

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Ecole Doctorale En Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Option : Modélisation Mathématique pour l'aide à la décision
(Recherche opérationnelle)

SUR LES ENSEMBLES DOMINANTS LOCALISATEURS (TOTAUX) DANS LES GRAPHS

Par

MIMOUNI Malika

Devant le jury composé de :

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
A. SEMRI	Maître de Conférences, USTHB, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Professeur Habilité en Mathématiques, U. de Blida	Rapporteur

Blida, Mai 2009

RESUME

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de la domination localisatrice dans les graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E . Un sous ensemble S de V est dit dominant de G si tout sommet de $V-S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Un ensemble dominant S est dit localisateur si pour toute paire de sommets u, v de $V-S$, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. Le nombre de domination localisatrice de G , noté par $\gamma_L(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G , et le nombre de domination localisatrice supérieur, noté par $\Gamma_L(G)$ est le cardinal maximum d'un ensemble dominant localisateur minimal (au sens de l'inclusion) de G . Un dominant localisateur S de G est dit total si tout sommet de S possède un voisin dans S . Le nombre de domination localisatrice totale de G , noté par $\gamma_t^L(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur total de G .

Dans un premier lieu, nous nous sommes intéressés au paramètre Γ_L , étant donné qu'aucune étude n'a été réalisée jusqu'à présent (à notre connaissance) sur ce paramètre. Nous montrons que tout ensemble indépendant maximum est un dominant localisateur minimal pour tout arbre, ou pour tout graphe G de maille supérieure ou égale à 5. Nous présentons aussi quelques bornes sur Γ_L , ainsi qu'une caractérisation des graphes extrémaux pour certaines d'entre elles.

Dans un second lieu, nous exposons quelques résultats obtenus sur le paramètre de domination localisatrice γ_L , en établissant des extensions de quelques bornes déjà existants pour certaines classes de graphes (les bipartis, les unicycles et les graphes cactus). Nous déterminons aussi une relation liant γ_L à d'autres paramètres de domination γ, ρ, γ_2 .

En dernier lieu, nous étudions d'une façon brève le paramètre de domination localisatrice totale, où quelques résultats partiels sont obtenus.

ملخص

ينصب اهتمامنا في هذا البحث أساسا على السيطرة الموضعية في البيانات .

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطا، بمجموعة رؤوس V و مجموعة أضلاع E . نقول عن مجموعة جزئية S من المجموعة V أنها مسيطرة للبيان G إذا كان كل رأس من $V-S$ مجاور لرأس على الأقل من S . نقول عن مجموعة مسيطرة S أنها موضعية إذا كان من أجل كل زوج من الرؤوس v,u من $V-S$ فإن $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. عدد السيطرة الموضعية للبيان G و الذي نرسم له $\gamma_L(G)$ هو الأصغر لمجموعة مسيطرة موضعية للبيان G , و عدد السيطرة الموضعية الأكبر و الذي نرسم له $\Gamma_L(G)$ هو الأصلي الأكبر لمجموعة مسيطرة موضعية صغرى (في مفهوم الاحتواء) للبيان G . نقول عن المجموعة S المسيطرة الموضعية للبيان G إنها كلية إذا كان لكل رأس من S مجاور في S . عدد السيطرة الموضعية الكلية للبيان G , والذي نرسم له $\gamma_t(G)$ هو الأصلي الأصغر لمجموعة مسيطرة موضعية كلية للبيان G .

في بادئ الأمر نتطرق إلى الوسيط Γ_L , علما انه لم تتجز أي دراسة لحد الآن حوله حسب علمنا , حيث نبرهن أن كل مجموعة مستقلة كبرى هي مسيطرة موضعية صغرى (في مفهوم الاحتواء) من أجل كل شجرة أو من أجل كل بيان G عقده أكبر من أو تساوي 5. ثم نقدم بعض الحدود للوسيط Γ_L , كذلك خاصية البيانات التي تبلغ بعض هذه الحدود.

ثانيا، نعرض بعض النتائج المتحصل عليها حول وسيط السيطرة الموضعية γ_L , عن طريق إثبات امتدادات لبعض الحدود المتواجدة سلفا من أجل بعض أصناف البيانات (ثنائيات التصنيف, وحيدة الدورة و بيانات الصبار). نعين كذلك علاقة تربط γ_L بوسائط أخرى للسيطرة γ, ρ, γ_2 .

في الأخير، ندرس بشكل مختصر وسيط السيطرة الموضعية الكلية، حيث نشير إلى بعض النتائج الجزئية التي تحصلنا عليها.

ABSTRACT

In this thesis we are interested in studying locating-domination in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graph, with vertex set V and edge set E . A subset $S \subseteq V$ is a dominating set of G if every vertex of $V - S$ is adjacent to some vertex of S . A dominating set S is called a locating set if every pair of distinct vertices u and v in $V - S$, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. The locating-domination number $\gamma_L(G)$ is the minimum cardinality of a locating-dominating set of G and the upper locating-domination number $\Gamma_L(G)$ is the maximum cardinality of a minimal locating-dominating set of G . A locating dominating set is said to be total if every vertex of S has a neighbour in S . The total locating-domination number $\gamma_t^L(G)$ is the minimum cardinality of a total locating dominating set of G .

So far as we know, no work has been done on the upper locating-dominating number. We show that every maximum independent set is a minimal locating-dominating set for trees and for graphs with girth at least five. We also give some bounds on Γ_L , as well as a characterization of extremal graphs for which one bound on Γ_L is attained.

Then we present some results on the locating-domination number γ_L by giving extensions to some bounds that already exist for particular graphs (bipartite graphs, unicycles, cactus graphs). Moreover we determine a relation between γ_L and other parameters like γ, ρ, γ_2 .

Finally we present some partial results on the total locating-domination number.

REMECIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais exprimer mes vifs et sincères remerciements à Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur Habilité en Mathématiques à l'université Saad Dahlab de Blida, qui a encadré ce travail de thèse et ma profonde gratitude pour m'avoir guider dans mes recherches et pour tous ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité.

Je tiens à remercier Monsieur **Mostapha Blidia**, Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier: Monsieur **Abdelhafid Berrachedi**, Professeur à l'USTHB et Monsieur **Ahmed Semri**, Maître de conférences à l'USTHB, d'avoir honorer ma soutenance en acceptant d'être des membres de jury.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin et qui m'ont permis à accomplir mon manuscrit jusqu'à la fin.

Enfin, je souhaite exprimer ma sympathie à ma famille pour sa patience et son soutien constant qu'elle a pu m'apporter, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

Liste des illustrations graphiques

INTRODUCTION	08
1. NOTIONS GENERALES ET CONCEPTS FONDAMENTAUX	11
1.1 Définitions et notations	11
1.1.1 Graphe et sous-graphe	11
1.1.2 Voisinages	13
1.1.3 Degré d'un sommet	13
1.1.4 Chaînes et cycles	14
1.1.5 Connexité	15
1.2 Graphes particuliers	15
1.3 Quelques paramètres structurels d'un graphe	19
1.4 Introduction à la domination dans les graphes	21
1.4.1. Aperçu sur la domination	21
1.4.2 Paramètres de domination	23
2. ETAT DE L'ART SUR LA DOMINATION LOCALISATRICE	25
2.1 Les ensembles dominants localisateurs	25
2.1.1 Introduction	25
2.2 Relations entre $\gamma, \gamma_L, \gamma_2$ et β_0 dans les arbres	31
2.3 Ensembles dominants localisateurs totaux	36
3. CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA DOMINATION LOCALISATRICE	42
3.1 Nombre de domination localisatrice supérieur	42
3.2 Nombre de domination localisatrice	49
3.3 Relation entre i et γ_L	61

4. LA DOMINATION LOCALISATRICE TOTALE	67
4.1 Minimalité d'un dominant localisateur total	67
4.2 Nombre de domination localisatrice total	68
4.2.1. Relation entre γ_t^L et γ_{x_2}	68
4.2.2. Bornes sur γ_t^L pour les arbres	69
4.2.3. Relation entre γ_t^L et β_0	71
CONCLUSION	75
REFERENCES	77

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1	Graphe simple G	12
Figure 1.2	Sous-graphe engendré par A	12
	Graphe partiel engendré par E'	12
Figure 1.3	Une chaîne P_6	14
	Un cycle C_4	14
Figure 1.4	Un isthme et un point d'articulation	15
Figure 1.5	Graphe complet K_4	16
Figure 1.6	Graphe $G = C_5$	16
	Le complémentaire du graphe G	16
Figure 1.7	Graphe biparti complet $K_{2,3}$	16
Figure 1.8	Arbre T d'ordre $n = 14$, $ S(T) = 4$, $ L(T) = 7$	17
Figure 1.9	Une forêt constituée de trois composantes connexes	17
Figure 1.10	L'étoile $K_{1,4}$	18
	L'étoile subdivisée SS_4	18
Figure 1.11	L'étoile double $S_{3,3}$	18
Figure 1.12	Une chenille T_C	19
Figure 1.13	La couronne $C_7 \circ K_1$	19
Figure 1.14	Un graphe bloc	20
Figure 1.15	Un graphe cactus	21
Figure 1.16	L'échiquier 8×8	22
Figure 2.1	Un graphe G , avec $\gamma_L(G) = 3$	26
Figure 2.2	Un arbre T vérifiant $\gamma_L(T) = (n + l - s + 1) / 3$	29
Figure 2.3	Un graphe où tout stable maximal est un localisateur	29
Figure 3.1	Un graphe G où $\gamma_L(G) = 2$ et $\Gamma_L(G) = 3$	43
Figure 3.2	Un arbre T_t où $\Gamma_L(T_t) = 4t$ et $\beta_0(T_t) = 3t$	47
Figure 3.3	Graphe G_1	60
	Graphe G_2	60
Figure 3.4	Graphe H_1	61
	Graphe H_2	61
Figure 3.5	Le graphe complet K_5 où $i(K_5) = 1$ et $\gamma_L(K_5) = 4$	62
Figure 3.6	Le graphe G_3 dont $\gamma_L(G_3) \prec i(G_3)$	62
Figure 4.1	Un arbre T admettant deux $i(T)$ -ensembles disjoints et $i(T) \neq \gamma_t^L(T)$	69
Figure 4.2	La 2-couronne de P_{2n} vérifie $\gamma_t^L(T) \succ \beta_0(T)$	71
Figure 4.3	L'arbre T_k vérifiant $\gamma_t^L(T_k) \prec \beta_0(T_k)$	72
Figure 4.4	L'arbre T_k vérifiant $\gamma_t^L(T_k) = \frac{2}{3}[\beta_0(T_k) + 1]$	74

INTRODUCTION

La *recherche opérationnelle* est une discipline récente son but est de fournir des méthodes de résolution basées sur des concepts et outils mathématiques.

La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie des jeux, les files d'attente, etc... sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes constitue un outil puissant de la recherche opérationnelle pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes concrets de la vie courante. Elle trouve son origine au 18^{ième} siècle dans l'étude du célèbre problème des ponts de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) résolu par Euler. Depuis elle est devenue plus qu'un outil puissant de modélisation et de résolution de problèmes pratiques, mais aussi un moyen efficace utilisé dans d'autres disciplines telles que (économie, biologie, chimie, physique, l'informatique, etc...). Elle regroupe actuellement différents domaines intéressants et importants, à titre d'exemple on peut citer la coloration, la stabilité, le couplage, etc.

La théorie des graphes comme son nom l'indique traite des problèmes assez variés qui ont tous la caractéristique de pouvoir être représentés par un schéma appelé "graphe". Un graphe est constitué d'un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets etc... et de lignes (arêtes) reliant ces points symbolisant le lien existant entre eux.

Un des concepts intéressants de la théorie des graphes est celui de la domination. Les premiers problèmes qui marquent le début de la théorie de la domination sont les problèmes des jeux des échecs. Grâce à Claude Berge elle est devenue un domaine théorique en 1958, et ce n'est qu'à partir de 1977 qu'elle connaîtra son expansion grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi. Ses applications sont nombreuses et variées (réseaux de communications, de micro-processeurs, les problèmes de localisation, etc...).

La domination localisatrice dans les graphes est le principal objet étudié dans ce mémoire. Elle a été introduite en 1987 par P. J. Slater [1] dans le but d'obtenir une analyse d'une installation de détecteurs d'un intru (incendie, cambrioleur, etc...) d'un graphe représentant une situation où chaque sommet de ce graphe correspond à une pièce, hall, etc., tel que deux sommets sont adjacents si les pièces correspondantes sont voisines. Ce type de problème a motivé le concept d'ensembles dominants localisateurs. En collaboration avec Slater nous avons obtenu des résultats sur la domination localisatrice qui sont soumis pour publication depuis décembre 2008. Nous abordons aussi la domination localisatrice totale introduite par Haynes, Henning et Howard en 2006 [2]. Quatre principaux chapitres sont développés dans ce mémoire.

Le premier chapitre contient quelques définitions fondamentales et des notations de base dans le domaine de la théorie des graphes qui nous sont utiles dans ce mémoire. On présente aussi un aperçu sur la domination dans les graphes. Des notions caractéristiques de chaque chapitre seront définies dans le chapitre lui-même.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons un état de l'art sur la domination localisatrice et la domination localisatrice totale, en rappelant les principaux résultats existants dans ce domaine.

Notre contribution principale se situe dans le troisième chapitre consacré à la domination localisatrice. A notre connaissance aucun résultat n'a été établi sur le nombre de domination localisatrice supérieur. Nous montrons dans ce sens que tout ensemble indépendant maximum est un dominant localisateur minimal pour tout arbre ou pour tout graphe connexe de maille au moins cinq. Nous établissons de plus des bornes sur le nombre de domination localisatrice supérieur. Les graphes extrémaux atteignant l'une de ces bornes sont caractérisés. D'autre part, nous donnons certaines extensions de bornes connues sur le nombre de domination localisatrice pour d'autres classes de graphes (bipartis, les unicycles et les graphes cactus). Nous déterminons aussi une relation liant le nombre de domination localisatrice à d'autres paramètres de domination.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons quelques résultats relatifs à la domination

localisatrice totale. En particulier on constate que les nombres de stabilité et de domination localisatrice totale sont incomparables même dans le cas des arbres. On montre dans cette classe de graphes que le nombre de domination localisatrice totale est au moins égal à $2/3$ du nombre de stabilité plus un.

Finalement, nous achevons ce mémoire par une conclusion sur nos travaux réalisés, ainsi que les perspectives futures dans le domaine de la domination localisatrice dans les graphes.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES ET CONCEPTS FONDAMENTAUX

Nous introduisons dans la première partie de ce chapitre les notations usuelles ainsi que des définitions de bases dans le domaine de la théorie des graphes. La deuxième partie sera consacrée à la domination dans les graphes, on y présentera quelques paramètres de domination.

Pour plus de détails sur la théorie des graphes, nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de Berge [4] quant à celui de la théorie de la domination on se réfère aux ouvrages de Haynes, Hedetniemi et Slater [5] et [6].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes et sous-Graphes

Un *graphe* G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et E est l'ensemble des *arêtes*, sachant qu'une arête e dans $E(G)$ est une paire de sommets (u, v) qu'on note par $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e . On dit que les sommets u et v sont adjacents ou voisins s'ils sont reliés par l'arête e et que e est incidente aux sommets u et v . Le cardinal de V , appelé *ordre* de G , est noté n ($|V| = n$). Le cardinal de E est noté m ($|E| = m$). Les sommets sont désignés par des lettres minuscules: u, v, x, y, a, b, \dots etc. Les arêtes sont désignées par uv, xy, ab, \dots etc.

Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. On dit que $e = uv$ est une arête multiple s'il existe des arêtes $e' \in E(G)$ telles que $e' = uv$. Le graphe G est dit trivial si $n = 1$ et $m = 0$.

Un *graphe simple* est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples. D'après la définition, on peut représenter un graphe dans le plan, où les points représentent l'ensemble

des sommets du graphe reliés entre eux par un ensemble de lignes. La Figure 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ et $E(G) = \{ab, bc, ce, ae, ad, be, cd\}$.

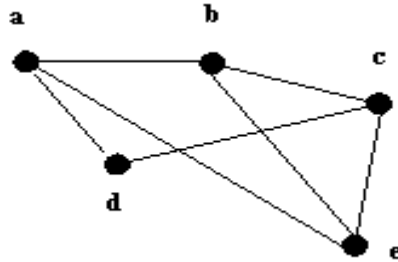


Figure 1.1 : Graphe simple G

Tout au long de ce mémoire, il ne s'agira que de graphes simples et finis.

Soit A un sous-ensemble de V , $A \subseteq V$. On désigne par $G[A]$ le *sous-graphe induit par A* , dont l'ensemble des sommets est l'ensemble A , et l'ensemble des arêtes est le sous-ensemble des arêtes de E qui ont leurs extrémités dans A . Par exemple le graphe de la Figure 1.2 (a) illustre un sous-graphe du graphe de la Figure 1.1 induit par l'ensemble des sommets $A = \{a, b, e\}$.

Un graphe H est appelé *graphe partiel* d'un graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Si on considère le graphe G de la Figure 1.1, et que $E' = \{ab, bc, ad\}$ alors le graphe partiel engendré par E' est représenté dans Figure 1.2.(b).

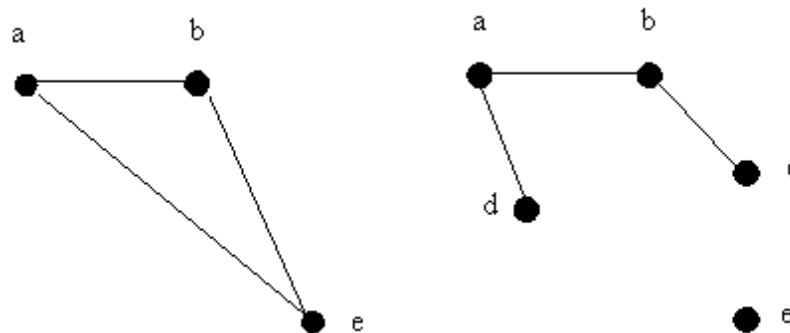


Figure 1.2 : (a) Sous graphe induit par A .

(b) Graphe partiel engendré par E' .

Un sous-ensemble A de V est dit *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset A$ (resp. $B \supset A$) tel que B vérifie la propriété \mathcal{P} .

Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset V$ tel que B vérifie la propriété \mathcal{P} , et $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$).

1.1.2 Voisinages

Pour un sommet v de G , le voisinage *ouvert de v* est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$ et le voisinage *fermé de v* est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. L'ensemble $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous-ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe G , les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Le *voisinage privé* d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $pn[v, S]$ est défini par $N(v) \setminus N(S - \{v\})$, i.e $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$. Le *voisinage privé externe* d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $epn(v, S)$ est le voisinage privé $pn[v, S]$ de v dans $V - S$ tandis que le *voisinage privé interne* d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $ipn(v, S)$ est le voisinage privé $pn[v, S]$ de v dans S , par conséquent, $pn[v, S] = epn(v, S) \cup ipn(v, S)$.

1.1.3 Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet v d'un graphe G , noté $d_G(v)$, est le nombre de voisins de ce sommet. Un sommet de degré 0 est dit *sommet isolé* et un sommet de degré 1 est dit *sommet pendant (feuille)*. On appelle *support* tout sommet adjacent à une feuille. Si le *sommet support* est adjacent à au moins deux feuilles alors il sera appelé *support fort*. On note par $S(G)$ l'ensemble des sommets supports de G , et par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G . On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et *minimum*

dans G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $d(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

1.1.4 Chaînes et Cycles

Une chaîne C d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie (u_1, u_2, \dots, u_k) de sommets distincts tel que pour chaque $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $u_i u_{i+1} \in E(G)$. Les sommets u_1 et u_k sont appelés les extrémités *initiale* et *finale* respectivement de la chaîne C , la longueur d'une chaîne est égale au nombre de ses arêtes, ainsi C est de longueur $k-1$. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*.

On appelle *cycle* C dans un graphe G une chaîne simple dont les extrémités initiale et finale sont confondues.

Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne ou dans un cycle. Une chaîne *minimale induite* par n sommets est une chaîne élémentaire sans corde.

Une chaîne (resp. cycle) *minimale induite* (resp. *minimal induit*) par k sommets est notée par P_k (resp. noté par C_k). La Figure 1.3 représente une chaîne d'ordre 6 et un cycle d'ordre 4.

