caractérisation des graphes unicycles **tdcp-critiques**.

Théorème 3.20 ([23]). *Un graphe unicycle G connexe de cycle C est **tdcp-critique** si et seulement si il vérifie les conditions suivantes:*

i) Tout sommet support appartenant au cycle C est de degré trois et tout sommet support n'appartenant pas au cycle C est de degré deux.

ii) Si C contient un sommet support, alors

- $A_C = \{x \in C : d_G(x) = 2\}$ est un ensemble indépendant de cardinal différent de un et deux.

- Si $A_C \neq \emptyset$, alors tout sommet support de C est adjacent à un sommet de A_C.

iii) Si C ne contient pas de sommet support, alors le sous graphe induit par A_C soit il ne contient aucune arête soit il contient au moins deux arêtes. De plus si A_C est un ensemble indépendant, alors $|A_C| \geq 3$.

Preuve. Soit G un graphe unicycle **tdcp-critique**, alors G est **dcp-critique** et les points $(i), (ii)$ et (iii) du théorème 3.19 sont vérifiés .

On suppose que le cycle C contient un sommet support et $A_C = \{u, v\}$, en identifiant les sommets u et v, les sommets de l'ensemble $(C - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$ sont des sommets d'articulations dans le graphe G_{uv}. Soit D un $\gamma_c(G_{uv})$ -ensemble, alors $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{u\}$ est un dominant connexe de G, contradiction. Pour le point (iii), on utilise le même argument que précédèment pour montrer que si le cycle C ne contient pas un sommet support, alors A_C est un ensemble indépendant de taille au moins trois.

Pour la réciproque, on suppose que G vérifie les points $(i), (ii)$ et (iii). Il est clair qu' en utilisant le théorème 3.19, la contraction de toute arête diminue la taille du $\gamma_c(G)$. Ainsi soient u et v deux sommets non adjacents de G. On considère trois cas possibles:

Cas1. Si u et v appartiennent à un certain $\gamma_c(G)$-ensemble D, alors $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$ est un dominant connexe de G_{uv} et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.

Cas2. Si u et v n'appartiennent à aucun $\gamma_c(G)$-ensemble. Alors soit u et v sont des sommets pendants soit u est un sommet pendant et v est le sommet milieu de trois sommets consécutifs de degrés deux.

On suppose que u et v sont des sommets pendants et soit u' le sommet support adjacent à u. Il est clair que si $u' \in C$, alors d'aprés (ii) tout $\gamma_c(G)$-ensemble contient soit tous les sommets de C (dans le cas $A_C = \emptyset$), soit $|V(C)| - 1$ sommets (dans le cas $A_C \neq \emptyset$). Si le dérnier cas a lieu, le sommet u' est adjacent à un sommet de $a \in A_C$ tel que $a \notin D$. Dans tous les cas $D - \{u'\}$ est un dominant connexe de G_{uv} et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$. On suppose maintenant que u est un sommet pendant et v est le sommet milieu des trois sommets consécutifs de degrés deux dans C. Puisque A_C n'est pas un ensemble indépendant, le sommet support u' adjacent à u n'appartient pas à C $(d(u') = 2)$. D'où pour tout $\gamma_c(G)$-ensemble D, $D - \{u'\}$ est un dominant connexe de G_{uv} et par conséquent $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.

Cas3. Le sommet u appartient à un certain $\gamma_c(G)$-ensemble D et le sommet v n'appartient à aucun $\gamma_c(G)$-ensemble. Alors le sommet v est un sommet pendant ou bien est le milieu des trois sommets consécutifs de degrés deux dans C, disons a, v, b et le cycle C ne contient pas deux sommets adjacents de $A_C - \{a, v, b\}$.

On suppose que v est un sommet pendant et soit v' son sommet support. Si $v' \notin C$, alors $D - \{v'\}$ est un dominant connexe de G_{uv}. Si $v' \in C$, alors par (ii) D contient soit $|V(C)|$ sommets de C soit $|V(C)| - 1$ sommets de C, cela dépend de l'existence ou non de l'ensemble A_C respectivement, alors $D - \{v'\}$ est un dominant connexe de G_{uv}.

On suppose maintenant que le sommet v est le milieu de a, v, b tel que $a, v, b \in A_C$, et l'ensemble $A_C - \{a, v, b\}$ est soit vide soit un ensemble indépendant. Alors D contient exactement un sommet de a ou b, disons b et donc $D - \{b\}$ est un dominant connexe de G_{uv}. Dans tous les cas on a $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$. $\square$

3.3.3 Les graphes (t)dcp- critiques avec $\gamma_c(G)$ petit

Rappellons que dans [15] T. Burton et D. Sumner par les théorèmes 2.40 et 2.41 ont caractérisé les graphes (totalement) γ-point critique ayant $\gamma(G) = 2$.

Par le théorème suivant on montre que la classe des graphes **dcp-critiques** ayant $\gamma_c(G) = 2$ est équivalentes a la classe des graphes (totalement) γ-point critique ayant $\gamma(G) = 2$.

Théorème 3.21 ([23])**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $\gamma_c(G) = 2$. Alors G est un graphe **dcp-critique** si et seulement si G est γ-point critique .*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On suppose que G est γ_c-point critique. Puisque $\gamma_c(G) = 2$, aucun sommet de G ne puisse dominé tous les sommets donc

$2 \leq \gamma(G) \leq \gamma_c(G) = 2$, par conséquent $\gamma(G) = 2$. Maintenant si G est **dcp-critique**, alors toute arête uv contractée fait diminuer la taille de $\gamma_c(G)$, d'ou $\gamma(G_{uv}) = 1$. Par conséquent G est γ-point critique. Pour la réciproque, comme $\gamma(G_{uv}) = 1$ pour toute arête uv, alors $\gamma_c(G_{uv}) = 1$. D'où G est **dcp-critique**. □

Nous donnons ci-dessous une caractérisation des graphes **tdcp-critiques** ayant $\gamma_c(G) = 2$.

Théorème 3.22 ([23])**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $\gamma_c(G) = 2$. Alors G est **tdcp-critique** si et seulement si G est totalement γ-point critique.*

Preuve. On suppose que G est 2-**tdcp-critique**. Alors $\gamma(G) = 2$ puisque G ne contient pas de sommet de degré $n-1$. Comme $\gamma_c(G_{uv}) = 1$ pour tout couple de sommets (u, v), alors $\gamma(G_{uv}) = 1$. Par conséquent G est totalement γ-point critique. Pour la réciproque, supposons que $\gamma(G_{uv}) = 1$ pour tout couple de sommets (u, v). Alors $\gamma_c(G_{uv}) = 1$, et par suite G est **tdcp-critique**. □

3.4 Les graphes β_0-point critiques

3.4.1 Quelques résultats préliminaires

Avant de présenter les résultats principaux de ce paragraphe, nous donnons les deux définitions suivantes.

Définition 3.23. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit β_0-point critique si $\beta_0(G_{uv}) < \beta_0(G)$ pour toute arête $uv \in E$.*

Définition 3.24. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit totalement β_0-point critique si $\beta_0(G_{uv}) < \beta_0(G)$ pour tout couple de sommets $(u, v) \in V \times V$*

Proposition 3.25.