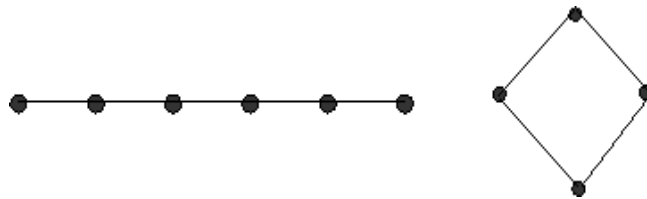


Figure 1.3 : (a) Une chaîne P_6

(b) Un cycle C_4

Un graphe qui contient un seul cycle est dit *unicycle* et un graphe qui ne contient pas de cycle est dit *acyclique*.

On appelle *maille* d'un graphe G , notée par $g(G)$, la longueur du plus petit cycle dans G .

Soient u et v deux sommets d'un graphe G . On appelle *distance* entre u et v , notée $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne entre u et v . Cette chaîne est appelée chaîne *géodésique*. L'*excentricité* d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = \max \{d(v, w) : w \in V\}$. Le *diamètre* du graphe G , noté $diam(G)$, est $diam(G) = \max_{v \in V} \{exc(v) : v \in V\}$.

1.1.5 Connexité

On dit qu'un graphe G est *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts u et v de $V(G)$, il existe une chaîne joignant u et v . Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Une arête e est appelée un *isthme* de G si $G - \{e\}$ contient plus de composantes connexes que G . Un sommet u de G est appelé un sommet d'*articulation* si $G - \{u\}$ contient plus de composantes connexes que G . (Voir Figure 1.4).

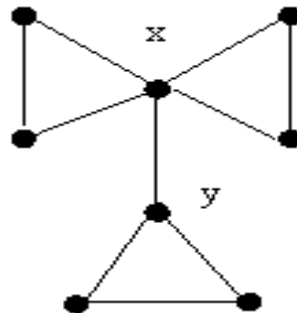
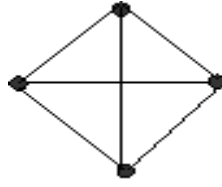


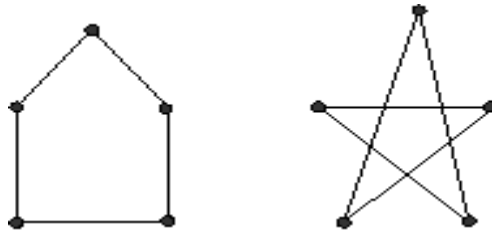
Figure 1.4 : L'arête xy est un isthme, et le sommet x est un point d'articulation

1.2 Graphes particuliers

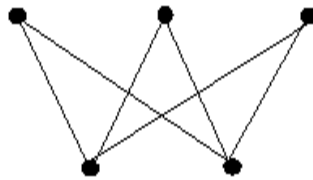
- Le *graphe complet* d'ordre n , noté K_n , est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont adjacents. Dans la Figure 1.5, on représente un graphe complet K_4 .

Figure 1.5 : Graphe Complet K_4

- Le *graphe complémentaire* de $G = (V, E)$, noté $\bar{G} = (V, \bar{E})$, est le graphe dont l'ensemble des sommets V , et pour toute arête e , $e \in \bar{E} \Leftrightarrow e \notin E$. (Voir Figure 1.6).

Figure 1.6 : (a) Graphe $G = C_5$ (b) Le Complémentaire du graphe G

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *graphe biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que deux sommets d'un même sous-ensemble ne soient pas adjacents. On le note aussi $G = (V_1, V_2, E)$. Si de plus tout sommet de V_1 est adjacent à un sommet de V_2 alors G sera dit un graphe biparti complet. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe biparti complet sera noté $K_{p,q}$. La Figure 1.7 illustre un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Figure 1.7 : Graphe biparti complet $K_{2,3}$

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *graphe triangulé* si tout cycle de longueur au moins quatre admet une corde.
- Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n - 1)$ arêtes. (Voir Figure 1.8).

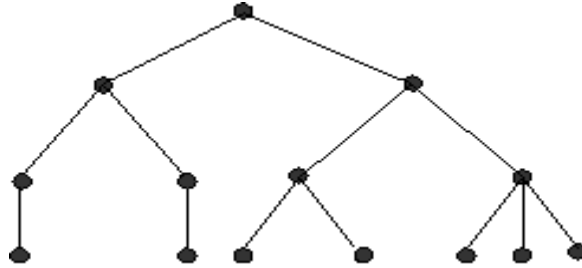


Figure 1.8 : Arbre T d'ordre $n = 14$, $|S(T)| = 4$ et $|L(T)| = 7$

- On appelle *forêt* un graphe dont chaque composante connexe est un arbre. (Voir Figure 1.9).

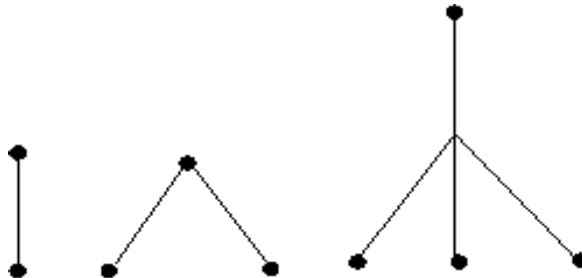


Figure 1.9 : Une forêt constituée de trois composantes connexes

- On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,p}$, le graphe biparti complet $G = (V_1, V_2)$ où $|V_1| = 1$ et $|V_2| = p$. Une étoile subdivisée SS_p est l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$ en subdivisant chaque arête par exactement un sommet. La Figure 1.10 représente une étoile $K_{1,4}$, et une étoile subdivisée SS_4 .

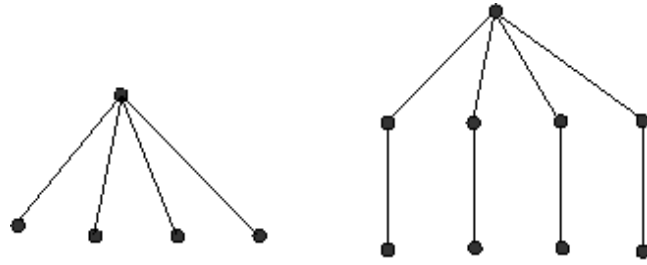


Figure 1.10 : (a) L'étoile $K_{1,4}$ (b) L'étoile subdivisée SS_4

- Une *étoile double* $S_{p,q}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, est l'arbre obtenu en attachant p sommets pendants à une extrémité d'une chaîne P_2 et q sommets pendants à l'autre extrémité. (Voir Figure 1.11).

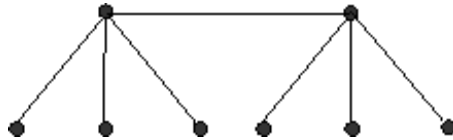


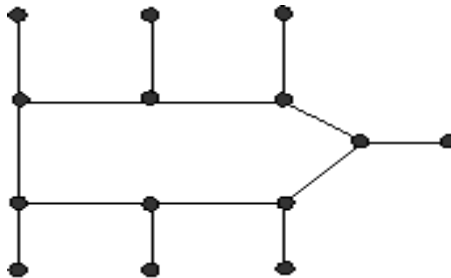
Figure 1.11 : L'étoile double $S_{3,3}$

- Une *chenille* T_C est un arbre dont la suppression de toutes les feuilles produit une chaîne. L'exemple de la Figure 1.12 représente une chenille T_C .

Figure 1.12 : Une chenille T_C

- Soient G un graphe d'ordre n avec $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, et $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un ensemble de sommets distincts de V . Une couronne d'un graphe $G = (V, E)$ le graphe $H = G \circ K_1$ dont l'ensemble de sommets est $V \cup S$ et l'ensemble des arêtes $E(H) = E(G) \cup \{v_i u_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, ainsi $|V(H)| = 2n$. Une k -couronne d'un graphe G est le graphe d'ordre $(k+1)|V(G)|$ obtenu à partir de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueur k de sorte que les chaînes soient disjointes.

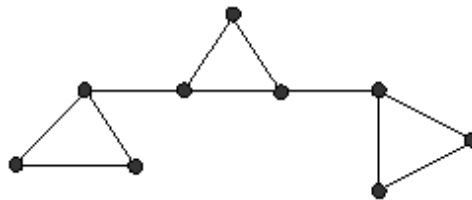
La Figure 1.13 illustre la couronne $C_7 \circ K_1$ d'un cycle C_7 .

Figure 1.13 : La couronne $C_7 \circ K_1$

1.3 Quelques paramètres structurels d'un graphe

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *ensemble indépendant* (ou *stable*) si tous les sommets de S sont deux à deux non adjacents. Le cardinal *minimum* (resp. *maximum*) d'un ensemble indépendant maximal de G , est noté $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$).

- Une *clique* est un sous-graphe complet. La *taille d'une clique* est le nombre de sommets de la clique.
- Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *2-stable* dans G , si pour deux sommets quelconques x et y de S on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un ensemble *2-stable* de G , noté $\rho(G)$, est appelé *le nombre de 2-stabilité*.
- Un *couplage* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble-d'arêtes M de E , qui sont deux à deux non adjacentes. Si de plus tout sommet de V est extrémité d'une arête de M alors M est dit *couplage parfait*.
- On appelle *bloc* dans un graphe G un sous-graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'*articulation*.
- Un *graphe bloc* G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne contient pas un sommet d'articulation alors G est lui même un bloc. L'intersection de deux blocs contient au plus un sommet et dans un graphe bloc un sommet est dit sommet d'articulation si et seulement si il appartient à deux ou plusieurs blocs. (Voir Figure 1.14).

Figure 1.14 : Un Graphe bloc G

- Un *graphe cactus* est un graphe dont toute arête appartient à au plus un cycle. (Voir Figure 1.15).

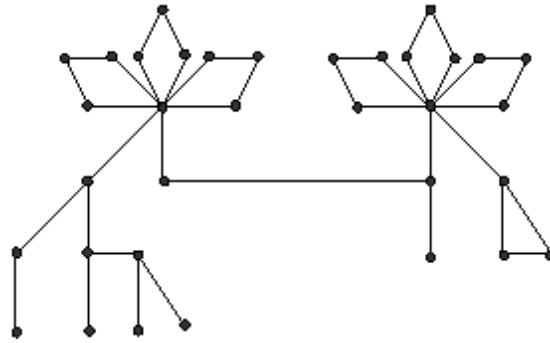


Figure 1.15 : Un Graphe cactus

1.4 Introduction à la domination dans les graphes

1.4.1 Aperçu sur la domination

On commence par donner la définition d'un ensemble dominant dans un graphe.

Définition 1.1. Soit un graphe $G = (V, E)$. Un sous-ensemble de sommets D de V est dit *dominant* de G si tout sommet v de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D . Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble dominant minimal de G , noté $\gamma(G)$, (resp. $\Gamma(G)$) est appelé le nombre de domination inférieur (respectivement supérieur) de G . Un ensemble dominant de G de cardinalité $\gamma(G)$ est appelé un $\gamma(G)$ -ensemble.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans un graphe:

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si pour tout sommet v de V

$$|N[v] \cap S| \geq 1.$$
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si pour tout sommet v de $V - S$,
$$N(v) \cap S \neq \emptyset.$$
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si $N[S] = \cup_{v \in S} N[v] = V$.

Le concept de la domination dans les graphes trouve son origine dans les jeux des échecs. L'idée remonte au XVI^{ème} siècle en Inde [7]. En 1850, les échéphiles en Europe considéraient le problème de détermination du nombre minimum de reines sur un échiquier $n \times n$ de manière à ce que toutes les cases sont, soit attaquées ou dominées par une reine. En 1862, Jaenish [8] avait posé le problème de détermination du nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de façon à ce que chaque case soit occupée par une reine ou bien elle peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Selon la règle des jeux des échecs une reine peut se déplacer vers une voisine horizontalement, verticalement ou en diagonale. Ainsi la reine (voir Figure 1.17) peut dominer toutes les autres cases marquées par X. Dans la (Figure 1.16), on donne une illustration montrant l'ensemble des reines qui peuvent dominer toutes les cases d'un échiquier 8×8 .

	X		X					R						
X	X	X												
X	R	X	X		X	X	X		R					
X	X	X												
	X		X								R			
	X			X								R		
	X				X								R	
	X					X								

Figure 1.16 : L'échiquier 8×8

Pour un échiquier 8×8 le nombre minimum de reines est 5. En 1958 Claude Berge [4] a écrit un livre sur la théorie des graphes dans lequel il a défini pour la première fois le concept du nombre de domination d'un graphe (il l'avait nommé nombre de stabilité externe).

En 1962, Ore [9] a utilisé dans le livre "Graph Theory" les appellations "ensemble dominant", "nombre de domination". En 1977, la parution de l'article de Cockayne et

Hedetniemi [10] sur les résultats obtenus dans le domaine de la domination, cet article a incité une recherche approfondie et plus vaste.

La notion d'introduire des conditions supplémentaires sur les sommets d'un ensemble dominant, a donné naissance à de nouveaux paramètres de domination. Actuellement il existe plus de 100 types de domination et plus de 2000 références dans ce domaine. En 1998 Haynes, Hedetniemi et Slater [5, 6] ont édité deux livres qui comportent 80 types de domination et 1200 références. On notera aussi un numéro de la revue *Discrete Mathematics* [11] qui est entièrement consacré à la domination.

1.4.2 Paramètres de domination

La notion de stabilité dans un graphe est liée en premier lieu aux ensembles dominants. On peut facilement voir que tout stable maximal est un dominant. Par conséquent on a pour tout graphe simple G , $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$.

En 1978, Cockayne, Hedetniemi et Miller [12] donnaient une extension à cette chaîne en introduisant une nouvelle notion liée à la domination appelée l'irrédondance. On dira qu'un ensemble $S \subseteq V$ est un *irrédondant* si pour tout $x \in S$ on a $pn[x, S] \neq \emptyset$ i.e chaque sommet de S possède un voisinage privé relatif à S . Le cardinal minimum (respectivement maximum) d'un ensemble irrédondant maximal noté $ir(G)$ (respectivement $IR(G)$) est appelée le nombre d'irrédondance inférieur (respectivement supérieur). Il est facile de voir aussi que tout ensemble dominant minimal est un irrédondant. La chaîne d'inégalité introduite par Cockayne, Hedetniemi et Miller est la suivante:

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

Vu la diversité des problèmes liés à la domination, notre étude sera restreinte à quelques types de paramètres de domination qui contribueront à l'étude des paramètres concernés dans ce mémoire.

La domination stable: *Un sous-ensemble S de V est dit dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$) est appelé le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité) de G .*

La domination totale: *Un sous ensemble S de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans S i.e, $N(S) = V$. Le nombre de domination total noté $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G .*

La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes, et Hedetniemi dans [13].

La k-domination: *Un sous ensemble S de V est dit k -dominant de G , si tout sommet $v \in V - S$, v est adjacent à au moins k sommets de S . Le nombre de k -domination noté par $\gamma_k(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble k -dominant de G .*

La k -domination a été introduite par Fink et Jacobson dans [14]

La domination double: *Un sous ensemble S de V est dit dominant double de G , si tout sommet de V est dominé par au moins deux autres sommets, i.e si $x \in V - S$ alors x a au moins deux voisins dans S et si $x \in S$ alors x a au moins un voisin dans S . Le nombre de domination double noté par $\gamma_{\times 2}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G .*

La domination double a été introduite par Harary et Haynes dans [15].

La domination localisatrice: *Un sous ensemble S de V est dit dominant localisateur de G si S est un ensemble dominant de G , et si de plus pour toute paire de sommets u, v de $V - S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$. Le nombre de domination localisatrice, noté $\gamma_L(G)$, désigne le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G .*

La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduite par P. J. Slater dans [1].

La domination localisatrice totale: *Un ensemble dominant total S de G est un localisateur si toute paire de sommets u, v de $V - S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$. Le nombre de domination localisatrice totale, noté $\gamma_t^L(G)$, désigne le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur total de G .*

La notion d'ensemble dominant localisateur total a été introduite par Haynes, Henning et Howard dans [2].

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LA DOMINATION LOCALISATRICE

Dans le chapitre 2, on exposera quelques résultats connus sur la domination localisatrice de façon générale.

2.1 Les ensembles dominants localisateurs

2.1.1 Introduction

La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduite par Slater [1], en 1987. Dans le but d'obtenir une analyse d'une installation garantie de tout danger, telle que l'étude d'une protection contre l'incendie, le cambriolage ou le sabotage, cette installation peut être représentée par un graphe ou un réseau, pour de telles applications, un sommet peut représenter une chambre, un hall, une cour ou une cage d'escalier etc. Chaque arête peut connecter deux zones qui sont adjacentes. Une des fonctions primaires d'un système de sauvegarde est la "détection de certains objets", comme la détection d'incendie, de cambriolage ou d'intrus tel un saboteur. Ils ont supposé la présence d'un appareil de détection, étant donné que ces appareils de détection sont coûteux, cela a incité à optimiser leur usage. Le graphe associé à cette analyse motiva le concept des ensembles localisateurs, et davantage l'idée des ensembles dominants localisateurs.

On commence par rappeler la définition d'un ensemble dominant localisateur, et donner une remarque qui sera utile par la suite.

Définition 2.1. Soient un graphe $G=(V,E)$ et S un sous ensemble de V . On dit que S est un ensemble dominant localisateur de G , on le note EDL si S est un ensemble dominant, et si de plus pour toute paire de sommets u et v de $V - S$, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G est appelé nombre de domination localisatrice, noté $\gamma_L(G)$. Un EDL de G de cardinal minimum est dit un $\gamma_L(G)$ -ensemble.

On donne une illustration, soit G le graphe représenté dans la Figure 2.1. L'ensemble $S = \{x_2, x_4, x_5\}$ est un dominant localisateur minimum du graphe G . On vérifie facilement que les ensembles $\{x_1\} \cap S = \{x_2\}$, $\{x_3\} \cap S = \{x_2, x_4\}$ sont distincts.

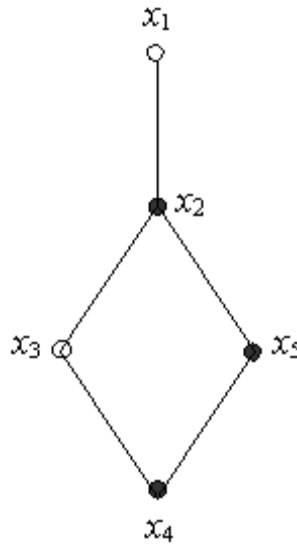


Figure 2.1 : Un graphe G , avec $\gamma_L(G) = 3$

Remarque 2.2. Soit G un graphe. Alors:

- Il existe un $\gamma_L(G)$ -ensemble contenant tous les sommets supports de G .
- Si v est un sommet support, alors tout $\gamma_L(G)$ -ensemble contient au moins $|L_v|$ sommets de $L_v \cup \{v\}$.

Lemme 2.3 (Slater [1] 1988). Soient S un EDL de G et u, v deux sommets de $V(G)$ tels que:

1. Si $uv \notin E(G)$ alors $N(v) = N(u)$.
2. Si $uv \in E(G)$ alors $N[v] = N[u]$.

alors S contient au moins un des deux sommets u et v .

On conclut à partir du lemme 2.3 que $\gamma_L(K_{1,p}) = p$, et $\gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Théorème 2.4 (Slater [1], [3] 1988). 1. Pour tout graphe G , on a $\gamma_L(G) \geq \gamma(G)$.

2. $\gamma_L(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

3. $\gamma_L(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$ où $G = K_{1,n-1}$.

4. Pour toute chaîne P_n et cycle C_n d'ordre n , on a:

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 5k \\ 2k + 1 & \text{si } n = 5k + 1 \text{ ou } 5k + 2 \\ 2k + 2 & \text{si } n = 5k + 3 \text{ ou } 5k + 4 \end{cases}$$

5. Si G_1, G_2, \dots, G_k sont les composantes connexes d'un graphe G , alors on a $\gamma_L(G) = \gamma_L(G_1) + \gamma_L(G_2) + \dots + \gamma_L(G_k)$.

6. Si $2 < p < q$, alors on a $\gamma_L(K_{p,q}) = p + q - 2$, si $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ où $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$, alors on a $\gamma_L(K_{p_1, p_2, \dots, p_k}) = p - k$.

Le Théorème suivant donne une relation du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre de domination localisatrice.

Théorème 2.5 (Slater [3] 1988). Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors on a

$$\gamma_L(G) + \gamma_L(\overline{G}) \leq 2n - 1 \text{ et } \gamma_L(G) \times \gamma_L(\overline{G}) \leq n(n - 1).$$

Théorème 2.6 (Slater [16] 1995). Si G est un graphe d'ordre n tel que $d_i \geq d_{i+1}$, ($d_k = d_G(v_k)$), pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, alors

$$\gamma_L(G) \geq \min \{k : k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) \geq n\}.$$

Théorème 2.7 (Slater [16] en 1995). Si G est un graphe d'ordre n tel que $d_i \geq d_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, alors $\gamma_L(G) \geq \min \{k : 3k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k)/2 \geq n\}$.

Avant d'énoncer le théorème suivant [16] on donne la définition d'un graphe r -régulier.

Définition 2.8. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit r -régulier si tous les sommets de G sont de degré r .*

Dans le théorème suivant, Slater a donné une borne inférieure sur γ_L pour les graphes réguliers.

Théorème 2.9 (Slater [16] en 1995). *Si G est un graphe r -régulier, alors $\gamma_L(G) \geq \frac{2n}{(r+3)}$.*

Théorème 2.10 (Slater [3] en 1988). *Si pour un graphe G d'ordre n , $\gamma_L(G) = h$, alors on a $n \leq h + 2^h - 1$.*

A partir du Théorème 2.10, les graphes G dont $\gamma_L(G) = 1$ sont K_1 ou K_2 , et ceux dont $\gamma_L(G) = 2$, sont P_3 , P_4 , P_5 ou C_5 .

Le résultat suivant donne une amélioration de la borne du Théorème 2.10 pour certains graphes.

Théorème 2.11 (Slater [3] en 1988). *Si pour un graphe G d'ordre n et de degré Δ , $\gamma_L(G) = h$, alors $n \leq h + \sum_{i=1}^{\Delta} \binom{h}{i}$.*

Preuve. Soit v un sommet de $V(G)$ de degré maximum Δ , et soit S un $\gamma_L(G)$ -ensemble avec $|S| = h$. Si $v, u \in V(G) - S$, comme $S \cap N(v) \neq S \cap N(u)$, alors $|V(G) - S| \leq \binom{h}{1} + \binom{h}{2} + \dots + \binom{h}{\Delta}$. \square

Dans [1], Slater a montré que tout $\gamma_L(T)$ -ensemble d'un arbre T d'ordre n contient plus de $\frac{n}{3}$ sommets de T . Cette borne a été améliorée par Blidia, Chellali, Maffray, Semri et Moncel. Par conséquent on énonce le théorème suivant.

Théorème 2.12 (Blidia, Chellali, Maffray, Semri et Moncel. [17] 2007). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_L(T) \geq (n + l(T) - s(T) + 1)/3$. La borne est atteinte pour la chaîne P_5 .*

L'arbre de la Figure 2.2 est un exemple, tel que $\gamma_L(T) = k = \frac{(n + l(T) - s(T) + 1)}{3}$.

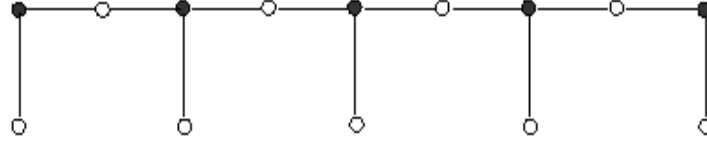


Figure 2.2 : Un arbre T vérifiant $\gamma_L(T) = \frac{n+l-s+1}{3}$

Avant de présenter le résultat obtenu par Finbow et Hartnell sur une classe de graphes appelée les *graphes bien-couverts*, on donne la définition suivante.

Définition 2.13. *Un graphe G est dit bien-couvert si $i(G) = \beta(G)$, i.e tous les ensembles indépendants maximaux ont le même cardinal.*

Théorème 2.14 (Finbow et Hartnell [18] 1988). *Soit G un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors G est bien-couvert si et seulement si tout dominant stable de G est un localisateur.*

L'exemple de la Figure 2.3 montre que tout dominant stable de G est un localisateur.

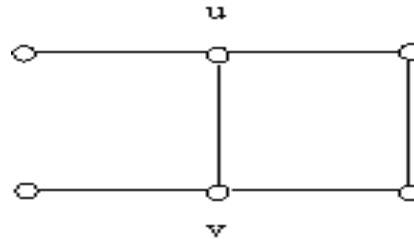


Figure 2.3 : Un graphe G où tout stable maximal est un localisateur

Dans [19], Blidia et Lounès ont caractérisé les sommets qui sont dans tous ou dans aucun dominant localisateur minimal, pour la classe des arbres.

Dans un récent travail, Blidia et al. [20] ont caractérisé les arbres admettant un ensemble dominant localisateur unique. Un arbre vérifiant cette propriété sera noté *ADLU*.

Notons que des études ont été faites afin de déterminer l'unicité d'un ensemble dominant minimum pour quelques paramètres de domination dans des classes de graphes tels les arbres. Pour plus de détails on pourra consulter les articles [21], [22], [23], [24].

Commençons par donner les deux remarques suivantes.

Remarque 2.15. [20] *Si T un arbre non trivial qui admet un $\gamma_L(T)$ -ensemble unique D , alors:*

- a) *Tout sommet support appartient à D .*
- b) *Chaque sommet support est adjacent à exactement un sommet pendant.*
- c) *D ne contient aucun sommet pendant.*

Lemme 2.16 (Blidia et al. [20] 2007). *Soient G un graphe connexe non trivial et D un $\gamma_L(G)$ -ensemble. Si pour tout sommet $v \in D$, $\gamma_L(G - v) > \gamma_L(G)$, alors G admet un $\gamma_L(G)$ -ensemble unique.*

Les mêmes auteurs donnent un exemple qui montre que la réciproque du Lemme 2.16 est fautive en général. Considérons un graphe G obtenu à partir de deux cycles disjoints C_5 , x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , et y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 en identifiant les sommets x_1 et y_1 , désignons par w le nouveau sommet obtenu, ajouter deux sommets u, v , ainsi que les arêtes ux_i, vy_i pour $i = 2, 3, 4, 5$. L'ensemble $S = \{x_2, x_5, y_2, y_5\}$ est un unique $\gamma_L(G)$ -ensemble, mais pour tout $z \in \{x_2, x_5, y_2, y_5\}$, $\gamma_L(G - z) = \gamma_L(G)$.

Soient T_1 et T_2 deux *ADLU* disjoints chacun d'ordre au moins 5. Soient A_1 l'unique $\gamma_L(T_1)$ -ensemble, et A_2 l'unique $\gamma_L(T_2)$ -ensemble. On définit ci-dessous deux opérations qui permettront de lier les deux *ADLU* T_1 et T_2 afin d'obtenir un nouvel *ADLU*.

- **Opération \mathcal{O}_1 :** Relier par une arête un sommet de A_1 à un sommet de A_2 .
- **Opération \mathcal{O}_2 :** Relier par une arête un sommet de $V(T_1) - A_1$ à un sommet de $V(T_2) - A_2$.

Soient T_1, T_2, \dots, T_k k *ADLU* disjoints, d'ordre au moins cinq, et soient respectivement A_1, A_2, \dots, A_k leurs uniques $\gamma_L(T_i)$ -ensembles. Pour chaque i , soit u_i un sommet de A_i . On définit les deux opérations suivantes:

• **Opération \mathcal{O}_3 :** Si $k \geq 3$. Relier par l'arête vu_i un nouveau sommet v à un sommet u_i de chaque A_i pour tout i , ($1 \leq i \leq k$).

• **Opération \mathcal{O}_4 :** Si $k \geq 2$. Relier par l'arête w_iu_i un sommet pendant w_i d'une étoile $S_{1,k}$ centrée en v à un sommet u_i de chaque A_i pour tout i , ($1 \leq i \leq k$), sous la condition qu'au moins deux sommets de $\{u_1, \dots, u_k\}$ admettent chacun un voisin privé par rapport à A_i dans T_i .

Afin de donner une caractérisation des arbres admettant un $\gamma_L(T)$ -ensemble unique, Blidia, Chellali, Lounes et Maffray ont défini une famille d'arbres \mathcal{U} obtenus à partir de couronnes d'ordre au moins quatre en subdivisant une seule fois toute les arêtes entre les sommets supports.

Théorème 2.17 (Blidia et al [20] 2007). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) T est un ADLU.
- (b) T admet un $\gamma_L(T)$ -ensemble D tel que $\gamma_L(T - v) > \gamma_L(T)$ pour tout sommet $v \in D$.
- (c) $T \in \mathcal{U}$ ou bien T peut être construit à partir d'arbres disjoints de \mathcal{U} par une séquence finie d'opérations $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ ou \mathcal{O}_4 .

2.2 Relations entre $\gamma, \gamma_L, \gamma_2$, et β_0 dans les arbres

Dans cette section, on présente les récents résultats obtenus par Blidia, Favaron, et Lounès concernant la relation entre les paramètres γ, γ_L, β , et γ_2 , pour le cas des arbres.

2.2.1 Borne supérieure sur γ_L

Le Théorème suivant donne une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice pour les arbres.

Théorème 2.18 (Blidia, Chellali, Maffray, Semri et Moncel. [17] 2007). *Si T est un arbre d'ordre n , avec l sommets pendants et s sommets supports, alors $\gamma_L(T) \leq \frac{(n + l - s)}{2}$.*

La borne du Théorème 2.18 est atteinte pour la famille d'arbres \mathcal{F} pouvant être obtenue à partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) telle que T_1 est une chaîne $P_3 = x-y-t$ ou une chaîne P_4 . $T = T_k$, et si $2 \leq i \leq k$, T_{i+1} peut être obtenu à partir de T_i par une des cinq opérations définies ci-dessous. On pose $D(T_1) = \{x, y\}$ si $T_1 = P_3$ et $D(T_1) = S(P_4)$ si $T_1 = P_4$.

- **Opération \mathcal{F}_1 :** Ajouter à T_i un sommet w en attachant par une arête un sommet support de T_i à w . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{w\}$.

- **Opération \mathcal{F}_2 :** Ajouter à T_i un $P_2 = u-v$ en attachant par l'arête uz un sommet support z de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{u\}$.

- **Opération \mathcal{F}_3 :** Ajouter à T_i une étoile subdivisée $H = SS_p$, avec $p \geq 2$ centrée en a , en attachant par l'arête ab' un sommet pendant b' d'un support fort de T . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup S(H)$.

- **Opération \mathcal{F}_4 :** Ajouter à T_i un $P_3 = b-c-d$ et $p \geq 0$ chaînes $P_2 = u_i-v_i$ en attachant par les arêtes df et $u_i f$ pour chaque i , un sommet pendant f de $D(T_i)$ où f est un pendant d'un support fort de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{c, u_1, \dots, u_p\}$.

- **Opération \mathcal{F}_5 :** Ajouter à T_i un $P_4 = a-b-c-d$ et $p \geq 0$ chaînes $P_2 = u_i-v_i$ en attachant par les arêtes dy et $u_i d$ pour chaque i , un sommet y de T_i qui n'est pas un sommet support et pour lequel $\gamma_L(T_i - y) = \gamma_L(T_i)$. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{b, d, u_1, \dots, u_p\}$.

Notons que l'opération \mathcal{F}_5 ne peut être appliquée à un sommet pendant y d'un support fort, puisque dans ce cas $\gamma_L(T_i - y) < \gamma_L(T_i)$.

Théorème 2.19 (Blidia et al. [17] 2007). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_L(T) = \frac{(n + l(T) - s(T))}{2}$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

2.2.2 Caractérisation des arbres T tels que $\gamma_L(T) = \gamma(T)$

La caractérisation des arbres T satisfaisant $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ a été faite par Blidia, Chellali, Maffray, Semri et Moncel dans [17].

Soit \mathcal{Q} la famille d'arbres qui peut être obtenue à partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) telle que T_1 est une chaîne $P_2 = x-y$. $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1}

peut être obtenu à partir de T_i par une des trois opérations définies ci-dessous. Considérons $x \in T_1$, comme support, et l'autre sommet y de T_1 comme feuille.

- **Opération \mathcal{Q}_1 :** Ajouter à T_i un $P_2 = u-v$ en attachant par l'arête uz un sommet support z de T_i .

- **Opération \mathcal{Q}_2 :** Ajouter à T_i une étoile subdivisée $H = SS_p$, avec $p \geq 2$ centrée en a , en attachant par l'arête ab un sommet quelconque b de T_i .

- **Opération \mathcal{Q}_3 :** Ajouter à T_i un $P_3 = u-v-w$ en attachant par l'arête uc un sommet c appartenant à un $\gamma_L(T_i)$ -ensemble.

Théorème 2.20 (Blidia et al. [17] 2007). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{Q}$.*

2.2.3 Borne inférieure sur β_0

La proposition suivante donne une borne inférieure sur le nombre de stabilité β_0 établi par Blidia et al. dans [26]. Donnons d'abord une remarque utile pour la suite.

Remarque 2.21. *Dans un graphe G , il existe un $\beta_0(G)$ -ensemble contenant tous les sommets pendants de G . Si u est un sommet support fort dans G , alors tout $\beta_0(G)$ -ensemble contient L_u .*

Proposition 2.22. *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre n , avec l sommets pendants et s sommets supports, alors on a $\beta_0(G) \geq \frac{(n+l-s)}{2}$.*

L'inégalité $\beta_0(G) \geq \frac{(n+l(T)-s(T))}{2}$ est satisfaite pour tout graphe biparti, mais les graphes extrémaux n'ont pas été déterminés, sauf pour le cas des arbres. Cette borne est atteinte pour les arbres T appartenant à la famille d'arbres \mathcal{G} caractérisée par Blidia et al. dans [25].

Proposition 2.23 (Blidia, Favaron et Lounès, [25] 2007). *Soit T un arbre alors $T \in \mathcal{G}$ (i.e $\beta_0(G) = \frac{(n+l(T)-s(T))}{2}$) si et seulement si son corps $C(T) = V(T) \setminus S(T) \cup L(T)$ induit un arbre avec un couplage parfait.*

2.2.4 Borne inférieure sur γ_2

Dans [14], Fink et Jacobson ont donné une borne inférieure sur γ_2 pour le cas des arbres. Avant de présenter leur Théorème, on donne la remarque suivante.

Remarque 2.24. *Dans un graphe G , un $\gamma_2(G)$ -ensemble contient tous les sommets pendants de G .*

Théorème 2.25 (Fink et Jacobson [14] 1985). *Si T est un arbre d'ordre n , alors*

$$\gamma_2(T) \geq \frac{(n+1)}{2}.$$

Dans [27], Chellali a amélioré cette borne pour les arbres avec $l(T) > s(T)$ en montrant les résultats suivants:

Théorème 2.26 (Chellali, [27] 2006). *Si G est un graphe d'ordre n , avec au plus un cycle, l sommets pendants et s sommets supports, alors on a $\gamma_2(G) \geq \frac{(n+l-s)}{2}$.*

2.2.5 Relation entre les paramètres γ_L , β_0 et γ_2

En général les paramètres γ_L , β_0 , et γ_2 sont incomparables. En effet si G est le graphe biparti complet $K_{p,q}$ avec $4 \leq p \leq q$, on peut voir que $\gamma_L(K_{p,q}) = p + q - 2$, $\beta_0(K_{p,q}) = q$ et $\gamma_2(K_{p,q}) = 4$.

Le Théorème suivant de Blidia et al. [28], donne une relation entre β_0 et γ_2 dans les arbres.

Théorème 2.27 (Blidia, Chellali, et Favaron, [28] 2005). *Pour tout arbre T , on a*

$$\gamma_2(T) \geq \beta_0(T).$$

La borne est atteinte pour la famille d'arbres \mathcal{A} caractérisée par Blidia et al. dans [28].

Soit \mathcal{A} la famille des arbres qui peut être obtenue à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$), où T_1 est une étoile $S_{1,t}$ ($t \geq 2$) centrée en un sommet w , $T = T_k$, et si ($k \geq 2$) T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par une des trois opérations définies ci-dessous. Poser $A(T_1) = L_w$.

Opération \mathcal{O}_1 : Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}$, $p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet pendant y de T_i . Poser $A(T_{i+1}) = L_x$.

Opération \mathcal{O}_2 : Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}$, $p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet non pendant y de $A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Opération \mathcal{O}_3 : Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}$, $p \geq 2$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet y de $V(T_i) - A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Soit \mathcal{A}_1 la sous famille de \mathcal{A} constituée des arbres construits à partir de T_1 par l'application récursive de l'opération \mathcal{O}_1 .

La caractérisation des arbres T tels que $\gamma_2(T) = \beta(T)$ est donnée par le Théorème suivant.

Théorème 2.28 (Blidia et al. [28] 2005). *Soit T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{A}$.*

On déduit le corollaire suivant en conséquence des Théorèmes 2.18, 2.22, et 2.27.

Corollaire 2.29 (Blidia et al. [25] 2007). *Pour tout arbre T , on a*

$$\gamma_L(T) \leq (n + l(T) - s(T))/2 \leq \beta_0(T) \leq \gamma_2(T).$$

Définition 2.30. [25] *Un arbre T est une pseudocouronne si son corps*

$$C(T) = V(T) \setminus S(T) \cup L(T) \text{ est vide.}$$

Définition 2.31. [25] *Un arbre T est une couronne forte s'il est obtenu à partir d'un arbre T' en attachant à chaque sommet de T' au moins deux sommets pendants.*

Théorème 2.32 (Blidia et al. [25] 2007). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ on a:*

$\beta_0(T) + \gamma_L(T) \leq n + l(T) - s(T)$. *La borne est atteinte pour la famille \mathcal{J} des pseudocouronnes des arbres.*

Dans le Théorème suivant, Blidia et al. [25] ont donné une caractérisation descriptive des arbres vérifiant $\gamma_L(T) = \gamma_2(T) = \frac{(n + l(T) - s(T))}{2}$.

Théorème 2.33 (Blidia et al. [25] 2007). *Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$.
- (ii) *L'arbre T est une couronne forte*
- (iii) $\gamma_2(T) = \frac{(n + l(T) - s(T))}{2}$.

Le Théorème qui suit établi par Blidia et al. donne une caractérisation des arbres T tels que $\gamma_L(T) = \beta_0(T)$.

Théorème 2.34. [25] *Pour tout arbre T , $\gamma_L(T) = \beta_0(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Théorème 2.35. [25] *Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\gamma_L(T) = \frac{(n + l(T) - s(T))}{2}$.
- (ii) $\gamma_L(T) = \beta_0(T)$.

2.2.6 Bornes supérieures sur les rapports $\beta_0(T)/\gamma_L(T)$ et $\gamma_2(T)/\gamma_L(T)$

Dans la section suivante, on présente quelques bornes supérieures établies sur les rapports tels que: $\beta_0(T)/\gamma_L(T)$ et $\gamma_2(T)/\gamma_L(T)$.

Théorème 2.36 (Blidia et al. [25] 2007). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, T satisfaisant la propriété suivante: $\beta_0(T)/\gamma_L(T) \leq \gamma_2(T)/\gamma_L(T) < 2$, cette borne est asymptotiquement atteinte .*

En conséquence du Théorème 2.36, on énonce le Corollaire suivant.

Corollaire 2.37. *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$ on a: $\beta_0(T) \leq \gamma_2(T) \leq 2\gamma_L(T) - 1$.*

2.3 Ensembles dominants localisateurs totaux

Dans la section suivante, on présentera les principaux résultats obtenus sur la domination localisatrice totale pour les arbres.

Il est clair que tout ensemble dominant localisateur total est un ensemble dominant total, et par conséquent, on a:

Proposition 2.38. *Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a : $\gamma_t^L(T) \geq \gamma_t(T)$.*

Remarque 2.39 (Haynes, Henning, et Howard, [2] 2006). *Si G est une chaîne alors tout ensemble dominant total est un ensemble dominant localisateur total.*

Suite à cette remarque on énonce le Théorème suivant de Haynes et al. dans [2].

Théorème 2.40 (Haynes et al. [2] 2006). *Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a :*

$$\gamma_t^L(T) = \gamma_t(T) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor.$$

Lemme 2.41 (J. Rad, [29] 2008). *Soit K_n d'ordre n , on a :*

1. $\gamma_t^L(K_2) = 2$, et $\gamma_t^L(K_n) = n - 1$ pour $n \geq 3$.
2. $\gamma_t^L(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ pour $n \geq 3$.
3. $\gamma_t^L(K_{1,n}) = n$, pour $n \geq 2$, $\gamma_t^L(K_{m,n}) = m + n - 2$, pour $\min\{m, n\} = 2$.

Avant de donner une caractérisation d'une certaine classe de graphes vérifiant la propriété qu'on va citer ci-dessous, on présente la remarque suivante.