Proposition 3.26. *Soient un graphe $G = (V, E)$ et u, v deux sommets de $V(G)$. Alors $\beta_0(G) - 1 \leq \beta_0(G_{uv}) \leq \beta_0(G)$.*

Preuve. Soit S un β_0-ensemble de G. Si $u, v \notin S$, alors S reste un β_0-ensemble du graphe G_{uv} par conséquent $\beta_0(G_{uv}) \geq \beta_0(G) \geq \beta_0(G) - 1$. Si $u, v \in S$, alors $\{\overline{uv}\} \cup S - \{u, v\}$ est un ensemble indépendant du graphe G_{uv}, par conséquent $\beta_0(G_{uv}) \geq \beta_0(G) - 1$. On suppose maintenant que $u \in S$ et $v \notin S$, alors $S - \{u\}$ est un β_0-ensemble du graphe G_{uv}, d'ou $\beta_0(G_{uv}) \geq \beta_0(G) - 1$.
Supposons que D est un β_0-ensemble du graphe G_{uv}. Si $\overline{uv} \notin D$, alors D est un dominant stable du graphe G, et donc $\beta_0(G) \geq \beta_0(G_{uv})$. On suppose que le sommet $\overline{uv} \in D$ et $uv \notin E(G)$, alors $\{u, v\} \cup D - \{\overline{uv}\}$ est un dominant stable du graphe G, par conséquent $\beta_0(G) \geq \beta_0(G_{uv}) + 1$ donc $\beta_0(G_{uv}) \leq \beta_0(G)$. On suppose maintenant que $\overline{uv} \in D$ et $uv \in E(G)$, alors $\{u\} \cup D - \{\overline{uv}\}$ est un dominant stable du graphe G, et par suite $\beta_0(G) \geq .\beta_0(G_{uv})$. Dans tous les cas on a $\beta_0(G_{uv}) \leq \beta_0(G)$. □

Proposition 3.27. *Si $G = (V, E)$ est un graphe β_0-point critique alors $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(G) - 1$ pour toute arête $uv \in E(G)$.*

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 3.26. □

Une condition nécéssaire et suffisante des graphes β_0-point critiques est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.28 ([24])**.** *Un graphe $G = (V, E)$ connexe d'ordre $n \geq 3$ est β_0-point critique si et seulement si :*
$i)-$ Pour tout stable maximum S du graphe G, $V - S$ est un stable.
$ii)-$ Pour tout sommet $x \in V - S$ on a $d(x) \geq 2$.

Preuve. Soient G un graphe β_0-point critique et S un β_0-ensemble du graphe G.
$i)-$ On suppose que le sous-graphe induit par l'ensemble $V - S$ n'est pas un stable, alors $V - S$ contient au moins une arête uv. En contractant l'arête uv, S reste un $\beta_0(G_{uv})$-ensemble et donc $\beta_0(G_{uv}) \geq \beta_0(G)$, contradiction avec le fait que G est β_0-point critique.
$ii)-$ On suppose maintenant qu'il existe un sommet $x \in V - S$ tel que $d(x) = 1$. Alors x admet un unique voisin $y \in S$ et comme G est connexe d'ordre $n \geq 3$, le sommet y admet au moins un voisin $z \in V - S$ autre que le sommet x, par conséquent l'ensemble $S' = (S - \{y\}) \cup \{z\}$ est un stable tel que $V - S'$ n'est pas un stable, contradiction.

Pour la réciproque, soit S un stable maximum de G et soient u, v deux sommets adjacents tel que $u \in S$ et $v \in V - S$. Alors $S - \{u\}$ est un stable de G_{uv}, d'ou $\beta_0(G_{uv}) \geq |S| - 1$. Supposons que $\beta_0(G_{uv}) > |S| - 1$, alors d'aprés l'observation 3.26 $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(G)$. Soit D un $\beta_0(G_{uv})$-ensemble, si $uv \notin D$ alors $((V - D) - \{\overline{uv}\}) \cup \{u, v\}$ contient l'arête uv, contradiction avec les hypothèses du théorème, d'ou $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(G) - 1$. □

Puisque tout graphe biparti admet une partiton unique en deux stables, et d'aprés le théorème 3.28 il s'en dèduit le corollaire suivant:

Corollaire 3.29. *Si G n'est pas un graphe biparti alors G n'est pas $\beta_\circ$-point critique.*

Nous donnons ci-dessous une caractérisation des graphes totalement β_0-point critiques.

Théorème 3.30 ([24])**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est totalement β_0-point critique si et seulement si G est une star $K_{1,t}$ avec $t \geq 2$.*

Preuve. Si G est totalement β_0-point critique alors G est β_0-point critique. Si S est un $\beta_0(G)$-ensemble alors $V - S$ est un stable. On suppose que $|V - S| \geq 2$ et soient x, y deux sommets de $V - S$. Alors S reste un $\beta_0(G_{xy})$-ensemble, par conséquent $\beta_0(G_{xy}) \geq \beta_0(G)$, contradiction avec le fait que G est β_0-point critique. Donc $|V - S| = 1$ et d'ou G est une etoile $K_{1,t}$ avec $t \geq 2$. □

3.4.2 Les arbres β_0-point critiques

Rappelons la définition d'un 2-dominant comme suit:

Définition 3.31. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, un sous ensemble S de V est dit un ensemble 2-dominant de G si S est un dominant et pour tout sommet $v \in V - S, v$ est adjacent à deux sommets de S. Le nombre de domination double noté par $\gamma_2(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble 2-dominant de G.*

Dans [25] Blidia, Chellali et Favaron ont montré que dans les arbres le nombre 2-domination est borné inferieurement par le nombre de stabilité.

Théorème 3.32 (Blidia, Chellali et Favaron [25])**.** *Si T est un arbre, alors $\gamma_2(T) \geq \beta_0(T)$.*

Les mêmes auteurs de [25] ont caractérisé les arbres extrèmaux atteingnant la borne inferieure.

Soit $\mathcal{F}$: la famille des arbres obtenu d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ avec $k \geq 1$ tel que $T_1 = K_{1,t}, t \geq 2$ de centre w, $T = T_k$ et si $k \geq 2$ T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par une des opérations suivantes. Poser $A(T_1) = L_w$.

Opération θ_1 : Attacher une étoile $K_{1,p}$ avec $p \geq 1$ de centre x par une arête à un sommet pendant y et poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Opération θ_2 : Attacher une étoile $K_{1,p}$ avec $p \geq 1$ de centre x par une arête à un sommet y qui n'est pas pendant et poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Opération θ_3 : Attacher une étoile $K_{1,p}$ avec $p \geq 1$ de centre x par une arête à un sommet y de $V(T_i) - A(T_i)$ et poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Théorème 3.33 (Blidia, Chellali et Favaron [25])**.** *Soit T un arbre, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a)- $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$.

b)- $T = K_1$ ou $T \in \mathcal{F}$.

c)- T admet un $\gamma_2(T)$-ensemble unique et $\beta_0(T)$-ensemble unique.

Par le théorème suivant on donne une condition nécéssaire pour les arbres β_0-point critiques.

Théorème 3.34 ([24])**.** *Si T est un arbre β_0-point critique, alors*
$\beta_0(T) = \gamma_2(T)$.

Preuve. D'aprés le théorème 3.28 on deduit que $\gamma_2(G) \leq \beta_0(G)$ pour tout graphe β_0-point critique et d'aprés le théorème 3.32 on déduit que si G est un arbre alors $\beta_0(G) = \gamma_2(G)$. □

Dans ce paragraphe nous proposons une caractérisation des arbres β_0-point critiques.

Soit $\mathcal{F}_1$ la famille des arbres T qui se construisent récursivement à partir d'un arbre $T_1 = K_{1,p}$ avec $p \geq 2$ de centre x, et pour $i \geq 1$ l'arbre T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par l'opération θ. Poser $A(T_1) = L_x$. (l'ensemble des sommets pendants adjacents à x).

Opération θ : Attacher une étoile $K_{1,t}$ avec $t \geq 1$ de centre u par une arête à un sommet $v \in A(T_i)$ et poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_u$.

Théorème 3.35 ([24]). *Un arbre T d'ordre $n \geq 3$ est β_0-point critique si et seulement si $T \in \mathcal{F}_1$.*

Preuve. ($\Leftarrow$) Par induction sur le nombre $(k-1)$ d'opérations nécéssaire pour construire l'arbre T. Si $k = 1$ alors $T = T_1 = K_{1,p}$ pour $p \geq 2$, par conséquent T est β_0-point critique. On suppose que pour $k \geq 2$ la propriété est vraie pour tout arbre $T' \in \mathcal{F}_1$ construit avec moins de $(k-1)$ opérations. Soit T un arbre de la famille $\mathcal{F}_1$ construit à partir de l'arbre T' deja construit par $(k-1)$ opérations. Donc par induction T' est β_0-point critique.
Il est clair que $\beta_0(T) = \beta_0(T') + |L_u|$, d'aprés le théorème 3.32, $A(T)$ est à la fois un unique $\gamma_2(T)$-ensemble et un $\beta_0(T)$-ensemble. Et par construction $V(T) - A(T)$ est un stable, donc d'aprés le théorème 3.28, $A(T)$ est un 2-dominant. Alors d'aprés 3.28 T est β_0-point critique.
($\Rightarrow$) Par induction sur l'ordre $n(T)$.
pour $n = 2$ alors $T = P_2$ (T n'est pas β_0-point critique). Pour $n \geq 3$ et si $diam(T) = 2$ alors $T = K_{1,t}$ avec $t \geq 2$, par conséquent $T \in \mathcal{F}_1$. On suppose que tout arbre d'ordre $n' \geq 3$ β_0-point critique est dans $\mathcal{F}_1$. Soit T un arbre d'ordre $n > n'$, β_0-point critique. Puisque aucun arbre de $diam(T) = 3$ n'est β_0-point critique, on suppose que $diam(T) \geq 4$ et soit S un stable maximum de T. D'aprés le théorème 3.28 S est un $2-$dominant et donc $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$. Par conséquent tous les sommets pendants sont dans S. Soit v un sommet support pour lequel $V(T) - (L_v \cup \{v\})$ est un arbre (un tel sommet existe toujours) et u son unique voisin dans $V(T) - (L_v \cup \{v\})$. Dans ce cas $L_v \subset S$, $v \notin S$ et $u \in S$ (car sinon uv est une arête dans $V - S$, contradiction avec le fait que $V - S$ est un stable). Soit $T' = T - (L_v \cup \{v\})$ il est clair que $\beta_\circ(T) = \beta_\circ(T') + |L_u|$ et $u \in S \cap T'$. Montrons que T' est $\beta_\circ$-point critique: On suppose que T' n'est pas $\beta_\circ$-point critique, alors il existe une arête wr telle que $\beta_\circ(T'_{wr}) = \beta_\circ(T')$. Dans ce cas on a: $\beta_\circ(T) = \beta_\circ(T') + |L_v|$ et $\beta_\circ(T_{wr}) \geq \beta_\circ(T'_{wr}) + |L_v|$ par conséquent $\beta_\circ(T_{wr}) \geq \beta_\circ(T') + |L_v|$, et par suite $\beta_\circ(T_{wr}) \geq \beta_\circ(T)$, contradiction car T est $\beta_\circ$-point critique. Donc T' est $\beta_\circ$-point critique. Par inductionsur T', $T' \in \mathcal{F}_1$ et donc $T \in \mathcal{F}_1$ car il est obtenu à partir de T' par l'opération θ. $\square$

3.4.2 Les graphes sans $K_{1,3}$ β_0-point critiques

Nous donnons par le théorème suivant les graphes sans $K_{1,3}$ β_0-point critiques.

Théorème 3.36 ([24]). *Les graphes sans $K_{1,3}$ β_0-point critiques sont les cycles C_{2k} et les chaînes P_{2k+1}.*

Preuve. Soit S un β_0-ensemble de G. Alors d'aprés le théorème 3.28 $V-S$ est un stable et pour tout $x \in V-S$ on a $d(x) \geq 2$. Comme G est sans $K_{1,3}$ alors $d(x)=2$ pour tout $x \in V-S$ et $d(x) \leq 2$ pour tout $x \in S$, par conséquent $d(x) \leq 2$ pour tout $x \in V$. Donc le graphe G est soit un cycle soit une chaine.

Cas1. $G = C_n$

• Si n est impair, le graphe G n'est pas β_0-point critique car pour tout stable S , $V-S$ n'est pas un stable.

• Si n est pair, alors $\beta_0(C_{2q}) = q$. En contractant une arête uv on obtient le cycle C_{2q-1}, d'ou $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(C_{2q-1}) = q-1$, par conséquent $\beta_0(G_{uv}) < \beta_0(G)$.

Cas2. $G = P_n$

• Si n est pair, alors $\beta_0(G) = \beta_0(P_{2q}) = q$. En contractant une arête uv on obtient le graphe $G_{uv} = P_{2q-1}$, d'ou $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(P_{2q-1}) = q$, par conséquent $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(G)$, contradiction.

• Si n est impair, alors $\beta_0(P_{2q+1}) = q+1$. On contractant une arête uv on obtient le graphe $G_{uv} = P_{2q}$, d'ou $\beta_0(G_{uv}) = \beta_0(P_{2q}) = q$, par conséquent $\beta_0(G_{uv}) < \beta_0(G)$. □

3.5 Les graphes i -point critiques

3.5.1 Definitions et résultats préliminaires

Considérons une partition des sommets d'un graphe connexe $G = (V, E)$ en trois classes disjointes, selon l'effet de la suppression d'un sommet v sur le nombre de domination stable $i(G)$.

Soit $V = V_i^o \cup V_i^- \cup V_i^+$, tels que

$V_i^o = \{v \in V(G) : i(G-v) = i(G)\}$.

$V_i^- = \{v \in V(G) : i(G-v) < i(G)\}$

$V_i^+ = \{v \in V(G) : i(G-v) > i(G)\}$.

Définition 3.37. *Un sommet $v \in V$ est dit i -critique si $v \in V_i^-$.*

Définition 3.38. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit i -critique si $V_i^- = V$.*

Par les observations suivantes nous donnons quelques propriétées des ensembles V_i^-, V_i^+ et V_i^o.

Proposition 3.39. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et v un sommet de V. Si $v \in V_i^-$ alors il existe un i- ensemble S contenant le sommet v.*

Preuve. Soient S un $i(G-v)$- ensemble. Si v est adjacent à un sommet $x \in S$ alors $i(G-v) \geq i(G)$, contradiction. D'où v n'admet pas de voisin dans S. Donc $S \cup \{v\}$ est un stable maximal ce qui implique que $i(G) \leq |S| + 1$ et puisque $i(G) > |S|$ on a $i(G) = |S| + 1$. Par conséquent $S \cup \{v\}$ est un $i(G)$-ensemble contenant v. □

Proposition 3.40. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et v un sommet de V. Alors $v \in V_i^-$ si et seulement s' il existe un i-ensemble S tel que v est sans sommets privés par rapport à S.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons que v admet des sommets privés par rapport à tous les $i(G)$-ensembles contenant v. Puisque $v \in V_i^-$, alors pour tout $i(G-v)$-ensemble D, on a $D \cup \{v\}$ est un $i(G)$-ensemble ne contenant aucun privés de v.

($\Leftarrow$) Soit un sommet v sans sommets priveés par rapport à un $i(G)$-ensemble S contenant v. Alors $S' = S - \{v\}$ domine le graphe $G - v$, par conséquent $i(G-v) < i(G)$. D'ou $v \in V_i^-$. □

Proposition 3.41. *Soit $G = (V, E)$ un graphe .*

1) *Si $v \in V_i^+$ alors v appartient à tout $i(G)$-ensemble S et de plus il admet au moins deux sommets privés non adjacents.*

2) *Si $v \in V_i^+$ alors v n'est adjacent à aucun sommet critique.*

Preuve. (1) Soient S un i-ensemble de G et $v \in V_i^+$. Alors par définition on a $i(G-v) > i(G)$. On suppose qu'il existe un $i(G)$-ensemble S' ne contenant pas le sommet

v. Il est clair que $i(G-v) \leq i(G)$, contradiction avec la définition. Comme $i(G-v) > i(G)$, alors v admet des sommets privés dans $V - S$. On suppose que v admet un seul sommet privé dans $V - S$ disons a, alors $D = (S - \{v\}) \cup \{a\}$ est un $i(G)$-ensemble ne contenant pas le sommet v, contradiction.