Remarque 2.42. [29] *Pour tout graphe connexe $G = (V, E)$, d'ordre $n \geq 2$, on a :*

$$2 \leq \gamma_t^L(G) \leq |V(G)| - 1.$$

La caractérisation de la famille d'arbres \mathcal{M} (resp \mathcal{N}) qui satisfait $\gamma_t^L(G) = 2$ (resp $\gamma_t^L(G) = n - 1$) a été faite par N.J. Rad dans [29].

2.3.1 Caractérisation de la famille \mathcal{M}

Soient \mathcal{A}_1 la famille de tous les graphes obtenue à partir d'un $P_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ par l'opération suivante:

O : On ajoute un sommet x aux sommets v_2, v_3 attachée par les arêtes xv_2 et xv_3 , et on ajoute au moins une arête à $\{v_1, v_4\}$.

et \mathcal{A}_2 la famille de tous les graphes obtenus à partir d'un C_4 , par l'opération suivante:

O' : On ajoute un sommet x à au moins deux sommets de $V(C_4)$. Et \mathcal{A}_3 la famille de tous les graphes obtenus à partir de la couronne $C_3 \circ K_1$ en supprimant au moins un sommet de la couronne.

Par conséquent, on énonce le Théorème suivant :

Théorème 2.43 (J. Rad, [29] 2008). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

- $\gamma_t^L(G) = 2$ si et seulement si $G \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \{P_2, P_3, P_4, C_4, K_4 - \{e\}\}$.
- $\gamma_t^L(G) = |V(G)| - 1$ si et seulement si G est une étoile ou un graphe complet d'ordre au moins trois.

Dans le Théorème suivant, J. Rad a donné une borne inférieure sur le nombre de domination localisatrice totale d'un graphe G , en fonction de l'ordre de G .

Théorème 2.44. [29] *Si G est un graphe avec n sommets, et $\gamma_t^L(G) = a$ alors $n \leq 2^a + a - 1$ et la borne est atteinte.*

La borne supérieure du Théorème 2.44 est atteinte pour les graphes construits de la façon suivante. Soit $V(K_a) = \{v_1, v_2, \dots, v_a\}$. Pour chaque sommet v_i , on lui ajoute un sommet w_i , en attachant l'arête $w_i v_i$ pour obtenir le graphe G_1 , par conséquent, $\gamma_t^L(G_1) = a$. On construit le graphe G_{i+1} à partir du graphe G_i , pour $i = 1, \dots, a - 1$ comme suit: pour chaque $\binom{a}{2}$ -sous ensemble S_1 de $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$, on ajoute un nouveau sommet à G_1 et relier ce sommet à tous les sommets de S_1 pour obtenir le graphe G_2 . Pour chaque $\binom{a}{3}$ -sous ensemble S_2 de $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$, on ajoute un nouveau sommet à G_2 et relier ce sommet à tous les sommets de S_2 pour obtenir le graphe G_3 et ainsi de suite on obtient les graphes $G_4, \dots, G_a = H$. Finalement il est facile de vérifier que $\gamma_t^L(G_1) = \gamma_t^L(G_2) = \dots = \gamma_t^L(H) = a$ et $|V(H)| = 2^a + a - 1$.

Théorème 2.45. [29] *Soient a et b deux entiers positifs tels que $a + 1 \leq b \leq 2^a + a - 1$, alors il existe un graphe G avec $\gamma_t^L(G) = a$ et $|V(G)| = b$.*

On présente dans ce qui suit un Théorème qui donne une borne inférieure sur le nombre de domination localisatrice totale d'un graphe G en fonction du diamètre de G .

Théorème 2.46. [29] Pour tout graphe connexe G , $\gamma_t^L(G) \geq \left\lceil \frac{\text{Diam}(G)+1}{2} \right\rceil$, cette borne est atteinte pour les chaînes P_n , $n \geq 3$.

2.3.2 Bornes inférieures sur $\gamma_t^L(T)$ dans les arbres

Deux bornes inférieures ont été données par Haynes, Henning et Howard [2] sur le nombre de domination localisatrice totale pour les arbres, ainsi que la caractérisation des arbres extrémaux pour chaque borne inférieure. Par conséquent, on énonce les Théorèmes suivants:

Théorème 2.47. [2] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ alors $\gamma_t^L(T) \geq \frac{2(n+1)}{5}$. La borne est atteinte si et seulement si T appartient à la famille d'arbres obtenue à partir de k copies disjointes de P_4 en ajoutant $k-1$ arêtes de telle sorte à ce qu'elles soient incidentes uniquement avec les supports, le graphe ainsi obtenu est connexe, ensuite on subdivise chaque nouveau sommet une seule fois .

Le Théorème suivant établit une borne inférieure sur γ_t^L pour tout arbre T , en fonction de ses sommets supports et ses feuilles ainsi que son ordre.

Théorème 2.48. [2] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec l sommets pendants et s sommets supports, alors $\gamma_t^L(T) \geq \frac{n+2(l(T)-s(T))+1}{3}$. La borne est atteinte si et seulement si T appartient à la famille d'arbres obtenue à partir d'un arbre quelconque T' en attachant au moins deux feuilles à chaque sommet de T' et si T' est non trivial, alors on subdivise chaque arête de T' une seule fois .

Le Théorème suivant a amélioré la borne inférieure du Théorème 2.47, pour tout arbre non trivial T , ainsi que celle du Théorème 2.48 pour les arbres d'ordre $n \geq 4l(T) - 4s(T)$.

Théorème 2.49 (Chellali, [30] 2007). Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ alors $\gamma_t^L(T) \geq \frac{2(n+l(T)-s(T)+1)}{5}$. La borne est atteinte si et seulement si $T = P_2$ ou T appartient à la famille d'arbres obtenue à partir de k copies disjointes de P_4 , en ajoutant $k-1$ arêtes de telle sorte qu'elles soient incidentes uniquement aux sommets supports, le graphe résultant est connexe, ensuite on subdivise chaque nouvelle arête une seule fois .

Notons que Chellali et Haynes [31], 2006, ont montré que tout arbre non trivial satisfait $\gamma_t(T) \geq \frac{n+2-l(T)}{2}$. Etant donné que tout ensemble dominant localisateur total est un ensemble dominant total on a $\gamma_t^L(T) \geq \frac{n+2-l(T)}{2}$, par conséquent on énonce le Théorème suivant qui améliore la borne inférieure du Théorème 2.49 si $n > 4l(T) + s(T) - 6$.

Théorème 2.50. [30] *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ alors $\gamma_t^L(T) \geq \frac{n+2-s(T)}{5}$. La borne est atteinte si et seulement si $T = P_n$ avec $n \equiv 0 \pmod{4}$.*

Donnons deux Théorèmes, l'un deux montre l'effet de la subdivision d'une arête dans un graphe G , et l'autre l'effet de la suppression d'un sommet d'un graphe G .

Théorème 2.51 (J. Rad, [29] 2008). *Soit G' le graphe obtenu à partir d'un graphe G en subdivisant une arête alors $\gamma_t^L(G) \leq \gamma_t^L(G') \leq \gamma_t^L(G) + 1$.*

Théorème 2.52 (J. Rad, [29] 2008). *Soit G' le graphe obtenu à partir d'un graphe G en supprimant un sommet $x \in V - S$, où S est un $\gamma_t^L(G)$ -ensemble de G , alors $\gamma_t^L(G) - 1 \leq \gamma_t^L(G')$ de plus, la différence $\gamma_t^L(G') - \gamma_t^L(G)$ est arbitrairement large.*

CHAPITRE 3

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA DOMINATION

LOCALISATRICE

Dans la première partie de ce chapitre, nous exposerons pour la première fois des résultats obtenus sur le paramètre de domination localisatrice supérieur vu qu'aucun travail n'a été effectué à notre connaissance sur ce paramètre, et la seconde partie concernera ceux du paramètre de domination localisatrice.

3.1 Nombre de domination localisatrice supérieur

On commence par rappeler la définition d'un ensemble dominant localisateur d'un graphe G .

Définition 3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble dominant $S \subseteq V$ est un ensemble dominant localisateur (EDL), si pour toute paire de sommets u et v de $V - S$, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. Le cardinal minimum d'un EDL de G est appelé nombre de domination localisatrice, on le note par $\gamma_L(G)$. Le cardinal maximum d'un EDL minimal de G est appelé nombre de domination localisatrice supérieur, on le note par $\Gamma_L(G)$. Un EDL de G de cardinal $\gamma_L(G)$ (resp. $\Gamma_L(G)$) est appelé un $\gamma_L(G)$ -ensemble (resp. $\Gamma_L(G)$ -ensemble) de G .

L'exemple de la Figure 3.1 représente un graphe G , où $S_1 = \{b, c\}$ est un $\gamma_L(G)$ -ensemble, et $S_2 = \{c, d, e\}$ est un $\Gamma_L(G)$ -ensemble de G .

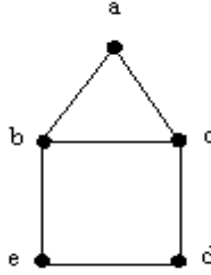


Figure 3.1 : Un graphe G , où $\gamma_L(G) = 2$ et $\Gamma_L(G) = 3$

Etant donné que l'ensemble des sommets d'un graphe G , ayant au moins une arête est un ensemble dominant localisateur qui n'est pas minimal, on a le résultat suivant.

Théorème 3.2 (Chellali, Mimouni, et Slater [32] 2008). *Tout graphe non trivial connexe G d'ordre n satisfait $\Gamma_L(G) \leq n - 1$. La borne est atteinte si et seulement G est un graphe complet ou bien une étoile.*

Preuve. Il est clair que la borne supérieure est due au fait que l'ensemble des sommets de G est un dominant localisateur mais il n'est pas minimal.

Soit S un $\Gamma_L(G)$ -ensemble de taille $n - 1$ et supposons que $V - S = \{u\}$. On suppose d'abord que $A = S - N(u) \neq \emptyset$. La minimalité de S implique que A est un ensemble indépendant car autrement il existe un sommet $z \in A$ ayant un voisin dans A , $S - \{z\}$ est un EDL de G , contradiction. Etant donné que G est connexe, tout sommet $v \in A$ a au moins un voisin dans S . Aussi $N(v) = N(u)$ autrement $S - \{v\}$ est un EDL de G , contradiction. A présent si $|N(u)| \geq 2$, alors puisque tout sommet $u' \in N(u)$ est adjacent à tous les sommets de A , l'ensemble $S - \{u'\}$ est un EDL de G , ceci contredit la minimalité de S . Ainsi $|N(u)| = 1$, donc G est une étoile. Supposons maintenant que $A = \emptyset$. Si toutes les arêtes entre les sommets de S existent, alors G est un graphe complet. Par conséquent soient x, y deux sommets de S non adjacents. Si x a un voisin dans S , alors $S - \{x\}$ est un EDL de G , contradiction. Ainsi x est un sommet isolé dans S , de même pour y . Il s'ensuit que S est un ensemble indépendant, d'où G est une étoile.

La réciproque est vraie (la preuve est évidente). □

Dans ce qui suit on établit la valeur exacte du nombre de domination localisatrice supérieur pour les chaînes.

Théorème 3.3 (Chellali, Mimouni et Slater [32] 2008). *Pour toute chaîne P_n on a*

$$\Gamma_L(P_n) = \begin{cases} 4k & \text{si } n = 7k \\ 4k + 1 & \text{si } n = 7k + 1 \text{ ou } n = 7k + 2 \\ 4k + 2 & \text{si } n = 7k + 3 \text{ ou } n = 7k + 4 \\ 4k + 3 & \text{si } n = 7k + 5 \\ 4k + 4 & \text{si } n = 7k + 6 \end{cases}$$

Preuve. On procède par induction sur l'ordre n . Il est facile de vérifier que le résultat est valide pour $n \leq 7$. Soit $n \geq 8$, on suppose que toute chaîne $P_{n'}$ d'ordre n' , avec $1 \leq n' < n$ satisfait la propriété. Soit P_n une chaîne telle que $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et D un $\Gamma_L(P_n)$ -ensemble quelconque. On montrera que $|D \cap \{u_1, u_2, \dots, u_7\}| = 4$. On note d'abord que D ne contient pas trois sommets consécutifs, ainsi $|D \cap \{u_1, u_2, \dots, u_7\}| \leq 4$. Supposons que $|D \cap \{u_1, u_2, \dots, u_7\}| \leq 3$, si $u_7 \in D$ alors u_2, u_4 doivent être dans D , par conséquent $D' = \{u_1, u_3\} \cup (D - \{u_2\})$ est un EDL minimal de P_n de taille supérieure à $|D|$, contradiction avec l'hypothèse. Donc $u_7 \notin D$, il est clair que $D' = D \cap \{u_8, \dots, u_n\}$ est un EDL de la chaîne $P_{n'} = P_n - \{u_1, u_2, \dots, u_7\}$. Si D' est minimal alors $\{u_1, u_2, u_5, u_6\} \cup D'$ est un EDL minimal de taille supérieure à $|D|$. Ainsi on suppose que D' n'est pas minimal alors il existe un sommet $v \in D'$ tel que $D' - \{v\}$ est minimal pour $P_{n'}$. Par conséquent $\{u_1, u_2, u_5, u_6\} \cup (D' - \{v\})$ est un $\Gamma_L(P_n)$ -ensemble, puisque $|D \cap \{u_1, u_2, \dots, u_7\}| \leq 3$ donc on a un EDL tel que $|D \cap \{u_1, u_2, \dots, u_7\}| = 4$. Pour terminer la preuve on considère les deux cas suivants.

Cas 1 $u_7 \notin D$, d'après les observations précédentes, on suppose que $u_1, u_2, u_5, u_6 \in D$ et $u_3, u_4 \notin D$. Soit $P_{n'}$ la chaîne obtenue à partir de P_n en lui supprimant les sommets u_1, u_2, \dots, u_7 , donc $D - \{u_1, u_2, u_5, u_6\}$ est un EDL minimal de $P_{n'}$, d'où

$\Gamma_L(P_{n'}) \geq \Gamma_L(P_n) - 4$. De plus tout $\Gamma_L(P_{n'})$ -ensemble peut être étendu à un EDL minimal de P_n en lui ajoutant l'ensemble $\{u_1, u_2, u_5, u_6\}$, d'où $\Gamma_L(P_{n'}) = \Gamma_L(P_n) - 4$. En appliquant l'hypothèse d'induction sur $P_{n'}$ et en examinant cas par cas les valeurs de n' on obtient le résultat voulu.

Cas 2 Si $u_7 \in D$, on distingue les trois sous-cas suivants:

Cas 2.1 Si $u_6 \notin D$ et $u_8 \in D$, étant donné que $|D \cap \{u_1, u_2, \dots, u_5\}| = 3$, disons $u_1, u_3, u_4 \in D$. Ainsi $D - \{u_1, u_2, \dots, u_7\}$ est un EDL minimal de la chaîne induite par $V(P_n) - \{u_1, u_2, \dots, u_7\} = V(P_{n'})$. D'où $\Gamma_L(P_{n'}) \geq \Gamma_L(P_n) - 4$, l'égalité vient du fait que tout $\Gamma_L(P_{n'})$ -ensemble peut être étendu à un EDL minimal de P_n en lui ajoutant l'ensemble $\{u_1, u_2, u_5, u_6\}$, par induction sur $P_{n'}$, et en considérant toutes les valeurs possibles de n' on obtient le résultat.

Cas 2.2 $u_6, u_8 \notin D$, si $n = 8$ alors $\{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7\}$ est un EDL minimal de P_8 de taille supérieure à $|D|$, d'où la contradiction. Ainsi $n \geq 9$, on suppose à présent que $u_9 \in D$, d'après les faits cités ci-dessus, et sans perte de généralité, on supposera que $\{u_2, u_3, u_5\} \subset D$, posons $D' = D - \{u_2, u_3, u_5, u_7\}$. On note que $\{u_2, u_3, u_5, u_7\}$ est un EDL minimal de la chaîne induite par $\{u_1, u_2, \dots, u_8\}$. Si D' n'est pas un EDL minimal de $V(P_n) - \{u_1, u_2, \dots, u_7\}$ alors u_8 et u_{10} ont un voisin unique u_9 dans D' , par conséquent $\{u_1, u_6, u_8\} \cup (D - \{u_3, u_7\})$ est un EDL minimal de P_n de taille supérieure à $|D|$, d'où la contradiction. Donc D' est un EDL minimal de $P_{n'}$, où $n' = n - 7$. Il est facile de voir que $\Gamma_L(P_n) = \Gamma_L(P_{n'}) + 4$, par induction sur $P_{n'}$, on obtient le résultat. Supposons maintenant que $u_9 \notin D$, il est clair que $u_{10} \in D$, suite aux faits, on suppose que $\{u_2, u_3, u_5\} \subset D$. On pose $D'' = D - \{u_2, u_3, u_5, u_7\}$, et P' la chaîne obtenue à partir de P_n en supprimant les sommets u_1, u_2, \dots, u_9 . Notons que D'' est un EDL de P' , si D'' est minimal alors $D'' \cup \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8\}$ est un EDL minimal de P_n de taille supérieure à $|D|$, d'où la contradiction. Ainsi on suppose que D'' n'est pas minimal. Alors il existe un sommet $w \in D''$ tel que $D'' - \{w\}$ est un EDL minimal de P' , donc l'ensemble $\{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8\} \cup (D'' - \{w\})$ est un $\Gamma_L(P_n)$ -ensemble ne contenant pas u_7 , ce cas a été traité dans cas 1.

Cas 2.3 Si $u_6 \in D$ alors $u_8 \notin D$, autrement $D - \{u_7\}$ est un EDL, ceci contredit la minimalité de D . Il en est de même pour $u_5, u_5 \notin D$, autrement $D - \{u_6\}$ est un EDL de G . Donc sans perte de généralité, on suppose $u_2, u_3 \in D$, par conséquent $\{u_5\} \cup (D - \{u_6\})$ est un $\Gamma_L(P_n)$ -ensemble ne contenant ni u_6 , ni u_8 , ce cas a été considéré dans cas 2.2. \square

Le théorème suivant établit une relation entre un dominant localisateur minimal et un ensemble indépendant maximum.

Théorème 3.4 (Chellali, Mimouni et Slater [32] 2008). *Si G est un arbre ou bien un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors tout ensemble indépendant maximum S est un dominant localisateur minimal. De plus, si $\delta \geq 2$, alors $V - S$ est un dominant localisateur.*

Preuve. Soit S un $\beta_0(G)$ -ensemble. On montre d'abord que S est un dominant localisateur de G . Si $\beta_0(G) = 1$, alors $G = K_1$ ou K_2 , d'où le résultat est vrai. Supposons que $\beta_0(G) \geq 2$ et que S n'est pas un dominant localisateur de G . Dans ce cas, il existe au moins deux sommets $u, v \in V - S$ tels que $N(u) \cap S = N(v) \cap S$. Si u et v ont deux voisins communs dans S , alors le sous-graphe induit par u, v , ainsi que leurs voisins dans S contient un cycle C_4 , ceci contredit le fait que $g(G) \geq 5$. Ainsi u et v ont un voisin commun unique dans S , disons w . Si $uv \in E$, alors $\{u, v, w\}$ induit un cycle C_3 . Ainsi u et v ne sont pas adjacents, dans ce cas, $\{u, v\} \cup (S - \{w\})$ est un ensemble indépendant de cardinal supérieur à $|S|$, d'où la contradiction. On déduit que S est un dominant localisateur de G . Etant donné que S est un dominant minimal, ceci implique que S est un dominant localisateur minimal.

Cependant, si $\delta \geq 2$, alors puisque $g(G) \geq 5$, il n'existe pas dans S deux sommets ayant un voisinage commun dans $V - S$. D'où $V - S$ est un dominant localisateur. \square

En conséquence immédiate, on déduit les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.5 (Chellali, Mimouni et Slater [32] 2008). *Si G est un arbre ou un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors $\Gamma_L(G) \geq \beta_0(G) \geq \gamma_L(G)$.*

Preuve. D'après le Théorème 3.4 on a $\gamma_L(G) \leq \beta_0(G)$ et $\beta_0(G) \leq \Gamma_L(G)$. \square

Corollaire 3.6 (Blidia et al. [25] 2008). *Si T est un arbre, alors $\beta_0(T) \geq \gamma_L(T)$.*

Corollaire 3.7 (Chellali, Mimouni et Slater. [32] 2008). *Si G est un graphe d'ordre n , avec $\delta \geq 2$ et $g(G) \geq 5$, alors $\gamma_L(G) \leq n/2$.*

Preuve. Suite au Théorème 3.4 on a $\gamma_L(G) \leq |V - S| = n - \beta_0(G) \leq n - \gamma_L(G)$, d'où $\gamma_L(G) \leq n/2$. \square

On note que la différence $\Gamma_L(G) - \beta_0(G)$ peut être arbitrairement large, même pour les arbres. Considérons l'arbre T_t ($t \geq 1$) de la Figure 3.2 obtenu par une chaîne P_t et t

chaînes P_6 en identifiant le troisième sommet de la $k^{\text{ème}}$ chaîne P_6 avec le $k^{\text{ème}}$ sommet de P_t . Il est clair que l'ensemble des supports et des feuilles est un $\Gamma_L(T_t)$ -ensemble de taille $4t$, par contre $\beta_0(T_t) = 3t$.

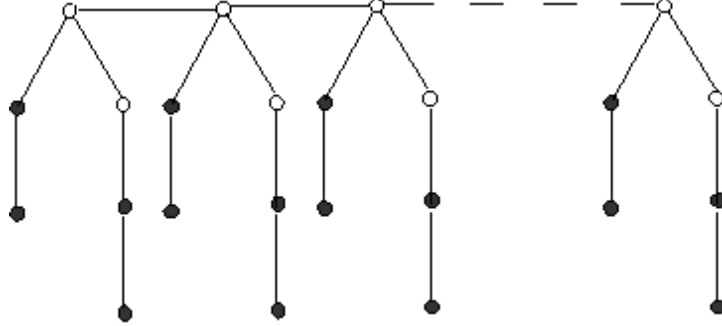


Figure 3.2 : Un arbre T_t , où $\Gamma_L(T_t) = 4T$, et $\beta_0(T_t) = 3t$

Théorème 3.8 (Chellali, Mimouni, et Slater [32] 2008). *Si T est un arbre non trivial d'ordre n , avec l feuilles, alors $\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + l - 2}{3}$, et cette borne est atteinte.*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre n de T , il est facile de vérifier que si $\text{diam}(T) \in \{1, 2, 3\}$ le résultat est vrai. On suppose que pour tout arbre T' d'ordre $n' < n$, avec l' feuilles satisfait $\Gamma_L(T') \leq \frac{(2n' + l' - 2)}{3}$. Soient T un arbre d'ordre n , avec $\text{diam}(T) \geq 4$, et D un $\Gamma_L(T)$ -ensemble quelconque de T .

S'il existe un sommet support u adjacent à au moins deux feuilles, alors on pose $T' = T - \{u'\}$, où u' est une feuille de u appartenant à D , une telle feuille existe puisque D contient ou bien toutes les feuilles de u ou bien toutes les feuilles de u sauf une. Alors $D - \{u'\}$ est un EDL minimal de T' , par conséquent $\Gamma_L(T') \geq |D| - 1$. Etant donné que $n' = n - 1$, $l(T') = l - 1$, par induction sur T' , on obtient $\Gamma_L(T) \leq (2n + l - 2)/3$. Par la suite, on supposera que $l - s(T) = 0$.

Supposons que T contient deux supports adjacents x, y . Soit T_x et T_y les sous-arbres obtenus à partir de T en supprimant l'arête xy . Alors $D_x = D \cap V(T_x)$ est un EDL minimal de T_x , de même $D_y = D \cap V(T_y)$ est un EDL minimal de T_y , ainsi, $\Gamma_L(T_x) + \Gamma_L(T_y) \geq$

$|D_x| + |D_y| = \Gamma_L(T)$. Puisque le $\text{diam}(T) \geq 4$, T_x ou T_y est de diamètre au moins deux, disons T_y , par induction sur T_y on a $\Gamma_L(T_y) \leq \frac{2|V(T_y)| + |L(T_y)| - 2}{3}$. Si $\text{diam}(T_x) = 1$, alors $\Gamma_L(T_x) = 1 = \frac{2|V(T_x)| + 1 - 2}{3}$ et $l = |L(T_y)| + 1$, Si $\text{diam}(T_x) \geq 2$, alors par induction sur T_x , $\Gamma_L(T_x) \leq \frac{2|V(T_x)| + |L(T_x)| - 2}{3}$, vu que $V(T_x) + V(T_y) = n$, et $l = |L(T_x)| + |L(T_y)|$, dans les deux cas, on obtient le résultat voulu. D'où on suppose qu'il n'existe pas deux supports adjacents dans T .

Enracinons l'arbre T en un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit u un support à distance $\text{diam}(T) - 1$ de r sur la plus longue chaîne commençant par r . Soient v, w les parents de u, v respectivement, et u' l'unique feuille de u . Comme v ne peut pas être un support, le sous-arbre T_v de racine v est une étoile subdivisée.

On suppose d'abord que $v \in D$. Posons $T' = T - \{u', u\}$. Notons que D contient ou bien u ou u' . Ainsi $D \cap V(T')$ est un EDL minimal de T' , par conséquent $\Gamma_L(T') \geq |D| - 1$ et $l(T') \leq l$. Par induction sur T' , on obtient $\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + \ell - 2}{3}$. Supposons à présent que $v \notin D$, on distingue deux cas.

Cas 1. $d(v) = k \geq 3$, si un des fils de v , disons z n'appartient pas à D , alors on pose $T' = T - \{z', z\}$, où z' est l'unique feuille de z . Ce cas est similaire à celui traité ci-dessus, donc $\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + \ell - 2}{3}$. Ainsi supposons que D contient tous les fils de v . Posons $T' = T - T_v$, il est clair que D ne contient aucune feuille de T_v , et $D \cap V(T')$ est un EDL minimal de T' . D'où $\Gamma_L(T') \geq |D| - k + 1$ et $l(T') \leq l - k + 1$, par induction sur T' , on retrouve immédiatement le résultat.

Cas 2. $d(v) = k = 2$. Etant donné que $\text{diam}(T) \geq 4$, soit z le parent de w . Si $z = r$ alors $T = P_5$ et $\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + \ell - 2}{3}$. Ainsi $z \neq r$, pour compléter la preuve, on considère les trois situations suivantes de D . Rappelons que $v \notin D$, donc on a ou bien $u', w \in D$ et $u \notin D$ ou bien $u, w \in D$ et $u' \notin D$ ou bien $u, u' \in D$ et $w \notin D$.

Si on est dans la première situation, alors on pose $T' = T - \{u', u\}$. Dans la seconde situation, $D - \{u\}$ est un EDL minimal pour $T' = T - \{u', u\}$ ou pour $T' = T - \{u', u, v\}$, et le sous-arbre T' pour lequel $D - \{u\}$ est un EDL minimal sera considéré. Il est facile de vérifier que des deux situations citées ci-dessus, on obtient $\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + \ell - 2}{3}$.

Considérons à présent la dernière situation, c-a-d $u, u' \in D$ et $w \notin D$. Posons $T' = T - \{u', u, v\}$, alors $D - \{u', u\}$ est un EDL minimal de T' , d'où $\Gamma_L(T') \geq |D| - 2$. Par

induction, et du fait que $n' = n - 3$, $l(T') \leq l$, il s'ensuit que $\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + \ell - 2}{3}$.

La borne est atteinte pour les étoiles non triviales. \square

On rappelle la borne inférieure sur le nombre de stabilité pour les graphes bipartis donnée dans [26].

Proposition 3.9 (Blidia, Chellali, Favaron, Meddah [26] 2007). *Si G est un graphe biparti, alors*

$$\beta_0(G) \geq \frac{n + \ell(G) - s(G)}{2}.$$

Suite au Théorème 3.8 et la Proposition 3.9, on obtient une borne supérieure sur $\Gamma_L(T)$, pour les arbres en fonction de $\beta_0(T)$, le nombre de feuilles et de supports.

Corollaire 3.10 (Chellali et al. [32] 2008). *Si T est un arbre non trivial, alors*

$$\Gamma_L(T) \leq \frac{4}{3}\beta_0(T) - \frac{1}{3}(\ell(T) - 2s(T) + 2).$$

Preuve. D'après le Théorème 3.8, il s'ensuit que $3\Gamma_L(T) \leq 2n + \ell(T) - 2$, ceci entraîne que $3\Gamma_L(T) \leq 2n + 2\ell(T) - 2s(T) - \ell(T) + 2s(T) - 2$. D'autre part on a $\beta_0(T) \geq (n + \ell(T) - s(T)) / 2$ conséquence du Théorème 3.9, ainsi $4\beta_0(T) \geq 2n + 2\ell(T) - 2s(T)$. Ceci implique que $3\Gamma_L(T) \leq 4\beta_0(T) - (\ell(T) - 2s(T) + 2)$, d'où $\Gamma_L(T) \leq \frac{4}{3}\beta_0(T) - \frac{1}{3}(\ell(T) - 2s(T) + 2)$. \square

On obtient aussi

Corollaire 3.11 (Chellali, Mimouni, et Slater [32] 2008). *Si T est un arbre non trivial, alors*

$$\Gamma_L(T) - \beta_0(T) \leq \frac{1}{6}(n - \ell(T) + 3s(T) - 4).$$

Preuve. Suite au Théorème 3.8, on a

$$\Gamma_L(T) \leq (2n + \ell(T) - 2) / 3 = (n + \ell(T) - s) / 2 + (n - \ell(T) + 3s(T) - 4) / 6.$$

D'après le Théorème 3.9, on obtient $\Gamma_L(T) \leq \beta_0(T) + (n - \ell(T) + 3s(T) - 4) / 6$. On conclut que $\Gamma_L(T) - \beta_0(T) \leq (n - \ell(T) + 3s(T) - 4) / 6$. \square

3.2 Le nombre de domination localisatrice

On commence par rappeler les deux résultats donnés dans [17] sur le nombre de domination localisatrice pour la classe des arbres.

Théorème 3.12 (Blidia et al. [17] 2007). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$\gamma_L(T) \leq \frac{(n + \ell(T) - s(T))}{2}.$$

Théorème 3.13 (Blidia et al. [17] 2007). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_L(T) \geq \frac{(n + \ell(T) - s(T) + 1)}{3}.$$

Proposition 3.14 (Chellali, Mimouni, et Slater [32] 2008). *Si G est un graphe bloc avec $\delta \geq 2$, alors $\gamma_L(G) + \beta_0(G) \leq n$, cette borne est atteinte.*

Preuve. Soit S un $\beta_0(G)$ -ensemble quelconque. Alors tout sommet de S a au moins deux voisins dans $V - S$, étant donné que G est un graphe bloc ne contenant pas de C_4 et $K_4 - \{e\}$, chaque paire de sommets $x, y \in S$ satisfait $N(x) \cap (V - S) \neq N(y) \cap (V - S)$. Il s'ensuit que $V - S$ est un EDL de G , ceci implique que $\gamma_L(G) \leq |V - S| = n - \beta_0(G)$.

Cette borne est atteinte pour le graphe G_k formé à partir de k triangles partageant le même sommet d'une chaîne P_2 . □

La classe des graphes G d'ordre n pair, et sans sommets isolés, avec $\gamma(G) = n/2$, a été caractérisée indépendamment par Payan et Xuong [34] et Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [35].

Théorème 3.15 (Payan, Xuong [34] 1982 et Fink et al. [35] 1985). *Soit G un graphe d'ordre n pair, sans sommets isolés, alors $\gamma(G) = n/2$ si et seulement si chaque composante de G est ou bien un cycle C_4 ou bien une couronne d'un graphe connexe.*

Remarque 3.16 (Chellali, Mimouni et Slater. [32] 2008). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma(T) \leq \frac{n - \ell(T) + s(T)}{2}$. La borne est atteinte si et seulement si T est un arbre d'ordre $\ell(T) + s(T)$.*

Preuve. Il est clair que le résultat est vérifié si T est une étoile. Supposons que T n'est pas une étoile et soit T^* l'arbre obtenu à partir de T , en supprimant pour tout sommet support de T toutes ses feuilles sauf une. Etant donné qu'il existe un dominant minimum contenant tous les supports, on a $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. De plus l'arbre T^* est d'ordre $n - l(T) + s(T)$ et d'après le Théorème célèbre d'Ore on a $\gamma(T^*) \leq \frac{n - l(T) + s(T)}{2}$. A présent, d'après le Théorème 3.15 on a $\gamma(T^*) = \frac{n - l(T) + s(T)}{2}$ si et seulement si T est une couronne d'un arbre T' , d'où T est un arbre, où tout sommet est ou bien un support ou une feuille, ainsi T est d'ordre $l(T) + s(T)$.

La réciproque est vraie (la preuve est évidente). \square

Rappelons qu'un ensemble $R \subseteq V(G)$ est dit *2-stable* dans G si pour deux sommets quelconques x et y de S on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un ensemble *2-stable* de G noté $\rho(G)$ est appelé *le nombre de 2-stabilité*.

Proposition 3.17 (Chellali, Mimouni et Slater [32] 2008). *Pour tout graphe connexe non trivial G , on a $\gamma_L(G) \leq n - \rho(G)$.*

Preuve. Soit R un 2-stable maximum de G . Etant donné que $N[x] \cap N[y] = \emptyset$, pour toute paire de sommets distincts $x, y \in R$, $V - R$ est un dominant localisateur de G , d'où $\gamma_L(G) \leq |V - R| = n - \rho(G)$. \square

Farber [36] a prouvé que le nombre de domination et le nombre de 2-stabilité sont égaux pour tout graphe fortement triangulé, qui inclut la classe des arbres. Ainsi on énonce le corollaire suivant conséquence de la proposition 3.17.

Corollaire 3.18 (Chellali, Mimouni, et Slater [32] 2008). *Pour tout arbre non trivial T , on a*

$\gamma_L(T) + \gamma(T) \leq n$. *La borne est atteinte si et seulement si T est un arbre d'ordre $l(T) + s(T)$.*

Preuve. On suppose que $\gamma_L(T) + \gamma(T) = n$. Si T est une étoile alors il est d'ordre $l(T) + s(T)$. Donc supposons que T n'est pas une étoile alors d'après le Théorème 3.12 et la remarque 3.16 on a $\gamma_L(T) = \frac{n + l(T) - s(T)}{2}$, et $\gamma(T) = \frac{n - l(T) + s(T)}{2}$. Il s'ensuit que T est un arbre d'ordre $l(T) + s(T)$.

La réciproque est vraie (la preuve est évidente). \square

Comme il a été démontré dans l'article de Blidia et al. [25] que $\gamma_2(T) \geq \gamma_L(T)$, pour tout arbre T . Nous montrerons que l'inégalité est vraie pour tout graphe G , tel que $g(G) \geq 5$.

Théorème 3.19. *Si G est un arbre ou bien un graphe connexe avec $g(G) \geq 5$, alors $\gamma_L(G) \leq \gamma_2(G)$.*

Preuve. Soit D un $\gamma_2(G)$ -ensemble. On suppose que D n'est pas un dominant localisateur de G , alors il existe une paire de sommets u, v telle que $N(u) \cap S = N(v) \cap S$. Etant donné que D est un 2-dominant, donc $\{u, v\} \cup (N(\{u, v\}) \cap S)$ induit ou bien un cycle C_3 ou C_4 , contradiction. Ainsi D est un EDL de G , d'où $\gamma_L(G) \leq \gamma_2(G)$. \square

Le théorème suivant est une extension de la borne supérieure du Théorème 3.12 pour les graphes bipartis ne contenant pas de cycles C_4 . On supposera que $l(P_2) = s(P_2) = 2$.

Théorème 3.20 (Chellali, Mimouni et Slater [32] 2008). *Si G est un graphe biparti connexe, sans cycles C_4 , alors $\gamma_L(G) \leq (n + l(G) - s(G)) / 2 \leq \Gamma_L(G)$.*

Preuve. Si G est un arbre alors d'après le Corollaire 3.5, la proposition 3.9 et le Théorème 3.12 le résultat est vrai. Supposons que G n'est pas un arbre. Soit D l'ensemble des feuilles de G choisi comme suit: pour tout sommet support u de G adjacent à deux feuilles ou plus dans G , on met dans D toutes les feuilles de u sauf une. Alors $|D| = l(G) - s(G)$. Considérons maintenant le sous-graphe G' obtenu à partir de G , en supprimant toutes les feuilles de G . Puisque G n'est pas un arbre, et sans C_4 , G' est non trivial, donc il admet une unique bipartition en deux sous-ensembles indépendants non vides A et B . Il est clair que toute feuille de G' est un support dans G et tout sommet de G' qui n'est pas une feuille est de degré au moins deux dans G' . Posons $A' = A - S(G)$ et $B' = B - S(G)$, sans perte de généralité on peut supposer que $|A| \leq |B|$. Vu que G est un graphe biparti sans cycle C_4 , l'ensemble B' (resp A') ne contient pas deux sommets ayant un voisinage commun dans $D \cup S(G) \cup A'$ (resp $D \cup S(G) \cup B'$). Ainsi chacun des ensembles $D \cup S(G) \cup A'$ et $D \cup S(G) \cup B'$ est un EDL minimal de G . Par conséquent, $\gamma_L(T) \leq |D \cup S(G) \cup A'|$ et

$\Gamma_L(G) \geq |D \cup S(G) \cup B'|$. Du fait que $|A'| \leq (n - l(G) - s(G))/2 \leq |B'|$, on en déduit le résultat. \square

Notons que la borne supérieure sur $\gamma_L(G)$ n'est pas vérifiée si G est un graphe biparti contenant un cycle C_4 . Pour éclaircir ce point, considérons le cycle C_4 en attachant un nouveau sommet à un sommet du cycle. Il est clair que $\gamma_L(G) = 3 > (n + l(G) - s(G))/2$.

Dans le théorème suivant, on établit une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice, pour les unicycles.

Théorème 3.21 (Chellali, Mimouni, et Slater [32] 2008). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, ayant au plus un cycle, alors $\gamma_L(G) \leq (n + l(G) - s(G) + 1)/2$.*

Preuve. Si G est un arbre alors d'après le Théorème 3.12 le résultat est vérifié. Ainsi, on suppose que G contient un cycle C . Il est clair que si $G = C$, alors $\gamma_L(G) \leq (n + 1)/2$. Donc on suppose que $G \neq C$, par conséquent, G contient un sommet de degré au moins trois. Supposons que le résultat n'est pas vrai et que G est le plus petit unicycle connexe, tel que $\gamma_L(G) > (n + l(G) - s(G) + 1)/2$.

On suppose d'abord que tous les supports sont sur le cycle C . Si C contient un seul sommet support b , alors soit A un ensemble indépendant maximum de $G[V(C)]$ qui contient b . Alors $|A| = \lfloor |C|/2 \rfloor$, et A union l'ensemble des feuilles L_b de b est un ensemble dominant localisateur de G de taille au plus $(n + |L_b|)/2 = (n + l(G) - s(G) + 1)/2$, contradiction. Ainsi C contient au moins deux supports.

Supposons que C contient deux supports consécutifs x et y tels que la distance entre x et y est au moins trois. Soit H l'ensemble des sommets sur la chaîne reliant x à y . Ainsi les sommets de H induisent une chaîne d'ordre $|H| \geq 2$. Posons $G' = G - H$. Alors $n' = n - |H|$, $l(G') = l(G)$, $s(G') = s(G)$. G' et $P_{|H|}$ sont des arbres, d'où d'après le Théorème 3.12, $\gamma_L(G') \leq (n' + l(G') - s(G'))/2$ et $\gamma_L(P_{|H|}) \leq (|H| + 1)/2$. Ceci entraîne que

$$\gamma_L(G) \leq (n' + l(G') - s(G'))/2 + (|H| + 1)/2 = (n + l(G) - s(G) + 1)/2, \text{ contradiction.}$$

Ainsi la distance entre deux supports consécutifs sur C est égale à un ou deux. Par conséquent $n = s(G) + l(G) + k$, où k est le nombre de sommets de degré deux. Il

est clair que $k \leq s(G)$. Soit $L'(G)$ l'ensemble des feuilles de G en prenant pour chaque support toutes ses feuilles sauf une. Ainsi $|L'(G)| = l(G) - s(G)$, il est facile de voir que $S(G) \cup L'(G)$ est un dominant localisateur de G , d'où $\gamma_L(G) \leq s(G) + (l(G) - s(G)) = l(G) < (n + l(G) - s(G) + 1)/2$, ceci est contradictoire avec notre supposition. Il s'ensuit que G contient au moins un support qui n'appartient pas à C .