(2) Supposons qu'il existe un sommet $u \in V_i^-$, d'aprés la proosition 3.39 il existe un $i(G)$- ensemble D contenant u mais comme $v \in D$ d'aprés (1), Par conséquent D n'est pas un stable, contradiction. □

Proposition 3.42. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $v \in V$. Si le sommet v n'est pas i-bon, alors $v \in V^o$.*

Preuve. conséquence des propositions 3.39 et 3.41. □

3.5.2 Les graphes 2-i-point critiques

Il est à signaler que la contraction d'une arête d'un graphe $G = (V, E)$ un graphe connexe peut augmenter ou diminuer $i(G)$. Par exemple, la contraction de l'arête reliant les deux sommets supports d'une double étoile $S_{r,s}$ diminue $i(G)$, et la contraction de la l'arête uv du graphe G de la figure 3.3 fait augmenter $i(G)$

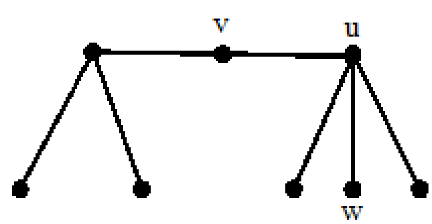

Fig.3.3

Définition 3.43. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit i-point critique si $i(G_{ab}) < i(G)$ pour toute arête $ab \in E$.*

Définition 3.44. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit totalement i-point critique si $i(G_{ab}) < i(G)$ pour tout couple de sommets $a, b \in V$.*

Proposition 3.45. *Les graphes P_{3n+1}, $C_{3n+1}, C_n o K_1$ sont i-point critiques.*

Soient $G=(V,E)$ un graphe connexe et S un $i(G)$-ensemble tel que $i(G)=2$ et soit G_1 le graphe multipartis complet tel que chaque partie contient au moins trois sommets.

Par les deux théorèmes suivants on caractérise les graphes (totalement) i-point critiques ayant $i(G)=2$.

Théorème 3.46 ([24])**.** *Un graphe $G=(V,E)$ connexe est i-point critique si et seulement si G est γ-point critique et $G \neq G_1$*

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit un graphe $G=(V,E)$ connexe tel que $i(G)=2$. Alors aucun sommet de G ne puisse dominé tous les sommets donc $2 \leq \gamma(G) \leq i(G)=2$, par conséquent $\gamma(G)=2$. On suppose maintenant que le graphe G est i point critique, implique $i(G_{ab})=1$ pour toute arête $ab \in E$, par conséquent $\gamma(G_{ab})=1$ pour toute arête $ab \in E$. D'ou le graphe G est γ point critique.
($\Leftarrow$) Pour la réciproque. Supposons que le graphe G est γ point critique, alors $\gamma(G_{ab})=1$ pour toute arête $ab \in E$. Par conséquent $i(G_{ab})=1$ pour toute arête $ab \in E$ et par suite G est i point critique. $\square$

Théorème 3.47 ([24])**.** *Un graphe $G=(V,E)$ connexe ayant $i(G)=2$ est dit totalement i-point critique si et seulement si G est totalement γ-point critique.*

Preuve. ($\Rightarrow$)Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe tel que $i(G)=2$, alors il est clair que $\gamma(G)=2$ puisque G ne contient pas de sommet de degré $n-1$. On suppose maintenant que le graphe G est i totalement point critique, alors $i(G_{ab})=1$ pour tout couple de sommets $a,b \in V$, par conséquent $\gamma(G_{ab})=1$ pour tout couple de sommets $a,b \in V$. Donc le graphe G est totalement γ point critique.
($\Leftarrow$) Pour la réciproque.Supposons que $\gamma(G_{ab})=1$ pour tout couple de sommets $a,b \in V$, alors $i(G_{ab})=1$ pour tout couple de sommets $a,b \in V$ et par suite G est totalement i point critique. $\square$

3.5.3 Les arbres i -point critiques

Dans ce paragraphe nous commençons par caractériser les arbres 2-i-point critique.

Proposition 3.48. *Soit T un arbre. T est 2-i point critique si et seulement si $T=P_4$.*

Preuve. Soit $S = \{x, y\}$ un $i(T)$- ensemble,on note par P_x et P_y les voisins privés dans $V - S$ de x et y respectivement. Puisque T est un arbre P_x et P_y sont des stables. Supposons que $|P_x| \geq 2$. Alors en contractant l'arête xx' te que $x' \in P_x$ ne fait pas diminuer $i(G)$, par conséquent $|P_x| \leq 1$ et similairement $|P_y| \leq 1$. Soit $A \subset V - S$ l'ensemble des sommets communs entre x et y. Il est clair que $|A| \leq 1$ car sinon T contient un cycle, contradiction. On distingue deux cas possibles

Cas1. $|A| = 0$. Alors $|P_x| = |P_y| = 1$ et comme T est un graphe connexe implique $T = P_4$.

Cas2. $|A| = 1$. Alors $T = P_4$ ou $T = P_5$. Le P_5 est exclu car il n'est pas 2-i point critique.

La réciproque est simple à avoir. □

Dans [26] Haynes T.W et Henning M.A ont caractérisé les arbres i-excellent comme suit:

Soit $\mathcal{F}$ est la famille des arbres obtenus par la séquence $T_1, T_2, ...T_j$ avec $j \geq 1$ tel que T_1 est un double étoiles $S_{r,r}$ pour $r \geq 1$ et $T = T_j$ et si $j \geq 2$ on a T_{i+1}peut étre obtenu récursivement à partir de T_i par une des deux opérations $\theta_1$ou θ_2 tel que on note par $W(T)$ l'ensemble des sommets supports de T , un sommet v est de statut A si il est support et de status B si il est pendant.

Opération θ_1 : L'arbre T_{i+1}est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $k_{1,t}$ pour $t \geq 1$ de centre w relie par une arête wy tel que y est un sommet de T_i avec $sta(y) = A$ et en ajoutant aussi $(t - 1)$ sommets pendants au sommet y.

Opération θ_2 : L'arbre T_{i+1}est obtenu à partir de $T_i \cup S_{t,t+1}$ en ajoutant une arête wy tel que w est un sommet de la double étoiles adjacent à $t \geq 0$ sommets pendants et y est un sommet de T_i avec $sta(y) = B$.

Théorème 3.49 (Haynes et Henning [26])**.** *Un arbre T est i- excellent si et seulement si $T \in \{K_1, K_2\}$ou $T \in \mathcal{F}$.*

Le résultat suivant, fait parti d'un travail en préparation avec T.W. Haynes [24].

Théorème 3.50 ([24])**.** *Si un arbre T d'ordre $n \geq 3$ est i- excellent alors T est i -point critique.*

Preuve. On suppose que T est i-excellent et on montre que T est i-point critique .D'aprés le théorème 3.49 la famille des arbres $T \in F$ est obtenu par une séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_m$ tel que $T_1 = S_{r,r}$ avec $r \geq 1$ et pour $m \geq 2$, T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $k_{1,t}$ (opération θ_1) ou bien une double étoile $S_{r,r+1}$ (opération θ_2).

On procéde par induction le long d'une séquence de m arbres pour construire l'arbre T. Si $m = 1$ alors T est une double étoile $S_{r,r}$ avec $r \geq 1$ et par conséquent T est i-point critique. On suppose, alors que c'est vérifié pour tout arbre $T \in F$ construit par une séquence de m arbre tel que $m \geq 2$.

Soit un arbre $T \in F$ construit par une séquence d'arbre $T_1, T_2, ...T_m$ et soient u et v deux sommets de T tel que $sta(u) = A$ et $sta(v) = B$. Pour des raisons de simplicité on note T_{m-1} par T'. Il est clair que pour tout sommet w de T' tel que $sta(w) = A$ on a $i(T') \leq i(T'_{-w})$, alors on considére deux cas possibles :

Cas.1. T est obtenu à partir de T' par l'opération θ_1.

On suppose que T est obtenu à partir de T' en ajoutant une étoie $k_{1,t}, t \geq 1$ de centre w relier par une arête wy tel que $y \in V(T')$, $star(y) = A$ et $(t-1)$ nouveaux sommets pendants adjaçents à y. Soient L_w l'ensemble des sommets pendants adjacents à w et L_y l'ensemble des sommets pendants adjacents à y. Par induction on a T' est i-point critique.

On montre d'abord que $i(T) = i(T') + t$, il est clair que l'ajout du L_w à tout $i(T')$ ensemble devient un dominant stable de T, alors $i(T) \leq i(T') + t$. Soient S un $i(T)$-ensemble et $S' = S \cap V(T')$, on suppose que $y \in S$, alors $L_w \subset S$ et $S - L_w$ est un dominant stable de T' donc $i(T') \leq |S| - t$. Si $y \notin S$, alors $(L_y \cup \{w\}) \subset S$ et S'est un dominant stable de T'_{-y} alors $i(T') \leq i(T'_{-y}) \leq |S'| = |S| - t$ et par conséquent $i(T') \leq i(T) - t$. D'ou $i(T') + t \leq i(T)$, alors $i(T) = i(T') + t$:

Pour toute arête $uv \in E(T')$ on a $i(T'_{uv}) < i(T')$, soit S' un $i(T'_{uv})$-ensemble pour une arête $uv \in E(T')$, alors $(S' \cup L_w)$ est un dominant stable de T_{uv} implique $i(T'_{uv}) \leq |S'| + |L_w| < i(T') + |L_w|$ donc $i(T'_{uv}) < i(T') + t$, par conséquent $i(T'_{uv}) < i(T')$ pour toute arête $uv \in E(T')$.

Maintenant on montre que toute arête $uv \in (E(T) - E(T'))$ est i-point critique tel que u est un sommet pendant de T avec $stat(u) = B$, donc il existe un ensemble S

contenant le sommet u, par conséquent $S-\{u\}$ est un dominant stable de T_{uv} de taille $i(T)-1$. D'ou $i(T_{uv})<i(T)$.

Considérons l'arête wy tel que $stat(w)=stat(y)=A$, puisque T est i-excellent, on peut toujours selèctionné un $i(T)$- ensemble S contenant y tel que $w\notin S$ et $L_w\subset S$, dans ce cas $S-L_w$ est un dominant stable de T_{wy} de taille $|S|-|L_w|=i(T)-t$, par conséquent $i(T_{wy})<i(T)$. D'ou T est i -point critique.

Cas.2. T est un arbre obtenu à partir de T' par l'opération θ_2.
On suppose que T est obtenu à partir de $T'\cup S_{t,t+1}$ tel que wy est une arête avec w est le sommet de $S_{t,t+1}$adjaçent à $t\geq 0$ sommets pendants et $y\in V(T')$ tel que $stat(y)=B$. Soit z le sommet de $S_{t,t+1}$ adjaçent à $t+1$ sommets pendants. Si $t\geq 1$ on note par L_w l'ensemble des t sommets pendants adjaçents à w et si $t=0$ alors $L_w=\emptyset$, L_z c'est l'ensemble des sommets pendants adjacents à z.

Par hypothese T' est i-point critique, on commence d'abord à montrer que $i(T)=i(T')+t+1$, il est clair qu'en ajoutant $L_w\cup\{z\}$ à tout $i(T')$-ensemble on obtient un dominant stable de T, et par conséquent $i(T)\leq i(T')+t+1$. Soient S un $i(T)$-ensemble et $S'=S\cap V(T')$. On suppose que $w\notin S$, alors $(L_w\cup\{z\})\subset S$ et $S-L_w-\{z\}$ est un dominant stable de $T,'$ par conséquent $i(T')\leq |S|-(t+1)$. On suppose maintenant que $w\in S$, alors $(L_z\cup\{w\})\subset S$.

On suppose que $y\notin p_n(w,S)$, alors $(S-L_z-\{w\})\cup(L_w\cup\{z\})$ est un dominant stable de T de taille $|S|=i(T)$. On suppose maintenant que $y\in p_n(w,S)$, alors $(S'\cup\{y\})$ est un dominant stable de T', par conséquent $i(T')\leq |S'|+1=|S|-(t+1)$. alors $i(T')+t+1\leq i(T)$. D'ou $i(T)=i(T')+t+1$.

On montre maintenant que T est i-point critique, pour cela il suffit de montrer que toute arête $uv\in E(T)$ est i-point critique. On suppose que $uv\in E(T')$ et S' un $i(T'_{uv})$-ensemble, puisque $|S'|<i(T')$ par induction, alors $S'\cup L_w\cup\{z\}$ est un dominant stable de T_{uv} et par conséquent $i(T_{uv})\leq |S'|+t+1<i(T')+t+1$. Alors toute arête $uv\in E(T')$ est i-point critique. On considére maintenant une arête wx tel que x est un sommet pendant adjaçent à w tel que $L_w\neq\emptyset$. Soit S un $i(T)$-ensemble contenant le sommet z donc $w\notin S$ et $L_w\subset S$, par conséquent $S-\{x]$ est un dominant stable de T_{wx}. Donc $i(T_{wx})\leq |S|-1=i(T)-1$, d'ou $i(T_{wx})\leq |S|-1=i(T)-1$ ainsi $i(T_{wx})\leq i(T)$.

Alors l'arête wx est i-point critique. De la même manière pour une arête zx tel que x est un sommet pendant adjacent à z. Finalement on considère l'arête wz, soit S un $i(T)$-ensemble contenant le sommet w alors z n'appartient pas à S, cela implique que $L_z \subset S$. D'ou $S - L_z$ est un dominant stable de T_{wz}, donc $i(T_{wz}) \leq |S| - (t+1) < i(T)$, par conséquent $i(T_{wz}) < i(T)$. Alors T est i-point critique

Pour une caractérisation générale des arbres i -point critiques on propose la conjecture suivante. $\square$

Conjecture 3.51 ([24])**.** *Un arbre T est i -point critique si et seulement si T est un arbre i-excellent.*

CHAPITRE 4

LE NOMBRE DE DOMINATION PAR CONTRACTION

Dans ce chapitre on considère l'effet de la contraction d'arêtes sur le nombre de domination $\gamma(G)$. Dans [27], Huang et Jun-Ming ont défini le nombre de domination par contraction d'un graphe $G = (V, E)$ connexe tel que $\gamma(G) \geq 2$, noté par $Ct_\gamma(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à contracter successivement pour faire diminuer le nombre de domination $\gamma(G)$. Ils ont montré que $Ct_\gamma(G) \leq 3$ pour tout graphe G. Etant donné ce résultat, les graphes sont classifiés et caractérisés selon leurs paramètres $Ct_\gamma(G)$.

Nous citons quelques résultats obtenus par Huang et Ming Xu dans [27].

4.1 Resultats préliminaires

Notons par $G_{\backslash e}$ le graphe obtenu à partir de G par la contraction de l'arête e et par $G_{\backslash E'}$ le graphe obtenu à partir de G par la contraction successive d'un sous ensembles d'arêtes de $E' \subseteq E(G)$.