Soit u un support de G situé à une distance maximum de C . Soit v le voisin de u sur l'unique chaîne de u à C . D'abord on suppose $d(v) \geq 3$, posons $G' = G - (L_u \cup \{u\})$, où L_u est l'ensemble des feuilles de u . Si S' est un $\gamma_L(G')$ -ensemble, alors $S' \cup L_u$ est un ensemble dominant localisateur de G , d'où $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G') + |L_u|$. Puisque G' est d'ordre n' inférieur à n et $n' = n - (|L_u| + 1)$, $\ell(G') = \ell(G) - |L_u|$ et $s(G') = s(G) - 1$ ceci entraîne que

$$\gamma_L(G) \leq (n' + \ell(G') - s(G') + 1)/2 + |L_u| = (n + \ell(G) - s(G) + 1)/2$$

contradiction. Ainsi on suppose que $d(v) = 2$ et soit w le second voisin de v sur l'unique chaîne de v à C . Si $d(w) = 2$ ou ($d(w) \geq 3$ et w n'est pas un support), alors on pose $G' = G - (L_u \cup \{u\})$. Donc G' satisfait le théorème et on a $n' = n - (|L_u| + 1)$, $\ell(G') = \ell(G) - |L_u| + 1$, $s(G') = s(G)$. Etant donné que tout $\gamma_L(G')$ -ensemble peut être étendu à un dominant localisateur de G en lui ajoutant L_u , on obtient

$$\gamma_L(G) \leq (n' + \ell(G') - s(G') + 1)/2 + |L_u| = (n + \ell(G) - s(G) + 1)/2$$

contradiction. Ainsi on suppose finalement que $d(w) \geq 3$ et w est un support, posons $G' = G - (L_u \cup \{u, v\})$. Alors G' satisfait le théorème et on a $n' = n - (|L_u| + 2)$, $\ell(G') = \ell(G) - |L_u|$, $s(G') = s(G) - 1$. Puisqu'il existe un $\gamma_L(G')$ -ensemble qui contient w , un tel ensemble pourra être augmenté à un dominant localisateur de G en lui ajoutant $\{u\} \cup L_u - \{u'\}$, où u' est une feuille quelconque de u . Il s'ensuit que $\gamma_L(G) \leq (n' + \ell(G') - s(G') + 1)/2 + |L_u| < (n + \ell(G) - s(G) + 1)/2$, contradiction. Ceci achève la preuve.

□

Dans le théorème suivant on étendra la borne inférieure du Théorème 3.13 sur le nombre de domination localisatrice, pour les unicycles.

Théorème 3.22. *Si $G = (V, E)$ est un unicycle connexe d'ordre n , alors*

$$\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}.$$

Preuve. Soient G un unicycle de cycle C , et D un $\gamma_L(G)$ -ensemble arbitraire de G contenant tous les sommets supports. Si G est un cycle C_n , alors $\gamma_L(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil > \frac{n+1}{3}$, d'où le résultat est vrai. Donc on suppose que G est différent d'un cycle, c-a-d G contient au moins un support. On supposera aussi que parmi tous les unicycles ne satisfaisant pas le résultat, G est celui qui contient le moins de sommets possible. Supposons d'abord que G contient un support fort, soit u un tel support. Donc $u \in D$ et D contient $|L_u| - 1$ feuilles de u . On pose $G' = G - \{u'\}$, où u' est une feuille de L_u appartenant à D . Alors $D - \{u'\}$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq |D - \{u'\}| = |D| - 1 = \gamma_L(G) - 1$. Comme G' a moins de sommets que G , alors G' vérifie $\gamma_L(G') \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3}$. Il s'ensuit que $\gamma_L(G) \geq \gamma_L(G') + 1 \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + 1$. Sachant que $n' = n - 1$, $l(G') = l(G) - 1$, $s(G') = s(G)$. Donc $\gamma_L(G) > \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse. Ainsi G ne contient aucun support fort. Supposons maintenant que G contient un support n'appartenant pas à C , soit u un tel support. On supposera en plus que u est situé à une distance maximum de C . Soient w, v, u les parents de v, u, u' respectivement sur l'unique chaîne de u à C . Notons que le sommet v peut appartenir à C , et w peut ne pas exister. On distingue les cas suivants:

Cas 1. $v \notin C$.

(a) $d(v) \geq 3$. Si v est un support, alors on pose $G' = G - \{u', u\}$. Par conséquent $D - \{u\}$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. Comme le graphe G' vérifie le résultat, alors $\gamma_L(G) \geq \gamma_L(G') + 1 \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + 1$. Sachant que $n' = n - 2$, $l(G') = l(G) - 1$, $s(G') = s(G) - 1$. Il s'ensuit que $\gamma_L(G) > \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, ceci contredit le fait que $\gamma_L(G) < \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$. Donc v n'est pas un support, ainsi tout fils de v est un support, soient u_2, u_3, \dots, u_p , $p \geq 2$ les fils de v différents de u . Si $v \in D$ alors on le remplace par w . Ainsi on peut supposer que $v \notin D$. Dans ce cas on pose $G' = G - T_v$. Alors $D - \{u_2, u_3, \dots, u_p\}$ est un EDL de G' . Par conséquent $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - p$. Puisque G' vérifie le résultat on a $\gamma_L(G) \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + p$. Sachant que $n' = n - 2p - 1$, $l(G') \geq l(G) - 2p$, $s(G') \leq s(G) - 2p + 1$, alors $\gamma_L(G) \geq$

$$\frac{(n - 2p - 1) + (l(G) - 2p) - (s(G) - 2p + 1) + 1}{3} + p \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + p - 1)}{3} \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}, \text{ contradiction.}$$

(b) $d(v) = 2$. Alors $v \notin D$ (sinon on le remplace par w). Supposons que $d(w) \geq 3$. On pose $G' = G - \{u', u, v\}$. Donc $D - \{u\}$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. Il est facile de voir que $\gamma_L(G) \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + 1$. Sachant que $n' = n - 3$, $l(G') = l(G) - 1$, $s(G') = s(G) - 1$. Ainsi on obtient $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction. A présent on suppose que $d(w) = 2$. Donc $w \notin C$. On pose $G' = G - \{u', u, v\}$. Alors $D - \{u\}$ est un EDL de G' , il s'ensuit que $\gamma_L(G) \geq \gamma_L(G') + 1$. Sachant que $n' = n - 3$, $l(G') = l(G)$, $s(G') \leq s(G)$. Il est clair que $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction.

Cas 2. $v \in C$.

(a) $d(v) = 3$. Si $D - \{u\}$ est un EDL de G' , alors on pose $G' = G - \{u', u\}$. Par conséquent $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. D'où $\gamma_L(G) \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + 1$. Sachant que $n' = n - 2$, $l(G') = l(G) - 1$, $s(G') = s(G) - 1$. On aura $\gamma_L(G) > \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction. Si $D - \{u\}$ n'est pas un localisateur de G' , alors $v \notin D$ et il existe deux sommets adjacents x et $y \in C$, tels que v est adjacent à x , et $x \in D$ vérifiant $N(v) \cap (D - \{u\}) = N(y) \cap (D - \{u\}) = \{x\}$. Soit z le deuxième voisin de v sur C . Soit G' le graphe obtenu de G en supprimant l'arête vz . Alors D est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G)$. D'autre part, étant donné que G' est un arbre, alors d'après le Théorème 3.13 on a $\gamma_L(G') \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3}$. Ainsi puisque $n' = n - 3$, $l(G') \geq l(G)$, et $s(G') = s(G)$ ou bien $l(G') = l(G) + 1$, et $s(G') = s(G) + 1$, on obtient que $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction.

(b) $d(v) > 3$. Si v est un support, alors on pose $G' = G - \{u', u\}$. Il est clair que $\gamma_L(G) \geq \gamma_L(G') + 1 \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + 1$. Sachant que $n' = n - 2$, $l(G') = l(G) - 1$, $s(G') = s(G) - 1$. Ainsi $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse. Donc on supposera que v n'est pas un support. Si $D - \{u\}$ n'est pas un localisateur de $G' = G - \{u', u\}$, alors $v \notin D$, et D contient un fils u_1 de v , tel que $u_1 \neq u$ et $N(v) \cap (D - \{u\}) = N(u_1) \cap (D - \{u\}) = \{u_1\}$, où u_1 est une feuille de u_1 . Soit x un voisin de v sur C , et G' l'arbre obtenu à partir de G en supprimant l'arête vx .

Il s'ensuit que D est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G)$. Puisque G' est un arbre, alors d'après le Théorème 3.13 on a $\gamma_L(G') \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3}$. Sachant que $n' = n$, et $l(G') = l(G) + 1$, $s(G') = s(G) + 1$ ou bien $l(G') \geq l(G)$ et $s(G') = s(G)$ on obtient $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction. Si $D - \{u\}$ est un EDL de $G' = G - \{u', u\}$, alors $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. Etant donné que G' vérifie le résultat, on obtient $\gamma_L(G) \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + 1$. Sachant que $n' = n - 2$, $l(G') = l(G) - 1$, $s(G') = s(G) - 1$. Il s'ensuit que $\gamma_L(G) > \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction. On déduit que tous les supports sont sur le cycle C .

Supposons maintenant que u et v sont deux supports adjacents de C , et u', v' les feuilles de u, v respectivement. Donc u et v sont dans D . Soit G' le graphe obtenu de G en supprimant l'arête uv . Alors D est un EDL de G , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G)$. Puisque G' est un arbre, alors d'après le Théorème 3.13 on a $\gamma_L(G') \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3}$. Sachant que $n' = n - 3$, $s(G') = s(G)$, $l(G') = l(G) - 1$. Ainsi $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse. Donc la distance entre deux supports consécutifs sur C est au moins deux. Soient u, v deux supports consécutifs sur C . Soit P_{xy} la sous chaîne élémentaire de C séparant u et v d'extrémités x et y , avec $x \neq u$ et $y \neq v$. Alors la chaîne P_{xy} est d'ordre au moins un. Soit P'_{xy} la chaîne qui relie u' à v' et passant par les sommets u, x, y, v . Considérons le graphe G' obtenu à partir de G en supprimant la chaîne P'_{xy} et en ajoutant un sommet support w et sa feuille w' . Donc $\{w, w'\} \cup D - P'_{xy}$ est un EDL de G' . Soit K l'ensemble des sommets de $D \cap P'_{xy}$. Donc $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - |K| + 1$, d'où $\gamma_L(G) \geq \gamma_L(G') + |K| - 1$. Etant donné que G' vérifie le résultat, on a $\gamma_L(G') \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3}$. D'après le Théorème 3.13 on a $|K| \geq \frac{N_0 + 1}{3}$, où $N_0 = |P'_{xy}|$, ainsi $\gamma_L(G) \geq \frac{(n' + l(G') - s(G') + 1)}{3} + \frac{N_0 + 1}{3} - 1$. Sachant que $n' = n - N_0 + 2$, $s(G') = s(G) - 1$, $l(G') = l(G) - 1$, alors on vérifie facilement que $\gamma_L(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G) + 1)}{3}$, contradiction. Ceci achève la preuve. \square

Avant de donner le théorème qui fournit une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice pour les graphes cactus contenant n_0 cycles C_4 , on montre le lemme suivant qui étend le résultat de Blidia et al. [17], pour les unicycles connexes sans C_4 .

Lemme 3.23. *Si G est un unicyclic connexe d'ordre $n \geq 4$, et de cycle $C \neq C_4$, alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}.$$

Preuve. Si G est un cycle C_n alors $\gamma_L(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil \leq \frac{n}{2}$, d'où le résultat est vrai. On suppose que parmi tous les unicyclics d'ordre $n \geq 4$, sans C_4 ne vérifiant pas le théorème, G est celui qui contient le moins de sommets possible. Soit G^* un graphe partiel de G qui soit un arbre. Donc G^* est un graphe biparti. Soit A, B l'unique bipartition de G^* . Considérons cette partition A, B pour le graphe G . Donc si C est impair alors forcément deux sommets de A ou de B sont adjacents. Maintenant, soit H l'ensemble des feuilles de G choisi comme suit: pour tout support x de G , on met dans H toutes les feuilles de x sauf une. D'où $|H| = l(G) - s(G)$. Soient $A' = A - (S(G) \cup L(G))$ et $B' = B - (S(G) \cup L(G))$, tout sommet de A' ou B' est de degré au moins deux dans G^* . Alors $A' \cup S(G) \cup H$ est un EDL de G , sinon il existe deux sommets $x, y \in B'$ ayant un voisinage commun dans A . D'où l'existence d'un cycle C_4 , contradiction avec l'hypothèse. De même $B' \cup S(G) \cup H$ est un EDL de G . Alors $\gamma_L(G) \leq \min(|A' \cup S(G) \cup H|, |B' \cup S(G) \cup H|)$, d'où $\gamma_L(G) \leq \frac{n - l(G) - s(G)}{2} + s(G) + l(G) - s(G) = \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$. \square

Théorème 3.24. *Si G est un graphe cactus sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{(n + l(G) - s(G) + n_0(G))}{2}, \text{ où } n_0(G) \text{ est le nombre de cycles } C_4.$$

Preuve. Si G est un arbre alors d'après le Théorème 3.12 le résultat est vrai. Si G est un unicyclic d'ordre $n \geq 4$ ne contenant pas de cycles C_4 , alors d'après le Lemme 3.23 on a $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$. Si G contient un cycle C_4 , alors d'après le Théorème 3.21 on a $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G) + 1}{2}$. Donc pour les cas précédents le résultat est vrai. On suppose que G est un cactus contenant au moins deux cycles, et ne vérifie pas le théorème. On suppose de plus que G a le moins d'arêtes possible.

Si G contient des cycles C_4 , alors soit C un cycle C_4 de G . Par conséquent il existe un sommet $v \in C$, tel que $d(v) \geq 3$ (car autrement $C = C_4$). Soit u un voisin de v sur C . On considère le graphe G' obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv . Alors tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' est un EDL de G . Donc $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G')$. Etant donné que G vérifie le résultat on a $\gamma_L(G') \leq \frac{n' + l(G') - s(G') + n_0(G')}{2}$. Ainsi puisque

$n' = n$, $(s(G') = s(G) + 1, l(G') = l(G) + 1)$ ou bien $(s(G') = s(G), l(G') \leq l(G) + 1)$, et $n_0(G') = n_0(G) - 1$, on obtient que $\gamma_L(G) \leq \frac{(n + l(G) - s(G) + n_0(G))}{2}$, d'où la contradiction avec l'hypothèse. On déduit que G ne contient pas de cycle C_4 , c-a-d $n_0(G) = 0$.

Supposons que G contient un support fort, soit u un tel support et u' sa feuille. On suppose que u appartient à un cycle de G . Posons $G' = G - \{u'\}$. Alors tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' peut être étendu à un EDL de G en ajoutant u' . Donc $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G') + 1$. Comme G' vérifie le résultat alors $\gamma_L(G) \leq \frac{n' + l(G') - s(G')}{2} + 1$. Sachant que $n' = n - 1$, $s(G') = s(G)$, $l(G') = l(G) - 1$. Donc $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction.

On déduit que G ne contient pas de support fort.

Si u est un support de G situé à une distance maximum des cycles de G . Soient v, u les parents de u, u' respectivement. On distingue les cas suivants:

Cas 1. Si $d(v) \geq 3$ alors posons $G' = G - \{u', u\}$. D'où tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' peut être étendu à un EDL de G en ajoutant u . Alors $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G') + 1$. Sachant que $n' = n - 2$, $s(G') = s(G) - 1$, $l(G') = l(G) - 1$, on obtient $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction.

Cas 2. $d(v) = 2$. Donc v n'est dans aucun cycle. Soit w le parent de v . Si $d(w) \geq 3$ alors on pose $G' = G - \{u', u, v\}$. Il est facile de voir que $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G') + 1 \leq \frac{n' + l(G') - s(G')}{2} + 1$. Sachant que $n' = n - 3$, $s(G') = s(G) - 1$, $l(G') = l(G) - 1$, donc $\gamma_L(G) < \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction. Si $d(w) = 2$ alors on pose $G' = G - \{u', u\}$. Par conséquent tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' peut être étendu à un EDL de G en ajoutant u . D'où $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G') + 1$. Comme G' vérifie le résultat, et $n' = n - 2$, $s(G') = s(G)$, $l(G') = l(G)$, ainsi $\gamma_L(G) < \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction.

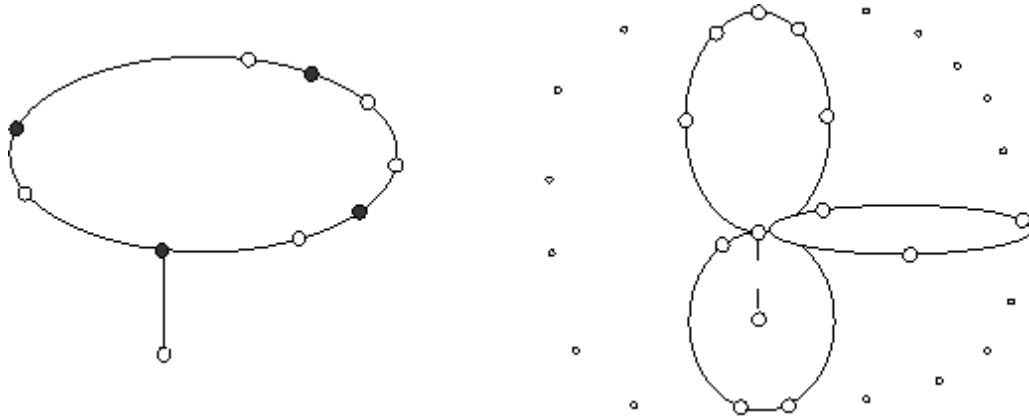
On déduit que tous les supports appartiennent aux cycles de G .

Soient u et v deux sommets de degré ≥ 3 , séparés par une chaîne P_{xy} d'extrémités x et y dont les sommets sont tous de degré deux. Les sommets u, v peuvent appartenir à des cycles ou non. Si $|P_{xy}| = 0$ alors u et v sont adjacents. Dans ce cas soit G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv . Donc tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' est un EDL de G , d'où $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G')$. Sachant que G' vérifie le résultat, et $n' = n$, $s(G') = s(G)$, $l(G') = l(G)$, on conclut que $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction. On suppose que P_{xy} est d'ordre au moins un. Si $|P_{xy}| \geq 2$, alors on pose $G' = G -$

P_{xy} . Si S' et S'' sont un $\gamma_L(G')$ -ensemble et un $\gamma_L(P_{xy})$ -ensemble, respectivement alors $S' \cup S''$ est un EDL de G , d'où $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G') + \gamma_L(P_{xy})$. Comme $\gamma_L(P_{xy}) \leq \frac{|P_{xy}|}{2}$ d'après le Théorème 3.12, et sachant que $n' = n - |P_{xy}|$, $s(G') = s(G)$, $l(G') = l(G)$. Ainsi on obtient facilement que $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction. Si $|P_{xy}| = 1$ alors considérons le graphe G' obtenu par G en supprimant l'arête xu . Alors $n' = n$ et ($s(G') = s(G) + 1$ et $l(G') = l(G) + 1$) ou bien ($s(G') = s(G)$ et $l(G') = l(G) + 1$).

Dans la première situation tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' est un EDL de G . Une simple vérification suffit de montrer que le résultat est vrai. Pour la deuxième situation on suppose de plus qu'en supprimant par analogie l'arête xv on a aussi $s(G') = s(G)$ et $l(G') = l(G) + 1$, ce qui signifie que u et v sont des supports dans G . Dans ce cas soit $G' = G - \{x\}$, puisqu'il existe un $\gamma_L(G')$ -ensemble S contenant u, v alors S reste un EDL de G . D'où on vérifie facilement que le résultat est vrai.

Par conséquent G ne contient pas de sommets u, v de degré 3 séparés par une chaîne dont les sommets sont tous de degré deux. On déduit que G est isomorphe à G_1 ou G_2 (Voir Figure 3.3).

Figure 3.3 : (a) Graphe G_1 (b) Graphe G_2

Si $G \cong G_1$ alors G est un unicycle. D'après le Lemme 3.23 le résultat est vrai. Supposons que $G \cong G_2$, si G contient un cycle d'ordre ≥ 5 , alors soit uv une arête de ce

cycle, dont la suppression crée 2 feuilles et 2 supports. On pose $G' = G - uv$. Alors tout $\gamma_L(G')$ -ensemble de G' est un EDL de G , d'où $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G')$. Comme G' vérifie le résultat, il s'ensuit que $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$, contradiction, d'où on obtient le résultat.