Proposition 4.1. *Si* $E' \subseteq E(G)$ *alors* $\left|V(G_{\backslash E'})\right| = |V(G)| - |E'|$.
et $\left|E(G_{\backslash E'})\right| \leq |E(G)| - |E'|$.

Proposition 4.2. *Soit* G *un graphe connexe. Si* D *est un* $\gamma(G)$*-ensemble et* x, y *deux sommets de* D*, alors* $Ct_\gamma(G) \leq d(x, y)$.

Proposition 4.3. *Soit* G *un graphe connexe. Si* D *est un ensemble dominant de* G *et* E' *est un sous ensemble de* $E(G[D])$*, alors* $G_{\backslash E'}$ *contient un ensemble dominant* D' *tel que* $|D'| = |D| - |E'|$.

Proposition 4.4. *Soit* G *un graphe connexe. Si* $E' \subseteq E(G)$ *et* D' *un ensemble dominant de* $G' = G_{\backslash E'}$*, alors* G *admet un ensemble dominant* D *tel que* $G'[D']$ *est un sous graphe partiel de* $G[D]_{\backslash F}$ *avec* $F \subseteq E(G[D])$ *et* $|F| = |E'|$.

Corollaire 4.5. *Soit G est un graphe connexe. $Ct_\gamma(G) = k \geq 1$, alors il existe un ensemble $E' \subseteq E(G)$ tel que $|E'| = k$ et $\gamma(G_{\setminus E'}) = \gamma(G) - 1$.*

4.2 Le nombre de domination par contraction $Ct\gamma(G)$

Nous commençons par donner les deux propositions suivantes de Huang et Jun-Ming.

Proposition 4.6. *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n, $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

Proposition 4.7. *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n d'ordre $n \geq 4$,*
$Ct_\gamma(P_n) = Ct_\gamma(C_n) = i$ tel que $n = 3k + i$ et $1 \leq i \leq 3$.

Huang et Jun-Ming ont montré que $Ct_\gamma(G)$ est inférieur à trois pour tout graphe connexe avec $\gamma(G) \geq 2$.

Théorème 4.8. *[27] Pour tout graphe G connexe on a : $Ct_\gamma(G) \leq 3$.*

Par la proposition suivante, les graphes ayant $Ct_\gamma(G) = 0$ sont caractérisés.

Proposition 4.9. *Pour un graphe G connexe, $Ct_\gamma(G) = 0$ si et seulement si G admet une étoile comme sous-graphe partiel.*

Par la proposition suivante, les graphes ayant $Ct_\gamma(G) = 1$ sont caractérisés.

Proposition 4.10. *Pour un graphe G connexe, $Ct_\gamma(G) = 1$ si et seulement s'il existe un $\gamma(G)$-ensemble D qui n'est pas un stable.*

Il résulte de cette proposition le corollaire suivant:

Corollaire 4.11. *Pour un graphe G connexe, si $\gamma(G) = i(G)$, alors $Ct_\gamma(G) > 1$.*

Les graphes G tels que $Ct_\gamma(G) = 2$ sont caractérisés par le résultat suivant:

Proposition 4.12. *Pour un graphe G connexe, $Ct_\gamma(G) = 2$ si et seulement si tout $\gamma(G)$-ensemble est un stable et il existe un ensemble dominat D de cardinalité $\gamma + 1$ tel que $G[D]$ contient au moins deux arêtes.*

A partir du théorème 4.8, tous les graphes peuvent être classés en quatre catégories selon leurs nombre de domination par contraction $Ct_{\gamma}(G)$. On note par $\mathcal{C}_{\gamma}^{i}$ les graphes ayant $Ct_{\gamma}(G) = i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Et on note par $\mathcal{P}_{\gamma}^{j}$ l'ensemble des graphes connexes satisfaisant la propriété j. Si $\mathcal{A}$ est une famille des graphes connexes, alors $\overline{\mathcal{A}}$ représente la famille des graphes connexes qui ne sont pas dans la famille $\mathcal{A}$.

Propriété 1. G admet une star comme sous graphe partiel.

Propriété 2. G admet un $\gamma(G)$-ensemble D qui n'est pas un stable.

Propriété 3. G admet un ensemble dominant D de cardinalité $\gamma + 1$ tel que $G[D]$ contient au moins deux arêtes.

Théorème 4.13. $\mathcal{C}_{\gamma}^{0} = \mathcal{P}_{\gamma}^{1}$, $\mathcal{C}_{\gamma}^{1} = \mathcal{P}_{\gamma}^{2}$, $\mathcal{C}_{\gamma}^{2} = \overline{\mathcal{P}_{\gamma}^{2}} \cap \mathcal{P}_{\gamma}^{3}$ *et* $\mathcal{C}_{\gamma}^{3} = \overline{\mathcal{P}_{\gamma}^{1}} \cap \overline{\mathcal{P}_{\gamma}^{3}}$.

4.3 Caractérisation des arbres tels que $Ct\gamma(G) = 3$

On s'intérresse dans cette partie à donner une réponse au problème posé par Huang et Jun-Ming dans l'article [27].en caractérisant les arbres T ayant $Ct_{\gamma}(T) = 3$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des arbres T obtenus à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ avec $k \geq 1$ tel que $T_1 = P_6$ de support x et y, $T = T_k$. Si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par l'une des opérations suivantes. Soit $A(T_1) = \{x, y\}$.

Opération θ_1 : Ajouter des sommets pendants à un support z. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i)$.

Opération θ_2 : Attacher un sommet z de $V(T_i) - A(T_i)$ à un sommet u de la châine pendante uvw. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{v\}$.

Par la construction de $\mathcal{F}$, on a l'observation suivante:

Proposition 4.14. *Si $T \in \mathcal{F}$ alors chaque sommet de $A(T)$ admet au moins deux sommets privés dans $V(T) - A(T)$.*

Nous donnons la définition d'un dominant parfait comme suit:

Définition 4.15. *Un ensemble S est dit un dominant parfait si S est un dominant et chaque sommet de V admet exactement un seul voisin dans S.*

Théorème 4.16 (Bange, Barkaukas et Slater [28]). *Si G admet un dominant parfait alors tous les dominants minimaux ont la même taille* $\gamma(G)$.

Théorème 4.17 (Gunther, Hartnell, Markus et Rall [29]). .
Un arbre T d'ordre $n \geq 3$ admet un $\gamma(T)$-ensemble unique D si et seulement si chaque sommet de D admet au moins deux voisins privés dans $V - D$.

Lemme 4.18. *Si T est un arbre tel que $Ct_\gamma(T) = 3$, alors T admet un $\gamma(T)$- ensemble unique et un dominant parfait unique.*

Preuve. Soit S un $\gamma(T)$-ensemble et supposons que $Ct_\gamma(T) = 3$. Il est clair que $G[S]$ est un stable et donc $\gamma(T) = i(T)$. On suppose maintenant que l'ensemble S n'est pas un dominant parfait. Alors il existe un sommet $z \in V - S$ qui admet deux voisins x, y dans S. Notons par w le sommet obtenu à partir de la contraction des deux arétes xz et yz, et soit G' le graphe obtenu après la contraction. Alors l'ensemble $\{w\} \cup (S - \{x, y\})$ est un dominant de G' et $\gamma(G') < \gamma(G)$. Par conséquent $Ct_\gamma(T) = 2$, d'ou la contradiction.

Pour l'unicité, soit D un $\gamma(T)$-ensemble. Puisque T est un arbre, alors pour tout sommet $v \in D$ on a $N(v) \neq \emptyset$. Si $N(v) \cap (V - D) \neq \emptyset$. Si $N(v) = \{u\}$ alors $D' = (D - \{v\}) \cup \{u\}$ est un dominant de T qui n'est pas parfait. Donc chaque sommet $v \in D$ admet au moins deux voisins privés dans $V - D$. D'aprés le théorème 4.17 D est un dominant parfait unique. □

Remarque: *Le résultat précédent n'est pas vrai pour tout graphe G, car si $G = C_6$ alors $Ct_\gamma(T) = 3$* et *le graphe G admet un dominant parfait qui n'est pas unique.*

Lemme 4.19. *Pour un arbre $T \neq k_{1,t}$, l'arbre T admet à la fois un unique $\gamma(T)$-ensemble et un unique dominant parfait si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. ($\Leftarrow$) Soit T un arbre de la famille $\mathcal{F}$. A partir de la construction $A(T)$ est un dominant parfait de T et d'aprés le théorème 4.16 $A(T)$ est un $\gamma(T)$-ensemble. Puisque chaque sommet de $A(T)$ possède au moins deux sommets privés alors d'aprés le thèorème 4.17 $A(T)$ est un unique $\gamma(T)$-ensemble. D'ou T admet à la fois un unique $\gamma(T)$-ensemble et un unique dominant parfait.

($\Rightarrow$) Soit D à la fois un unique $\gamma(T)$- ensemble et un unique dominant parfait de T. On utilise l'induction sur le nombre de sommets de T. L'unicité de l'ensemble D implique chaque sommet support est dans D. Aussi dire que D est dominant parfait signifie que la distance entre deux supports est au moins trois. Puisque T n'est pas une étoile alors $diam(T) \geq 5$. Il est clair que $T = P_6$ est le plus petit arbre admettant un dominant parfait unique et $T \in \mathcal{F}$. On suppose que chaque arbre T' d'ordre $n' < n$ admet un unique $\gamma(T')$-ensemble et un unique dominant parfait est dans $\mathcal{F}$.

Soit T un arbre d'ordre n. Si T admet un support z adjacent à au moins deux sommets pendants, alors considérons l'arbre T' obtenu à partir de T en supprimant un sommet pendant quelconque z' adjacent à z. Alors D reste un $\gamma(T')$-ensemble. Maintenant on suppose que D n'est pas unique et soit D' un seconde $\gamma(T')$-ensemble. Alors $z \notin D'$ et z possède un autre sommet pendant $z" \in D'$. Soit w un sommet non pendant adjacent à z dans T (un tel sommet existe toujours car $diam(T) \geq 5$). Alors D' contient au moins un sommet de $N[w] - \{z\}$ et cela pour dominer le sommet w, donc $\{z\} \cup (D' - \{z''\})$ est un $\gamma(T)$-ensemble qui n'est pas unique ou bien n'est pas parfait les deux donnent une contradiction. Par induction sur T' on a $T' \in \mathcal{F}$ par conséquent $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' par l'opération θ_1.

On suppose que chaque sommet support est adjacent à exactement un seule sommet pendant. Soit u' un sommet pendant à distance maximum r d'un sommet de degré plus de deux. Soient u, v, w les sommets parents des sommets u', u, v respectivements. Alors $u \in D$ et $w \notin D$. Soit $T' = T - \{u', u, v\}$. Alors
$D' = D - \{u\}$ est un unique $\gamma(T')$-ensemble et un unique dominant parfait de T'. Par induction sur T' on a $T' \in \mathcal{F}$ et par la suite $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération θ_2. $\square$

Théorème 4.20. *Soit un arbre $T \neq k_{1,t}$ les assertions suivantes sont équivalentes :*
$a)-$ $Ct_\gamma(T) = 3$.
$b)-$ *T admet un unique $\gamma(T)$-ensemble et un unique dominant parfait .*
$c)-$ $T \in \mathcal{F}$.

Preuve. $(a) \Rightarrow (b)$: d'aprés le lemme 4.18

$(b) \Leftrightarrow (c)$: d'aprés le lemme 4.19.

Il suffit de montrer que (b) implique (a) : Supposons que $Ct_\gamma(T) = 1$, alors d'aprés la proposition 4.10, il existe un $\gamma(T)$-ensemble qui n'est pas un stable et comme T admet un dominant parfait unique alors $Ct_\gamma(T) \geq 2$. Supposons maintenant que $Ct_\gamma(T) = 2$, alors d'aprés la proposition 4.12 tout $\gamma(T)$-ensemble est un stable (ce qui est vérifie dans notre cas, car T admet un dominant parfait unique) et il existe un $(\gamma + 1)$-ensemble $S \cup \{x\}$ contenant au moins deux arêtes ce qui est impossible, car dans ce cas x admet deux voisins dans S, contradiction. Par conséquent $Ct_\gamma(T) \geq 3$ et d'aprés le théorème 4.8 en déduit que $Ct_\gamma(T) = 3$. □

4.4 Le nombre de domination stable par contraction $Cti(G)$

On commence par donner la définition du nombre domination stable par contraction.

Définition 4.21. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe tel que $i(G) \geq 2$. On note par $Ct_i(G)$ le nombre minimum d'arête qu'il faut contracter successivement pour faire diminuer $i(G)$.*

Proposition 4.22. *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n, $i(P_n) = i(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

Proposition 4.23. *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n d'ordre $n \geq 4$,*
$Ct_i(P_n) = Ct_i(C_n) = i$ tel que $n = 3k + i$ et $1 \leq i \leq 3$.

Nous donnons par les propositions suivantes les conditions suffisantes
pour que $Ct_i(G) = 1$.

Proposition 4.24. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. S'il existe un i-ensemble S de G contenant au moins un sommet sans sommet privé, alors $Ct_i(G) = 1$.*

Proposition 4.25. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, s'il existe un $\gamma(G)$-ensemble S contenant exactement une arête, alors $Ct_i(G) = 1$.*

Preuve. Il est clair que $\gamma(G) \leq i(G)$ pour tout graphe G. Soit un $\gamma(G)$-ensemble S contenant une arête uv, alors $\gamma(G_{uv}) = \gamma(G) - 1 = i(G_{uv})$. Et par conséquent
$\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$. D'ou $\gamma(G_{uv}) < i(G)$ et par suite $i(G_{uv}) < i(G)$. Donc $Ct_i(G) = 1$. □

Rappelons que le voisinage privé d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $pn[v,S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S, i-e: $pn[v,S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

Proposition 4.26. *Soit $G = (V,E)$ un graphe connexe et soient S un $i(G)$-ensemble et $x \in S$.*

a)− Si $|pn[x,S]| = 0$, alors $Cti(G) = 1$.

b)− Si $|pn[x,S]| = d_G(x)$, alors $Cti(G) \leq 3$.

c)− Si $0 < |pn[x,S]| < d_G(x)$, alors $Cti(G) \leq \min_{x\in S}(d_G(x))$.

Preuve. Soient G un graphe connexe et S un $i(G)$-ensemble. Soit x un sommet quelconque de S. Posons $|pn[x,S]| = k$

$a)$− Si $k = 0$, alors l'ensemble $N(x)$ est dominé par $S - \{x\}$. Dans ce cas la contraction d'une arête reliant x et un de ces voisins fait diminuer $i(G)$, par conséquent $Cti(g) = 1$.

$b)$− $k = d_G(x)$. Puisque G est connexe alors, il existe une arête reliant un sommet $y \in pn[x,S]$ à un sommet $z \in V - (S \cup pn[x,S])$. Donc il existe un sommet $t \in S$ adjacent à z. Par conséquent la contraction des arêtes xy, yz et zt consécutivement fait diminuer $i(G)$, d'ou $Cti(G) \leq 3$.

$c)$− Si $1 < k < d_G(x)$, alors il existe un sommet $z \in N(x)$ adjacent à $S - \{x\}$ et la contraction des k arêtes reliant x à $pn[x,S]$ ainsi que l'arête zx fait diminuer $i(G)$. Par conséquent $Cti(G) \leq k+1$ et puisque $k < d_G(x)$ alors $Cti(G) \leq d_G(x)$. □

Contrairement au paramètre $Ct_\gamma(G)$, par la proposition suivante on montre qu'il existe des graphes où $Ct_i(G)$ peut être trés grand.