Donc tous les cycles de G sont d'ordre trois. Alors G est isomorphe à H_1 ou H_2 (Voir Figure 3.4). Soit K l'ensemble des cycles C_3 de G . Si $G \cong H_1$ alors $n = 2|K| + 1$ et $\gamma_L(G) = |K|$. Si $G \cong H_2$ alors $n = 2|K| + 2$ et $\gamma_L(G) = |K| + 1$.



Figure 3.4 : (a) Graphe H_1 (b) Graphe H_2

Dans les deux cas on obtient $\gamma_L(G) \leq \frac{n + l(G) - s(G)}{2}$, contradiction avec l'hypothèse. Ceci achève la preuve. \square

3.3 Relation entre γ_L et i

En général les paramètres $\gamma_L(G)$ et $i(G)$ sont incomparables. La comparaison entre ces deux paramètres a été posée en premier lieu par Slater [16]. Notons que pour les graphes sans griffes, la relation $i(G) \leq \gamma_L(G)$ est vérifiée, car on a $i(G) = \gamma(G)$. De plus il existe d'autres graphes satisfaisant l'inégalité $i(G) \leq \gamma_L(G)$, comme exemple illustratif, on cite les deux graphes K_n et $K_{n,n}$. On a $i(K_n) = 1 < n - 1 = \gamma_L(K_n)$, pour $n \geq 2$. De même pour $i(K_{n,n}) = n < 2n - 2 = \gamma_L(K_{n,n})$, pour $n \geq 3$. Dans la Figure 3.5, on voit facilement que l'ensemble $S = \{a\}$ est un $i(K_5)$ -ensemble, et que $D = \{a, b, c, d\}$ est un $\gamma_L(K_5)$ -ensemble, d'où $i(K_5) = 1 < 4 = \gamma_L(K_5)$.

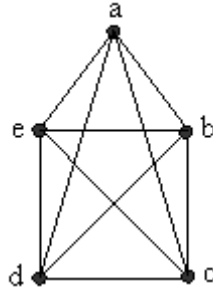


Figure 3.5 : Le graphe complet K_5 , où $i(K_5) = 1$, et $\gamma_L(K_5) = 4$.

D'autre part soient G_j un graphe avec $|V(G_j)| = j + 2^j - 1$, et $S = \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$, tel que $v_r v_t \in E(G_j)$, pour $1 \leq r < t \leq j$. Chacun des $2^j - 1$ sous-ensembles non vides W de S , ajouter un sommet v_W à $V(G_j)$, avec $N(v_W) = W$. Il est facile de voir que S est un $\gamma_L(G_j)$ -ensemble, tel que $\gamma_L(G_j) = j$. L'unique ensemble indépendant maximal U vérifiant $U \cap S = \emptyset$ est $U = V(G_j) - S$, de cardinalité $2^j - 1$. Un ensemble indépendant maximal contenant exactement un sommet de S est de cardinalité 2^{j-1} . Ainsi $\gamma_L(G_j) = j < 2^{j-1} = i(G_j)$, pour $j \geq 3$. On considère le graphe G_3 de la Figure 3.6. Pour $j = 3$ on a $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, il est clair que S est un $\gamma_L(G_3)$ -ensemble, $U = \{v_{W_1}, v_{W_2}, v_{W_3}, v_{W_4}, v_{W_5}, v_{W_6}, v_{W_7}\}$, et l'ensemble indépendant maximal X contenant v_1 est $\{v_1, v_{W_3}, v_{W_4}, v_{W_5}\}$, $|X| = i(G_3) = 4 > 3 = \gamma_L(G_3)$.

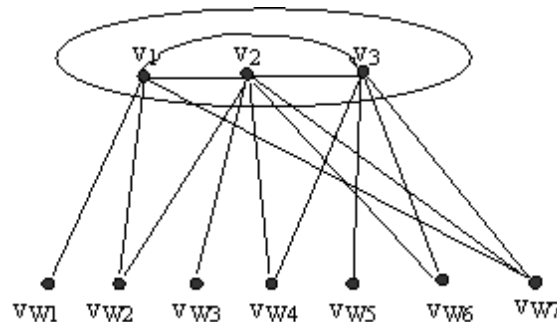


Figure 3.6 : Le graphe G_3 , dont $\gamma_L(G_3) < i(G_3)$.

Dans ce qui suit, on donne un théorème qui montre que le nombre de domination localisatrice est borné inférieurement par le nombre de domination stable pour la classe des arbres.

Théorème 3.25 (Chellali, Mimouni et Slater [32] 2008). *Si T est un arbre, alors*

$$\gamma_L(T) \geq i(T).$$

Preuve. On procède par induction sur l'ordre de T . Si $\text{diam}(T) \in \{0, 1, 2, 3\}$, alors le résultat est vrai. Supposons que tout arbre T' d'ordre $n' < n$ satisfait $\gamma_L(T') \geq i(T')$. Soient T un arbre d'ordre n et de diamètre au moins quatre, et D un $\gamma_L(T)$ -ensemble contenant tous les sommets supports. Si un sommet support quelconque, disons x de T est adjacent à deux feuilles ou plus. Alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant une feuille x' adjacente à x , et qui appartient à D . Par conséquent $D - \{x'\}$ est un EDL de T' , d'où $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$. Si S est un $i(T')$ -ensemble quelconque, alors ou bien S ou bien $S \cup \{x'\}$ est un ensemble indépendant maximal de T , d'où $i(T) \leq i(T') + 1$. Par induction sur T' , on retrouve le résultat voulu. Ainsi, supposons que tout sommet support de T est adjacent à une seule feuille.

A présent enracinons l'arbre T en un sommet r tel que r est une feuille d'éccentricité maximum $\text{diam}(T)$. Soit u le sommet situé à une distance $\text{diam}(T) - 1$ de r , sur la plus longue chaîne commençant par r . Soit v le parent de u , et u' l'unique feuille de u .

Si v est un support, alors posons $T' = T - \{u, u'\}$. Par conséquent, $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ et $i(T) \leq i(T') + 1$. Par induction sur T' , on a $\gamma_L(T) \geq i(T)$. Donc v n'est pas un support, donc T_v est une étoile subdivisée. Comme D contient les sommets supports de T_v , alors $v \notin D$ (autrement on le remplace par son parent). On pose $T' = T - T_v$, il s'ensuit que $D \cap V(T')$ est un EDL de T' , d'où $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - d(v) + 1$. De plus, tout $i(T')$ -ensemble union l'ensemble des sommets supports de T_v est un ensemble indépendant maximal de T , ceci implique que $i(T) \leq i(T') + d(v) - 1$. Par induction sur T' , on obtient $\gamma_L(T) \geq i(T)$. \square

D'après le Corollaire 3.5 et le Théorème 3.25 on obtient la chaîne d'inégalité suivante relativement aux paramètres de domination localisatrice ainsi que ceux de la stabilité pour tout arbre T :

$$i(T) \leq \gamma_L(T) \leq \beta_0(T) \leq \Gamma_L(T).$$

L'égalité est atteinte le long de cette chaîne si et seulement si $T = K_1$ ou T est une couronne d'un arbre T' . Cependant pour la classe des arbres T_t définis ci-dessus, on a $\Gamma_L(T_t) - i(T_t) = 4t - 2t = 2t$.

Par le Théorème 3.25, on a montré que le nombre de domination localisatrice est borné inférieurement par le nombre de domination stable pour la classe des arbres. Par le théorème suivant on prouvera que c'est vrai aussi pour les unicycles.

Théorème 3.26. *Si $G = (V, E)$ est un unicycle connexe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$i(G) \leq \gamma_L(G).$$

Preuve. Si G est un arbre alors le résultat est vrai d'après le Théorème 3.25. Si G est un cycle C_n alors $i(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, et d'après Slater [3] on a $\gamma_L(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, ce qui entraîne que $i(C_n) \leq \gamma_L(C_n)$, d'où le résultat est aussi vrai. Donc on supposera que G est différent d'un cycle. Soit C l'unique cycle de G . On suppose que parmi tous les unicycles ne vérifiant pas le résultat, G est celui qui contient le moins de sommets possible. Soit D un $\gamma_L(G)$ -ensemble de G contenant tous les sommets supports. Il est clair qu'un tel ensemble existe.

Supposons que G contient un support fort. Soit u un tel sommet et u' une feuille de u telle que $u' \in D$. Posons $G' = G - \{u'\}$. Alors $D - \{u'\}$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. D'autre part tout $i(G')$ -ensemble de G' est ou bien un ensemble indépendant maximal de G ou bien peut être étendu à un ensemble indépendant maximal de G en lui ajoutant u' , ainsi $i(G) \leq i(G') + 1$. Par hypothèse le graphe G' vérifie $i(G') \leq \gamma_L(G')$. Par conséquent on a $i(G) - 1 \leq i(G') \leq \gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$ et donc $i(G) \leq \gamma_L(G)$, contradiction avec notre hypothèse. On supposera dans ce qui suit que G ne contient pas de support fort.

Soit u un support de G n'appartenant pas à C . On supposera de plus que u est situé à une distance maximum de C . Soient alors w, v, u les parents de v, u, u' respectivement sur l'unique chaîne de u vers C . Notons que v peut être dans C et que w peut ne pas exister. Examinons les cas suivants:

Cas 1. $d(v) \geq 3$. Si v est un support, alors on pose $G' = G - \{u, u'\}$. Rappelons que $u \in D$ et donc $u' \notin D$. Dans ce cas $D - \{u\}$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$.

D'autre part tout $i(G')$ -ensemble de G' peut être étendu à un ensemble indépendant maximal de G en lui ajoutant u' , d'où $i(G) \leq i(G') + 1$. Par hypothèse G' vérifie $i(G') \leq \gamma_L(G')$ et donc on a $i(G) \leq \gamma_L(G)$, contradiction. Supposons maintenant que v n'est pas un support. A noter dans ce cas que tout descendant de v est un support. On considère deux situations. Si $v \notin D$ alors on pose $G' = G - G_v$, sinon (i.e. $v \in D$) alors on pose $G' = G - G_v \cup \{v\}$, où G_v est le graphe induit par le voisinage fermé de ses descendants. Soit K l'ensemble des supports qui sont fils de v . Donc $u \in K$ et $K \subset D$. Dans les deux situations $D - K$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - |K|$. D'autre part tout $i(G')$ -ensemble de G' peut être étendu à un ensemble indépendant maximal de G en ajoutant l'ensemble K , d'où $i(G) \leq i(G') + |K|$. On obtient par la suite $i(G) \leq \gamma_L(G)$, contradiction.

Cas 2. $d(v) = 2$. On pose $G' = G - \{u', u, v\}$. Alors $u \in D$ et $v \notin D$ (sinon le remplacer par w), d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. Aussi il est facile de voir que $i(G) \leq i(G') + 1$. Il s'ensuit que $i(G) \leq \gamma_L(G)$, d'où la contradiction.

Par conséquent on supposera que tous les supports de G sont sur le cycle C . Soit u un sommet appartenant à $D \cap C$. Notons que u peut être un support ou non. Dans le cas où u est un support, soit u' sa feuille.

Si les deux voisins de u sur C sont dans D , alors posons $G' = G - \{u, u'\}$, (si u' existe). Alors $D - \{u\}$ est un EDL de G' , et on a $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. On peut voir aussi que $i(G) \leq i(G') + 1$. Le graphe G' vérifie $i(G') \leq \gamma_L(G')$. Par conséquent on a $i(G) - 1 \leq i(G') \leq \gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$ et donc $i(G) \leq \gamma_L(G)$, d'où la contradiction avec notre hypothèse.

Maintenant si les deux voisins de u sur C , disons v, w , n'appartiennent pas à D , alors soit $G' = G - \{u', u, v, w\}$, (si u' existe). Alors $D - \{u\}$ est un EDL de G' , d'où $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G) - 1$. Il est clair que tout $i(G')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble indépendant maximal de G en lui ajoutant le sommet u , d'où $i(G) \leq i(G') + 1$. Il s'ensuit que $i(G) \leq \gamma_L(G)$, d'où la contradiction.

Il nous reste à examiner le cas où un seul voisin de u sur C est dans D . D'autre part, d'après le choix fait sur D au début de la preuve, tous les sommets de D sont sur C . Ainsi chaque composante connexe du sous graphe induit par les sommets de $D \cap C$ est une

chaîne P_2 . Donc $|D \cap C| = 2k$, pour un certain entier $k \geq 1$. Il est à remarquer aussi que deux supports consécutifs sur C sont à distance au plus trois. Supposons que C contient deux sommets consécutifs $x, y \notin D$. Soient x' et y' leurs voisins respectifs sur C . Alors x' et y' ne sont des supports sinon on a le même voisinage dans D de la feuille de x' et du sommet x . Considérons le graphe G' obtenu de G en supprimant l'arête xy . Alors D reste un EDL de G' et on a $\gamma_L(G') \leq \gamma_L(G)$. Maintenant soit S est un $i(G')$ -ensemble. Si au plus l'un de x, y est dans S alors S est un ensemble indépendant maximal de G . Si $x, y \in S$ alors $S - \{x\}$ ou bien $\{x'\} \cup S - \{x\}$ est un ensemble indépendant maximal de G . Dans les deux cas on a $i(G) \leq i(G')$. Puisque G' est un arbre, on a $i(G') \leq \gamma_L(G')$ et par suite $i(G) \leq \gamma_L(G)$, d'où la contradiction. Donc en excluant ce cas, le cycle doit contenir $|V(C)| - 2k$ sommets n'appartenant pas à D . Choisissons un ensemble 2-stable maximum B parmi les sommets de $D \cap C$. Donc $|B| = k$. Alors B domine tous les sommets sur le cycle. S'il existe des sommets de G non dominés par B alors ces sommets sont les feuilles des sommets de $D \cap C$ non choisis dans B . Le nombre de telles feuilles est au plus k . Donc B peut être étendu à un ensemble indépendant maximal B' de G qui soit de cardinal au plus $2k$. Par conséquent $|D \cap C| = 2k = \gamma_L(G) \geq |B'| \geq i(G)$, d'où la contradiction. Ceci achève la preuve. \square

CHAPITRE 4

LA DOMINATION LOCALISATRICE TOTALE

Ce chapitre est consacré à l'étude du nombre de domination localisatrice total γ_t^L .
Commençons par rappeler la définition suivante.

Définition 4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés. Un ensemble S de sommets de G est un dominant total, si tout sommet de V est adjacent à un sommet dans S . Un dominant total S est dit localisateur (EDLT), si pour toute paire distincte de sommets u, v de $V - S$, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. Le nombre de domination localisatrice totale, noté $\gamma_t^L(G)$ désigne le cardinal minimum d'un EDLT de G . Un EDLT de G de cardinal $\gamma_t^L(G)$ est un $\gamma_t^L(G)$ -ensemble de G .

4.1 Minimalité d'un dominant localisateur total

Par le théorème suivant on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un EDLT d'un graphe G sans sommets isolés soit minimal.

Théorème 4.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et S un dominant localisateur total, alors S est minimal si et seulement si tout sommet v de S vérifie l'une des conditions suivantes:

1. Il existe un sommet u de $V - S$ tel que $N(u) \cap S = \{v\}$.
2. $G[S - \{v\}]$ contient un sommet isolé.
3. Il existe deux sommets $u, w \in (V - S) \cup \{v\}$, tels que $N(u) \cap (S - \{v\}) = N(w) \cap (S - \{v\})$.

Preuve. On montre d'abord la condition nécessaire

Supposons que S est un EDLT minimal. Alors pour tout $v \in S$, $S - \{v\}$ n'est pas un dominant localisateur total. Donc ou bien $S - \{v\}$ n'est pas un dominant total ou bien $S - \{v\}$ n'est pas un localisateur. Si $S - \{v\}$ n'est pas un dominant, alors puisque v a un voisin dans S , v est l'unique voisin d'un sommet $u \in V - S$, c'est à dire que $N(u) \cap S = \{v\}$, d'où la condition 1. Donc on suppose que $S - \{v\}$ est un dominant. Si $S - \{v\}$ n'est pas total alors le sous graphe $G[S - \{v\}]$ contient un sommet isolé, d'où la condition 2. Donc $S - \{v\}$ est un dominant total. Maintenant si $S - \{v\}$ n'est pas un localisateur, alors il existe deux sommets un sommet $u, w \in (V - S) \cup \{v\}$, tels que $N(u) \cap (S - \{v\}) = N(w) \cap (S - \{v\})$. D'où la condition 3.

Inversement, supposons que S est un dominant localisateur total où tout sommet de S vérifie l'une des trois conditions. Supposons maintenant que S n'est pas minimal. Alors il existe un sommet $v \in S$ tel que $S - \{v\}$ est un dominant localisateur total de G . Donc $G[S - \{v\}]$ est sans sommets isolés et tout sommet de $V - S$ a un voisin autre que v dans $S - \{v\}$, et donc les conditions 1 et 2 ne sont pas vérifiées pour le sommet v . D'autre part puisque $S - \{v\}$ est un localisateur alors pour tout couple de sommets $u, w \in (V - S) \cup \{v\}$ on a $N(u) \cap (S - \{v\}) \neq N(w) \cap (S - \{v\})$, et donc la condition 3 n'est pas vérifiée aussi pour le sommet v , d'où la contradiction. On conclut donc que S est minimal. \square

4.2 Nombre de domination localisatrice total

4.2.1 Relation entre γ_t^L et $\gamma_{\times 2}$

La proposition suivante établit une relation entre le nombre de domination localisatrice total et le nombre de domination double, dans le cas général.

Proposition 4.3. *Si G est un graphe non trivial, et sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma_t^L(G). \text{ Cette borne est atteinte.}$$

Preuve. Soit D un $\gamma_t^L(G)$ -ensemble, et $A \subseteq V - D$ l'ensemble des sommets ayant exactement un seul voisin dans D . Etant donné que $G[D]$ est sans sommets isolés, alors l'ensemble $D \cup A$ est un dominant double de G . Donc $\gamma_{\times 2}(G) \leq |D \cup A| \leq 2|D| = 2\gamma_t^L(G)$.

La borne est atteinte pour les couronnes d'un graphe quelconque non trivial. \square

Le Théorème suivant est donné par Blidia et al. dans [37].

Théorème 4.4 (Blidia et al. [37] 2006). *Si T est un arbre non trivial, alors $\gamma_{\times 2}(T) \geq 2i(T)$. La borne est atteinte si et seulement si T admet deux $i(T)$ -ensembles disjoints.*

A noter que les arbres ayant deux $i(T)$ -ensembles disjoints ont été caractérisés par Haynes et Henning dans [38].

Comme conséquence immédiate du Théorème 4.4 et de la Proposition 4.3 on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.5. *Si T est un arbre non trivial tel que $\gamma_t^L(T) = i(T)$, alors T admet deux $i(T)$ -ensembles disjoints. La réciproque est fausse.*

Preuve. D'après le Théorème 4.4, et la Proposition 4.3 on a $2i(T) \leq \gamma_{\times 2}(T) \leq 2\gamma_t^L(T)$. Etant donné que $\gamma_t^L(T) = i(T)$, alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2i(T)$. Suite au Théorème 4.4, on conclut que T admet deux $i(T)$ -ensembles disjoints. \square

La réciproque est fausse, il suffit de considérer l'arbre T de la Figure 4.1. Il est facile de vérifier que T admet deux $i(T)$ -ensembles disjoints, $S_1 = \{a, e, f\}$ et $S_2 = \{b, c, d\}$. On remarque que l'ensemble $D = \{a, c, b, e\}$ est un EDLT minimum de T . On déduit que $\gamma_t^L(T) = 4 \neq 3 = i(T)$.

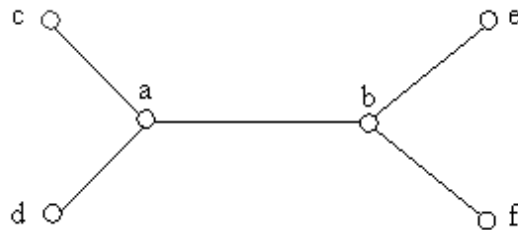


Figure 4.1 : Un arbre T admettant deux $i(T)$ -ensembles disjoints, et $i(T) \neq \gamma_t^L(T)$

4.2.2 Bornes sur γ_t^L pour les arbres

On établira dans la proposition qui suit une borne inférieure sur le nombre domination localisatrice total en fonction de γ , $l(T)$, et $s(T)$ d'un arbre quelconque T .

Proposition 4.6. *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_t^L(T) \geq \gamma(T) + l(T) - s(T)$. Cette borne est atteinte.*

Preuve. Soit D un $\gamma_t^L(T)$ -ensemble. Alors D contient d'un côté tous les supports de T , et d'un autre côté toutes les feuilles de chaque support sauf peut être une.