Proposition 4.27. *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe un arbre T_k tel que $Ct_i(T_k) \geq k$.*

Preuve. Soit T_k un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,k}$ avec $k \geq 2$ de centre y en attachant chaque sommet pendant x_j par $(k-1)$ sommets tel que $1 \leq j \leq k$. Il est clair que $S = \{x_1, x_2, ...x_k\}$ est un $i(T_k)$-ensemble tel que $d(x_j) = k$.

On peut constater que la contraction d'une arête de type yx_j fait augmenter le nombre de domination stable de l'arbre résultant par rapport à $i(T_k)$. D'autre part la contraction d'une arête joignant un support à son sommet pendant ne fait pas changer $i(T_k)$. On conclut que au moins k arêtes sont necessaires pour diminuer le nombre de domination stable, d'ou $Ct_i(T_k) \geq k$

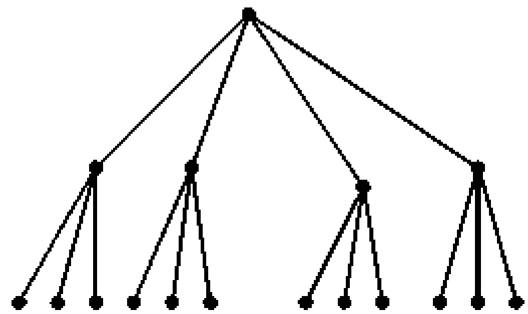

Fig.4.1: L'arbre T_k avec $k = 4$.

$\square$

Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous nous sommes interessés à l'étude de l'effet de la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets sur certains paramètres de graphe.

En premier temps, nous avons donné une caractérisation des graphes dont la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets fait diminuer la taille maximale du couplage.

En second temps, nous avons caractérisé quelques classes des graphes (totalement) γ_c-point critiques, en particulier les graphes blocs, les graphes cactus, les graphes unicycles et les graphes scindés et on a donné aussi une caractérisation des graphes (totalement) γ_c-point critiques ayant $\gamma_c(G) = 2$.

Ensuite, on a établi une condition nécéssaire et suffisante pour les graphes β_0-point critiques et nous avons donné une caractérisation de quelques classes des graphes β_0-point critiques. A savoir les arbres et les graphes sans $K_{1,3}$. Puis nous avons caractérisé les graphes i-point critiques ayant $i(G) = 2$. Pour une caractérisation générale des arbres i-point critiques, nous avons conjecturé que la classe des arbres i-point critiques est équivalente à la classe des arbres i-excellent.

Enfin, nous avons donné une réponse au problème posé par Huang et Jun-Ming dans [27] en caractérisant par construction les arbres ayant le nombre de domination par contraction $Ct_\gamma(T) = 3$. Ensuite on a montré qu'il existe des graphes où le nombre de domination stable par contraction est trés grand.

Voici quelques problèmes qui se situent dans le prolongement de ce mémoire:

- Caractériser les graphes ou bien des classes des graphes point critiques par rapport à d'autres paramètres.
- Donner une réponse à la conjecture 3.51.

Références

[1] C.Berge. Graphs, North holland, 1985.

[2] Haynes T.W, Hedetniemi S.T et Slater P.J, “ Fundamentals of Domination in graphs”, Marcel Dekker, New York, 1998.

[3] S.T.Hedetniemi et R.C.Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters, Discrète mathématics 86(1990) 257-277.

[4] C.F.de Jaenish, Applications de l’analyse mathématique au jeu d’échecs petrograde (1862).

[5] Fricke G.H, S.M, Hedetniemi S. T.hedetniemi, A.A.Merae, C.K.Wallis, M.S.Jacobson, H.W.Martin et W.D.Wealkley, Combinatorial problems checs boards. Abrie survey, Graph theory, Combinatorics and applications.proc.seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and application of graphs, vol.1, Y.Alavi and A.Schwenk, Eds,Wiley, 1995,pp. 507-528.

[6] C.Berge,Theory of graphs and its applications. Methuem,London,(1962,1985).

[7] O.Orc, Theory of graphs. Amer.Soc.Colloq.Pub38,Providence,R.I.(1962).

[8] E.J.Cockayne et S.T. Hedetniemi, Towards a theory of dominations in graphs . Network, 7(1977)241-261.

[9] Haynes T.W, Hedetniemi S.T et Slater P.J, “ Domination in graphs”, Advenced topics.Marcel Dekker, Inc.New York, 1998.

[10] E.J.Cockayne, S.T. Hedetniemi et D.J.Miller.Properters of heriditry hypergraphs and middle graphs. Canad. Math. Bull 21(1978), 461-468.

[11] Fricke G.H, Haynes T.W, Hedetniemi S.M, Hedetniemi S. T. et Laskar R.C, "Excellent trees", Bull. Inst. Combin. Appl.34,(2002),27-38.

[12] J.Carrington, F.Harary, TW. Haynes, Changing and unchanging the domination number of graph, J.Combin. Math. Combin Comput. 9(1991) 57-63.

[13] D. Bauer, F.Harary. J. Nieminen, C.L. Suffet, Domination alteration sets in graphs, Discrete Math. 47 (1983) 153-161.

[14] E. Sampathkumar and P.S. Neeralagi. Domination and neighbourhood critical, fixed, free and totally free points. Sankhya (Special Volume), 54: 403-407,1992.

[15] T.Burton, et D.P.Sumner, Domination dot-critical graphs. *Discrete Mathematics* 306 (2006) 11-18

[16] R.C. Brigham, P.Z. Chinn, R.D. Dutton, Vertex Domination-critical graphs, Network 18(1998) 173-179.

[17] H.B. Walikar, B.D. Acharya, Domination critical graphs, Nat. Acad. Lett. 2(1979) 70-72.

[18] D.P.Sumner, P. Blitch, Domination critical graphs, J.Combin. Theory Ser. B 34(1983) 65-76.

[19] D.P.Sumner, Critical concepts in domination, Discrete Math. 86 (1990) 33-46.

[20] O.Favaron, D.Sumner, E. Wojcicka, The diameter of domination critical graphs, J.Graph Theory 18(1994) 723-734.

[21] T. Burton, et D.P. Summer, γ-excellent, critically dominated, end dominated, and dot-critical trees are equivalent. *Discrete Mathematics* 307 (2007) 683-693.

[22] J.H. Hattingh, M.A. Henning, Characterizations of trees with equal domination parameers, J.Graph Theory 34(2)(2000) 142-15

[23] M. Chellali, K. Tablennehas et F. Maffray, Les graphes γ_c-point critiques, communication acceptée pour le colloque international COSI (2008)

[24] M. Chellali, K. Tablennehas et T.W. Haynes, "Independent dot critical graphs", en cours de préparation.

[25] M.Blidia, M.Chellali et O.Favaron, Independence and 2-domination in trees. *Australasian Journal of combinatorics* 317-327 (2005).

[26] Haynes T.W et Henning M.A, A characterization of i- excellent trees. *Discrete Mathematics* 248 (2002) 69-77.

[27] Jia Huang et Jun- Ming Xu, Domination and total Domination contraction numbers of graphs, Soumis.

[28] D.W.Bange, A.E.Barkaukas et P.J.Slater. Efficient dominating sets in graphs. In Applications of Discrete Mathématics, R.D. Ringeisen et F.S. Roberts, editors, SIAM, Philadelphia (1988) 189-199.

[29] G.Gunther, B.Hartnell, L.R.Markus et D.Rall, Graphs with unique minimun dominating sets. Congr. Numer. 101(1994), 55-63.