Donc $D - (L(T) \cap D)$ est un dominant, d'où $\gamma(T) \leq \gamma_t^L(T) - |L(T) \cap D| \leq \gamma_t^L(T) - |L(T)| + |S(T)|$. Il s'ensuit que $\gamma_t^L(T) \geq \gamma(T) + l(T) - s(T)$.

La borne est atteinte pour les étoiles doubles.

□

Par le théorème suivant, on donne une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice total pour la classe des arbres.

Théorème 4.7. *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_t^L(T) \leq \frac{n + l(T)}{2}$. La borne est atteinte.*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre n de T . Il est facile de vérifier que le résultat est vrai si $\text{diam}(T) \in \{1, 2, 3\}$. Supposons pour tout arbre T' d'ordre $2 \leq n' < n$, satisfait $\gamma_t^L(T') \leq \frac{n' + l(T')}{2}$. Soit T un arbre d'ordre n , et de diamètre au moins quatre.

Si u est un support fort de T , alors soit u' sa feuille. Posons $T' = T - \{u'\}$. Puisque tout $\gamma_t^L(T')$ -ensemble peut être étendu à un EDLT de T en ajoutant u' , $\gamma_t^L(T) \leq \gamma_t^L(T') + 1$. En appliquant l'hypothèse d'induction sur T' on a: $\gamma_t^L(T') \leq \frac{n' + l(T')}{2}$. Sachant que $n' = n - 1$, $l(T') = l(T) - 1$ alors $\gamma_t^L(T) \leq \frac{n + l(T)}{2}$. Ainsi tout support de T n'est pas fort.

Enracinons maintenant l'arbre T en un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Soient u un support de T situé à distance $\text{diam}(T) - 1$ de r sur la plus longue chaîne commençant par r , et w, v, u les parents de v, u, u' respectivement. On examine les cas suivants.

Cas 1. Si $d(v) \geq 3$ alors on pose $T' = T - \{u', u\}$. Puisqu'il existe un $\gamma_t^L(T')$ -ensemble contenant v , un tel ensemble sera étendu à un EDLT de T en ajoutant u , d'où $\gamma_t^L(T) \leq \gamma_t^L(T') + 1$. Par induction sur T' et puisque $n' = n - 2$, $l(T') = l(T) - 1$ on obtient $\gamma_t^L(T) \leq \frac{n + l(T) - 1}{2} < \frac{n + l(T)}{2}$.

Cas 2. $d(v) = 2$. Si $d(w) \geq 3$ alors posons $T' = T - \{u', u, v\}$. Puisque tout $\gamma_t^L(T')$ -ensemble peut être étendu à un EDLT de T en ajoutant u et v , d'où $\gamma_t^L(T) \leq \gamma_t^L(T') + 2$. Par induction sur T' et puisque $n' = n - 3$, $l(T') = l(T) - 1$ on a $\gamma_t^L(T) \leq \frac{n + l(T)}{2}$. Si $d(w) = 2$ alors on pose $T' = T - \{u', u, v, w\}$. Si T' est d'ordre un alors $T = P_5$ et le résultat est vrai. Donc on supposera que T' est non trivial. Il est clair que $\gamma_t^L(T) \leq \gamma_t^L(T') + 2$. En appliquant l'induction sur T' et sachant que $n' = n - 4$, $l(T') \leq l(T)$, ainsi on obtient $\gamma_t^L(T) \leq \frac{n + l(T)}{2}$. Ceci achève la preuve.

La borne est atteinte pour les 2-couronnes des arbres non triviaux. \square

4.2.3 Relation entre γ_t^L et β_0

D'après le chapitre 3, on rappelle qu'il a été établi que si G est un arbre ou un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors $\beta_0(G) \geq \gamma_L(G)$. Dans le même contexte, on peut s'interroger si le résultat reste vrai pour le paramètre γ_t^L , en particulier pour les arbres. On a constaté qu'en général ces deux paramètres sont incomparables même dans la classe des arbres.

Pour la 2-couronne d'une chaîne P_{2n} ($n \geq 1$) de la Figure 4.2. L'ensemble des sommets noirs est un EDLT minimum alors $\gamma_t^L(T) = 4n > 3n = \beta_0(T)$.

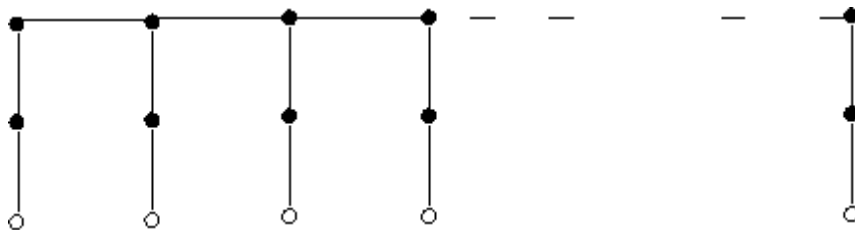


Figure 4.2 : La 2-couronne de P_{2n} vérifie $\gamma_t^L(T) > \beta_0(T)$

Dans la Figure 4.3, l'arbre T_k est formé à partir de $k \geq 2$ copies d'étoiles $K_{1,p}$ ($p \geq 2$) en joignant chaque support de $K_{1,p}$ au support de l'étoile $K_{1,p}$ suivante, puis on subdivise chaque nouvelle arête une seule fois. On obtient $\gamma_t^L(T_k) = l(T_k) < l(T_k) + k - 1 = \beta_0(T_k)$ car $k \geq 2$.



Figure 4.3 : L'arbre T_k vérifiant $\gamma_t^L(T_k) < \beta_0(T_k)$

On donne ici quelques résultats relatants β_0 et γ_t^L dans la classe des arbres.

Le corollaire suivant est une conséquence du Théorème 4.7.

Corollaire 4.8. *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_t^L(T) \leq \beta_0(T) + \frac{s(T)}{2}$. La borne est atteinte.*

Preuve. D'après le Théorème 3.9 on a $\beta_0(T) \geq \frac{n + l(T) - s(T)}{2}$, suite au Théorème 4.7 on a $\gamma_t^L(T) \leq \frac{n + l(T)}{2} = \frac{n + l(T) - s(T) + s(T)}{2} = \frac{n + l(T) - s(T)}{2} + \frac{s(T)}{2} \leq \beta_0(T) + \frac{s(T)}{2}$.

La borne est atteinte pour P_6, P_{10}, P_{14} . □

Théorème 4.9. *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_t^L(T) \geq \frac{2}{3}[\beta_0(T) + 1]$. Cette borne est atteinte.*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre n de T . Si $\text{diam}(T) = 1$ alors $T = P_2$, donc $\gamma_t^L(P_2) = 2 > \frac{2}{3}[\beta_0(P_2) + 1] = \frac{4}{3}$. Si $\text{diam}(T) = 2$, alors $T = K_{1,l}$ ($l \geq 2$), ainsi $\gamma_t^L(T) = l(T) > \frac{2}{3}(l(T) + 1)$. Si $\text{diam}(T) = 3$, alors $T = S_{p,q}$ ($p \geq 1, q \geq 1$), donc $\gamma_t^L(S_{p,q}) = p + q > \frac{2}{3}[\beta_0(S_{p,q}) + 1] = \frac{2}{3}(p + q + 1)$, d'où le résultat est vrai dans ces cas. Supposons que tout arbre T' d'ordre $2 \leq n' < n$ satisfait $\gamma_t^L(T') \geq \frac{2}{3}[\beta_0(T') + 1]$. Soient

T un arbre d'ordre n et de diamètre au moins quatre, et D un $\gamma_t^L(T)$ -ensemble contenant le moins de feuilles possible.

Si u est un support fort de T tel que $|L_u| \geq 3$, alors posons $T' = T - \{u'\}$, où u' est une feuille de u appartenant à D . Par conséquent $D - \{u'\}$ est un EDLT de T' , d'où $\gamma_t^L(T') \leq \gamma_t^L(T) - 1$. D'autre part il existe un $\beta_0(T)$ -ensemble de T qui contient toutes les feuilles de T , alors $\beta_0(T') \geq \beta_0(T) - 1$. En appliquant l'hypothèse d'induction sur T' , on obtient $\gamma_t^L(T) > \frac{2}{3} [\beta_0(T) + 1]$.

Donc tout support de T est adjacent à au plus deux feuilles.

A présent enracinons l'arbre T en un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Soient u un support de T situé à distance $\text{diam}(T) - 1$ de r , et w, v les parents de u , v respectivement. On examine les cas suivants:

Cas 1. $|L_u| = 2$.

Si $d(v) \geq 3$ et $v \in D$, alors posons $T' = T - \{u'\}$, où u' est une feuille de u , avec $u' \in D$. Donc $D - \{u'\}$ est un EDLT de T' , d'où $\gamma_t^L(T') \leq \gamma_t^L(T) - 1$. D'autre part il est facile de voir que $\beta_0(T') \geq \beta_0(T) - 1$. Par induction sur T' on obtient le résultat.

Si $d(v) \geq 3$ et $v \notin D$, alors v n'est pas un support. Donc tout fils de v est un support adjacent à deux feuilles, sinon d'après le choix de D , $v \in D$. Soit $p \geq 2$ le nombre de fils de v . Posons $T' = T - T_v$. Alors T' est non trivial car $\text{diam}(T) \geq 4$. Aussi $|D \cap T_v| = 2p$. L'ensemble $D \cap T'$ est un EDLT de T' , d'où $\gamma_t^L(T') \leq \gamma_t^L(T) - 2p$. D'autre part on $\beta_0(T') \geq \beta_0(T) - 2p - 1$, par induction sur T' on a $\gamma_t^L(T) \geq \gamma_t^L(T') + 2p \geq \frac{2}{3} [\beta_0(T') + 1] \geq \frac{2}{3} [\beta_0(T) - 2p] + 2p = \frac{2}{3} [\beta_0(T) + 1]$.

Si $d(v) = 2$ alors on a:

a) Si $v \in D$ alors posons $T' = T - \{u'\}$, où u' est une feuille de u appartenant à D .

D'où on obtient le résultat traité précédemment.

b) Si $v \notin D$ alors on pose $T' = T - T_v$. Il est clair que $D \cap T'$ est un EDLT de T' , d'où $\gamma_t^L(T') \leq \gamma_t^L(T) - 2$. D'autre part il existe un $\beta_0(T)$ -ensemble de T qui contient toutes les feuilles de T et le sommet v , alors $\beta_0(T') \geq \beta_0(T) - 3$. Par induction sur T' on obtient $\gamma_t^L(T) \geq \frac{2}{3} [\beta_0(T) + 1]$.

Cas 2. $|L_u| = 1$. On peut supposer que tout support dans T_v est adjacent à une seule feuille. Par conséquent, d'après le choix de D , $v \in D$.

Si $d(v) > 3$ ou bien ($d(v) = 3$ et v n'est pas un support), alors on pose $T' = T - \{u', u\}$. Donc $D - \{u\}$ est un EDLT de T' , d'où $\gamma_t^L(T') \leq \gamma_t^L(T) - 1$. De plus on a $\beta_0(T') \geq \beta_0(T) - 1$, par induction sur T' on obtient $\gamma_t^L(T) > \frac{2}{3}[\beta_0(T) + 1]$.

Si $d(v) = 3$ et v est un support, alors on distingue deux autres situations.

Si $w \in D$ alors on pose $T' = T - \{u', u\}$, et donc on vérifie facilement le résultat. Donc $w \notin D$, il est à remarquer que si $d(w) \geq 3$, alors puisque $w \notin D$ tout sous arbre enraciné vers un fils de w est un P_4 (isomorphe à T_v) ou bien un P_3 . Donc D contient tous les sommets de degré ≥ 2 de T_w sauf w . Soit p le nombre de fils de w , alors $p \geq 1$. On pose $T' = T - T_w$. T' peut être trivial, dans ce cas w est un support et donc $v \in D$. Donc T est non trivial. $|D \cap T_w| = 2p$ et $D \cap T'$ est un EDLT de T' , d'où $\gamma_t^L(T') \leq \gamma_t^L(T) - 2p$. D'autre part on a $\beta_0(T') \geq \beta_0(T) - 2p - 1$, par induction sur T' on obtient $\gamma_t^L(T) \geq \frac{2}{3}[\beta_0(T) - 2p] + 2p = \frac{2}{3}\beta_0(T) + \frac{2}{3}p \geq \frac{2}{3}[\beta_0(T) + 1]$ car $p \geq 1$. Ceci achève la preuve.

La borne est atteinte pour l'arbre T_k formé à partir de $k \geq 2$ copies de la chaîne P_3 , en reliant chaque support d'un P_3 au support du P_3 suivant puis on subdivise chaque nouvelle arête une seule fois. Puisque $\beta_0(T_k) = 2k + k - 1 = 3k - 1$ et $\gamma_t^L(T_k) = 2k$, ainsi on obtient $\frac{2}{3}[\beta_0(T_k) + 1] = 2k = \gamma_t^L(T_k)$. (Voir Figure 4.4).

□

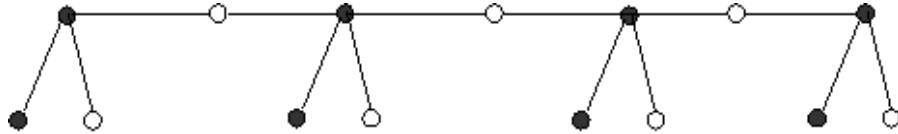


Figure 4.4 : L'arbre T_k vérifiant $\gamma_t^L(T_k) = \frac{2}{3}[\beta_0(T_k) + 1]$.

CONCLUSION

Les travaux qui ont été réalisés dans ce mémoire concernent la domination localisatrice (totale) dans les graphes.

En signalant à notre connaissance qu'aucune étude n'a été effectuée sur le paramètre de domination localisatrice supérieur, ce qui nous a incité à s'intéresser plus à ce paramètre, et à la domination localisatrice d'une façon générale.

Aussi, nous avons obtenu des résultats satisfaisants en collaboration avec Slater [32] qui ont été soumis depuis décembre 2008, et qui vont être présentés au colloque international COSI 2009 à Annaba en Mai prochain. Nous avons établi des bornes supérieures sur le paramètre de domination localisatrice supérieur, et caractériser les graphes extrémaux qui atteignent la borne. De plus, nous avons montré que tout ensemble indépendant maximum est un dominant localisateur minimal pour tout arbre ou pour tout graphe connexe de maille au moins cinq.

Par la suite nous avons présenté quelques résultats sur le paramètre de domination localisatrice, où nous avons étendu certaines bornes obtenues précédemment pour des classes de graphes telles que les bipartis, les unicycles et les graphes cactus. Nous avons donné une relation liant ce paramètre à d'autres paramètres de domination γ, ρ, γ_2 .

Enfin, nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour la minimalité d'un ensemble dominant localisateur total. Nous montrons pour la classe des arbres que le nombre de domination localisatrice total est au moins égal à $2/3$ du nombre de stabilité.

L'étude faite sur le nombre de domination localisatrice supérieur, plus les résultats obtenus sur la domination localisatrice totale ont ouvert la voie à plusieurs problèmes qui se situent dans le prolongement de ce mémoire, dont on citera :

- Caractérisations des graphes par exemple les arbres pour lesquels $\Gamma_L = \beta_0$.
- Caractériser les arbres tels que $\gamma_t^L = \gamma_L$.
- Caractériser les arbres tels que $\gamma_t^L = i$

- Etendre les bornes obtenues à d'autres classes de graphes comme les d -réguliers et les sans griffes.

RÉFÉRENCES

- [1] P. J. Slater, Domination and location in acyclic graphs. *Networks* 17 (1987) 55–64.
- [2] T. W. Haynes, A. M. Henning et J. Howard, Locating and total dominating sets in trees. *Discrete Applied Mathematics*, 154 (2006) 1293–1300.
- [3] P. J. Slater, Dominating and reference sets in graphs. *J Mathematical and Physical Sciences* 22 (1988) 445–455.
- [4] C. Berge, Graphs et hypergraphes. 2ème edition. Dunod, Paris, 1973.
- [5] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Fundamentals of domination in Graphs. Marcel Dekker New York, 1998.
- [6] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Domination in Graphs. *Advanced Topics*, Marcel Dekker New York 1998.
- [7] S. T. Hedetniemi et R. C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 3–9.
- [8] C. F. De Jaenish, Applications de l’analyse mathématique au jeu d’échecs. Petrograd, 1862.
- [9] O. Ore, Theory of graphs. Amer Soc Coloq Pub 38 Providence R I, 1962.
- [10] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. *Networks*, 7 (1977) 247–261.
- [11] S. T. Hedetniemi et R. C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of parameters. *Discrete mathematics*, 86 (1990) 257–477.
- [12] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi et D .J .Miller, Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Cana. Math. Bull*, 21 (1978) 461–468.
- [13] E. J. Cockayne, R. M. Dawes et S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks*, 10 (1980) 211–219.

- [14] J. F. Fink et M. S. Jacobson, n -domination in graphs in Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer. *Y. Alavi and A.J. Schwenk (eds)*, (1985) 283–300 (Kalamazoo, MI 1984) Wiley.
- [15] F. Harary et T. W. Haynes, Double domination in graphs. *Ars Combin*, 55 (2000) 201–213.
- [16] P. J. Slater, Locating Dominating sets and locating-dominating sets. *Y. Alavi and A.J. Schwenk (eds)*, *Graph Theory, Combinatorics and Applications, proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of graphs*, (1995) 1073–1079. John Wiley & Sons, Inc.
- [17] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel et A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 39 (2007) 219–232.
- [18] A. Finbow et B. L. Hartnel, On locating dominating sets and well-covered graphs. *Congr. Numer*, 65 (1988) 191–200.
- [19] M. Blidia et R. Lounes, Vertices belonging to all or to no minimum locating dominating sets of trees and γ_L -excellent trees. *Opuscula Mathematica*, 29 (2009) 1.
- [20] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounes et F. Maffray, Trees with unique minimum locating dominating sets. Soumis.
- [21] M. Chellali et T. W. Haynes, Trees with unique minimum paired dominating sets. *Ars. Comb*, 73 (2004) 3–12.
- [22] M. Chellali et T. W. Haynes, A characterisation of trees with unique minimum double dominating sets. Soumis.
- [23] G. Gunter, H. Hartnell, L. R. Markus et D. Rall. Graphs with unique minimum dominating sets. *Congr. Numer*, 101 (1994) 55–63.
- [24] T. W. Haynes et A. M. Henning, Trees with unique minimum total dominating sets. *Discuss. Math. Graph Theory*, 22 (2002) 233–246.

- [25] M. Blidia, O. Favaron, et R. Lounes, Locating-domination, 2-domination and independence in trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 33 (2005) 317–327.
- [26] M. Blidia, M. Chellali, N. Meddah et O. Favaron, On k-independence in graphs with emphasis on trees. *Discrete Mathematics*, (2007) 307.
- [27] M. Chellali, Bounds on the 2-domination number in cactus graphs. *Opuscula Mathematica*, 26 (1) (2006) 5–12.
- [28] M. Blidia, M. Chellali, et O. Favaron, Independence and 2-domination in trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 33 (2005) 317–327.
- [29] N. J. Rad, Results on locating total domination in graphs. en préparation.
- [30] M. Chellali, On locating and differentiating-total domination in trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 28 (3) (2008) 383–392.
- [31] M. Chellali, et T. W. Haynes, A note on the total domination number of a tree. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58 (2006) 189–193.
- [32] M. Chellali, M. Mimouni, et P. Slater, On locating-domination in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, soumis.
- [33] M. Chellali, M. Mimouni et P. Slater, Sur la domination localisatrice dans les graphes. COSI'2009, soumis.
- [34] C. Payan et N. H. Xuong, Domination-balanced graphs. *J. Graph Theory*, 6 (1982) 23–32.
- [35] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch et J. Roberts, On graphs having domination number half their order. *Period. Math. Hungar*, 16 (1985) 287–293.
- [36] M. Farber. Domination, Independent domination and duality in strongly chordal graphs. *Disc. Appl. Math*, 7 (1984) 115–130.
- [37] M. Blidia, M. Chellali, T. W. Haynes et M. A. Henning, Independent and double domination in trees. *Utilitas Mathematica*, 70 (2006) 159–173.

- [38] T. W. Haynes et M. A. Henning, trees with two disjoint minimum independent dominating sets. *Discrete Mathematics*, 304 (2005) 69–78.